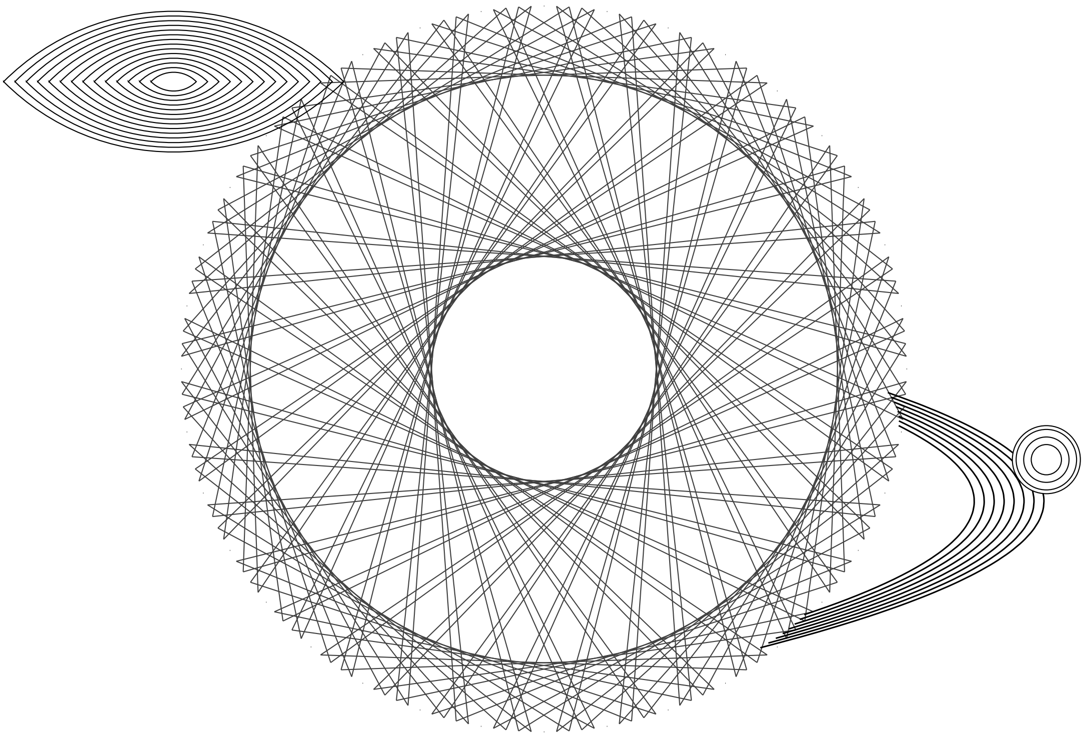
One More （数学 A）

書き込み式ワークブック

Onemath

One More 数学 A

書き込み式ワークブック



第 I 部

数学 A

目次

第 I 部　数学 A 4

1　場合の数 6
1.1　数え上げの原則 7
1.2　順列・組合せ 21
1.3　章末問題 1 50

2　確率 55
2.1　確率の基本性質 56
2.2　いろいろな確率 70
2.3　章末問題 2 92

3　図形の性質 97
3.1　平面図形の基本 98
3.2　円の性質と作図 112
3.3　空間図形 128
3.4　章末問題 3 136

4　数学と人間の活動 140
4.1　約数と倍数 141
4.2　ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法 160
4.3　章末問題 4 183

5　略解 188
5.1　問題，節末・章末問題の略解 188

第 II 部　解答 192

場合の数（解答） 193
数え上げの原則（解答） 193
順列・組合せ（解答） 202
章末問題 1（解答） 219

確率（解答） 222
確率の基本性質（解答） 222
いろいろな確率（解答） 230
章末問題 2（解答） 244

図形の性質（解答） **247**
平面図形の基本（解答） 247
円の性質と作図（解答） 257
空間図形（解答） 267
章末問題 3（解答） 272

数学と人間の活動（解答） **275**
約数と倍数（解答） 275
ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法（解答） 287
章末問題 4（解答） 301

問題一覧 **305**

問題一覧へのリンク

PDF 版からは各ページの右下のフッターにあるロゴに「問題一覧」へのリンク機能がついています．印刷時にページを参照するときや，タイトルから例題を探したいときに便利です．

ロゴにリンク機能あり

第 1 章　場合の数

1 章：場合の数（再生リスト）：

1　場合の数

1 節 数え上げの原則（pp.7-16），2 節 順列・組合せ（pp.21-45）

問題一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.1.1	★		
A1.1.2	★		
A1.1.3	★★★		
A1.1.4	★★★		
A1.1.5	★		
A1.1.6	★		
A1.1.7	★★		
A1.1.8	★★		
A1.1.9	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.2.1	★★		
A1.2.2	★★		
A1.2.3	★★		
A1.2.4	★★		
A1.2.5	★		
A1.2.6	★★		
A1.2.7	★★		
A1.2.8	★★★		
A1.2.9	★		
A1.2.10	★★		
A1.2.11	★		
A1.2.12	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.2.13	★★		
A1.2.14	★★		
A1.2.15	★		
A1.2.16	★★		
A1.2.17	★★		
A1.2.18	★★★		
A1.2.19	★★★		
A1.2.20	★★★		
A1.2.21	★★★		
A1.2.22	★★★★		
A1.2.23	★★★		
A1.2.24	★★★		

節末問題 1.1，節末問題 1.2

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.1.1	★★		
A1.1.2	★★★		
A1.1.3	★★★		
A1.1.4	★★		
A1.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.2.1	★★★		
A1.2.2	★★★		
A1.2.3	★★		
A1.2.4	★★★		
A1.2.5	★★★★		

章末問題 1

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.1	★★		
A1.2	★★★		
A1.3	★★★		
A1.4	★★★		
A1.5	★★★★		

チェック例

○･･･ 考え方を理解し，解くことができた．　△･･･ 理解が不十分である．　×･･･ 解くことができなかった．

1.1 数え上げの原則

問題 A1.1.1 ★ 解答 p.193

▶ 章末 A1.1 【集合の要素の個数 1】

100 から 200 までの整数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 5 でも 6 でも割り切れる数

(2) 5 または 6 で割り切れる数

(3) 5 で割り切れるが 6 で割り切れない数

(4) 5 でも 6 でも割り切れない数

問題 A1.1.2 ★ 解答 p.194

▶ 節末 A1.1.1 【集合の要素の個数 2】

200 人の学生を対象に数学の講座と理科の講座の参加状況を調査したところ，数学の講座に参加している学生は 120 人，両方の講座に参加している学生は 50 人，どちらの講座にも参加していない学生は 30 人であった．このとき，次の学生の人数を求めよ．

(1) 少なくとも 1 つの講座に参加している学生

(2) 理科の講座に参加している学生

問題 A1.1.3 ★★★ 解答 p.195

▶ 節末 A1.1.2 ▶ 節末 A1.1.3 【3 つの集合の要素の個数】

1 から 100 までの整数のうち，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の個数を求めよ．

問題 A1.1.4　★★★　解答 p.195　【集合の要素の個数の最大・最小】

集合 U とその部分集合 A, B に対して，$n(U)=200$, $n(A)=90$, $n(B)=120$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A\cap B)$ の最大値　　(2) $n(A\cap B)$ の最小値

問題 A1.1.5 ★ 解答 p.196　【樹形図による数え上げ】

大中小の 3 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 10 になる数の組は何通りあるか.

問題 A1.1.6 ★ 解答 p.196　▶ 章末 A1.2 【和の法則，積の法則】

(1) 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 5 の倍数となる場合は何通りあるか.

(2) 英語の参考書 a, b, c, d の 4 冊から 1 冊と，理科の参考書 x, y の 2 冊から 1 冊，合計 2 冊の参考書を選ぶ方法は何通りあるか.

問題 A1.1.7 ★★ 解答 p.197

▶ 節末 A1.1.4 【約数の個数・総和】

120 の正の約数の個数とその総和を求めよ.

問題 A1.1.8 ★★ 解答 p.197 【支払える金額の種類】

硬貨の枚数が次のようなとき，硬貨の一部または全部を使って，ちょうど支払える金額の種類は何通りあるか.

(1) 500 円硬貨が 1 枚，100 円硬貨が 2 枚，10 円硬貨が 3 枚

(2) 500 円硬貨が 2 枚，100 円硬貨が 5 枚，10 円硬貨が 4 枚

問題 A1.1.9 ★★ 解答 p.197　【出る目の総数を用いる場合の数】

大，中，小 3 個のさいころを投げるとき，目の積が 5 の倍数となる場合は何通りあるか.

節末問題 1.1　数え上げの原則

節末 A1.1.1 ★★　解答（節末）p.198

▶ 問題 A1.1.2

1 回目：
2 回目：

ある町の住民の一部にアンケートを実施したところ，スポーツが好きと答えた住民は全体の 65% ，読書が好きと答えた住民は全体の 55% ，両方とも好きではないと答えた住民は全体の 15% ，さらに両方とも好きと答えた住民は 42 人であった．アンケートに答えた住民の総数を求めよ．また，スポーツだけが好きと答えた住民の人数を求めよ．

節末 A1.1.2 ★★★　解答（節末）p.199

▶ 問題 A1.1.3

ある企業の社員 140 人を対象にアンケートを実施したところ，英語が得意な社員は 110 人，中国語が得意な社員は 100 人，スペイン語が得意な社員は 90 人であった．このとき，3 言語すべてが得意な社員の人数は，少なくとも何人であるか．

1 回目：
2 回目：

節末 A1.1.3 ★★★　解答（節末）p.200

▶ 問題 A1.1.3

50 人の社員に対し，異なる 3 種類の技術 A，B，C を習得しているか調査したところ，全員が A, B, C のうち少なくとも 1 つの技術を習得していた．また，A と B の両方，B と C の両方，A と C の両方を習得している社員の数はそれぞれ 10 人，8 人，12 人であった．さらに，A と B の少なくとも一方，B と C の少なくとも一方，A と C の少なくとも一方を習得している社員の数は，それぞれ 40 人，35 人，45 人であった．このとき，次の社員の人数を求めよ．

1 回目：
2 回目：

(1) 技術 A を習得している社員
(2) 技術 B を習得している社員
(3) 技術 C を習得している社員
(4) A，B，C の全ての技術を習得している社員

節末 A1.1.4 ★★　解答（節末）p.200

▶ 問題 A1.1.7

1 回目：
2 回目：

720 の正の約数の個数は何個あるか．そのうち，奇数の約数は何個あるか．

節末 A1.1.5 ★★★　解答（節末）p.201

赤玉 3 個，白玉 2 個，青玉 1 個，黄玉 1 個がある．この中から 4 個の玉を選ぶ方法は全部で何通りあるか．ただし，選ばれない色があってもよいものとする．

1 回目：
2 回目：

1.2　順列・組合せ

問題 A1.2.1　★★　解答 p.202　▶ 節末 A1.2.1【0 を含む数字の順列】

0，1，2，3，4 の 5 個の数字の中から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次のような数の個数を求めよ．

(1) すべての整数　　(2) 奇数　　(3) 3 の倍数

問題 A1.2.2 ★★ 解答 p.203

▶ 節末 A1.2.2 ▶ 節末 A1.2.4 【条件付きの順列 1】

男子 5 人，女子 2 人の合計 7 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 女子 2 人が隣り合う　　(2) 女子 2 人とも隣り合わない

問題 A1.2.3 ★★ 解答 p.203 ▶ 節末 A1.2.2 【条件付きの順列 2】

男性 4 人，女性 4 人の合計 8 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 並び方の総数

(2) 両端が男性である

(3) 少なくとも一方の端が女性である

問題 A1.2.4 ★★ 解答 p.204 ▶ 節末 A1.2.1【辞書式配列】

1，2，3，4，5 の 5 つの数字を並べた数列を，数値順に，1 番目を 12345，2 番目を 12354，$\cdots$ ，120 番目を 54321 と番号を付ける．

(1) 32415 は何番目にあるか．

(2) 74 番目の数列は何か．

問題 A1.2.5 ★ 解答 p.204　　【円順列・数珠順列】

A，B，C，D，E，F の文字が書かれた玉が 1 個ずつあるとき，次の問いに答えよ．

(1) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらの 6 個の玉から 4 個の玉を取り出して円形に並べる方法は何通りあるか．

(3) D，E が隣り合うように円形に並べる方法は何通りあるか．

(4) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

問題 A1.2.6　★★　解答 p.205　▶ 節末 A1.2.2【条件付きの円順列】

両親と息子 3 人，娘 3 人の合計 8 人が円卓に座るとき，次の問いに答えよ．

(1) 両親が正面に向かい合う座り方は何通りあるか．

(2) 男性と女性が交互になる座り方は何通りあるか．

問題 A1.2.7 ★★ 解答 p.205 【重複順列】

(1) 集合 $A=\{x,\ y,\ z,\ w\}$ の部分集合は全部で何個あるか.

(2) 0, 1, 2, 3, 4 の 5 個の数字の中から，重複を許して 3 個取って 1 列に並べるとき，3 桁の整数は何個できるか.

問題 A1.2.8 ★★★ 解答 p.206　【部屋割りの問題】

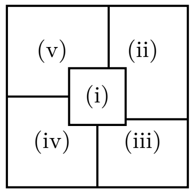
5 人が X，Y，Z の 3 つの部屋に入るとき，次の場合のような入り方は何通りあるか．

(1) 空き部屋があってもよい場合　　(2) 空き部屋がないようにする場合

問題 A1.2.9 ★ 解答 p.206

【平面の色分け】

右の図において，分けられた領域を互いに異なる 5 色すべてを用いて塗り分ける方法は何通りあるか.



問題 A1.2.10 ★★ 解答 p.206　▶ 節末 A1.2.3 【立体の色分け】

正四面体の各面を，互いに異なる 4 色すべてを用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，正四面体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

問題 A1.2.11 ★ 解答 p.207 【組合せ】

男子 4 人, 女子 3 人の合計 7 人のグループから 4 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか.

(1) 4 人の選び方

(2) 4 人のうち，男子の特定の 2 人 a, b と女子の 1 人 c を含む選び方

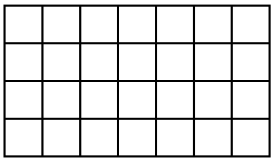
(3) 男子から 2 人，女子から 2 人選ぶ選び方

(4) 男子 3 人，女子 1 人を選んで 1 列に並べる方法

問題 A1.2.12 ★★ 解答 p.207

【長方形の個数】

縦の長さが 4，横の長さが 7 の長方形を，右の図のように縦を 4 等分，横を 7 等分に区切るとする．このとき，この図形に含まれる線分を辺とする次の図形の個数を求めよ．



(1) 長方形の個数

(2) 正方形の個数

(3) 長方形であって正方形ではないもの

問題 A1.2.13 ★★ 解答 p.208 【正多角形と組合せ】

正十二角形について，次のものを求めよ．

(1) 対角線の本数

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，二等辺三角形となるものの個数

問題 A1.2.14 ★★ 解答 p.208 【グループ分け】

8 人を次のようなグループに分ける方法は何通りあるか.

(1) 4 人，3 人，1 人のグループ

(2) 4 人ずつ A，B のグループ

(3) 4 人ずつ 2 つのグループ

(4) 4 人，2 人，2 人のグループ

問題 A1.2.15 ★ 解答 p.209　【同じものを含む順列】

次の問いに答えよ.

(1) x, x, x, y, y, z の 6 文字を 1 列に並べる順列は何通りあるか.

(2) 青玉 6 個と緑玉 3 個の合計 9 個を 1 列に並べる順列は何通りあるか.

問題 A1.2.16 ★★ 解答 p.209　▶ 節末 A1.2.4 【一部の文字の順序が定められた順列】

sunlight のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．

(1) s，u，n がこの順で現れる並び方は何通りあるか．

(2) s が t より左に，g が h より右に現れる並び方は何通りあるか．

問題 A1.2.17 ★★ 解答 p.210

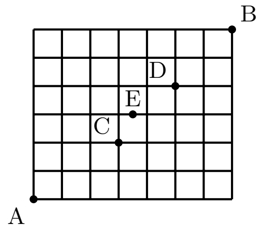
▶ 章末 A1.4 【最短経路 1】

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．

(1) A 地点から B 地点へ行く道順

(2) 途中で C，D 地点を通る道順

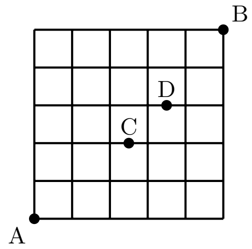
(3) 途中で E 地点を通る道順



問題 A1.2.18 ★★★ 解答 p.211

▶ 節末 A1.2.5 ▶ 章末 A1.4 【最短経路 2】

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．



(1) C 地点を通らない道順

(2) C 地点または D 地点を通る道順

問題 A1.2.19 ★★★　解答 p.211　【同じものを含む順列と組合せ】

9 個の数字 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7 のうち 4 個を用いてできる 4 桁の整数の個数を求めよ.

問題 A1.2.20 ★★★ 解答 p.212 【同じものを含む円順列・数珠順列】

青玉 6 個，赤玉 2 個，白玉 1 個の合計 9 個の玉がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) これらの玉を 1 列に並べる方法は何通りあるか.

(2) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか.

(3) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか.

問題 A1.2.21 ★★★ 解答 p.212　【重複組合せ】

x，y，z，w の 4 個の文字の中から，重複を許して 6 個取り出す組合せは何通りあるか.

問題 A1.2.22 ★★★★ 解答 p.213 【整数解の個数】

次の式を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何通りあるか.

(1) $x+y+z=8,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$

(2) $x+y+z=8,\ x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$

(3) $x+y+z \leqq 8,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$

問題 A1.2.23 ★★★ 解答 p.213　▶ 章末 A1.5【大小関係を満たす整数】

a から e を 0 から 9 までの整数とするとき，次の条件を満たす a，b，c，d，e の組は何通りあるか．

(1) $a < b < c < d < e$　　(2) $a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$　　(3) $a < b \leqq c < d < e$

問題 A1.2.24 ★★★ 解答 p.214

【完全順列】

4 人の生徒が異なるおもちゃを持ち寄り，それらを 1 つずつ分配する．このとき，すべての生徒が自分の持ち寄ったおもちゃとは違うおもちゃを受け取る場合は何通りあるか．

節末問題 1.2 順列・組合せ

節末 A1.2.1 ★★★ 解答（節末）p.215

▶ 問題 A1.2.1 ▶ 問題 A1.2.4

6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次の問いに答えよ．

1 回目：
2 回目：

(1) 偶数の個数を求めよ．

(2) 234 以上の整数の個数を求めよ．

(3) これらを小さい順に並べたとき，第 45 番目にある整数を求めよ．

節末 A1.2.2 ★★★ 解答（節末）p.216

▶ 問題 A1.2.2 ▶ 問題 A1.2.3 ▶ 問題 A1.2.6

大人 4 人，子供 3 人がいるとするとき，次の並び方は何通りあるか．

1 回目：
2 回目：

(1) 子供のうち 2 人だけが隣り合うように 7 人を 1 列に並べる．

(2) 子供の両隣りが必ず大人になるように 7 人を円形に並べる．

節末 A1.2.3 ★★　解答（節末）p.217

▶ 問題 A1.2.10

1 回目：
2 回目：

立方体の各面を，互いに異なる 7 色からすべて違う色を用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，立方体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

節末 A1.2.4 ★★★　解答（節末）p.217

▶ 問題 A1.2.2 ▶ 問題 A1.2.16

SUCCESS のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．

(1) 全部で何通りの並び方があるか．

(2) S が 3 つ連続する並び方は何通りあるか．

(3) S が 2 つ以上連続する並び方は何通りあるか．

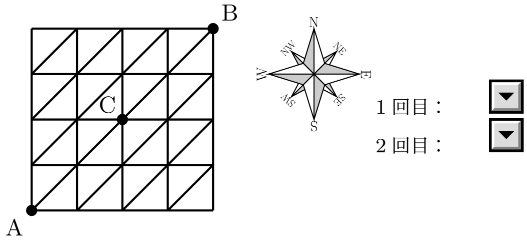
(4) S が 2 つ以上連続し，かつ，C も 2 つ連続する並び方は何通りあるか．

1 回目：
2 回目：

節末 A1.2.5 ★★★★ 解答（節末）p.218

▶ 問題 A1.2.18

右の図のような格子状の道路がある．次のような場合に，道順は何通りあるか．ただし，東方向，北方向，北東方向にしか進めないものとする．



(1) A 地点から C 地点へ行く道順

(2) A 地点から C 地点を通らないで B 地点へ行く道順

章末問題 1 場合の数

1.3 章末問題 1

章末 A1.1 ★★ 解答（章末）p.219

▶ 問題 A1.1.1

1 回目：
2 回目：

分母が 200 であり，分子が 1 から 200 までの 200 個の分数のうち，約分できないものの個数を求めよ．

章末 A1.2 ★★★ 解答（章末）p.219

▶ 問題 A1.1.6

区別のつかない 7 個のボールを区別のつかない 3 つの箱に入れる．1 個も入らない箱があってもよい場合，ボールの入れ方は全部で何通りあるか．

1 回目：
2 回目：

章末 A1.3 ★★★　解答（章末）p.220

次の等式を満たす自然数 n の値を求めよ．

1 回目：

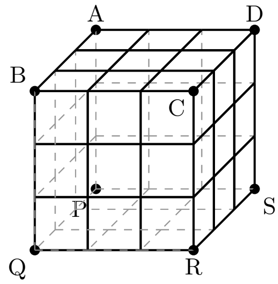
2 回目：

(1) ${}_n\mathrm{P}_3 = 2{}_n\mathrm{P}_2 + 10{}_n\mathrm{P}_1$　　(2) $2{}_n\mathrm{C}_4 = 5{}_n\mathrm{C}_3$

章末 A1.4 ★★★ 解答（章末）p.220

▶ 問題 A1.2.17 ▶ 問題 A1.2.18

1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD – PQRS がある．ただし，2 つの正方形 ABCD，PQRS は立方体の向かい合った面であり，AP，BQ，CR，DS はそれぞれ立方体の辺である．この立方体を 1 辺の長さ 1 の小立方体に区切ったとき，頂点 A から頂点 R へ小立方体の辺を通って行く最短経路について考える．



1 回目：
2 回目：

(1) 最短経路は何通りあるか．

(2) 辺 BC 上の点を通過する最短経路は何通りあるか．

章末 A1.5 ★★★★　解答（章末）p.221

▶ 問題 A1.2.23

1 回目：

2 回目：

サイコロを 4 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする．このとき，$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4$ となる目の出方は何通りあるか．

第2章　確率

2　確率

1節 確率の基本性質（pp.56-65），2節 いろいろな確率（pp.70-87）

問題一覧

番号	難易度	1回目	2回目
A2.1.1	★		
A2.1.2	★★		
A2.1.3	★		
A2.1.4	★★★		
A2.1.5	★★★		
A2.1.6	★		
A2.1.7	★★		
A2.1.8	★★		
A2.1.9	★★★		

番号	難易度	1回目	2回目
A2.2.1	★		
A2.2.2	★		
A2.2.3	★★		
A2.2.4	★★		
A2.2.5	★★★		
A2.2.6	★★★		
A2.2.7	★★★		
A2.2.8	★★★		
A2.2.9	★★★★		

番号	難易度	1回目	2回目
A2.2.10	★		
A2.2.11	★★		
A2.2.12	★★		
A2.2.13	★★★		
A2.2.14	★★★★		
A2.2.15	★		
A2.2.16	★★		
A2.2.17	★★★★		

節末問題 2.1，節末問題 2.2

番号	難易度	1回目	2回目
A2.1.1	★★		
A2.1.2	★★		
A2.1.3	★★★		
A2.1.4	★★		
A2.1.5	★★★		

番号	難易度	1回目	2回目
A2.2.1	★★		
A2.2.2	★★★		
A2.2.3	★★★★		
A2.2.4	★★		
A2.2.5	★★★★		

章末問題 2

番号	難易度	1回目	2回目
A2.1	★★★		
A2.2	★★★		
A2.3	★★★★		
A2.4	★★★		
A2.5	★★★★		

チェック例

○··· 考え方を理解し，解くことができた．　△··· 理解が不十分である．　×··· 解くことができなかった．

2.1 確率の基本性質

問題 A2.1.1 ★ 解答 p.222 【確率の計算】

次の確率を求めよ．

(1) 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 7 となる確率を求めよ．

(2) 4 枚の硬貨を投げて，表 3 枚，裏 1 枚が出る確率を求めよ．

問題 A2.1.2　★★　解答 p.222

▶ 節末 A2.1.2 【順列と確率】

A グループ 5 人と B グループ 3 人の生徒が次のように並ぶとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 1 列に並ぶとき，両端が B グループの人である確率

(2) 円形に並ぶとき，特定の 2 人 a, b が隣り合う確率

問題 A2.1.3 ★ 解答 p.223

▶ 節末 A2.1.3 【組合せと確率】

赤玉 9 個と白玉 6 個の合計 15 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 4 個とも赤玉である確率

(2) 赤玉が 3 個，白玉が 1 個である確率

問題 A2.1.4 ★★★ 解答 p.223　【同じものを含む順列と確率】

E, M, P, L, O, Y, E, E の 8 文字からいくつかの文字を取り出して，横に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 8 文字を横 1 列に並べるとき，どの 2 つの E も隣り合わない確率

(2) 8 文字の中から 5 文字を取り出して 1 列に並べるとき，どの 2 つの E も隣り合わない確率

問題 A2.1.5 ★★★ 解答 p.224 【2 次方程式が満たす条件と確率】

大小 2 個のさいころを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ a, b とするとき，x についての 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつ確率を求めよ．

問題 A2.1.6 ★ 解答 p.224

▶ 節末 A2.1.4 【確率の加法定理】

赤玉 6 個と白玉 5 個の合計 11 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 赤玉が 2 個以上取り出される確率

(2) 4 個の玉がすべて同じ色である確率

問題 A2.1.7 ★★ 解答 p.225 【和事象の確率】

1 から 120 までの番号をつけた 120 枚のカードがあり，この中から 1 枚のカードを取り出すとき，その番号が 6 の倍数または 7 の倍数である確率を求めよ．

問題 A2.1.8 ★★ 解答 p.225 【余事象の確率】

(1) 11 個の部品の中に 3 個の不良品が含まれている．この中から同時に 4 個の部品を取り出すとき，少なくとも 1 個の不良品が含まれる確率を求めよ．

(2) 赤玉 7 個と白玉 5 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉，白玉がともに少なくとも 1 個取り出される確率を求めよ．

問題 A2.1.9 ★★★ 解答 p.226

▶ 節末 A2.1.5 【じゃんけんの確率】

5 人でじゃんけんを行うとき，次の確率を求めよ．

(1) 1 回のじゃんけんで，1 人だけが勝つ確率

(2) 1 回のじゃんけんで，3 人が勝ち，2 人が負ける確率

(3) 1 回のじゃんけんで，あいこになる確率

節末問題 2.1 確率の基本性質

節末 A2.1.1 ★★ 解答（節末）p.227

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードから 1 枚取り出し，その数字を記録して元に戻す．この操作を 3 回繰り返し，記録した数を順に x, y, z とする．このとき，次の確率を求めよ．

1 回目：
2 回目：

(1) $\frac{y}{x}$ が整数になる確率　　(2) $x < y < z$ になる確率

節末 A2.1.2 ★★ 解答（節末）p.228

▶ 問題 A2.1.2

1 回目：
2 回目：

12 人が円形に座るとき，次の確率を求めよ．

(1) 特定の 2 人 X，Y が 1 人おいて隣り合う確率

(2) 特定の 3 人 X，Y，Z が 1 人ずつおいて隣り合う確率

節末 A2.1.3 ★★★ 解答（節末）p.228

▶ 問題 A2.1.3 ▶ 問題 A2.1.8

赤玉 5 個，白玉 3 個，青玉 4 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

1 回目：
2 回目：

(1) 3 個の玉がすべて同じ色である確率

(2) 3 個とも色が異なる確率

(3) 少なくとも 1 個は青玉である確率

節末 A2.1.4 ★★ 解答（節末）p.229

▶ 問題 A2.1.6

1 回目：
2 回目：

箱の中に赤玉 5 個，白玉 2 個，青玉 4 個が入っている．この箱から同時に 3 個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 玉の色が少なくとも 2 種類ある

(2) 取り出した玉の色がちょうど 2 種類になる

節末 A2.1.5 ★★★ 解答（節末）p.229

▶ 問題 A2.1.9

1 回目：
2 回目：

n 人でじゃんけんを 1 回行うとき，次の確率を求めよ．ただし，$n \geqq 5$ とする．

(1) ちょうど 4 人が勝つ　　(2) あいこになる

2.2 いろいろな確率

問題 A2.2.1 ★ 解答 p.230 【独立な試行の確率】

(1) さいころを 2 回投げる．このとき，1 回目は偶数の目，2 回目は 4 以下の目が出る確率を求めよ．

(2) X，Y，Z の 3 人がフリースローを投げるとき，成功する確率はそれぞれ $\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$ であるとする．この 3 人がそれぞれ 1 回ずつフリースローを投げたとき，少なくとも 1 人が成功する確率を求めよ．

問題 A2.2.2 ★ 解答 p.230　【独立な試行の確率と加法定理】

袋 A には赤玉 6 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている．それぞれの袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 袋 A から赤玉，袋 B から白玉が出る確率

(2) 2 個の玉の色が同じである確率

問題 A2.2.3　★★　解答 p.231

【反復試行の確率 1】

1 個のさいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 1 の目がちょうど 3 回出る確率

(2) 1 の目が出る回数が 1 回以下である確率

問題 A2.2.4 ★★ 解答 p.231

▶ 節末 A2.2.1 ▶ 章末 A2.5 【反復試行の確率 2】

A，B の 2 人が繰り返しカードゲームで対戦し，先に 3 勝した方が優勝者とする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{2}{5}$ で，引き分けはないものとする．このとき，A が優勝する確率を求めよ．

1 回目： 2 回目：

問題 A2.2.5 ★★★ 解答 p.232

▶ 節末 A2.2.2 【3 つの事象に関する反復試行の確率】

赤玉 1 個，白玉 2 個，青玉 2 個が入っている袋の中から，1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを 5 回行うとき，次の確率を求めよ．

(1) 赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る確率

(2) 赤玉が出る回数が白玉が出る回数よりも 1 回だけ多くなる確率

問題 A2.2.6　★★★　解答 p.233

▶ 節末 A2.2.5 ▶ 章末 A2.2 【反復試行の確率（ランダムウォーク）】

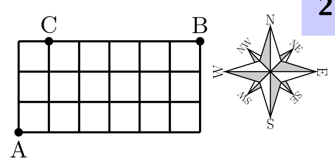
(1) 数直線上の原点にある点 P が，毎回確率 $\frac{1}{3}$ で正の方向に 1 だけ移動し，確率 $\frac{2}{3}$ で負の方向に 2 だけ移動する．6 回の移動後に点 P が原点にある確率を求めよ．

(2) 数直線上の原点にある点 P が，1 個のさいころを投げて，1 か 2 の目が出たときは正の方向に 2 だけ移動し，3 か 4 の目が出たときは負の方向に 1 だけ移動し，5 か 6 の目が出たときは移動しないとする．さいころを 4 回投げたとき，点 P が原点にある確率を求めよ．

問題 A2.2.7 ★★★ 解答 p.234

【反復試行の確率（平面上の点の移動）】

右の図のような格子状の A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，C 地点を通る確率を求めよ．ただし，各交差点において，東，北のいずれの進路も進む確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であり，一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進むものとする．



問題 A2.2.8　★★★　解答 p.234

▶ 章末 A2.3 【さいころの目の最大値・最小値】

4 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出る目の最小値が 4 以上である確率

(2) 出る目の最小値が 4 である確率

問題 A2.2.9 ★★★★ 解答 p.235

▶ 節末 A2.2.3 【確率の最大値】

1 個のさいころを 18 回投げるとき，2 の目が何回出る確率が最も大きくなるか.

問題 A2.2.10 ★ 解答 p.235　【条件付き確率 1】

ある町で行った調査によると，読書が好きな住民は全体の 70%，音楽鑑賞が好きな住民は 55%，どちらも好きな住民は 40% いることがわかった.

(1) 読書が好きな住民から無作為に 1 人を選んだとき，その住民が音楽鑑賞も好きである確率を求めよ.

(2) 音楽鑑賞が好きな住民から無作為に 1 人を選んだとき，その住民が読書が好きではない確率を求めよ.

問題 A2.2.11 ★★ 解答 p.236

【確率の乗法定理 1】

当たりくじが 4 本入っている 13 本のくじがある．a，b がこの順にくじを 1 本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) a，b がともに当たりくじを引く確率

(2) b が当たりくじを引く確率

問題 A2.2.12 ★★ 解答 p.236

【確率の乗法定理 2】

袋 A には赤玉 5 個と白玉 4 個，袋 B には赤玉 3 個と白玉 6 個が入っている．袋 A から 2 個の玉を同時に取り出して袋 B に入れた後，袋 B から 2 個の玉を同時に取り出すとき，2 個とも白玉である確率を求めよ．

問題 A2.2.13 ★★★ 解答 p.237

▶ 節末 A2.2.4 ▶ 章末 A2.3 【条件付き確率 2】

ある地域に 2 つの病院 a，b があり，a 病院で実施される検査は全体の 70% である．また，a 病院で実施された検査では 4% の誤判定が含まれており，b 病院で実施された検査では 3% の誤判定が含まれている．2 つの病院で実施された多くの検査の中から，無作為に 1 件の検査を選んだとき，次の確率を求めよ．

(1) 選んだ検査で誤判定が発生している確率

(2) 選んだ検査で誤判定が発生していたとき，それが a 病院で実施されたものである確率

問題 A2.2.14 ★★★★　解答 p.238　【ベイズの定理】

3 つの袋 A，B，C があり，袋 A には赤いボール 3 個と青いボール 5 個，袋 B には赤いボール 2 個と青いボール 6 個，袋 C には赤いボール 4 個と青いボール 4 個が入っている．3 つの袋のうち 1 つを無作為に選び，その袋から 1 個のボールを取り出したところ赤いボールであった．このとき，その赤いボールが袋 B から取り出されたものである確率を求めよ．

問題 A2.2.15 ★ 解答 p.238

【期待値（さいころの目）】

2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和の期待値を求めよ．

問題 A2.2.16 ★★ 解答 p.239

▶ 節末 A2.2.5 ▶ 章末 2.4 ▶ 章末 A2.5 【期待値（有利・不利）】

10 本のうち，当たりくじが 3 本，はずれくじが 7 本ある．くじを 1 回引いてはもとに戻すことを 3 回行う．このとき，次の 2 つの場合のうち，どちらを選ぶ方が有利であるか．

(i) 当たりくじ 1 本につき 300 円をもらう．

(ii) 当たりくじを 2 本引いたときだけ 1500 円をもらう．

問題 A2.2.17 ★★★★ 解答 p.240 ▶ 章末 A2.1 【期待値（図形）】

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の頂点から異なる 3 点を選び，それらの 3 点を頂点とする三角形をつくる．このとき，三角形の周の長さの期待値を求めよ．

節末問題 2.2 いろいろな確率

節末 A2.2.1 ★★ 解答（節末）p.241

▶ 問題 A2.2.4

1 回目：
2 回目：

X，Y の 2 人が繰り返しあるゲームで対戦し，先に 4 ゲーム勝った方が優勝者とする．各ゲームにおいて X が勝つ確率は $\frac{3}{4}$ で，引き分けはないものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 4 ゲーム目で優勝が決まる確率を求めよ．

(2) 5 ゲーム目で X が優勝する確率を求めよ．

節末 A2.2.2 ★★★ 解答（節末）p.241

▶ 問題 A2.2.5

1 回目：
2 回目：

1 個のさいころを 4 回投げるとき，1 の目と 6 の目が同じ回数だけ出る確率を求めよ．

節末 A2.2.3 ★★★★ 解答（節末）p.242

▶ 問題 A2.2.9

12 本のくじの中に 3 本の当たりくじがある．当たりくじを 2 回引くまで繰り返しくじを引くとき，n 回目で終わる確率 p_n を最大にする n の値を求めよ．ただし，引いたくじは毎回もとに戻すものとする．

1 回目：
2 回目：

節末 A2.2.4 ★★ 解答（節末）p.242

▶ 問題 A2.2.13

1 回目：
2 回目：

あるコンテストで，a が優勝する確率は 70% である．4 回に 1 回の割合でうそをつく b が a の結果を知ったうえで「a が優勝した」と発言した．このとき，a が本当に優勝した確率を求めよ．

節末 A2.2.5 ★★★★ 解答（節末）p.243

▶ 問題 A2.2.6 ▶ 問題 A2.2.16

1 回目：
2 回目：

原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．P は，1 枚の硬貨を投げて表が出た場合には $+5$，裏が出た場合は $+3$ 移動する．硬貨を続けて投げていき，点 P の座標が初めて 18 以上になるまでの投げた回数を X とする．

(1) $X=4$ となる確率を求めよ．　(2) X の期待値を求めよ．

章末問題 2 確率

2.3 章末問題 2

章末 A2.1 ★★★ 解答（章末）p.244

▶ 問題 A2.2.17

正六角形の頂点を反時計回りに 1 から 6 までの番号を付ける．1 個のさいころを 3 回投げて，出た目の番号に対応する頂点を線分で結び図形を作るとき，次の確率を求めよ．

1 回目：
2 回目：

(1) 三角形ができる確率

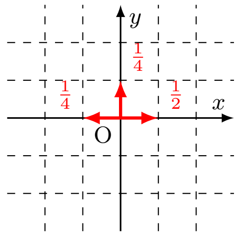
(2) 正三角形ができる確率

(3) 直角三角形ができる確率

章末 A2.2 ★★★ 解答（章末）p.244

▶ 問題 A2.2.6

座標平面上の原点 O から出発して，毎回確率 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ でそれぞれ左，上，右へ 1 ずつ移動する点 Q がある．8 回の移動後に点 (2，4) にいる確率を求めよ．



1 回目：
2 回目：

章末 A2.3 ★★★★ 解答（章末）p.245

▶ 問題 A2.2.8 ▶ 問題 A2.2.13

1 回目：
2 回目：

3 個のさいころ A, B, C を同時に振り，出た目の最小値が 3 であったとき，最大値が 5 である条件付き確率を求めよ．

章末 A2.4 ★★★ 解答（章末）p.245

▶ 問題 A2.2.16

1 回目：
2 回目：

箱の中に 4 個の白玉と n 個の赤玉が入っている．この箱から同時に 2 個の玉を取り出したとき，赤玉の数を X とする．X の期待値が 1.5 であるとき，n の値を求めよ．ただし，$n \geqq 2$ であるとする．

章末 A2.5 ★★★★　解答（章末）p.246

▶ 問題 A2.2.4 ▶ 問題 A2.2.16

2 つのチーム A，B が繰り返し試合をして，先に 4 勝した方を優勝チームとする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{2}{3}$ で，引き分けはないとする．このとき，優勝チームが決まるまでの試合数の期待値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

第3章　図形の性質

3章：整数の性質（再生リスト）：

3　図形の性質

1節 平面図形の基本（pp.98-108），2節 円の性質と作図（pp.112-124），3節 空間図形（pp.128-132）

問題一覧

番号	難易度	1回目	2回目
A3.1.1	★★		
A3.1.2	★★		
A3.1.3	★★★		
A3.1.4	★		
A3.1.5	★★		
A3.1.6	★★★		
A3.1.7	★★		
A3.1.8	★		
A3.1.9	★★		
A3.1.10	★★★		

番号	難易度	1回目	2回目
A3.2.1	★★		
A3.2.2	★★		
A3.2.3	★		
A3.2.4	★		
A3.2.5	★★		
A3.2.6	★★★		
A3.2.7	★★★		
A3.2.8	★★		
A3.2.9	★		
A3.2.10	★★★		
A3.2.11	★★		
A3.2.12	★★★		

番号	難易度	1回目	2回目
A3.3.1	★★		
A3.3.2	★★★		
A3.3.3	★★★		
A3.3.4	★★★		

節末問題3.1，節末問題3.2，節末問題3.3

番号	難易度	1回目	2回目
A3.1.1	★★		
A3.1.2	★★		
A3.1.3	★★		
A3.1.4	★★★		

番号	難易度	1回目	2回目
A3.2.1	★★★		
A3.2.2	★★		
A3.2.3	★★		
A3.2.4	★★		

番号	難易度	1回目	2回目
A3.3.1	★★		
A3.3.2	★★		
A3.3.3	★★★		
A3.3.4	★★★		

章末問題3

番号	難易度	1回目	2回目
A3.1	★★		
A3.2	★★		
A3.3	★★★★		
A3.4	★★★		

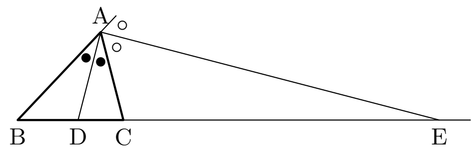
チェック例

○··· 考え方を理解し，解くことができた．　△··· 理解が不十分である．　×··· 解くことができなかった．

3.1　平面図形の基本

問題 A3.1.1　★★　解答 p.247　【角の二等分線と比】

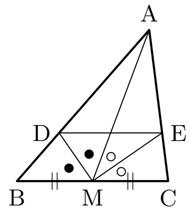
$\mathrm{AB}=8,\ \mathrm{BC}=7,\ \mathrm{CA}=6$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}$ およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を，それぞれ D，E とする．このとき，線分 DE の長さを求めよ．



問題 A3.1.2 ★★ 解答 p.248

【三角形の性質】

$\triangle$ABC において，辺 BC の中点を M とし，$\angle$AMB，$\angle$AMC の二等分線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D，E とする．このとき，DE $<$ BD $+$ CE であることを示せ．



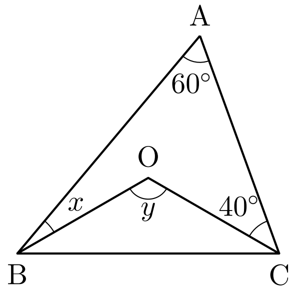
問題 A3.1.3 ★★★ 解答 p.248　　【角の二等分線】

$\triangle$ABC の 2 辺 AB，AC 上に DE$/\!/$BC となるような 2 点 D，E をとり，辺 BC の中点を M とする．このとき，MD が $\angle$AMB の二等分線であれば，ME は $\angle$AMC の二等分線であることを示せ．

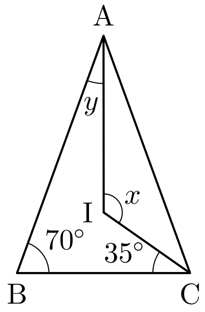
問題 A3.1.4 ★ 解答 p.249 【三角形の外心・内心の角の大きさ】

次の図において，△ABC の外心を O，内心を I とするとき，角 x，y を求めよ．

(1)



(2)



問題 A3.1.5　★★　解答 p.250　【三角形の傍心】

$\triangle$ABC において，$\angle$A の二等分線と，$\angle$B と $\angle$C の外角の二等分線は，1 点で交わることを示せ.

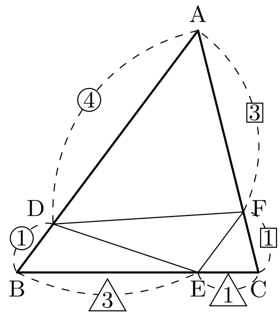
問題 A3.1.6 ★★★ 解答 p.250

▶ 節末 A3.1.1【オイラー線】

△ABC の垂心を H とし，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とする．△DEF の垂心を O とするとき，AD と OH の交点 G が，△ABC の重心であることを示せ．

問題 A3.1.7 ★★ 解答 p.251

▶ 節末 A3.1.2 ▶ 章末 A3.1 【三角形の面積比】

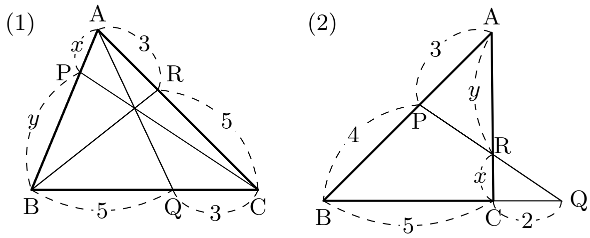


△ABC において，線分 AB を 4 : 1 に内分する点を D，線分 BC を 3 : 1 に内分する点を E，線分 CA を 1 : 3 に内分する点を F とする．このとき，△ABC と △DEF の面積比を求めよ．

問題 A3.1.8 ★ 解答 p.251

【チェバの定理・メネラウスの定理】

右の図のような △ABC において，$x:y$ を求めよ．



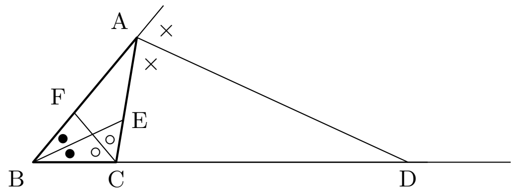
問題 A3.1.9 ★★ 解答 p.252

▶ 節末 A3.1.3【チェバの定理・メネラウスの定理の逆】

△ABC において，次のことを示せ．

(1) △ABC の内接円が 3 辺 BC，CA，AB に接する点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

(2) 右の図のような △ABC において，∠A の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わるとき，その交点を D とする．また，∠B，∠C の二等分線と辺 AC，AB の交点をそれぞれ E, F とする．このとき，3 点 D，E，F は一直線上にある．



問題 A3.1.10 ★★★ 解答 p.253

▶ 節末 A3.1.4 【メネラウスの定理と面積比】

$\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB を $3:1$ に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，AL と CN，AL と BM，BM と CN の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，次の三角形の面積を $\triangle$ABC の面積 S を用いて表せ．

(1) $\triangle$ABQ (2) $\triangle$PQR

節末問題 3.1 平面図形の基本

数学 A
3.1

節末 A3.1.1 ★★ 解答（節末）p.254

▶ 問題 A3.1.6

△ABC の辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D，E，F とすると，△ABC の外心 O は，△DEF の垂心であることを証明せよ．

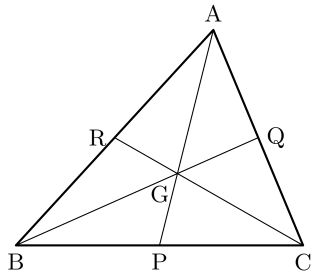
1 回目：
2 回目：

節末 A3.1.2 ★★ 解答（節末）p.254

▶ 問題 A3.1.7

1 回目：
2 回目：

右の図において，△ABC の重心を G とするとき，△ABC の面積と四角形 ARGQ の面積比を求めよ．



節末 A3.1.3 ★★ 解答（節末）p.255

▶ 問題 A3.1.9

1 回目：
2 回目：

鋭角三角形である △ABC において，3 つの頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点で交わることを証明せよ．

節末 A3.1.4 ★★★　解答（節末）p.256

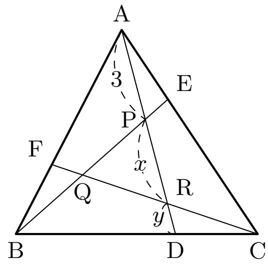
▶ 問題 A3.1.10

1 回目：
2 回目：

△ABC の辺 BC, CA, AB を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D, E, F とし，AD と BE, BE と CF, CF と AD の交点をそれぞれ P, Q, R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) AP : PR : RD = $3 : x : y$ とするとき，x, y の値を求めよ．

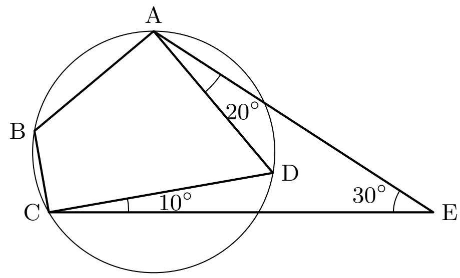
(2) △ABC と △PQR の面積比を求めよ．



3.2 円の性質と作図

問題 A3.2.1 ★★ 解答 p.257

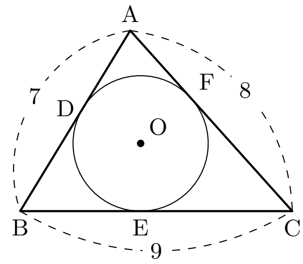
【円に内接する四角形】



右の図において，四角形 ABCD は円に内接している．$\angle\mathrm{AEC} = 30^\circ$，$\angle\mathrm{EAD} = 20^\circ$，$\angle\mathrm{ECD} = 10^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．

問題 A3.2.2 ★★ 解答 p.257

【接線の長さ】

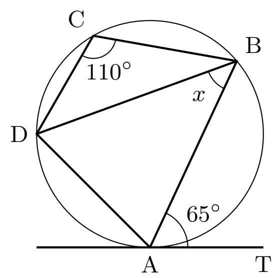


△ABC において，AB = 7，BC = 9，CA = 8 とする．また，△ABC の内接円と辺 BC，CA，AB の接点を，それぞれ点 D，E，F とするとき，AD の長さを求めよ．

問題 A3.2.3 ★　解答 p.258

【接弦定理】

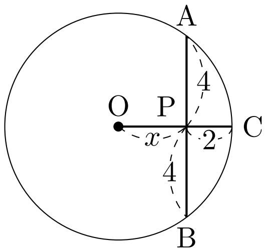
右の図において，AT は点 A における接線とするとき，角 x を求めよ．



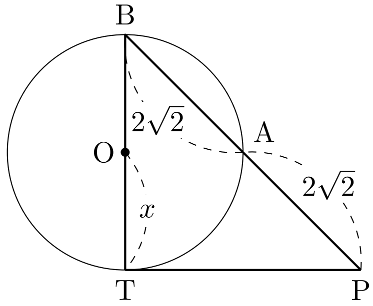
問題 A3.2.4 ★ 解答 p.258 【方べきの定理】

次の図において，O は円の中心，PT は点 T における接線とするとき，x の値を求めよ．

(1)



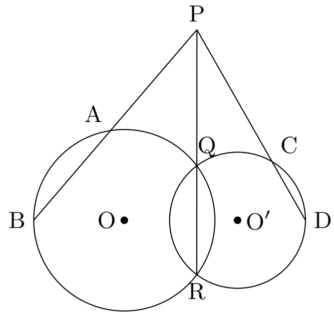
(2)



問題 A3.2.5 ★★ 解答 p.259

【方べきの定理の逆】

右の図のように，2 つの円 O，O′ が 2 点 Q，R で交わっており，QR の延長上の点 P から，円 O，O′ にそれぞれ A，B および C，D で交わる直線を引くとする．このとき，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることを示せ．



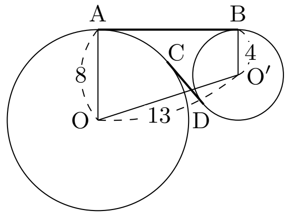
問題 A3.2.6 ★★★ 解答 p.259 【トレミーの定理】

三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=8$，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CA}=6$ とする．$\angle\mathrm{A}$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D，三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円と交わる点を E とする．このとき，AD，DE の長さをトレミーの定理を用いて求めよ．

問題 A3.2.7 ★★★ 解答 p.260

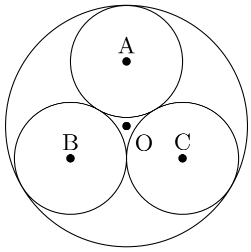
▶ 節末 A3.2.2 【共通接線】

右の図のように，半径 8 の円 O と半径 4 の円 O′ があり，中心間の距離 OO′ = 13 とする．2 つの円の共通接線を 2 本引き，これらの接点を A，B，C，D とするとき，線分 AB，CD の長さを求めよ．



問題 A3.2.8 ★★ 解答 p.261

▶ 節末 A3.2.2【互いに接する円】



右の図のように，半径 1 の円 O に，半径が同じ 3 つの円が内接している．このとき，円 A の面積 S を求めよ．

1 回目：　2 回目：

問題 A3.2.9 ★ 解答 p.261　【基本的な作図】

与えられた線分 AB について，線分 AB を $5:1$ に外分する点 P を作図せよ．

問題 A3.2.10 ★★★ 解答 p.262 【長さが与えられた線分の作図】

長さ 1, a の線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{a}$ の線分を作図せよ.

問題 A3.2.11 ★★ 解答 p.262

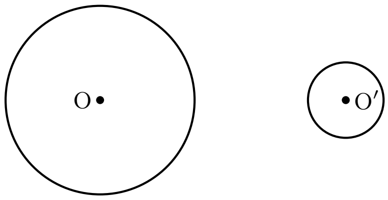
▶ 節末 A3.2.4 【2 次方程式の解と作図】

長さ 1 の線分が与えられたとき，2 次方程式 $x^2 + 4x - 1 = 0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ.

問題 A3.2.12 ★★★ 解答 p.263

【2 つの円の共通接線の作図】

右の図のように，半径がそれぞれ r，r' $(r > r')$ である 2 つの円 O，O$'$ がある．この 2 つの円の共通内接線を作図せよ．



節末問題 3.2 円の性質と作図

節末 A3.2.1 ★★★ 解答（節末）p.264

$\triangle$ABC の内心を I，$\triangle$BCI の外心を O とする．4 点 A，B，C，O は同一円周上にあることを示せ．

1 回目：
2 回目：

節末 A3.2.2 ★★ 解答（節末）p.265

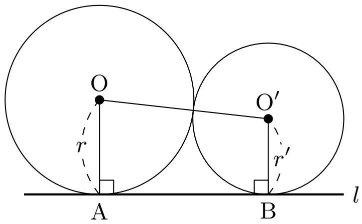
▶ 問題 A3.2.7 ▶ 問題 A3.2.8

1 回目：
2 回目：

右の図のように，半径 r, r' $(r > r')$ の円 O と O$'$ が外接しており，さらに直線 l にそれぞれ A, B で接しているとする．このとき，次の問いに答えよ．

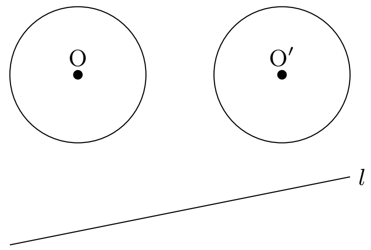
(1) 線分 AB の長さを r, r' で表せ．

(2) 2 つの円 O, O$'$ に外接し，さらに線分 AB に接する円 O$''$ の半径 x を求めよ．



節末 A3.2.3 ★★ 解答（節末）p.266

右の図のように,半径が等しい 2 つの円 O，O′ と直線 l がある．直線 l 上に中心があり，この 2 つの円 O，O′ に外接する円を作図せよ．



1 回目：
2 回目：

節末 A3.2.4 ★★ 解答（節末）p.266

▶ 問題 A3.2.11

1 回目：

2 回目：

長さ 3 の線分が与えられたとき，連立方程式 $x+y=3$，$xy=1$ の解を長さとする線分を作図せよ．

3.3　空間図形

問題 A3.3.1　★★　解答 p.267　▶ 節末 A3.3.1 ▶ 節末 A3.3.3【直線と平面の垂直】

四面体 ABCD において, $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ であるとする．このとき, A から平面 BCD に垂線 AH を下ろすとき, 点 H は $\triangle BCD$ の垂心であることを示せ.

問題 A3.3.2 ★★★ 解答 p.267 ▶ 節末 A3.3.2 【三垂線の定理】

l を平面 α 上の直線，P を平面 α 上にない点，A を直線 l 上の点，O を l 上にない平面 α 上の点とするとき，次のことを示せ.

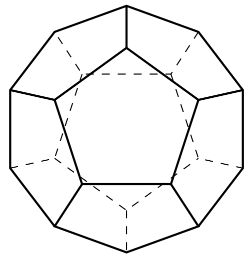
(1) $\mathrm{PO} \perp \alpha$, $\mathrm{PA} \perp l$ ならば $\mathrm{OA} \perp l$

(2) $\mathrm{PO} \perp \alpha$, $\mathrm{OA} \perp l$ ならば $\mathrm{PA} \perp l$

問題 A3.3.3 ★★★ 解答 p.268

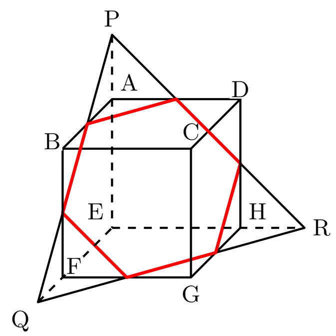
▶ 節末 A3.3.3 ▶ 章末 A3.3 【多面体の面・辺・頂点の数】

正二十面体において，各辺の中点を通る平面ですべてのかどを切り取ったときにできる多面体の面の数 f，辺の数 e，頂点の数 v をそれぞれ求めよ．



問題 A3.3.4 ★★★ 解答 p.268

▶ 節末 A3.3.4 ▶ 章末 A3.4 【多面体の切断・体積】



右の図のような三角錐 P − EQR と，1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD − EFGH における共通部分の立体の体積を求めよ．ただし，AP，FQ，HR の長さを 1 とする．

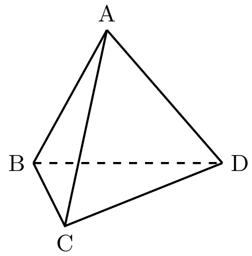
節末問題 3.3 空間図形

数学 A 3.3

節末 A3.3.1 ★★ 解答（節末）p.269

▶ 問題 A3.3.1

正四面体 ABCD において，向かい合う 2 辺 AB と CD は垂直であることを示せ.



1 回目：
2 回目：

節末 A3.3.2 ★★ 解答（節末）p.269

▶ 問題 A3.3.2

1 回目：

2 回目：

正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から線分 CM に下ろした垂線を OH とする．このとき，$\mathrm{OH} \perp$ 平面 ABC であることを示せ．

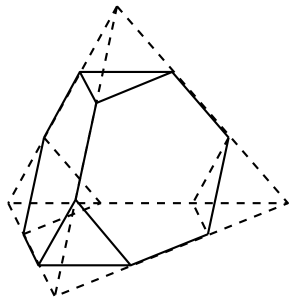
節末 A3.3.3 ★★★ 解答（節末）p.270

▶ 問題 A3.3.3

数学 A 3.3

1 回目：
2 回目：

1 辺の長さが 3 の正四面体がある．この正四面体を右の図のように，1 つの頂点に集まる 3 つの辺においてそれぞれ 3 等分した点のうち，頂点に近い方の点を結んでできる正三角形を含む平面で切り，頂点を含む正四面体を取り除く．すべての頂点において同様に正四面体を取り除いたとき，残った立体の体積 V を求めよ．



節末 A3.3.4 ★★★ 解答（節末）p.271

▶ 問題 A3.3.4

1 回目：
2 回目：

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD の 2 辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．2 直線 CM，DM のなす角を α，2 直線 MN，AC のなす角を β とするとき，$\cos\alpha$ と β を求めよ．

章末問題 3 図形の性質

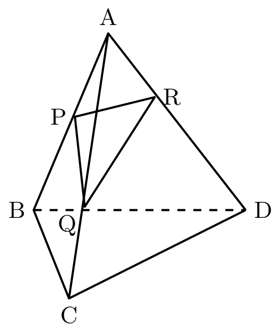
3.4 章末問題 3

数学 A
3.4

章末 A3.1 ★★ 解答（章末）p.272

▶ 問題 A3.1.7

右の図のような四面体 ABCD において，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=a_1:b_1$，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=a_2:b_2$，$\mathrm{AR}:\mathrm{RD}=a_3:b_3$ とする．このとき，四面体 APQR と四面体 ABCD の体積比を求めよ．



1 回目：
2 回目：

章末 A3.2 ★★ 解答（章末）p.272

1 辺の長さが 2 の立方体がある．この立方体の各面の正方形における，対角線の交点を頂点とする正八面体について，次の問いに答えよ．

1 回目：
2 回目：

(1) 正八面体の 1 辺の長さを求めよ．

(2) 正八面体の体積を求めよ．

章末 A3.3 ★★★★ 解答（章末）p.273

▶ 問題 A3.3.3

1 回目：
2 回目：

各面が正三角形である正多面体は何種類あるか．すべて挙げよ．

章末 A3.4 ★★★ 解答（章末）p.274

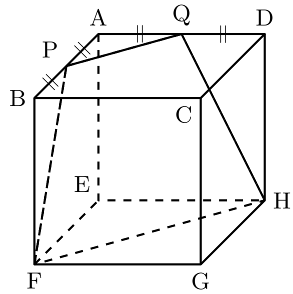
▶ 問題 A3.3.4

1 回目：
2 回目：

1 辺の長さが 8 の立方体 ABCD − EFGH において，辺 AB，AD の中点をそれぞれ P，Q とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 立体 PQA − EFH の体積を求めよ．

(2) 台形 PQHF の面積を求めよ．



第 4 章　数学と人間の活動

4 章：数学と人間の活動（再生リスト）

4　数学と人間の活動

1 節 約数と倍数（pp.141-155），2 節 ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法（pp.160-178）

問題一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.1.1	★★		
A4.1.2	★★		
A4.1.3	★★		
A4.1.4	★★		
A4.1.5	★		
A4.1.6	★★		
A4.1.7	★★		
A4.1.8	★★★		
A4.1.9	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.1.10	★		
A4.1.11	★★		
A4.1.12	★★★		
A4.1.13	★★★		
A4.1.14	★★★		
A4.2.1	★		
A4.2.2	★★★		
A4.2.3	★★		
A4.2.4	★★		
A4.2.5	★★★		
A4.2.6	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.2.7	★★★		
A4.2.8	★★★		
A4.2.9	★★★		
A4.2.10	★★★★		
A4.2.11	★★★★		
A4.2.12	★		
A4.2.13	★		
A4.2.14	★★★		
A4.2.15	★★		
A4.2.16	★★		
A4.2.17	★★		
A4.2.18	★★★		

節末問題 4.1，節末問題 4.2

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.1.1	★★		
A4.1.2	★★		
A4.1.3	★★		
A4.1.4	★★★		
A4.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.2.1	★★		
A4.2.2	★★★		
A4.2.3	★★		
A4.2.4	★★		
A4.2.5	★★		

章末問題 4

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.1	★★★		
A4.2	★★		
A4.3	★★★★		
A4.4	★★★		
A4.5	★★★★		

チェック例

○ · · · 考え方を理解し，解くことができた．　△ · · · 理解が不十分である．　× · · · 解くことができなかった．

4.1　約数と倍数

問題 A4.1.1　★★　解答 p.275　【倍数の判定法】

一の位と十の位の数字がわからない 5 桁の自然数 317□□ に，それぞれ数を入れると，9 の倍数となる．このとき，5 桁の自然数が最小となるものを求めよ．

問題 A4.1.2 ★★ 解答 p.275 【自然数となる条件】

(1) n を自然数とする．$\sqrt{27000n}$ が自然数となるような最小の n を求めよ．

(2) $\frac{n}{6}$，$\frac{n^2}{196}$，$\frac{n^3}{1323}$ がすべて自然数となるような最小の自然数 n を求めよ．

問題 A4.1.3 ★★ 解答 p.276

▶ 節末 A4.1.1 【約数の個数と自然数】

(1) 360 の正の約数の個数と，正の約数の総和を求めよ．

(2) 18 の倍数のうち，正の約数の個数が 9 個である自然数 n をすべて求めよ．

(3) 400 以下の自然数のうち，正の約数が 15 個である自然数の個数をすべて求めよ．

問題 A4.1.4 ★★ 解答 p.277

▶ 節末 A4.1.2 ▶ 章末 A4.1 【素因数の個数】

(1) $15!$ が 2^k で割り切れるとき，自然数 k の最大値を求めよ．

(2) $50!$ は，末尾には 0 が何個連続して並ぶ整数であるか答えよ．

問題 A4.1.5 ★ 解答 p.277

▶ 節末 A4.1.3【最大公約数・最小公倍数 1】

(1) 次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めよ.

(i) 144, 192　　(ii) 210, 360, 540

(2) n を正の整数とする. n と 20 の最小公倍数が 80 となるような n をすべて求めよ.

問題 A4.1.6 ★★ 解答 p.278　【最大公約数・最小公倍数 2】

次の条件を満たす 2 つの自然数 a, b の組をすべて求めよ．ただし，$a < b$ とする．

(1) 和が 180，最大公約数が 15

(2) 積が 400，最小公倍数が 80

問題 A4.1.7 ★★ 解答 p.278

▶ 章末 A4.2 【互いに素に関する証明 1】

n を自然数とする．$n+3$ が 6 の倍数であり，$n+1$ が 8 の倍数であるとき，$n+9$ が 24 の倍数であることを証明せよ．

問題 A4.1.8 ★★★ 解答 p.279

▶ 節末 A4.1.4 ▶ 章末 A4.3 【互いに素に関する証明 2】

a, b を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $a+b$ と ab が互いに素であるとき，a と b も互いに素であることを証明せよ．

(2) a と b が互いに素であるとき，a^2 と b^2 も互いに素であることを証明せよ．

問題 A4.1.9 ★★★ 解答 p.279

▶ 節末 A4.1.5 ▶ 章末 A4.3 【互いに素な自然数の個数】

n 以下の自然数で，n と互いに素である自然数の個数を $f(n)$ とするとき，次の値を求めよ．ただし，p，q，r は異なる素数とする．

(1) $f(75)$　　(2) $f(p^2q)$　　(3) $f\left(2^m\right)$

問題 A4.1.10 ★ 解答 p.280　　【整数の除法と余り】

a, b を整数とする．a を 7 で割ると 4 余り，b を 7 で割ると 5 余る．このとき，次の数を 7 で割った余りを求めよ．

(1) $a+2b$　　(2) ab　　(3) a^4

問題 A4.1.11　★★　解答 p.281　【余りによる場合分け 1】

n を整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) n^2-5n+4 は偶数であることを証明せよ．

(2) n^3+2n+1 を 3 で割った余りが 1 であることを証明せよ．

問題 A4.1.12 ★★★ 解答 p.282　【余りによる場合分け 2】

(1) n を整数とする．このとき，n^2 を 3 で割った余りが 0 または 1 であることを証明せよ．

(2) a，b，c を整数とする．$a^2+b^2=c^2$ のとき，a，b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを証明せよ．

問題 A4.1.13 ★★★ 解答 p.283

【合同式の利用 1】

(1) 2^{50} を 7 で割ったときの余りを求めよ.

(2) 1000^{100} を 14 で割ったときの余りを求めよ.

(3) 456^{456} の一の位の数を求めよ.

問題 A4.1.14 ★★★ 解答 p.284 【合同式の利用 2】

(1) n を整数とする．n^2 を 7 で割った余りをすべて求めよ．

(2) n を自然数とする．合同式を用いて，$7^n + 2 \cdot 5^{2n}$ は 3 の倍数であることを証明せよ．

節末問題 4.1 約数と倍数

節末 A4.1.1 ★★ 解答（節末）p.285

▶ 問題 A4.1.3

1 回目：
2 回目：

正の約数の個数が 12 個である自然数のうち，最も小さい数を求めよ．

節末 A4.1.2 ★★ 解答（節末）p.285

▶ 問題 A4.1.4

1 回目：

2 回目：

$n!$ について，下 4 桁に 0 が 4 個連続して並ぶような最小の自然数 n を求めよ．

節末 A4.1.3 ★★　解答（節末）p.285

▶ 問題 A4.1.5

1 回目：
2 回目：

分数 $\frac{144}{35}$，$\frac{234}{55}$ のいずれに掛けても積が自然数となるような分数のうち，最小のものを求めよ．

節末 A4.1.4 ★★★ 解答（節末）p.286

▶ 問題 A4.1.8

1 回目：
2 回目：

すべての自然数 n について，n と $n+1$ は互いに素であることを証明せよ．

数学 A 4.1

節末 A4.1.5 ★★★ 解答（節末）p.286

▶ 問題 A4.1.9

1 回目：

2 回目：

$\frac{n}{196}$ が 1 より小さい既約分数となるような正の整数 n は全部で何個あるか.

4.2　ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法

問題 A4.2.1 ★　解答 p.287　▶ 節末 A4.2.1【ユークリッドの互除法】

(1) ユークリッドの互除法を用いて，462 と 700 の最大公約数と最小公倍数を求めよ.

(2) ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{871}{1209}$ を既約分数にせよ.

問題 A4.2.2 ★★★ 解答 p.288　　【文字式におけるユークリッドの互除法】

(1) $6n+1$ と $5n+3$ の最大公約数が 13 になるような 70 以下の自然数 n をすべて求めよ.

(2) $7n+4$ と $3n+1$ が互いに素になるような 120 以下の自然数 n は全部でいくつあるか.

問題 A4.2.3 ★★ 解答 p.289

【方程式の整数解 1】

次の不定方程式の整数解を求めよ．

(1) $7x - 3y = 18$　　(2) $39x + 56y = 17$

問題 A4.2.4 ★★ 解答 p.289　【方程式の整数解 2】

不定方程式 $4x + 7y = 1$ の整数解をすべて求めよ．

問題 A4.2.5 ★★★ 解答 p.290

▶ 節末 A4.2.2 【方程式の整数解 3】

不定方程式 $47x + 19y = 1$ の整数解をすべて求めよ．

問題 A4.2.6 ★★★ 解答 p.290　【方程式の整数解 4】

不定方程式 $x+3y+4z=15$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

問題 A4.2.7 ★★★ 解答 p.291 【方程式の整数解 5】

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$，$x \leqq y \leqq z$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

問題 A4.2.8 ★★★ 解答 p.292　　▶ 節末 A4.2.3【方程式の整数解 6】

(1) $x^2-y^2=45$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2) $\sqrt{n^2-63}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ．

問題 A4.2.9 ★★★ 解答 p.293

【方程式の整数解 7】

次の方程式を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(1) $xy + x + 2y = 0$

(2) $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 1$

問題 A4.2.10 ★★★★ 解答 p.294

【方程式の整数解 8】

$2x^2 - 7xy + 3y^2 + 8x - 9y - 5 = 0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ．

問題 A4.2.11 ★★★★ 解答 p.295　▶ 章末 A4.4 【方程式の整数解 9】

方程式 $x^2-2xy+2y^2-2x-2y+4=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

問題 A4.2.12 ★ 解答 p.295 【記数法】

(1) $11001_{(2)}$，$354_{(6)}$ をそれぞれ 10 進法で表せ．

(2) 10 進法で表された数 42 を，2 進法，3 進法，6 進法でそれぞれ表せ．

(3) $2.13_{(5)}$ を 10 進法で表せ．

(4) 10 進法で表された小数 0.625 を 2 進法で表せ．

問題 A4.2.13 ★ 解答 p.296

【n 進法の四則計算】

次の計算をせよ．

(1) $10101_{(2)} + 1110_{(2)}$ (2) $210_{(3)} \times 12_{(3)}$ (3) $543_{(6)} - 312_{(6)}$

問題 A4.2.14 ★★★ 解答 p.296　▶ 節末 A4.2.4 ▶ 節末 A4.2.5 【n 進法の位の数】

自然数 N を 4 進法と 7 進法で表すと，それぞれ 2 桁の数 $ab_{(4)}$ と $ba_{(7)}$ になるとする．このとき a，b の値を求めよ．また，N を 10 進法で表せ．

問題 A4.2.15 ★★ 解答 p.297 【n 進数の利用】

0，1，2 の 3 種類の数字のみを用いて表される自然数を，小さい方から順に並べると，

$$1,\ 2,\ 10,\ 11,\ 12,\ 20,\ 21,\ 22,\ 100,\ \ldots$$

となる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 2102 は小さい方から何番目の数であるかを求めよ．

(2) 小さい方から 87 番目の数を求めよ．

問題 A4.2.16 ★★ 解答 p.297 【部屋割り論法】

赤玉が 6 個，白玉が 4 個，青玉が 3 個入っている箱がある．この箱から玉を取り出すとき，いずれかの色の玉が必ず 3 個以上になるためには，最低何個取り出せばよいか．

問題 A4.2.17 ★★ 解答 p.298　　【ガウス記号を含むグラフ】

$[x]$ を x 以下の最大の整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $[3.2]$，$[-0.7]$，$[2]$，$[\sqrt{7}+1]$ の値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=2[x]$ のグラフをかけ．

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=-[2x]$ のグラフをかけ．

問題 A4.2.18 ★★★ 解答 p.298　【座標空間における点】

座標空間において，A(3, 2, 4) B(4, 3, 0) C(5, 4, 5) を頂点とする三角形は，直角三角形であることを示せ．

節末問題 4.2 ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法

節末 A4.2.1 ★★ 解答（節末）p.299

▶ 問題 A4.2.1

1 回目：
2 回目：

120 と 168 の最大公約数 g を求め，$g = 120m + 168n$ となる整数 m，n の組を 1 つ求めよ．

節末 A4.2.2 ★★★ 解答（節末）p.299

▶ 問題 A4.2.5

1 回目：

2 回目：

方程式 $19x+53y=7$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の中で，$|x-y|$ が最小となるものを求めよ．

節末 A4.2.3 ★★　解答（節末）p.300

▶ 問題 A4.2.8

1 回目：

2 回目：

ある自然数から 35 を引いた数と，36 を加えた数がともに平方数となった．このとき，その自然数を求めよ．

節末 A4.2.4 ★★ 解答（節末）p.300

▶ 問題 A4.2.14

1 回目：
2 回目：

n を 5 以上の整数とする．

(1) 十進法で表された数 $(n+1)^2$ を n 進法で表せ．

(2) 十進法で表された数 $(2n-1)^2$ を n 進法で表したとき，n の位の数を求めよ．

節末 A4.2.5 ★★ 解答（節末）p.300

▶ 問題 A4.2.14

1 回目：
2 回目：

十進法の 1440 を n 進法で表すと $10400_{(n)}$ になった．n の値を求めよ．

章末問題 4 数学と人間の活動

4.3 章末問題 4

章末 A4.1 ★★★ 解答（章末）p.301

▶ 問題 A4.1.4

1 回目：

2 回目：

${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ が 2^n で割り切れるとき，自然数 n の最大値を求めよ．

章末 A4.2 ★★　解答（章末）p.301

▶ 問題 A4.1.7

1 回目：
2 回目：

n を自然数とする．$n+4$ は 5 の倍数であり，$n+9$ は 11 の倍数である．このような自然数 n で 300 より小さいものは何個あるか．

章末 A4.3 ★★★★ 解答（章末）p.302

▶ 問題 A4.1.8 ▶ 問題 A4.1.9

1 回目：
2 回目：

(1) 2 つの自然数 a と b $(a > b)$ が互いに素であるとき，a と $a - b$ も互いに素であることを証明せよ．

(2) 504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数はいくつあるか答えよ．

(3) 504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数の総和を求めよ．

章末 A4.4 ★★★　解答（章末）p.303

▶ 問題 A4.2.11

1 回目：
2 回目：

x についての 2 次方程式 $x^2+2ax+2a-8=0$ が異なる 2 つの整数解をもつような整数 a の値を求めよ.

章末 A4.5 ★★★★ 解答（章末）p.304

6 の約数 1，2，3，6 の和は 6 の 2 倍になっている．このように，正の約数の和がその数の 2 倍に等しいとき，その数を完全数という．p，q を異なる素数として，次の問いに答えよ．

1 回目：
2 回目：

(1) pq の形の完全数をすべて求めよ． (2) p^2q の形の完全数をすべて求めよ．

5 略解

5.1 問題，節末・章末問題の略解

図やグラフ，表，証明などは省略しています．問題，節末・章末問題の略解を載せています．

問題 1.1

A1.1.1 (1) 3　(2) 35　(3) 18　(4) 66

A1.1.2 (1) 170　(2) 100

A1.1.3 26

A1.1.4 (1) 90　(2) 10

A1.1.5 27

A1.1.6 (1) 7　(2) 8

A1.1.7 約数の個数：16　約数の総和：360

A1.1.8 (1) 23　(2) 79

A1.1.9 91

節末 1.1

A1.1.1 (1) 120　(2) 36

A1.1.2 20

A1.1.3 (1) 32　(2) 18　(3) 25　(4) 5

A1.1.4 約数の個数：30　奇数の約数の個数：6

A1.1.5 11

問題 1.2

A1.2.1 (1) 48　(2) 18　(3) 20

A1.2.2 (1) 1440　(2) 3600

A1.2.3 (1) 40320　(2) 8640　(3) 31680

A1.2.4 (1) 57　(2) 41253

A1.2.5 (1) 120　(2) 90　(3) 48　(4) 60

A1.2.6 (1) 720　(2) 144

A1.2.7 (1) 16　(2) 100

A1.2.8 (1) 243　(2) 150

A1.2.9 120

A1.2.10 2

A1.2.11 (1) 35　(2) 4　(3) 18　(4) 288

A1.2.12 (1) 280　(2) 60　(3) 220

A1.2.13 (1) 54　(2) 52

A1.2.14 (1) 280　(2) 70　(3) 35　(4) 210

A1.2.15 (1) 60　(2) 84

A1.2.16 (1) 6720　(2) 10080

A1.2.17 (1) 1716　(2) 360　(3) 400

A1.2.18 (1) 192　(2) 102

A1.2.19 71

A1.2.20 (1) 252　(2) 28　(3) 16

A1.2.21 84

A1.2.22 (1) 45　(2) 21　(3) 165

A1.2.23 (1) 252　(2) 2002　(3) 462

A1.2.24 9

節末 1.2

A1.2.1 (1) 52　(2) 70　(3) 310

A1.2.2 (1) 2880　(2) 144

A1.2.3 210

A1.2.4 (1) 420　(2) 60　(3) 300　(4) 96

A1.2.5 (1) 13　(2) 152

章末 1

A1.1 80

A1.2 8

A1.3 (1) $n = 6$　(2) $n = 13$

A1.4 (1) 1680　(2) 84

A1.5 70

問題 2.1

A2.1.1 (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{1}{4}$

A2.1.2 (1) $\frac{3}{28}$　(2) $\frac{2}{7}$

A2.1.3 (1) $\frac{6}{65}$　(2) $\frac{24}{65}$

A2.1.4 (1) $\frac{5}{14}$　(2) $\frac{5}{8}$

A2.1.5 $\frac{19}{36}$

A2.1.6 (1) $\frac{53}{66}$　(2) $\frac{2}{33}$

A2.1.7 $\frac{7}{24}$

A2.1.8 (1) $\frac{26}{33}$　(2) $\frac{91}{99}$

A2.1.9 (1) $\frac{5}{81}$　(2) $\frac{10}{81}$　(3) $\frac{17}{27}$

節末 2.1

A2.1.1 (1) $\frac{27}{100}$　(2) $\frac{3}{25}$

A2.1.2 (1) $\frac{2}{11}$　(2) $\frac{3}{55}$

A2.1.3 (1) $\frac{3}{44}$　(2) $\frac{3}{11}$　(3) $\frac{41}{55}$

A2.1.4 (1) $\frac{151}{165}$　(2) $\frac{37}{55}$

A2.1.5 (1) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8\cdot 3^n}$　(2) $\frac{3^n-3\cdot 2^n+6}{3^n}$

問題 2.2

A2.2.1 (1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{59}{60}$

A2.2.2 (1) $\frac{18}{55}$　(2) $\frac{27}{55}$

A2.2.3 (1) $\frac{5}{324}$　(2) $\frac{375}{432}$

A2.2.4 $\frac{992}{3125}$

A2.2.5 (1) $\frac{96}{625}$　(2) $\frac{72}{625}$

A2.2.6 (1) $\frac{20}{243}$　(2) $\frac{13}{81}$

A2.2.7 $\frac{5}{16}$

A2.2.8 (1) $\frac{1}{16}$　(2) $\frac{65}{1296}$

A2.2.9 3

A2.2.10 (1) $\frac{4}{7}$　(2) $\frac{3}{11}$

A2.2.11 (1) $\frac{1}{13}$　(2) $\frac{4}{13}$

A2.2.12 $\frac{41}{110}$

A2.2.13 (1) $\frac{37}{1000}$　(2) $\frac{28}{37}$

A2.2.14 $\frac{2}{9}$

A2.2.15 7

A2.2.16 (ii)

A2.2.17 $\frac{12+6\sqrt{3}}{5}$

節末 2.2

A2.2.1 (1) $\frac{41}{128}$　(2) $\frac{81}{256}$

A2.2.2 $\frac{227}{648}$

A2.2.3 $n=4,\ 5$

A2.2.4 $\frac{7}{8}$

A2.2.5 (1) $\frac{5}{16}$　(2) $\frac{39}{8}$

章末 2

A2.1 (1) $\frac{5}{9}$　(2) $\frac{1}{18}$　(3) $\frac{1}{3}$

A2.2 $\frac{35}{512}$

A2.3 $\frac{12}{37}$

A2.4 $n=12$

A2.5 $\frac{4012}{729}$

問題 3.1

A3.1.1 24

A3.1.2 略

A3.1.3 略

A3.1.4 (1) $x = 20^\circ$，$y = 120^\circ$　(2) $x = 125^\circ$，$y = 20^\circ$

A3.1.5 略

A3.1.6 略

A3.1.7 16 : 3

A3.1.8 (1) 9 : 25　(2) 8 : 21

A3.1.9 (1) 略　(2) 略

A3.1.10 (1) $\frac{3}{13}S$　(2) $\frac{4}{13}S$

節末 3.1

A3.1.1 略

A3.1.2 3 : 1

A3.1.3 略

A3.1.4 (1) $x = 3$，$y = 1$　(2) 7 : 1

問題 3.2

A3.2.1 120°

A3.2.2 3

A3.2.3 45°

A3.2.4 (1) $x = 3$　(2) $x = 2$

A3.2.5 略

A3.2.6 $\mathrm{AD} = 6$，$\mathrm{DE} = 2$

A3.2.7 $\mathrm{AB} = 3\sqrt{17}$，$\mathrm{CD} = 5$

A3.2.8 $(21 - 12\sqrt{3})\pi$

A3.2.9 略

A3.2.10 略

A3.2.11 略

A3.2.12 略

節末 3.2

A3.2.1 略

A3.2.2 (1) $2\sqrt{rr'}$　(2) $\frac{rr'}{(\sqrt{r}+\sqrt{r'})^2}$

A3.2.3 略

A3.2.4 略

問題 3.3

A3.3.1 略

A3.3.2 (1) 略　(2) 略

A3.3.3 $f = 32$，$e = 60$，$v = 30$

A3.3.4 4

節末 3.3

A3.3.1 略

A3.3.2 略

A3.3.3 $V = \frac{23\sqrt{2}}{12}$

A3.3.4 (1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$　(2) $\beta = 45^\circ$

章末 3

A3.1 $a_1a_2a_3 : (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$

A3.2 (1) $\sqrt{2}$　(2) $\frac{4}{3}$

A3.3 正四面体，正八面体，正二十面体の 3 種類

A3.4 (1) $\frac{448}{3}$　(2) 72

問題 4.1

A4.1.1 31707

A4.1.2 (1) 30 (2) 42

A4.1.3 (1) 24，1170 (2) 36 (3) 3

A4.1.4 (1) 11 (2) 12

A4.1.5 (1) (i) 48，576 (ii) 30，7560 (2) 16，80

A4.1.6 (1) (15，165)，(75，105) (2) (5，80)

A4.1.7 略

A4.1.8 (1) 略 (2) 略

A4.1.9 (1) 40 (2) p^2q-p^2-pq+p (3) 2^m-2^{m-1}

A4.1.10 (1) 0 (2) 6 (3) 4

A4.1.11 (1) 略 (2) 略

A4.1.12 (1) 略 (2) 略

A4.1.13 (1) 4 (2) 8 (3) 6

A4.1.14 (1) 0，1，2，4 (2) 略

節末 4.1

A4.1.1 60

A4.1.2 20

A4.1.3 $\frac{385}{18}$

A4.1.4 略

A4.1.5 84

問題 4.2

A4.2.1 (1) 最大公約数は 14，最小公倍数は 23100
(2) $\frac{67}{93}$

A4.2.2 (1) $n=2$，15，28，41，54，67 (2) 96

A4.2.3 (1) $x=3k$，$y=7k-6$ (k は整数)
(2) $x=56k-1$，$y=-39k+1$ (k は整数)

A4.2.4 $x=7k+2$，$y=-4k-1$ (k は整数)

A4.2.5 $x=19k-2$，$y=-47k+5$ (k は整数)

A4.2.6 (8，1，1)，(5，2，1)，(2，3，1)，(4，1，2)，(1，2，2)

A4.2.7 (1，3，6)，(1，4，4)，(2，2，2)

A4.2.8 (1) (23，22)，(9，6)，(7，2)
(2) $n=8$，12，32

A4.2.9 (1) (−1，1)，(0，0)，(−3，−3)，(−4，−2)
(2) (6，2)，(4，4)，(2，−2)

A4.2.10 (1，5)，(−7，−1)

A4.2.11 (2，1)，(4，2)，(2，2)，(4，3)

A4.2.12 (1) $11001_{(2)}=25$，$354_{(6)}=142$
(2) $101010_{(2)}$，$1120_{(3)}$，$110_{(6)}$
(3) 2.32 (4) $0.101_{(2)}$

A4.2.13 (1) $100011_{(2)}$ (2) $10220_{(3)}$ (3) $231_{(6)}$

A4.2.14 $a=2$，$b=1$，$N=9$

A4.2.15 (1) 65 (2) 10020

A4.2.16 7

A4.2.17 (1) $[3.2]=3$，$[-0.7=]-1$，$[2]=2$，$[\sqrt{7}+1]=3$
(2) 略 (3) 略

A4.2.18 略

節末 4.2

$\boxed{\textbf{A4.2.1}}$ $g=24$ $(m，n)=(3，-2)$

$\boxed{\textbf{A4.2.2}}$ (−8，3)

$\boxed{\textbf{A4.2.3}}$ 1260

$\boxed{\textbf{A4.2.4}}$ (1) $121_{(n)}$ (2) $n-4$

$\boxed{\textbf{A4.2.5}}$ $n=6$

章末 4

A4.1 $n=2$

A4.2 5 個

A4.3 (1) 略 (2) 144 (3) 36288

A4.4 $a=4$，-2

A4.5 (1) 6 (2) 28

数学 A
5.1

第 II 部

解答

目次（解答）

場合の数（解答） **193**
数え上げの原則（解答） 193
順列・組合せ（解答） 202
章末問題 1（解答） 219

確率（解答） **222**
確率の基本性質（解答） 222
いろいろな確率（解答） 230
章末問題 2（解答） 244

図形の性質（解答） **247**
平面図形の基本（解答） 247
円の性質と作図（解答） 257
空間図形（解答） 267
章末問題 3（解答） 272

数学と人間の活動（解答） **275**
約数と倍数（解答） 275
ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法（解答） 287
章末問題 4（解答） 301

問題一覧 **305**

場合の数（解答）

数え上げの原則（解答）

解答 A1.1.1 ★ 問題 p.7

問題文

100 から 200 までの整数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 5 でも 6 でも割り切れる数　(2) 5 または 6 で割り切れる数

(3) 5 で割り切れるが 6 で割り切れない数　(4) 5 でも 6 でも割り切れない数

100 以上 200 以下の整数全体の集合を U とし，そのうち，5 で割り切れる数，6 で割り切れる数全体の集合をそれぞれ A, B とする．

このとき，$n(U) = 200 - 100 + 1 = 101$

$A = \{5 \cdot 20,\ 5 \cdot 21,\ \cdots,\ 5 \cdot 40\}$, $B = \{6 \cdot 17,\ 6 \cdot 18,\ \cdots,\ 6 \cdot 33\}$ であるから，

$$n(A) = 40 - 20 + 1 = 21, \quad n(B) = 33 - 17 + 1 = 17$$

◀ $5 \times 20 = 100$, $5 \times 40 = 200$ より，$n(A) = 40 - 20 + 1$
また，$6 \times 17 = 102$, $6 \times 33 = 198$ より，$n(B) = 33 - 17 + 1$

(1) 5 でも 6 でも割り切れる数，すなわち，30 で割り切れる数全体の集合は $A \cap B$ であるから，

$$A \cap B = \{30 \cdot 4,\ 30 \cdot 5,\ \cdots,\ 30 \cdot 6\}$$

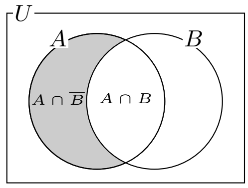
◀ 5 と 6 の最小公倍数は 30 である．

よって，$n(A \cap B) = 6 - 4 + 1 = \mathbf{3}$ **(個)**

(2) 5 または 6 で割り切れる数全体の集合は $A \cup B$ であるから，

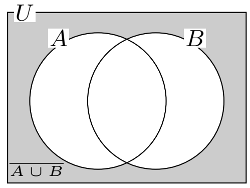
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 + 17 - 3 = \mathbf{35}\ \textbf{(個)}$$

(3) 5 で割り切れるが 6 で割り切れない数全体の集合は $A \cap \overline{B}$ であるから，

◀ 

$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 21 - 3 = \mathbf{18}\ \textbf{(個)}$$

(4) 5 でも 6 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ であるから，

◀ 

$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 101 - 35 = \mathbf{66}\ \textbf{(個)}$$

解答 A1.1.2 ★ 問題 p.8

問題文

200 人の学生を対象に数学の講座と理科の講座の参加状況を調査したところ，数学の講座に参加している学生は 120 人，両方の講座に参加している学生は 50 人，どちらの講座にも参加していない学生は 30 人であった．このとき，次の学生の人数を求めよ．

(1) 少なくとも 1 つの講座に参加している学生

(2) 理科の講座に参加している学生

200 人の学生全体の集合を U，数学の講座に参加している学生の集合を A，理科の講座に参加している学生の集合を B とすると，

$$n(U)=200,\quad n(A)=120,\quad n(A\cap B)=50,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B})=30$$

◀ どちらの講座にも参加していない学生の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ である．

(1) 少なくとも 1 つの講座に参加している学生の集合は $A\cup B$ であるから，その人数は，

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(U)-n(\overline{A\cup B})\\&=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})\\&=200-30=\mathbf{170\ (人)}\end{aligned}$$

◀ ド・モルガンの法則

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より，理科の講座に参加している学生の人数 $n(B)$ は，

$$n(B)=n(A\cup B)-n(A)+n(A\cap B)=170-120+50=\mathbf{100\ (人)}$$

◀ (1) より，$n(A\cup B)=170$

解答 A1.1.3 ★★★ 問題 p.9

問題文

1 から 100 までの整数のうち，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の個数を求めよ．

1 から 100 までの整数の集合を全体集合 U とし，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ，A，B，C とすると，

$$\begin{aligned} A &= \{2\times1,\ 2\times2,\ \ldots,\ 2\times50\}, \\ B &= \{3\times1,\ 3\times2,\ \ldots,\ 3\times33\}, \\ C &= \{5\times1,\ 5\times2,\ \ldots,\ 5\times20\}, \\ A\cap B &= \{6\times1,\ 6\times2,\ \ldots,\ 6\times16\}, \\ B\cap C &= \{15\times1,\ 15\times2,\ \ldots,\ 15\times6\}, \\ C\cap A &= \{10\times1,\ 10\times2,\ \ldots,\ 10\times10\}, \\ A\cap B\cap C &= \{30\times1,\ 30\times2,\ \ldots,\ 30\times3\} \end{aligned}$$

したがって，

$$n(A)=50,\quad n(B)=33,\quad n(C)=20,$$

$$n(A\cap B)=16,\quad n(B\cap C)=6,\quad n(C\cap A)=10,\quad n(A\cap B\cap C)=3$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) =& n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A) \\ &+n(A\cap B\cap C) \\ =& 50+33+20-16-6-10+3=74 \end{aligned}$$

よって，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の集合は，$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$ であるから，求める個数は，

◀ ド・モルガンの法則 $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

$$n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)=100-74=\mathbf{26}\ \textbf{(個)}$$

解答 A1.1.4 ★★★ 問題 p.10

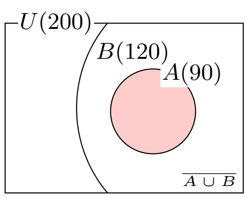
問題文

集合 U とその部分集合 A，B に対して，$n(U)=200$，$n(A)=90$，$n(B)=120$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A\cap B)$ の最大値　　(2) $n(A\cap B)$ の最小値

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=90+120-n(A\cup B)=210-n(A\cup B)$$

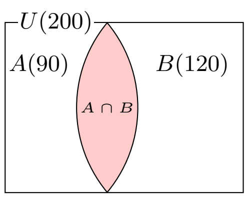
(1) $n(B)>n(A)$ であるから，$n(A\cup B)$ が最小となるのは $B\supset A$ のときである．
したがって，右の図より，$n(A\cup B)=n(B)=120$
よって，$n(A\cap B)$ **の最大値は，**$210-120=\mathbf{90}$



◀ このとき，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ の要素の個数が最大である．

◀ $n(A\cap B)=210-n(A\cup B)$

(2) $n(A)+n(B)>n(U)$ であるから，$n(A\cup B)$ が最大となるのは $A\cup B=U$ のときである．
したがって，右の図より，$n(A\cup B)=n(U)=200$
よって，$n(A\cap B)$ **の最小値は，** $210-200=\mathbf{10}$



◀ $A\cup B=U$，すなわち，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$

◀ $n(A\cap B)=210-n(A\cup B)$

解答 A1.1.5 ★ 問題 p.11

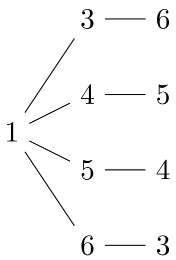
問題文

大中小の 3 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 10 になる数の組は何通りあるか．

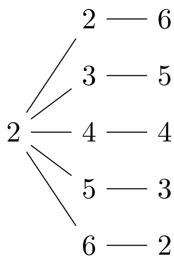
左から順に，大，中，小のさいころとし，樹形図をかく．

◀ 重複や漏れのないように注意すること．

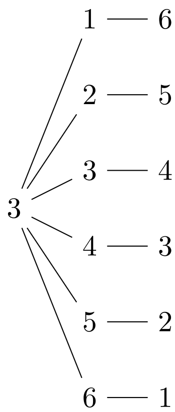
4 通り



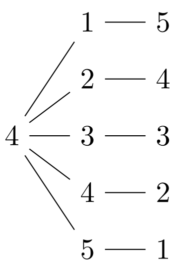
5 通り



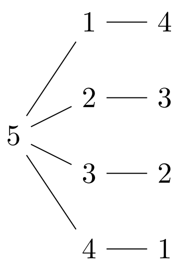
6 通り



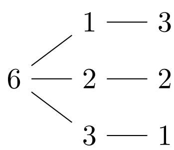
5 通り



4 通り



3 通り



樹形図より，$4+5+6+5+4+3=$ **27 (通り)**

解答 A1.1.6 ★ 問題 p.12

問題文

(1) 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 5 の倍数となる場合は何通りあるか．

(2) 英語の参考書 a，b，c，d の 4 冊から 1 冊と，理科の参考書 x，y の 2 冊から 1 冊，合計 2 冊の参考書を選ぶ方法は何通りあるか．

(1) 大小 2 個のさいころの目がそれぞれ x，y であることを $(x,\ y)$ で表す．目の和が 5 の倍数となるのは，目の和 $x+y$ が次の 2 つの場合である．

(i) $x+y=5$ のとき

$(x,\ y)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$より，4 通り

(ii) $x+y=10$ のとき

$(x,\ y)=(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)$ より，3 通り

◀「大小 2 個」という区別があるから，例えば，$(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$ は異なる目の出方であると考える．

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

よって，(i)，(ii) は同時に起こらないから，和の法則より，$4+3=$ **7 (通り)**

(2) a，b，c，d の 4 冊から 1 冊を選ぶ方法は 4 通りあり，それぞれの場合について，x，y の 2 冊から 1 冊を選ぶ方法は 2 通りずつある．

よって，合計 2 冊の参考書を選ぶ方法は，積の法則より，$4\times 2=$ **8 (通り)**

解答 1.1

One math

解答 A1.1.7 ★★ 問題 p.13

問題文

120 の正の約数の個数とその総和を求めよ．

120 を素因数分解すると，$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

$$(3+1)\times(1+1)\times(1+1) = 16$$

◀ 積の法則を用いる．

より，約数の個数は，**16 個**

また，約数の総和は，

$$\left(1+2+2^2+2^3\right)(1+3)(1+5) = 15\times 4\times 6 = \mathbf{360}$$

解答 A1.1.8 ★★ 問題 p.14

問題文

硬貨の枚数が次のようなとき，硬貨の一部または全部を使って，ちょうど支払える金額の種類は何通りあるか．

(1) 500 円硬貨が 1 枚，100 円硬貨が 2 枚，10 円硬貨が 3 枚

(2) 500 円硬貨が 2 枚，100 円硬貨が 5 枚，10 円硬貨が 4 枚

(1) 500 円硬貨 1 枚の使い方は，0，1 枚の 2 通り

100 円硬貨 2 枚の使い方は，0 ～ 2 枚の 3 通り

10 円硬貨 3 枚の使い方は，0 ～ 3 枚の 4 通り

したがって，$2\times 3\times 4 = 24$ (通り)

よって，求める総数は，$24 - 1 = \mathbf{23}$ **(通り)**

◀ 「支払える金額」であるから，0 円の場合を引く．

(2) 100 円硬貨 5 枚は 500 円硬貨 1 枚と同じ金額を表すので，500 円硬貨 2 枚を 100 円硬貨 10 枚として考え，100 円硬貨 15 枚と 10 円硬貨 4 枚で支払える金額を求める．

◀ もとの 100 円硬貨 5 枚と，500 円硬貨を 100 円硬貨として考えた 10 枚とを合わせた，合計 15 枚と考える．

100 円硬貨 15 枚の使い方は，0 ～ 15 枚の 16 通り

10 円硬貨 4 枚の使い方は，0 ～ 4 枚の 5 通り

したがって，$16\times 5 = 80$ (通り)

よって，求める総数は，$80 - 1 = \mathbf{79}$ **(通り)**

◀ 0 円の場合を引く．

解答 A1.1.9 ★★ 問題 p.15

問題文

大，中，小 3 個のさいころを投げるとき，目の積が 5 の倍数となる場合は何通りあるか．

さいころの出る目の総数は，$6\times 6\times 6 = 216$ (通り)

さいころの目の積が 5 の倍数となるのは，3 個のさいころのうち少なくとも 1 つが 5 である場合である．

3 個のさいころの目がすべて 5 以外である場合の数は，

◀ 3 個とも 1，2，3，4，6 の目が出る場合の数を考える．

$$5\times 5\times 5 = 125 \text{ (通り)}$$

よって，求める場合の数は，$216 - 125 = \mathbf{91}$ **(通り)**

解答（節末）A1.1.1 ★★ 節末 p.16

問題文

ある町の住民の一部にアンケートを実施したところ，スポーツが好きと答えた住民は全体の 65% ，読書が好きと答えた住民は全体の 55% ，両方とも好きではないと答えた住民は全体の 15% ，さらに両方とも好きと答えた住民は 42 人であった．アンケートに答えた住民の総数を求めよ．また，スポーツだけが好きと答えた住民の人数を求めよ．

アンケートに答えた住民全体の集合を U，スポーツが好きと答えた住民の集合を A，読書が好きと答えた住民の集合を B とする．
$n(U)=x$ とおくと，

$$n(A)=0.65x,\quad n(B)=0.55x,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B})=0.15x,\quad n(A\cap B)=42$$

◀ 両方とも好きではないと答えた住民の集合は，$\overline{A}\cap\overline{B}$

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$ であるから，

$$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})=x-0.15x=0.85x\cdots\text{(i)}$$

解答 1.1

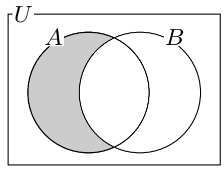
また，

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=0.65x+0.55x-42=1.2x-42\cdots\text{(ii)}$$

(i)，(ii) より，$0.85x=1.2x-42$
したがって，$x=120$

◀ $0.35x=42$

よって，アンケートに答えた住民は **120 人**
また，スポーツだけが好きと答えた住民の人数は $n(A)-n(A\cap B)$ であるから，

◀ 

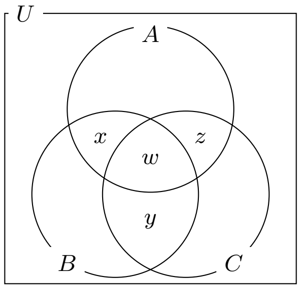
$$n(A)-n(A\cap B)=0.65x-42=0.65\times120-42=\mathbf{36}\ \text{（人）}$$

解答（節末）A1.1.2 ★★★ 節末 p.17

問題文

ある企業の社員 140 人を対象にアンケートを実施したところ，英語が得意な社員は 110 人，中国語が得意な社員は 100 人，スペイン語が得意な社員は 90 人であった．このとき，3 言語すべてが得意な社員の人数は，少なくとも何人であるか．

140 人の社員全体の集合を U，英語，中国語，スペイン語が得意な社員の集合をそれぞれ A，B，C とする．
また，英語と中国語のみ，中国語とスペイン語のみ，スペイン語と英語のみに得意な社員をそれぞれ x 人，y 人，z 人，3 言語すべてが得意な社員を w 人とする．



社員全体について，

$$110+100+90-(x+w)-(y+w)-(z+w)+w \leqq 140$$

◀ $n(A \cup B \cup C) \leqq 140$

すなわち，

$$160-(x+y+z)-2w \leqq 0 \cdots \text{(i)}$$

集合 A，B，C のそれぞれについて，

$$110 \geqq x+z+w \cdots \text{(ii)}, \quad 100 \geqq x+y+w \cdots \text{(iii)}, \quad 90 \geqq y+z+w \cdots \text{(iv)}$$

(ii)〜(iv) の辺々を足し合わせると，

$$300 \geqq 2(x+y+z)+3w$$

すなわち，$2(x+y+z)+3w-300 \leqq 0 \cdots \text{(v)}$
(v) と (i) $\times 2$ の辺々を足し合わせると，$20-w \leqq 0$
したがって，$w \geqq 20$
また，$w=20$ のとき，(i)〜(iv) の不等号を等号におき換えた連立方程式は，負ではない整数解 $(x,\ y,\ z)=(50,\ 30,\ 40)$ をもつ．

◀ 負の整数解をもつとき，$w=20$ は不適である．

よって，3 言語すべてが得意な社員の人数は，**少なくとも 20 人**

解答（節末）A1.1.3 ★★★ 節末 p.18

問題文

50 人の社員に対し，異なる 3 種類の技術 A，B，C を習得しているか調査したところ，全員が A, B, C のうち少なくとも 1 つの技術を習得していた．また，A と B の両方，B と C の両方，A と C の両方を習得している社員の数はそれぞれ 10 人，8 人，12 人であった．さらに，A と B の少なくとも一方，B と C の少なくとも一方，A と C の少なくとも一方を習得している社員の数は，それぞれ 40 人，35 人，45 人であった．このとき，次の社員の人数を求めよ．

(1) 技術 A を習得している社員
(2) 技術 B を習得している社員
(3) 技術 C を習得している社員
(4) A，B，C の全ての技術を習得している社員

技術 A, B, C を習得している社員の集合をそれぞれ A，B，C とすると，

$$n(A\cup B\cup C)=50,\quad n(A\cap B)=10,\quad n(B\cap C)=8,\quad n(C\cap A)=12,$$

$$n(A\cup B)=40,\quad n(B\cup C)=35,\quad n(C\cup A)=45$$

◀ $\overline{A\cup B\cup C}=\varnothing$ より，U を全体集合とすると，
$n(A\cup B\cup C)=n(U)$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より，$n(A)+n(B)=50\cdots$(i)
$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$ より，$n(B)+n(C)=43\cdots$(ii)
$n(C\cup A)=n(C)+n(A)-n(C\cap A)$ より，$n(C)+n(A)=57\cdots$(iii)
(i)〜(iii) の辺々を足し合わせると，

◀ $n(A)+n(B)$
$=n(A\cup B)+n(A\cap B)$

$$n(A)+n(B)+n(C)=75\cdots(\text{iv})$$

(1) (iv) − (ii) より，$n(A)=$ **32 (人)**
(2) (iv) − (iii) より，$n(B)=$ **18 (人)**
(3) (iv) − (i) より，$n(C)=$ **25 (人)**
(4) 全ての技術を習得している社員の数を求めると，

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

であるから，$n(A\cap B\cap C)=50-32-18-25+10+8+12=$ **5 (人)**

解答（節末）A1.1.4 ★★ 節末 p.19

問題文

720 の正の約数の個数は何個あるか．そのうち，奇数の約数は何個あるか．

720 を素因数分解すると，$720=2^4\times3^2\times5$

$$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$$

◀ 積の法則を用いる．

より，約数の個数は，**30 個**
奇数の約数は，$3^2\times5$ の約数であるから，

◀ 2 を因数にもたないとき，奇数の約数となる．

$$(2+1)\times(1+1)=6$$

◀ 積の法則を用いる．

より，奇数の約数の個数は，**6 個**

解答 1.1

解答（節末）A1.1.5 ★★★ 節末 p.20

問題文

赤玉 3 個，白玉 2 個，青玉 1 個，黄玉 1 個がある．この中から 4 個の玉を選ぶ方法は全部で何通りあるか．ただし，選ばれない色があってもよいものとする．

選んだ 4 個の玉に含まれる赤玉，白玉，青玉，黄玉の個数をそれぞれ a，b，c，d とし，$(a,\ b,\ c,\ d)$ で表す．

$0 \leqq a \leqq 3$ であるから，4 個の玉を選ぶ方法は次の 4 つの場合がある．

◀ 数の多い赤玉の個数で場合分けをするとよい．

(i) $a=3$ のとき

赤玉を 3 個選び，残りの 1 個を他の色から選ぶので，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 1,\ 0,\ 0),\ (3,\ 0,\ 1,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0,\ 1)$$

の 3 通り

(ii) $a=2$ のとき

赤玉を 2 個選び，残りの 2 個を他の色から選ぶので，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 2,\ 0,\ 0),\ (2,\ 1,\ 1,\ 0),\ (2,\ 1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 0,\ 1,\ 1)$$

◀ $0 \leqq b \leqq 2$，$0 \leqq c \leqq 1$，$0 \leqq d \leqq 1$ であることに注意すること．

の 4 通り

(iii) $a=1$ のとき

赤玉を 1 個選び，残りの 3 個を他の色から選ぶので，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 1,\ 0),\ (1,\ 2,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

◀ $0 \leqq b \leqq 2$，$0 \leqq c \leqq 1$，$0 \leqq d \leqq 1$ であることに注意すること．

の 3 通り

(iv) $a=0$ のとき

赤玉を選ばず，残りの 4 個を他の色から選ぶので，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 2,\ 1,\ 1)$$

の 1 通り

よって，(i)〜(iv) は同時に起こらないから，$3+4+3+1=\mathbf{11}$ **(通り)**

◀ 和の法則を用いる．

解答 1.1

順列・組合せ（解答）

解答 A1.2.1 ★★ 問題 p.21

問題文

0, 1, 2, 3, 4 の 5 個の数字の中から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次のような数の個数を求めよ．

(1) すべての整数　(2) 奇数　(3) 3 の倍数

(1) 百の位の数字は 0 以外の数であるから，4 通り
そのそれぞれについて，十，一の位に 0 を含めた残りの 4 個の数字から 2 個を選んで並べると，3 桁の整数となる．
よって，求める個数は，$4 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 4 \times (4 \times 3) = \mathbf{48}$ **(個)**

◀ 最高位は 0 にはならないので，百の位から考える．

(2) 3 桁の整数が奇数となるから，一の位は 1, 3 であり，そのそれぞれについて，百の位は 0 以外で一の位の数字を除く数であるから，3 通り
十の位の数字の選び方は 3 通りあるから，

$$2 \times 3 \times 3 = \mathbf{18}\ \textbf{(個)}$$

(3) 3 の倍数となるのは，各位の数の和が 3 の倍数のときである．その 3 個の数の組は，$\{0, 1, 2\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$ の 4 つの場合がある．

◀ 各位の数の和が 3, 6, 9 になる場合を考える．

(i) 選んだ 3 個の数に 0 を含むとき
$\{0, 1, 2\}$, $\{0, 2, 4\}$ の 2 組があり，それぞれの組でできる 3 桁の整数は，百の位は 0 でないから，$2 \times 2! = 4$ (個)
よって，$2 \times 4 = 8$ (個)

(ii) 選んだ 3 個の数に 0 を含まないとき
$\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$ の 2 組があり，この 3 個の数でできる 3 桁の整数は，$3! = 6$ (個)
よって，$2 \times 6 = 12$ (個)

よって，(i), (ii) より，求める個数は，$8 + 12 = \mathbf{20}$ **(個)**

解答 A1.2.2 ★★ 問題 p.22

問題文

男子 5 人，女子 2 人の合計 7 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 女子 2 人が隣り合う　　(2) 女子 2 人ともが隣り合わない

(1) 女子 2 人をひとまとまりにして 1 人として考え，男子 5 人と合わせた 6 個の並び方は，

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{（通り）}$$

◀ 先にひとまとまりにして考え，次に，そのそれぞれについて女子の並び方を考える．

そのそれぞれについて，1 人として考えた女子 2 人の並び方は，$2! = 2$（通り）
よって，女子 2 人が隣り合う並び方は，

$$720 \times 2 = \mathbf{1440} \textbf{（通り）}$$

◀ 積の法則を用いる．

(2) 男子 5 人の並び方は，$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (通り)
男子 5 人の間と両端の 6 箇所のうち，2 箇所に女子 2 人が 1 人ずつ入ればよい．
したがって，6 箇所から 2 箇所選んで並べる順列であるから，

$${}_6\mathrm{P}_2 = 6 \cdot 5 = 30 \text{（通り）}$$

よって，女子 2 人とも隣り合わない並び方は，$120 \times 30 = \mathbf{3600}$ **（通り）**

◀ 積の法則を用いる．

解答 A1.2.3 ★★ 問題 p.23

問題文

男性 4 人，女性 4 人の合計 8 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 並び方の総数　　(2) 両端が男性である

(3) 少なくとも一方の端が女性である

(1) 8 人が 1 列に並ぶ順列であるから，並び方の総数は，

$${}_8\mathrm{P}_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{40320} \textbf{ (通り)}$$

(2) 両端が男性である並び方は，${}_4\mathrm{P}_2 = 4 \cdot 3 = 12$ (通り)
残りの 6 人を並べる順列は，$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ (通り)
よって，両端が男性である並び方は，

◀ 男性 4 人から 2 人が 1 列に並ぶ順列を考える（両端には右端と左端があるから，単に選ぶだけではなく，順序も考える）．

$$12 \times 720 = \mathbf{8640} \textbf{ (通り)}$$

(3) 少なくとも一方の端が女性である並び方は，全体から両端が男性である並び方を引いたものである．
よって，(1)，(2) より，少なくとも一方の端が女性である並び方は，

$$40320 - 8640 = \mathbf{31680} \textbf{ (通り)}$$

◀ $n(A) = n(U) - n(\overline{A})$

解答 1.2

解答 A1.2.4 ★★ 問題 p.24

問題文

1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの数字を並べた数列を，数値順に，1 番目を 12345，2 番目を 12354，$\cdots$，120 番目を 54321 と番号を付ける．

(1) 32415 は何番目にあるか．　(2) 74 番目の数列は何か．

(1) 1□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
2□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
31□□□ の形の数列は，$3! = 6$ (通り)
321□□ の形の数列は，$2! = 2$ (通り)
32415 の形の数列で 1 通り
よって，$24 + 24 + 6 + 2 + 1 =$ **57 (番目)**

◀ 求める 32415 を得ることができたので，ここまでの合計を求める．

(2) 1□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
2□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
3□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
ここまでの合計は，$24 + 24 + 24 = 72$ (通り)
73 番目が 41235 であるから，74 番目の数列は，**41253**

◀ 70 番目に近くなったので，書き出して求める．

解答 A1.2.5 ★ 問題 p.25

問題文

A，B，C，D，E，F の文字が書かれた玉が 1 個ずつあるとき，次の問いに答えよ．
(1) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．
(2) これらの 6 個の玉から 4 個の玉を取り出して円形に並べる方法は何通りあるか．
(3) D，E が隣り合うように円形に並べる方法は何通りあるか．
(4) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

(1) 異なる 6 個の円順列であるから，

$$(6-1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120\ (通り)}$$

(2) 異なる 6 個から 4 個選んだ円順列であるから，

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_4}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4} = \mathbf{90\ (通り)}$$

◀ 4 つずつ重複するので，4 で割る．

(3) D，E をまとめて 1 つの玉と考えると，残りの 4 個と合わせた 5 個の円順列より，$(5-1)!$ 通り
そのそれぞれについて，D，E の並び方は，$2!$ 通り
よって，$(5-1)! \times 2! =$ **48 (通り)**

◀ D，E と E，D の 2 通りがある．

(4) 6 つの円順列において，$(6-1)!$ 通りあるが，首飾りは裏返すことができる．
裏返すと同じものが 2 つずつできるから，

$$\frac{(6-1)!}{2} = \frac{120}{2} = \mathbf{60\ (通り)}$$

◀ 異なる n 個の数珠順列は，$\frac{(n-1)!}{2}$ (通り)

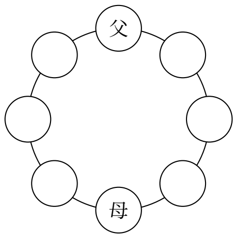
解答 A1.2.6 ★★ 問題 p.26

問題文

両親と息子 3 人，娘 3 人の合計 8 人が円卓に座るとき，次の問いに答えよ．
(1) 両親が正面に向かい合う座り方は何通りあるか．
(2) 男性と女性が交互になる座り方は何通りあるか．

(1) 父の席を固定すると，母の席は正面に 1 通りとなる．残りの 6 人の座り方は，6 箇所に並べる順列であるから，6! 通り
よって，両親が正面に向かい合う座り方は，

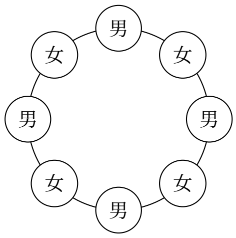
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720}\ \textbf{(通り)}$$



◀ 残りの 6 人の座り方を円順列として考えるのは誤りであるので注意すること．

(2) 男性 4 人が円形に座る座り方は，$(4-1)!$ 通り
そのそれぞれについて，間に入る残りの 4 人の女性の座り方は，4 箇所に並べる順列であるから，4! 通り
よって，男性と女性が交互になる座り方は，

$$(4-1)! \times 4! = \mathbf{144}\ \textbf{(通り)}$$



◀ 間に入る女性 4 人の座り方を円順列として考えるのは誤りであるので注意すること．

解答 A1.2.7 ★★ 問題 p.27

問題文

(1) 集合 $A = \{x,\ y,\ z,\ w\}$ の部分集合は全部で何個あるか．
(2) 0，1，2，3，4 の 5 個の数字の中から，重複を許して 3 個取って 1 列に並べるとき，3 桁の整数は何個できるか．

(1) 集合 A の部分集合の個数は，A の 4 つの要素 x，y，z，w のそれぞれが，部分集合に属しているか否かの決め方の数だけある．
よって，集合 A の部分集合の個数は，

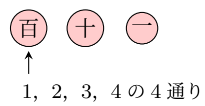
$$2^4 = \mathbf{16}\ \textbf{(個)}$$

◀ 部分集合は，A 自身である $A = \{x,\ y,\ z,\ w\}$ と空集合 $\varnothing$ を含むことに注意すること．

(2) 百の位に並べる数は，1，2，3，4 の 4 通り
そのそれぞれについて，十の位と一の位に並べる数は，0，1，2，3，4 のいずれでもよいから，その個数は，5^2 通り
よって，求める 3 桁の整数の個数は，

$$4 \times 5^2 = \mathbf{100}\ \textbf{(個)}$$

◀ 百の位は 0 ではないことに注意すること．



解答 1.2

One math

解答 A1.2.8 ★★★ 問題 p.28

問題文

5 人が X，Y，Z の 3 つの部屋に入るとき，次の場合のような入り方は何通りあるか．

(1) 空き部屋があってもよい場合　　(2) 空き部屋がないようにする場合

(1) 5 人それぞれが部屋に入る入り方は，X，Y，Z の 3 通りずつあるから，

$$3^5 = \mathbf{243}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 異なる 5 個のものから 3 個取り出して並べる重複順列である．

(2) (1) で求めた総数から，空き部屋の数が 2 つまたは 1 つとなる場合を除けばよい．

◀ 空き部屋が 3 つとなることはない．

(i) 空き部屋が 2 つのとき
空き部屋が 2 つとなるのは，X か Y か Z の 1 つの部屋に 5 人全員が入るときであるから，3 通り
(ii) 空き部屋が 1 つのとき
空き部屋が 1 つとなるとき，空き部屋となる部屋の選び方は，3 通り
そのそれぞれについて，5 人の 2 つの部屋への入り方は，2^5 通り
このうち，1 つの部屋に全員が入るときが 2 通りあるから，1 つの部屋だけが空き部屋になる分け方は

◀ 空き部屋は X か Y か Z の 3 通りとなる．

$$3 \times (2^5 - 2) = 90\ (\text{通り})$$

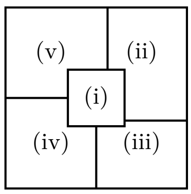
よって，(1) と (i)，(ii) より，求める入り方は，

$$243 - (3 + 90) = \mathbf{150}\ \textbf{(通り)}$$

解答 A1.2.9 ★ 問題 p.29

問題文

右の図において，分けられた領域を異なる 5 色をすべて用いて塗り分ける方法は何通りあるか．



領域は 5 箇所あるから，5 色すべてを用いて塗る場合の数は，

◀ 異なる色を用いて塗り分ける．

$${}_5\mathrm{P}_5 = 5! = \mathbf{120}\ (\text{通り})$$

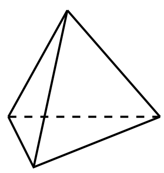
解答 A1.2.10 ★★ 問題 p.30

問題文

正四面体の各面を，互いに異なる 4 色すべてを用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，正四面体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

ある面を 1 色で塗り，その面を底面として固定する．
このとき，残りの側面には残りの 3 色を用いた円順列と考えられるから，

◀ 正四面体はどこから見ても同じ形である．



$$(3 - 1)! = 2! = 2\ (\text{通り})$$

よって，求める塗り分ける方法は，**2 (通り)**

解答 A1.2.11 ★ 問題 p.31

問題文

男子 4 人, 女子 3 人の合計 7 人のグループから 4 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか.

(1) 4 人の選び方

(2) 4 人のうち，男子の特定の 2 人 a, b と女子の 1 人 c を含む選び方

(3) 男子から 2 人，女子から 2 人選ぶ選び方

(4) 男子 3 人，女子 1 人を選んで 1 列に並べる方法

(1) 7 人から 4 人を選ぶ組合せであるから，求める選び方は,

$$_7\mathrm{C}_4 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{35}\ \textbf{(通り)}$$

◀ $_7\mathrm{C}_4 = \frac{_7\mathrm{P}_4}{4!}$

(2) 4 人のうち，男子の 2 人 a, b と女子の 1 人 c が選ばれているので，残りの 4 人から 1 人を選べばよい.

よって，求める選び方は，$_4\mathrm{C}_1 = \mathbf{4}$ **(通り)**

◀ 特定の 3 人がすでに選ばれていると考える．7 人のうち，a, b, c を除いた 4 人から，1 人を選ぶ.

(3) 男子 4 人から 2 人を選ぶ組合せは，$_4\mathrm{C}_2$ 通り

女子 3 人から 2 人を選ぶ組合せは，$_3\mathrm{C}_2$ 通り

よって，求める選び方は，$_4\mathrm{C}_2 \times {_3\mathrm{C}_2} = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} \times \frac{3\cdot2}{2\cdot1} = \mathbf{18}$ **(通り)**

(4) 男子 4 人から 3 人を選ぶ選び方は $_4\mathrm{C}_3$ 通り

そのおのおのに対し，女子 3 人から 1 人選ぶ選び方は $_3\mathrm{C}_1$ 通り

したがって，男子 3 人，女子 1 人の選び方は，$_4\mathrm{C}_3 \times {_3\mathrm{C}_1}$ (通り)

選んだ 4 人を 1 列に並べる並べ方は $_4\mathrm{P}_4$ 通り

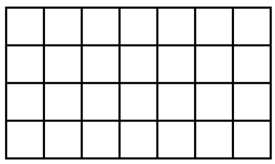
よって，求める並び方は，$({_4\mathrm{C}_3} \times {_3\mathrm{C}_1}) \times {_4\mathrm{P}_4} = \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} \times 3 \times 4\cdot3\cdot2\cdot1 = \mathbf{288}$ **(通り)**

◀ 積の法則を用いる.

解答 A1.2.12 ★★ 問題 p.32

問題文

縦の長さが 4，横の長さが 7 の長方形を，右の図のように縦を 4 等分，横を 7 等分に区切るとする．このとき，この図形に含まれる線分を辺とする次の図形の個数を求めよ.



(1) 長方形の個数　　(2) 正方形の個数

(3) 長方形であって正方形ではないもの

(1) 8 本の縦線から 2 本を選び，5 本の横線から 2 本を選ぶと 1 個の長方形が定まる.

よって，長方形の個数は，$_8\mathrm{C}_2 \times {_5\mathrm{C}_2} = 28 \times 10 = \mathbf{280}$ **(個)**

◀ 積の法則を用いる.

(2) この図形には，1 辺が 1，2，3，4 の 4 種類の正方形が含まれている.

1 辺が 1 の正方形は，縦線，横線から幅が 1 の 2 本を選ぶと，1 個の正方形が定まる.

◀ 隣り合う 2 本を考える.

したがって，縦線 7 通り，横線 4 通りより，$7 \times 4 = 28$ (個)

◀ 積の法則を用いる.

同様に，1 辺が 2 の正方形は，縦線 6 通り，横線 3 通りより，$6 \times 3 = 18$ (個)

1 辺が 3 の正方形は，縦線 5 通り，横線 2 通りより，$5 \times 2 = 10$ (個)

1 辺が 4 の正方形は，縦線 4 通り，横線 1 通りより，$4 \times 1 = 4$ (個)

よって，正方形の個数は，$28 + 18 + 10 + 4 = \mathbf{60}$ **(個)**

◀ 和の法則を用いる.

(3) (1)，(2) より，長方形の個数は 280 個，正方形の個数は 60 個である.

よって，長方形であって正方形ではないものの個数は，$280 - 60 = \mathbf{220}$ **(個)**

解答 A1.2.13 ★★ 問題 p.33

問題文

正十二角形について，次のものを求めよ．

(1) 対角線の本数

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，二等辺三角形となるものの個数

(1) 正十二角形の 12 個の頂点から 2 個の頂点を選び，その 2 点を結ぶと線分が 1 本できる．2 個の頂点の選び方は，${}_{12}\mathrm{C}_2$ 通り

このうち，正十二角形の辺であるものは 12 本あるから，これらを除いたものが対角線の本数である．よって，求める対角線の本数は，${}_{12}\mathrm{C}_2-12=\mathbf{54}$ **(本)**

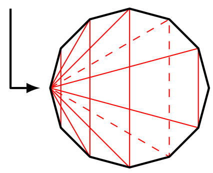
(2) (i) 正三角形でない二等辺三角形の個数

1 個の頂点を選び，向かい合う頂点を結んだ線分を対称軸として，対称である 2 個の頂点と選んだ 1 個の頂点を結ぶと 2 等辺三角形が 1 個できる．

1 個の頂点に対して 5 組の対称な点の組み合わせがあり，正三角形となる組み合わせが 1 組あるから，その個数は，$4\times12=48$ (個)

◀

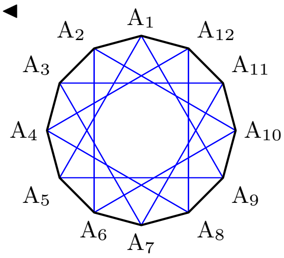
選んだ１つの頂点



(ii) 正三角形の個数

正十二角形の頂点を順に A_1，A_2，...，A_{12} とすると，3 個の頂点を結んでできる正三角形は，$\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_5\mathrm{A}_9$，$\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{A}_6\mathrm{A}_{10}$，$\triangle\mathrm{A}_3\mathrm{A}_7\mathrm{A}_{11}$，$\triangle\mathrm{A}_4\mathrm{A}_8\mathrm{A}_{12}$ の 4 個である．

◀



よって，(i)，(ii) より，求める二等辺三角形の総数は $48+4=\mathbf{52}$ **(個)**

解答 A1.2.14 ★★ 問題 p.34

問題文

8 人を次のようなグループに分ける方法は何通りあるか．

(1) 4 人，3 人，1 人のグループ　　(2) 4 人ずつ A，B のグループ

(3) 4 人ずつ 2 つのグループ　　(4) 4 人，2 人，2 人のグループ

(1) 8 人から 4 人を選び，残りの 4 人から 3 人を選ぶと，残りの 1 人は 1 つのグループになる．

よって，求める分け方の総数は，${}_8\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_3\times1=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1}\times1=\mathbf{280}$ **(通り)**

◀ ${}_8\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_3\times{}_1\mathrm{C}_1$ としてもよい．

(2) 8 人から A グループに入る 4 人を選び，残りの 4 人を B グループとすればよい．

よって，求める分け方の総数は，${}_8\mathrm{C}_4\times1=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times1=\mathbf{70}$ **(通り)**

◀ 積の法則を用いる．

(3) (2) において，A，B グループの区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできる．

よって，求める分け方の総数は，${}_8\mathrm{C}_4\div2!=70\div2=\mathbf{35}$ **(通り)**

◀ 区別しないグループの数の階乗で割る．

(4) 8 人を A，B，C グループの 3 グループに分けるとき，4 人，2 人，2 人と分ける方法は，${}_8\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_2\times1$ (通り)

B，C グループの区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできる．

よって，求める分け方の総数は，$({}_8\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_2\times1)\div2!=420\div2=\mathbf{210}$ **(通り)**

◀ B，C は人数が同じであることから，区別をしないときは同じものとして考える．A は人数が違うことから，常に区別される．

解答 1.2

解答 A1.2.15 ★ 問題 p.35

問題文

次の問いに答えよ．

(1) x，x，x，y，y，z の 6 文字を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

(2) 青玉 6 個と緑玉 3 個の合計 9 個を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

(1) 3 個の x，2 個の y，1 個の z を含む 6 個の順列であるから，

$$\frac{6!}{3!2!1!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1}=\mathbf{60}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 1! は省略してもよい．

(2) 6 個の青玉と 3 個の緑玉を含む 9 個の順列であるから，

$$\frac{9!}{6!3!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=\mathbf{84}\ \textbf{(通り)}$$

【別解】 (1) ${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2=\mathbf{60}$ **（通り）**

(2) ${}_9\mathrm{C}_6=\mathbf{84}$ **（通り）**

解答 A1.2.16 ★★ 問題 p.36

問題文

sunlight のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．

(1) s，u，n がこの順で現れる並び方は何通りあるか．

(2) s が t より左に，g が h より右に現れる並び方は何通りあるか．

(1) s，u，n をすべて X とおき，X，X，X，l，g，h，i，t の 8 文字を 1 列に並べる順列の総数を求めればよい．

よって，求める総数は，

◀ X ○ X X ○○○○
　 s 　 u n

$$\frac{8!}{3!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{6720}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 3 個の同じものを含む 8 個の順列である．3 つの X の場所に，左から順に s，u，n を順番に入れると，求める順列になる．

【別解】 8 文字が入る 8 つの場所を考えて，s，u，n が入る場所を X とし，l，i，g，h，t が入る場所を Y とする．

X，X，X，Y，Y，Y，Y，Y の並び方の総数は，$\frac{8!}{3!5!}=56$（通り）

X には s，u，n が順番に入るから，1 通りであり，Y には l，i，g，h，t が入るから，その順列は $5!=120$（通り）

よって，求める総数は，$56\times1\times120=\mathbf{6720}$ **（通り）**

◀ Y には l，i，g，h，t が並び順を考えて入るので，5! 通り

X Y X Y Y Y X Y
s 　 u 　 　 　 n

(2) s，t を X とおき，g，h を Y とおく．X，X，Y，Y，u，n，l，i の 8 文字を 1 列に並べる順列の総数を求めればよい．

よって，求める総数は，

◀ X，Y とおくとよい．

X ○ Y X ○○ Y ○
s 　 h t 　 　 g

$$\frac{8!}{2!2!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=\mathbf{10080}\ \textbf{(通り)}$$

解答 A1.2.17 ★★ 問題 p.37

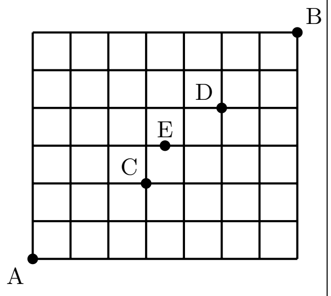
問題文

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．

(1) A 地点から B 地点へ行く道順

(2) 途中で C，D 地点を通る道順

(3) 途中で E 地点を通る道順



A 地点から B 地点へは，右へ 7 区画，上へ 6 区画進む必要がある．右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ と表すと，A 地点から B 地点へは 7 個の → と 6 個の ↑ の順列で表される．

(1) A 地点から B 地点へは，7 個の → と 6 個の ↑ の順列であるから，

$$\frac{13!}{7!6!} = \mathbf{1716} \ (\textbf{通り})$$

◀ 同じものを含む順列を考える．

(2) A 地点から C 地点へは，右へ 3 区画，上へ 2 区画進めばよい．

つまり，3 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{5!}{3!2!} = 10$ (通り)

C 地点から D 地点へは右へ 2 区画，上へ 2 区画進めばよい．

つまり，2 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)

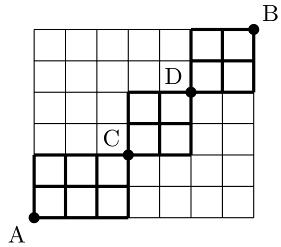
D 地点から B 地点へは右へ 2 区画，上へ 2 区画進めばよい．

つまり，2 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)

よって，A 地点から C，D を経由して B 地点まで行く道順は，

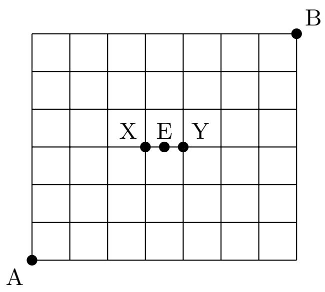
$$10 \times 6 \times 6 = \mathbf{360} \ (\textbf{通り})$$

◀ 下の図のように，A から C まで，C から D まで，D から B までの道順を考える．



◀ 積の法則を用いる．

(3) 右の図のように，E 地点の左隣りの地点を X 地点，右隣りの地点を Y 地点とする．



A 地点から X 地点へは，右へ 3 区画，上へ 3 区画進めばよい．

つまり，3 個の → と 3 個の ↑ の順列であるから，$\frac{6!}{3!3!} = 20$ (通り)

X 地点から Y 地点まで行く道順は，1 通り

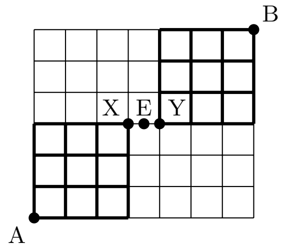
Y 地点から B 地点へは，右へ 3 区画，上へ 3 区画進めばよい．

つまり，3 個の → と 3 個の ↑ の順列であるから，$\frac{6!}{3!3!} = 20$ (通り)

よって，A 地点から E 地点を経由して B 地点まで行く道順は，

$$20 \times 1 \times 20 = \mathbf{400} \ (\textbf{通り})$$

◀ 下の図のように，A から X まで，Y から B までの道順を考える．



【別解】 (1) ${}_{13}\mathrm{C}_6 = \mathbf{1716}$ **(通り)**

(2) ${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 10 \times 6 \times 6 = \mathbf{360}$ **(通り)**

(3) ${}_6\mathrm{C}_3 \times 1 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 20 \times 1 \times 20 = \mathbf{400}$ **(通り)**

◀ 13 個の場所から，↑ が入る 6 個の場所を選ぶ．

解答 1.2

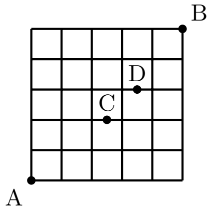
解答 A1.2.18 ★★★ 問題 p.38

問題文

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．

(1) C 地点を通らない道順

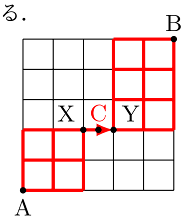
(2) C 地点または D 地点を通る道順



(1) A 地点から B 地点へのすべての道順は，$\frac{10!}{5!5!}=252$ (通り)

C 地点を通る道順は，$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{5!}{2!3!}=60$ (通り)

◀ C 地点を通る道順は，下の図のように，A から X への道順 $\frac{4!}{2!2!}$ 通り，X から Y への道順 1 通り，Y から B への道順 $\frac{5!}{2!3!}$ 通りを掛け合わせたものである．



よって，C 地点を通らない道順は，$252-60=$ **192 (通り)**

(2) D 地点を通る道順は，$\frac{6!}{3!3!}\times\frac{3!}{1!2!}=60$ (通り)

C 地点かつ D 地点を通る道順は，

$$\frac{4!}{2!2!}\times 1\times\frac{3!}{1!2!}=18\ (\text{通り})$$

よって，(1) より，C 地点を通る道順は 60 通りであるから，求める道順は，

$$60+60-18=\mathbf{102}\ (\textbf{通り})$$

解答 A1.2.19 ★★★ 問題 p.39

問題文

9 個の数字 5，5，5，5，6，6，6，7，7 のうち 4 個を用いてできる 4 桁の整数の個数を求めよ．

5，6，7 のいずれかを A，B，C で表す．ただし，A，B，C はすべて異なる数字であるとする．

(i) 4 個の数がすべて同じ $\{A,\ A,\ A,\ A\}$ のとき

A に入る数は 5 のみであるから，1 通り

◀ 5555 の 1 通りのみである．

(ii) 4 個のうち 3 個の数が同じ $\{A,\ A,\ A,\ B\}$ のとき

A に入る数は 5 か 6 であるから，2 通り

B に入る数は A 以外の 2 通り

選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{3!}$ 通り

◀ 4 個の数の順序を考える (同じものを含む順列)．

したがって，$2\times2\times\frac{4!}{3!}=16$ (通り)

(iii) 4 個のうち 2 個ずつ数が同じ $\{A,\ A,\ B,\ B\}$ のとき

◀ 5566，5577，6677

A，B に入る数は，${}_3\mathrm{C}_2$ 通り

◀ 5，6，7 から A，B に入らない数を 1 つ選ぶと考えて，${}_3\mathrm{C}_1$ 通りとしてもよい．

選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{2!2!}$ 通り

したがって，${}_3\mathrm{C}_2\times\frac{4!}{2!2!}=18$ (通り)

(iv) 4 個のうち 2 個の数が同じで，残りの数は異なる $\{A,\ A,\ B,\ C\}$ のとき

A に入る数は，${}_3\mathrm{C}_1$ 通り

◀ B, C に入る数は残りの ${}_2\mathrm{C}_2$ 通り

選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{2!}$ 通り

したがって，${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{4!}{2!}=36$ (通り)

よって，(i)〜(iv) より，$1+16+18+36=$ **71 (個)**

◀ 和の法則を用いる．

解答 A1.2.20 ★★★ 問題 p.40

問題文

青玉 6 個，赤玉 2 個，白玉 1 個の合計 9 個の玉がある．このとき，次の問いに答えよ．
(1) これらの玉を 1 列に並べる方法は何通りあるか．
(2) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．
(3) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

(1) $\frac{9!}{6!2!} = \mathbf{252}$ **(通り)**

(2) 9 個の玉を円形に並べる総数は，1 個の白玉を固定すると，青玉 6 個，赤玉 2 個を 1 列に並べる順列の総数と一致するから，

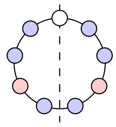
◀ 1 個しかない白玉に注目して固定すると，回転して同じものが含まれなくなる．

$$\frac{8!}{6!2!} = \mathbf{28}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 同じものを含む順列を考える．

(3) (2) の順列のうち，左右対称であるものは，白玉を中心として片側に青玉 3 個，赤玉 1 個を 1 列に並べる順列の総数と一致するから，

◀ 左右対称であるものは，白玉を通る対称軸を中心として，片側である左半分（右半分）の並び方を考えればよい．



$$\frac{4!}{3!} = 4 \text{（通り）}$$

したがって，左右対称ではないものは，$28 - 4 = 24$ (通り)
このうち，首飾りを作ったとき，左右対称ではないものは裏返すと同じものが 2 つずつできるから，$\frac{24}{2} = 12$ (通り)

◀ 2 で割る．

よって，求める首飾りの総数は，$4 + 12 = \mathbf{16}$ **(通り)**

解答 A1.2.21 ★★★ 問題 p.41

問題文

x，y，z，w の 4 個の文字の中から，重複を許して 6 個取り出す組合せは何通りあるか．

取り出す 6 個の文字を ◯ で表し，4 種類の文字の区切りを 3 本の | で表すとする．
6 個の ◯ と 3 本の | を 1 列に並べて，

◀ 4 種類の文字を表すには，$4 - 1 = 3$（本）の | を用いる．

1 本目の | より左側にある ◯ はすべて x，
1 本目と 2 本目の | の間にある ◯ はすべて y，
2 本目と 3 本目の | の間にある ◯ はすべて z，
3 本目の | より右側にある ◯ はすべて w

を表すとする．
このとき，x，y，z，w から重複を許して 6 個取り出す組合せは，6 個の ◯ と 3 本の | を並べる順列に一致する．
よって，求める組合せの総数は，

$$\frac{9!}{6!3!} = \mathbf{84}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 4 種類から 6 個取り出す重複組合せ ${}_4\mathrm{H}_6 = {}_{4+6-1}\mathrm{C}_6$

【別解】 ◯ と | の個数を合わせた $6 + 3 = 9$（個）の場所から，◯ が入る 6 個の場所を選ぶと考えられるから，

$${}_9\mathrm{C}_6 = {}_9\mathrm{C}_3 = \mathbf{84}\ \textbf{(通り)}$$

解答 A1.2.22 ★★★★ 問題 p.42

問題文

次の式を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何通りあるか.

(1) $x+y+z=8,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$　(2) $x+y+z=8,\ x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$

(3) $x+y+z \leqq 8,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$

(1) 求める組の総数は，8 個の ◯ と 2 本の | の並び方を考えると，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_2 = \mathbf{45}\ \textbf{(通り)} $$

◀ 10 個の場所から，◯ が入る 8 個の場所を選ぶ.

◀ $\frac{10!}{8!2!}$

(2) 8 個の ◯ のうち，先に 3 個の ◯ を 1 個ずつ $x,\ y,\ z$ に割り振ると考え，残りの 5 個の ◯ を $x,\ y,\ z$ で割り振ればよい．つまり，求める組の総数は，5 個の ◯ と 2 本の | の並び方を考えると，${}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = \mathbf{21}$ **(通り)**

◀ ◯|◯|◯◯◯ のとき，$x = 1+1,\ y = 1+1,\ z = 3+1$

(3) 求める組の総数は，8 個の ◯ と 3 本の | を 1 列に並べて，

1 本目の | より左側にある ◯ の個数は x の値，
1 本目と 2 本目の | の間にある ◯ の個数は y の値，
2 本目と 3 本目の | 間にある ◯ の個数は z の値

を表すとすると，求める組の総数は，${}_{11}\mathrm{C}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_3 = \mathbf{165}$ **(通り)**

解答 A1.2.23 ★★★ 問題 p.43

問題文

a から e を 0 から 9 までの整数とするとき，次の条件を満たす $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ の組は何通りあるか.

(1) $a<b<c<d<e$　(2) $a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$　(3) $a<b \leqq c<d<e$

(1) 0 から 9 までの 10 個の数から異なる 5 個を選び，小さい数から順に $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ とすればよいから，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_5 = \mathbf{252}\ \textbf{(通り)} $$

◀ 例えば 1，3，5，6，9 を選ぶとき，$a=1,\ b=3,\ c=5,\ d=6,\ e=9$ と対応させる.

(2) 0 から 9 までの 10 個の数から重複を許して 5 個を選び，小さい数から順に $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ とすればよい.
よって，求める組の総数は 5 個の ◯ と 9 本の | を並べる順列に一致するから，

$$ {}_{14}\mathrm{C}_5 = \mathbf{2002}\ \textbf{(通り)} $$

◀ 10 種類の数から 5 個を取る重複組合せの数であるから，

$$ {}_{10}\mathrm{H}_5 = {}_{10+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_{14}\mathrm{C}_5 $$

また，同じものを含む順列として，$\frac{14!}{5!9!}$ でも求められる.

(3)　(i) $a<b=c<d<e$ のとき
0 から 9 までの 10 個の数から異なる 4 個を選び，小さい数から順に $a,\ b$ と $c,\ d,\ e$ とすればよいから，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_4 = 210\ (\text{通り}) $$

◀ $b=c$ となるから，異なる 4 個の数を選べばよい.

(ii) $a<b<c<d<e$ のとき
(1) より，${}_{10}\mathrm{C}_5 = 252$ (通り)

よって，(i)，(ii) より，$210+252 = \mathbf{462}$ **(通り)**

解答 1.2

One math

解答 A1.2.24 ★★★ 問題 p.44

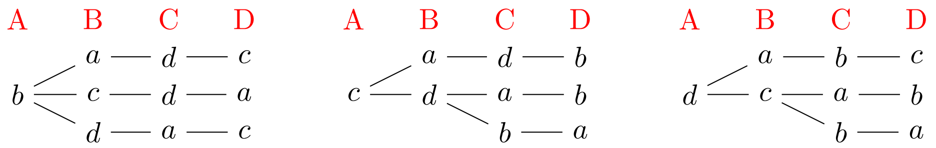
問題文

4 人の生徒が異なるおもちゃを持ち寄り，それらを 1 つずつ分配する．このとき，すべての生徒が自分の持ち寄ったおもちゃとは違うおもちゃを受け取る場合は何通りあるか．

生徒を A，B，C，D とし，おもちゃをそれぞれ a，b，c，d とする．このとき，求める場合の数は，4 人の生徒を 1 列に並べた順列のうち，生徒が自分の持ち寄ったおもちゃ k $(k = a,\ b,\ c,\ d)$ を受け取らないものの個数に等しい．

条件を満たす順列は次のように，**9 通り**

◀ 与えられた条件より，生徒 A は a のおもちゃは受け取らない．



よって，求める場合の数は，**9 通り**

解答（節末）A1.2.1 ★★★　節末 p.45

問題文

6 個の数字 0，1，2，3，4，5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 偶数の個数を求めよ．
(2) 234 以上の整数の個数を求めよ．
(3) これらを小さい順に並べたとき，第 45 番目にある整数を求めよ．

(1)　(i) 一の位が 0
百，十の位に残りの 5 個の数字から 2 個選んで並べればよいので，その個数は，${}_5\mathrm{P}_2 = 5 \cdot 4 = 20$ (個)
(ii) 一の位が 2 または 4 のとき
一の位は 2，4 の 2 通りあり，そのそれぞれについて，百の位は 0 以外で一の位の数を除く 4 通りある．十の位は百の位と一の位の数以外の 4 通りあるから，その個数は，$4 \times 4 \times 2 = 32$ (個)

◀ 一の位が 0 のとき，最高位は 0 にならない．

◀ 最高位は 0 にはならないので注意すること．

よって，(i)，(ii) より，求める個数は，$20 + 32 =$ **52 (個)**

(2)　(i) 百の位が 2，十の位が 3 のとき
一の位は 4，5 の 2 通り
(ii) 百の位が 2，十の位が 4，5 のとき
一の位は 4 通りずつあるから，$2 \times 4 = 8$ (個)
(iii) 百の位が 3，4，5 のとき
残りの位は ${}_5\mathrm{P}_2$ 通りずつあるから，

$$3 \times {}_5\mathrm{P}_2 = 3 \times 5 \cdot 4 = 60 \text{ (個)}$$

◀ 23□

◀ 24□，25□

◀ 3□□，4□□，5□□

よって，(i)〜(iii) より，求める個数は，$2 + 8 + 60 =$ **70 (個)**

(3) 百の位が 1 である整数は，${}_5\mathrm{P}_2 = 5 \cdot 4 = 20$ (個)
百の位が 2 である整数も同様に，20 (個)
したがって，第 45 番目にある整数は，百の位が 3 である整数のうち，小さいものから 5 番目の整数である．
百の位が 3，十の位が 0 のものが 4 個あるので，310 が第 45 番目となる．
よって，求める整数は，**310**

◀ 1□□

◀ 2□□

◀ 301，302，304，305 の 4 個ある．

解答 1.2

解答（節末）A1.2.2 ★★★　節末 p.46

問題文

大人 4 人，子供 3 人がいるとするとき，次の並び方は何通りあるか．

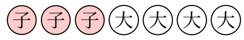
(1) 子供のうち 2 人だけが隣り合うように 7 人を 1 列に並べる．

(2) 子供の両隣りが必ず大人になるように 7 人を円形に並べる．

(1) すべての場合から，「子供 3 人が隣り合う場合」と「子供が隣り合わない場合」を引けばよい．

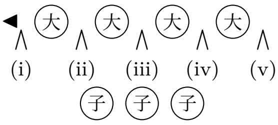
7 人の並び方は，$7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$ (通り)

子供 3 人が隣り合うような並び方は，



$$5! \times 3! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \times 3\cdot2\cdot1 = 720 \text{ (通り)}$$

子供が隣り合わない並び方は，大人 4 人の間と両端の 5 箇所のうち，3 箇所に子供 3 人が 1 人ずつ入ればよい．



大人の並び方は，$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$ (通り)

子供 3 人の並び方は，5 箇所から 3 箇所選んで並べる順列であるから，

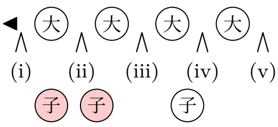
$${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3 = 60 \text{ (通り)}$$

したがって，$24 \times 60 = 1440$ (通り)

よって，求める並び方は，$5040 - (720 + 1440) =$ **2880 (通り)**

【別解】

大人 4 人の間と両端の5 箇所のうち，2 箇所に子供 2 人の組と残りの子供 1 人が入ればよい．



大人の並び方は，$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$ (通り)

子供 2 人の組と子供 1 人が入る場所の選び方は，5 箇所から 2 箇所選んで並べる順列であるから，

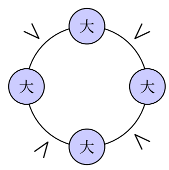
$${}_5\mathrm{P}_2 = 5\cdot4 = 20 \text{ (通り)}$$

子供の並び方は，$3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$ (通り)

よって，求める並び方は，$24 \times 20 \times 6 =$ **2880 (通り)**

(2) 円周上に大人 4 人が並ぶ並び方は，$(4-1)! = 3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$ (通り)

大人と大人の間の 4 箇所に子供 3 人が 1 人ずつ入ればよいから，



$${}_4\mathrm{P}_3 = 4\cdot3\cdot2 = 24 \text{ (通り)}$$

よって，求める並び方は，$6 \times 24 =$ **144 (通り)**

解答 1.2

One math

解答（節末）A1.2.3 ★★　節末 p.47

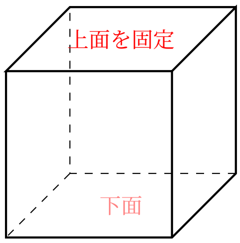
問題文

立方体の各面を，互いに異なる 7 色からすべて違う色を用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，立方体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

色の選び方は，使用する 6 色を 7 色の中から選ぶので，7 通り

◀ 使わない 1 色を考えると，7 通りであることがわかる．

ある面を 1 色で塗り，その面を上面として固定する．このとき，下面には残りの 5 色のうち 1 色を塗るため，塗り方は，5 通り
さらに，側面 4 面は異なる色を用いた円順列と考えられるから，



$(4-1)! = 3! = 6$ (通り)
よって，求める塗り分ける方法は，$7 \times 5 \times 6 = \mathbf{210}$ **(通り)**

解答（節末）A1.2.4 ★★★　節末 p.48

問題文

SUCCESS のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．
(1) 全部で何通りの並び方があるか．
(2) S が 3 つ連続する並び方は何通りあるか．
(3) S が 2 つ以上連続する並び方は何通りあるか．
(4) S が 2 つ以上連続し，かつ，C も 2 つ連続する並び方は何通りあるか．

(1) 3 個の S と 2 個の C と，U，E をそれぞれ 1 個ずつ含む 7 個の順列であるから，

◀ 同じものを含む順列を考える．

$$\frac{7!}{3!2!} = \mathbf{420}\ \textbf{(通り)}$$

(2) SSS をひとまとまりにして 1 つの文字として考えて，$\frac{5!}{2!} = \mathbf{60}$ **(通り)**

◀ SSS の並び方は 1 通りである．

(3) S が連続しない並び方を考える．C，C，U，E を並べると，$\frac{4!}{2!} = 12$ (通り)
これらの 4 文字の間と両端の 5 箇所のうち，3 箇所に S を並べる並び方は，${}_5\mathrm{C}_3$ 通り
したがって，S が続かない並び方は，$12 \times {}_5\mathrm{C}_3 = 12 \times 10 = 120$ (通り)
よって，求める並び方は，$420 - 120 = \mathbf{300}$ **(通り)**

◀ 補集合を用いるとよい．

◀ $\wedge$ C $\wedge$ C $\wedge$ U $\wedge$ E $\wedge$
(i) (ii) (iii) (iv) (v)
S S S

(4) CC が連続する場合の並び方は，CC をひとまとまりにして 1 つの文字として考えて，

$$\frac{6!}{3!} = 120\ (\text{通り})$$

そのうち，S が連続しないものは，CC，U，E を並べ，これらの間と両端の 4 箇所のうち，3 箇所に S を並べるから，

$$3! \times {}_4\mathrm{C}_3 = 24\ (\text{通り})$$

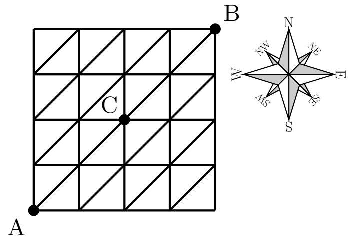
よって，求める並び方は，$120 - 24 = \mathbf{96}$ **(通り)**

◀ 補集合を用いるとよい．

解答（節末）A1.2.5 ★★★★　節末 p.49

問題文

右の図のような格子状の道路がある．次のような場合に，道順は何通りあるか．ただし，東方向，北方向，北東方向にしか進めないものとする．
(1) A 地点から C 地点へ行く道順
(2) A 地点から C 地点を通らないで B 地点へ行く道順



東へ 1 区画進むことを →，北へ 1 区画進むことを ↑，北東へ 1 区画進むことを ↗ と表す．

(1)　(i) → に 2 回，↑ に 2 回進むとき，2 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{4!}{2!2!}=6$ (通り)

◀ 同じものを含む順列を考える．

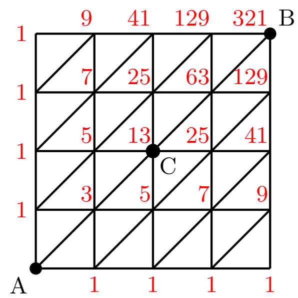
(ii) ↗ に 1 回，→ に 1 回，↑ に 1 回進むとき，→，↗，→ の順列であるから，$3!=6$ (通り)

(iii) ↗ に 2 回進むとき，1 通り

よって，(i)〜(iii) より，求める道順は，$6+6+1=$ **13 (通り)**

(2)全体から，C を通るものを引くことを考える．A 地点から B 地点へのすべての道順は，

◀ 具体的に道順の総数を書き込むことによっても求めることができる．



(i)→ に 4 回，↑ に 4 回進むとき，4 個の → と 4 個の ↑ の順列であるから，$\frac{8!}{4!4!}=70$ (通り)

(ii) → に 1 回，↑ に 3 回，↗ に 3 回進むとき，1 個の → と 3 個の ↑ と 3 個の ↗ の順列であるから，$\frac{7!}{1!3!3!}=140$ (通り)

(iii) → に 2 回，↑ に 2 回，↗ に 2 回進むとき，2 個の → と 2 個の ↑ と 2 個の ↗ の順列であるから，$\frac{6!}{2!2!2!}=90$ (通り)

(iv) → に 3 回，↑ に 1 回，↗ に 1 回進むとき，3 個の → と 1 個の ↑ と 1 個の ↗ の順列であるから，$\frac{5!}{3!1!1!}=20$ (通り)

(v) ↗ に 4 回進むとき，1 通り

したがって，(i)〜(v) より，$70+140+90+20+1=321$ (通り)
C 地点から B 地点への道順は，(1) と同様に考えると，13 通り
これと (1) より，A 地点から C 地点を通り B 地点へ行く道順は，

$$13\times 13=169\ (\text{通り})$$

よって，求める道順は，$321-169=$ **152 (通り)**

◀ 補集合を用いるとよい．

One math

章末問題 1（解答）

解答（章末）A1.1 ★★ 章末 p.50

問題文

分母が 200 であり，分子が 1 から 200 までの 200 個の分数のうち，約分できないものの個数を求めよ．

分母の 200 を素因数分解すると，$200 = 2^3 \cdot 5^2$

したがって，1 から 200 までの整数のうち，2 または 5 で割り切れないものの個数を求めればよい．

◀ 分子が 2 または 5 を素因数にもつときは，約分することができるので不適である．

1 から 200 までの整数全体の集合を U とすると，$n(U) = 200$

U の部分集合のうち，2 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると，

$200 = 2 \cdot 100$，$200 = 5 \cdot 40$ であるから，

$$n(A) = 100, \quad n(B) = 40$$

◀ $A = \{2 \cdot 1,\ 2 \cdot 2,\ \ldots,\ 2 \cdot 100\}$ であり，$B = \{5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ \ldots,\ 5 \cdot 40\}$ である．

また，$A \cap B$ は 10 の倍数全体の集合で，$200 = 10 \cdot 20$ であるから，$n(A \cap B) = 20$

したがって，$A \cup B$ の個数は，

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 100 + 40 - 20 = 120$$

よって，求める個数は，$n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 200 - 120 = \mathbf{80}$

解答（章末）A1.2 ★★★ 章末 p.51

問題文

区別のつかない 7 個のボールを区別のつかない 3 つの箱に入れる．1 個も入らない箱があってもよい場合，ボールの入れ方は全部で何通りあるか．

3 つの箱に入れるボールの個数を x，y，z $(x \leqq y \leqq z)$ とする．

ボールの入れ方は次の 4 つの場合があり，$x + y + z = 7$ を満たす 0 以上の整数 x，y，z の組の総数を求める．

(i) $x = 0$ のとき

$y + z = 7$ $(0 \leqq y \leqq z)$ より，$(y,\ z) = (0,\ 7),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$ の 4 組

(ii) $x = 1$ のとき

$y + z = 6$ $(1 \leqq y \leqq z)$ より，$(y,\ z) = (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3)$ の 3 組

(iii) $x = 2$ のとき

$y + z = 5$ $(2 \leqq y \leqq z)$ より，$(y,\ z) = (2,\ 3)$ の 1 組

(iv) $x \geqq 3$ のとき

$x + y + z = 7$ $(3 \leqq x \leqq y \leqq z)$ より，このような x，y，z の組は存在しない．

◀ $3 \leqq x \leqq y \leqq z$ より，

$$x + y + z \geqq 3x \geqq 9$$

となり，x，y，z の組は存在しない．

したがって，(i)〜(iv) より，x，y，z の組は，$4 + 3 + 1 = 8$ (組)

よって，ボールの入れ方は全部で，**8 通り**

解答（章末）A1.3 ★★★ 章末 p.52

問題文

次の等式を満たす自然数 n の値を求めよ．

(1) ${}_n\mathrm{P}_3 = 2{}_n\mathrm{P}_2 + 10{}_n\mathrm{P}_1$　　(2) $2{}_n\mathrm{C}_4 = 5{}_n\mathrm{C}_3$

(1) ${}_n\mathrm{P}_3 = n(n-1)(n-2)$，${}_n\mathrm{P}_2 = n(n-1)$，${}_n\mathrm{P}_1 = n$ であるから，

◀ ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$n(n-1)(n-2) = 2n(n-1) + 10n$$

これを整理すると，$n(n-6)(n+1) = 0$

よって，$n \geqq 3$ であるから，$n = \mathbf{6}$

◀ ${}_n\mathrm{P}_3$ より，$n \geqq 3$ である．

(2) ${}_n\mathrm{C}_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$，${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$ であるから，

◀ ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$$

したがって，$n(n-1)(n-2)(n-3) = 10n(n-1)(n-2)$

これを整理すると，$n(n-1)(n-2)(n-13) = 0$

◀ 移項して，$n(n-1)(n-2)$ をくくり出す．

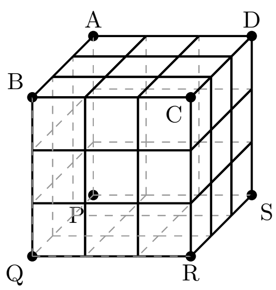
$n \geqq 4$ であるから，$n = \mathbf{13}$

解答（章末）A1.4 ★★★ 章末 p.53

問題文

1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD − PQRS がある．ただし，2 つの正方形 ABCD，PQRS は立方体の向かい合った面であり，AP，BQ，CR，DS はそれぞれ立方体の辺である．

この立方体を 1 辺の長さ 1 の小立方体に区切ったとき，頂点 A から頂点 R へ小立方体の辺を通って行く最短経路について考える．



(1) 最短経路は何通りあるか．

(2) 辺 BC 上の点を通過する最短経路は何通りあるか．

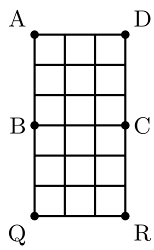
(1) AB 方向に長さ 1 進むことを a，AD 方向に長さ 1 進むことを b，AP 方向に長さ 1 進むことを c で表すと，A から R への最短経路は，3 個の a と 3 個の b，3 個の c の合計 9 個の順列と対応する．

よって，求める最短経路は，$\frac{9!}{3!3!3!} = \mathbf{1680}$ **(通り)**

◀ 同じものを含む順列を考える．

(2) 辺 BC 上の点を通る最短経路は，立方体の面 ABCD と面 BCRQ を取り出した長方形 ABQRCD における，A から R への最短経路と等しい．

◀ 面 ABCD と面 BCRQ を取り出して，1 つの面として考える．



ここで，AQ 方向に長さ 1 進むことを d，AD 方向に長さ 1 進むことを e で表すと，求める最短経路は，6 個の d と 3 個の e の合計 9 個の順列と対応する．

よって，求める最短経路は，$\frac{9!}{6!3!} = \mathbf{84}$ **(通り)**

◀ 同じものを含む順列を考える．

解答（章末）A1.5 ★★★★ 章末 p.54

問題文

サイコロを 4 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする．このとき，$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4$ となる目の出方は何通りあるか．

$$\text{(i)}\ a_1 < a_2 < a_3 < a_4,\quad \text{(ii)}\ a_1 = a_2 < a_3 < a_4,$$
$$\text{(iii)}\ a_1 < a_2 < a_3 = a_4,\quad \text{(iv)}\ a_1 = a_2 < a_3 = a_4$$

の 4 つの場合に分けて考える．

(i) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ となるとき

6 個のサイコロの目から異なる 4 個を選ぶ場合の数は，

$${}_6\mathrm{C}_4 = 15\ (通り)$$

(ii) $a_1 = a_2 < a_3 < a_4$ となるとき

6 個のサイコロの目から異なる 3 個を選ぶ場合の数は，

$${}_6\mathrm{C}_3 = 20\ (通り)$$

(iii) $a_1 < a_2 < a_3 = a_4$ となるとき

(ii) と同様に考えると，20 (通り)

(iv) $a_1 = a_2 < a_3 = a_4$ となるとき

6 個のサイコロの目から異なる 2 個を選ぶ場合の数は，

$${}_6\mathrm{C}_2 = 15\ (通り)$$

よって，(i)〜(iv) より，求める出方の総数は，

$$15 + 20 + 20 + 15 = \mathbf{70\ (通り)}$$

◀ 4 つの場合に分けて考える必要があり手間が掛かるので，別解のように，おき換えを用いて考えてもよい．

【別解】

$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 + 1,\ b_3 = a_3 + 1,\ b_4 = a_4 + 2$ とおくと，

$$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4,\ 1 \leqq a_i \leqq 6\ (i = 1,\ \ldots,\ 4)\ \text{を満たす}\ (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$$

と，

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4,\ 1 \leqq b_i \leqq 8\ (i = 1,\ \ldots,\ 4)\ \text{を満たす}\ (b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$$

とは 1 対 1 に対応する．

よって，これを満たす $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$ の個数は，${}_8\mathrm{C}_4 = \mathbf{70\ (通り)}$

◀ 例えば，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 4$，$a_4 = 5$ のとき，$b_1 = 1$，$b_2 = 3$，$b_3 = 5$，$b_4 = 7$ となる．

◀ 一般に，a，b が整数のとき，

$$a \leqq b \iff a < b + 1$$

であることを利用している．

解答 1.3

確率（解答）

確率の基本性質（解答）

解答 A2.1.1 ★ 問題 p.56

問題文

次の確率を求めよ．
(1) 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 7 となる確率を求めよ．
(2) 4 枚の硬貨を投げて，表 3 枚，裏 1 枚が出る確率を求めよ．

(1) 目の出方は，$6 \times 6 = 36$ (通り)
目の和が 8 となるのは，(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)，(6，1) より，6 通り
よって，求める確率は，$\frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

◀ 表を作るとよい．

和	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(2) 4 枚の硬貨を投げた場合に起こりうるすべての組み合わせは，$2^4 = 16$ (通り)
このうち，表 3 枚，裏 1 枚が出る組み合わせは，(表，表，表，裏)，(表，表，裏，表)，(表，裏，表，表)，(裏，表，表，表) より，4 通り
よって，求める確率は，$\frac{4}{16} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

解答 A2.1.2 ★★ 問題 p.57

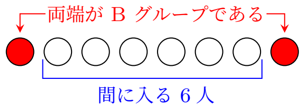
問題文

A グループ 5 人と B グループ 3 人の生徒が次のように並ぶとき，次の場合の確率を求めよ．
(1) 1 列に並ぶとき，両端が B グループの人である確率
(2) 円形に並ぶとき，特定の 2 人 a，b が隣り合う確率

(1) すべての場合の数は，8 人を 1 列に並べる順列であるから，${}_8\mathrm{P}_8 = 8!$ (通り)
両端が B グループの生徒である並び方は，${}_3\mathrm{P}_2$ 通り
残りの 6 人の並び方は，

$${}_6\mathrm{P}_6 = 6! \text{ (通り)}$$

◀ 先に両端に B グループの生徒を並べ，次に間に入る 6 人を考える．



よって，求める確率は，

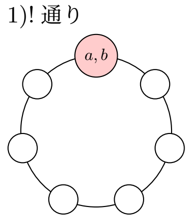
$$\frac{{}_3\mathrm{P}_2 \times 6!}{8!} = \frac{3 \cdot 2 \times 6!}{8!} = \frac{6}{56} = \mathbf{\frac{3}{28}}$$

◀ 6! と 8! は約分できる (6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720 などと計算し，具体的に値を求めなくてよい)．

(2) すべての場合の数は，8 人の円順列であるから，

$$(8-1)! = 7! \text{ (通り)}$$

◀ 異なる n 個の円順列は，$(n-1)!$ 通り



隣り合う特定の 2 人 a，b をまとめて 1 組と考えると，残りの 6 人と合わせた 7 個の円順列より，$(7-1)!$ 通り
そのそれぞれについて，特定の 2 人 a，b の並び方は，2! 通り
よって，求める確率は，$\frac{6! \times 2!}{7!} = \mathbf{\frac{2}{7}}$

解答 A2.1.3 ★ 問題 p.58

問題文

赤玉 9 個と白玉 6 個の合計 15 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 4 個とも赤玉である確率　(2) 赤玉が 3 個，白玉が 1 個である確率

15 個の玉から 4 個の玉を取り出す場合の数は，${}_{15}\mathrm{C}_4$ 通り

◀ 合計 15 個の玉を 赤$_1$，赤$_2$，…，赤$_9$，白$_1$，白$_2$，…，白$_6$ のように，同じ玉を区別して考えている．

(1) 赤玉 9 個から 4 個の玉を取り出す場合の数は，${}_9\mathrm{C}_4$ 通り
よって，求める確率は，

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_4}{{}_{15}\mathrm{C}_4}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{15\cdot14\cdot13\cdot12}=\mathbf{\frac{6}{65}}$$

(2) 赤玉 9 個から 3 個を取り出す場合の数は，${}_9\mathrm{C}_3$ 通り
そのそれぞれについて，白玉 6 個から 1 個を取り出す場合の数は，${}_6\mathrm{C}_1$ 通り
したがって，赤玉 3 個，白玉 1 個を取り出す場合の数は，${}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1$ (通り)
よって，求める確率は，

◀ 赤玉 9 個，白玉 6 個から，赤玉 3 個，白玉 1 個を取り出す場合の数を考える．

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_4}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times6\times\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{15\cdot14\cdot13\cdot12}=\mathbf{\frac{24}{65}}$$

解答 A2.1.4 ★★★ 問題 p.59

問題文

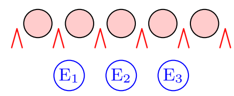
E，M，P，L，O，Y，E，E の 8 文字からいくつかの文字を取り出して，横に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 8 文字を横 1 列に並べるとき，どの 2 つの E も隣り合わない確率

(2) 8 文字の中から 5 文字を取り出して 1 列に並べるとき，どの 2 つの E も隣り合わない確率

(1) E$_1$，M，P，L，O，Y，E$_2$，E$_3$ の 8 文字を 1 列に並べる並び方は，8! 通り
E を除いた 5 文字 M，P，L，O，Y を並べ，さらに 5 文字の間と両端の 6 箇所のうち，3 箇所に E$_1$，E$_2$，E$_3$ が入ればよい．
したがって，どの 2 つの E も隣り合わない並び方は，$5!\times{}_6\mathrm{P}_3$ (通り)
よって，求める確率は，$\frac{5!\times{}_6\mathrm{P}_3}{8!}=\frac{5!\times6\cdot5\cdot4}{8!}=\mathbf{\frac{5}{14}}$

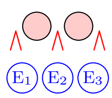
◀ $5!\times{}_6\mathrm{P}_3$



(2) 8 文字の中から 5 文字を取り出して 1 列に並べる場合の数は，${}_8\mathrm{P}_5$ (通り)

(i) 5 文字のうち E が 3 つのとき，${}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3$ (通り)

◀ ${}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3$



(ii) 5 文字のうち E が 2 つのとき，${}_5\mathrm{P}_3\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{P}_2$ (通り)

(iii) 5 文字のうち E が 1 つのとき，${}_5\mathrm{P}_4\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{P}_1$ (通り)

◀ 4 文字の間と両端の 5 箇所から，E が入る 1 箇所を決める順列を考えて，${}_5\mathrm{P}_1$ 通り

(iv) 5 文字のうち E を含まないとき，${}_5\mathrm{P}_5$ 通り

よって，(i) 〜(iv) より，求める確率は，

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3+{}_5\mathrm{P}_3\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{P}_2+{}_5\mathrm{P}_4\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{P}_1+{}_5\mathrm{P}_5}{{}_8\mathrm{P}_5}=\mathbf{\frac{5}{8}}$$

解答 A2.1.5 ★★★ 問題 p.60

問題文

大小 2 個のさいころを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ a，b とするとき，x についての 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつ確率を求めよ．

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の判別式を D とすると，$D=a^2-4b$

2 次方程式が実数解をもつから，$D \geqq 0$ より，$a^2-4b \geqq 0$

したがって，$b \leqq \frac{1}{4}a^2$ であるから，b と $\frac{1}{4}a^2$ の大小を比較する．

a，b はそれぞれ 1 から 6 までの整数の値をとるから，

(i) $a=1$ のとき

$b \leqq \frac{1}{4}$ より，条件を満たす b はない．

(ii) $a=2$ のとき

$b \leqq 1$ より，$b=1$ の 1 通り

◀ $a=2$，$b=1$ のとき，$x^2+ax+b=0$ は重解をもつ．

(iii) $a=3$ のとき

$b \leqq \frac{9}{4}$ より，$b=1$，2 の 2 通り

(iv) $a=4$ のとき

$b \leqq 4$ より，$b=1$，2，3，4 の 4 通り

◀ $a=4$，$b=4$ のとき，$x^2+ax+b=0$ は重解をもつ．

(v) $a=5$ のとき $b \leqq \frac{25}{4}$ より，$b=1$，2，3，4，5，6 の 6 通り

(vi) $a=6$ のとき

$b \leqq 9$ より，$b=1$，2，3，4，5，6 の 6 通り

よって，(i)〜(vi) より，求める確率は，$\frac{1+2+4+6+6}{6^2}=\boldsymbol{\frac{19}{36}}$

解答 A2.1.6 ★ 問題 p.61

問題文

赤玉 6 個と白玉 5 個の合計 11 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 赤玉が 2 個以上取り出される確率　　(2) 4 個の玉がすべて同じ色である確率

11 個の玉から 4 個の玉を取り出す方法の総数は，${}_{11}\mathrm{C}_4=330$ (通り)

(1) 赤玉 6 個から 2 個，白玉 5 個から 2 個を取り出す場合の数は，

◀ 白玉が 3 個以上取り出す場合と白玉が 4 個以上取り出す場合を考えて，余事象を用いて求めてもよい．

$${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 15 \times 10 = 150 \text{ (通り)}$$

赤玉 6 個から 3 個，白玉 5 個から 1 個を取り出す場合の数は，

$${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_1 = 20 \times 5 = 100 \text{ (通り)}$$

赤玉 6 個から 4 個を取り出す場合の数は，${}_6\mathrm{C}_4=15$ (通り) よって，求める確率は，

◀ (赤玉が 2 個以上の確率)
=(赤玉 2 個と白玉 2 個の確率)
＋(赤玉 3 個と白玉 1 個の確率)
＋(赤玉 4 個の確率)

$$\frac{150}{330}+\frac{100}{330}+\frac{15}{330}=\frac{265}{330}=\boldsymbol{\frac{53}{66}}$$

(2) 白玉 5 個から 4 個を取り出す場合の数は，${}_5\mathrm{C}_4=5$ (通り)

◀「すべて白玉である」と「すべて赤玉である」は互いに排反である．

(1) より，赤玉 6 個から 4 個を取り出す場合の数は，15 通り

よって，求める確率は，

◀ $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

$$\frac{5}{330}+\frac{15}{330}=\frac{20}{330}=\boldsymbol{\frac{2}{33}}$$

解答 2.1

解答 A2.1.7 ★★ 問題 p.62

問題文

1 から 120 までの番号をつけた 120 枚のカードがあり，この中から 1 枚のカードを取り出すとき，その番号が 6 の倍数または 7 の倍数である確率を求めよ．

1 枚のカードを取り出す場合の数は，120 通り

カードの番号が 6 の倍数である事象を A，7 の倍数である事象を B とすると，番号が 6 の倍数または 7 の倍数である事象は $A \cup B$ である．

$A = \{6 \cdot 1,\ 6 \cdot 2,\ \ldots,\ 6 \cdot 20\}$ より，$n(A) = 20$ ◀ $6 \times 20 = 120$

$B = \{7 \cdot 1,\ 7 \cdot 2,\ \ldots,\ 7 \cdot 17\}$ より，$n(B) = 17$ ◀ $7 \times 17 = 119$

したがって，事象 A，B が起こる確率はそれぞれ，

$$P(A) = \frac{20}{120},\quad P(B) = \frac{17}{120}$$

また，事象 $A \cap B$ は，カードの番号が 6 の倍数かつ 7 の倍数，すなわち，42 の倍数である事象である． ◀ $A \cap B$ を忘れないように注意すること．

$A \cap B = \{42,\ 84\}$ より，$n(A \cap B) = 2$

ゆえに，事象 $A \cap B$ が起こる確率は，$P(A \cap B) = \frac{2}{120}$

よって，求める確率は，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{20}{120} + \frac{17}{120} - \frac{2}{120} = \boldsymbol{\frac{7}{24}}$$

◀ 和事象の確率を考える．

解答 A2.1.8 ★★ 問題 p.63

問題文

(1) 11 個の部品の中に 3 個の不良品が含まれている．この中から同時に 4 個の部品を取り出すとき，少なくとも 1 個の不良品が含まれる確率を求めよ．

(2) 赤玉 7 個と白玉 5 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉，白玉がともに少なくとも 1 個取り出される確率を求めよ．

(1) 少なくとも 1 個の不良品が含まれる事象を A とすると，余事象 $\overline{A}$ は 4 個とも不良品ではない事象であるから，その確率は， ◀ 「少なくとも」が含まれる事象は，余事象を考えるとよい．

$$P(\overline{A}) = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4} = \frac{70}{330} = \frac{7}{33}$$

◀ $\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4} = \dfrac{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{11\cdot10\cdot9\cdot8} = \dfrac{7}{33}$

よって，求める確率は，$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{33} = \boldsymbol{\frac{26}{33}}$

(2) 玉の取り出し方の総数は，${}_{12}\mathrm{C}_4$ 通り

赤玉，白玉がともに少なくとも 1 個取り出される場合の余事象を考えると，次の 2 つの場合がある．

(i) 4 個すべてが赤玉であるとき，その確率は，$\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \frac{35}{495}$

(ii) 4 個すべてが白玉であるとき，その確率は，$\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \frac{5}{495}$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$1 - \left(\frac{35}{495} + \frac{5}{495}\right) = 1 - \frac{40}{495} = \boldsymbol{\frac{91}{99}}$$

◀ 余事象の確率を考える．

解答 A2.1.9 ★★★ 問題 p.64

問題文

5 人でじゃんけんを行うとき，次の確率を求めよ．
(1) 1 回のじゃんけんで，1 人だけが勝つ確率
(2) 1 回のじゃんけんで，3 人が勝ち，2 人が負ける確率
(3) 1 回のじゃんけんで，あいこになる確率

5 人のじゃんけんの手の出し方は，$3^5 = 243$ (通り)

◀ グー，チョキ，パーの 3 通りを 5 人が出す（重複順列）．

(1) 勝つ 1 人の選び方は，${}_5\mathrm{C}_1$ 通りであり，その勝つ 1 人の手の出し方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りであるから，その場合の数は，

◀ 勝つ 1 人の手の出し方が決まれば，負ける方の手の出し方も 1 通りに定まる．

$$ {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 15 \text{ (通り)} $$

よって，求める確率は，$\frac{15}{243} = \boldsymbol{\frac{5}{81}}$

(2) 勝つ 3 人の選び方は ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りであり，その勝つ 3 人の手の出し方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りであるから，その場合の数は，

$$ {}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30 \text{ (通り)} $$

よって，求める確率は，$\frac{30}{243} = \boldsymbol{\frac{10}{81}}$

(3) あいこになる事象は，勝敗が決まる事象の余事象である．勝敗が決まる事象は，以下の 4 つの場合に対応する．

(i) 1 人だけが勝つとき
(1) より，その確率は，$\frac{5}{81}$
(ii) ちょうど 2 人が勝つとき
(2) と同様に考えると，その確率は，$\frac{10}{81}$

◀ ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 15$ より，$\frac{15}{243} = \frac{5}{81}$

(iii) ちょうど 3 人が勝つとき
(2) より，その確率は，$\frac{10}{81}$
(iv) ちょうど 4 人が勝つとき
(1) と同様に考えると，その確率は，$\frac{5}{81}$

◀ ${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30$ より，$\frac{30}{243} = \frac{10}{81}$

(i)～(iv) より，求める確率は，

$$ 1 - \left(\frac{5}{81} + \frac{10}{81} + \frac{10}{81} + \frac{5}{81} \right) = 1 - \frac{30}{81} = \boldsymbol{\frac{17}{27}} $$

解答 2.1

解答（節末）A2.1.1 ★★ 節末 p.65

問題文

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードから 1 枚取り出し，その数字を記録して元に戻す．この操作を 3 回繰り返し，記録した数を順に x，y，z とする．このとき，次の確率を求めよ．

(1) $\frac{y}{x}$ が整数になる確率　　(2) $x<y<z$ になる確率

(1) x，y の取り出し方は $10^2=100$ (通り)

(i) $x=1$ のとき，y は 1，2，...，10 の 10 通り

(ii) $x=2$ のとき，y は 2 の倍数であり，5 通り

(iii) $x=3$ のとき，y は 3 の倍数であり，3 通り

(iv) $x=4$ のとき，y は 4 の倍数であり，2 通り

(v) $x=5$ のとき，y は 5 の倍数であり，2 通り

(vi) $x=6$ のとき，y は 6 の 1 通り

(vii) $x=7$，8，9，10 のとき，y は $y=x$ の 1 通り

◀ 分母である x の値で場合分けをする．

◀ y は，3，6，9 の 3 通り

(i)〜(vii) より，$\frac{y}{x}$ が整数となる場合の数は，$10+5+3+2+2+1+4\times1=27$ (通り)

◀ 和の法則を用いる．

よって，求める確率は，$\boldsymbol{\frac{27}{100}}$

(2) x，y，z の取り出し方は $10^3=1000$ (通り)

$x<y<z$ となる場合の数は，1 から 10 までの 10 個の数字から異なる 3 個を選び，それらを小さい方から順に x，y，z と定めればよいから，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120\ (\text{通り}) $$

よって，求める確率は，

$$ \frac{{}_{10}\mathrm{C}_3}{10^3}=\frac{120}{1000}=\boldsymbol{\frac{3}{25}} $$

解答 2.1

解答（節末）A2.1.2 ★★ 節末 p.66

問題文

12 人が円形に座るとき，次の確率を求めよ．

(1) 特定の 2 人 X，Y が 1 人おいて隣り合う確率

(2) 特定の 3 人 X，Y，Z が 1 人ずつおいて隣り合う確率

すべての場合の数は，12 人の円順列であるから，$(12-1)! = 11!$ (通り)

(1) X，Y とその間に座る 1 人をまとめて 1 組と考えると，残りの 9 人と合わせた 10 個の円順列より，

$$(10-1)! = 9! \text{ (通り)}$$

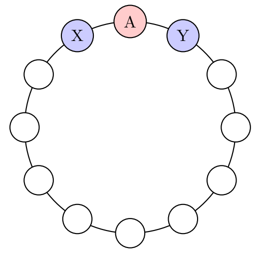
X，Y の 2 人の並び方は，2! 通り

X と Y の間に座る 1 人は残りの 10 人から選ぶので，${}_{10}C_1$ 通り

したがって，X，Y が 1 人おいて隣り合う座り方の総数は，$9! \times 2! \times {}_{10}C_1$ (通り)

よって，求める確率は，$\frac{9!\times 2!\times {}_{10}C_1}{11!} = \mathbf{\frac{2}{11}}$

◀ 間に入る人を A とすると，下の図のようになる．



(2) X，Y，Zとその間に座る 2 人をまとめて 1 組と考えると，残りの 7 人と合わせた 8 個の円順列より，$(8-1)! = 7!$ (通り)

X，Y，Z の 3 人の並び方は，3! 通り

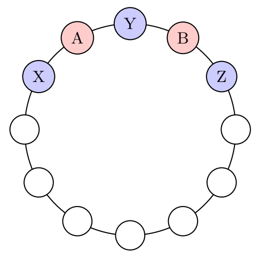
間に座る 2 人は残りの 9 人から選んで並べるので，その場合の数は，${}_9P_2$ 通り

したがって，X，Y，Z が 1 人ずつおいて隣り合う座り方の総数は，

$$7! \times 3! \times {}_9P_2 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，$\frac{7!\times 3!\times {}_9P_2}{11!} = \mathbf{\frac{3}{55}}$

◀ 間に入る人を A，B とすると，下の図のようになる．



解答（節末）A2.1.3 ★★★ 節末 p.67

問題文

赤玉 5 個，白玉 3 個，青玉 4 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 個の玉がすべて同じ色である確率

(2) 3 個とも色が異なる確率

(3) 少なくとも 1 個は青玉である確率

12 個の玉から 3 個の玉を取り出す方法の総数は，${}_{12}C_3 = 220$ (通り)

◀ ${}_{12}C_3 = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$

(1) 3 個とも赤玉のとき，赤玉 5 個から 3 個を取り出す場合の数は，${}_5C_3 = 10$ (通り)

3 個とも白玉のとき，白玉 3 個から 3 個を取り出す場合の数は，${}_3C_3 = 1$ (通り)

3 個とも青玉のとき，青玉 4 個から 3 個を取り出す場合の数は，${}_4C_3 = 4$ (通り)

よって，求める確率は，$\frac{10}{220} + \frac{1}{220} + \frac{4}{220} = \mathbf{\frac{3}{44}}$

(2) 赤玉，白玉，青玉をそれぞれ 1 個ずつ選ぶ場合の数は，

$${}_5C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 5 \times 3 \times 4 = 60 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\frac{60}{220} = \mathbf{\frac{3}{11}}$

(3) 少なくとも 1 個は青玉である事象を A とすると，余事象 $\overline{A}$ は 3 個とも青玉ではない事象である．

青玉ではない玉の個数は，8 個あるから，$\overline{A}$ の場合の数は，${}_8C_3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$ (通り)

よって，求める確率は，$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{56}{220} = \mathbf{\frac{41}{55}}$

◀ 赤玉 5 個と白玉 3 個を合わせた，合計 8 個の玉から 3 個の玉を取り出す．

解答（節末）A2.1.4 ★★ 節末 p.68

問題文

箱の中に赤玉 5 個，白玉 2 個，青玉 4 個が入っている．この箱から同時に 3 個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 玉の色が少なくとも 2 種類ある

(2) 取り出した玉の色がちょうど 2 種類になる

11 個の玉から 3 個の玉を取り出す場合の数は，${}_{11}\mathrm{C}_3$ 通り

(1) 取り出される 3 個の玉の色が少なくとも 2 種類ある事象を A とすると，余事象 $\overline{A}$ はすべて同じ色の玉が取り出される事象である．

事象 $\overline{A}$ が起こる場合の数は，${}_5\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_3$ (通り)

◀ すべてが赤玉，またはすべてが青玉のときである．

よって，求める確率は，

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{{}_5\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_3}{{}_{11}\mathrm{C}_3} = 1 - \frac{14}{165} = \boldsymbol{\frac{151}{165}}$$

◀ 余事象の確率を考える．

(2) 取り出される 3 個の玉の色がすべて異なる確率は，

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_{11}\mathrm{C}_3} = \frac{40}{165}$$

◀ 赤玉，白玉，青玉をそれぞれ 1 個ずつ取り出す．

玉の色が 2 種類である事象の余事象は，玉の色が 1 種類または 3 種類である事象であるから，玉の色がちょうど 2 種類になる確率は，

$$1 - \left(\frac{14}{165} + \frac{40}{165}\right) = \frac{111}{165} = \boldsymbol{\frac{37}{55}}$$

◀ 余事象の確率を考える．

解答（節末）A2.1.5 ★★★ 節末 p.69

問題文

n 人でじゃんけんを 1 回行うとき，次の確率を求めよ．ただし，$n \geqq 5$ とする．

(1) ちょうど 4 人が勝つ　　(2) あいこになる

n 人のじゃんけんの手の出し方は，3^n 通り

◀ グー，チョキ，パーの 3 通りを n 人が出す（重複順列）．

(1) 勝つ 4 人の選び方は，${}_n\mathrm{C}_4$ 通りであり，その勝つ 4 人の手の出し方は，${}_3\mathrm{C}_1$ 通りであるから，その場合の数は，

$${}_n\mathrm{C}_4 \times {}_3\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_4 \times 3 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_4 \times 3}{3^n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \times 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3^n} = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8 \cdot 3^n}}$$

(2) あいこになる事象は，勝敗が決まる事象の余事象である．勝敗が決まるのは，ちょうど 2 種類の手が出る場合である．

2 種類の手の選び方は，${}_3\mathrm{C}_2$ 通りであり，その手の出し方は，$(2^n - 2)$ 通り

◀ 2^n の手の出し方から，n 人すべてが同じ手を出す場合（あいこになる場合）の 2 通りを除く．

よって，求める確率は，

$$1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot (2^n - 2)}{3^n} = \boldsymbol{\frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 6}{3^n}}$$

いろいろな確率（解答）

解答 A2.2.1 ★ 問題 p.70

問題文

(1) さいころを 2 回投げる．このとき，1 回目は偶数の目，2 回目は 4 以下の目が出る確率を求めよ．
(2) X，Y，Z の 3 人がフリースローを投げるとき，成功する確率はそれぞれ $\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$ であるとする．この 3 人がそれぞれ 1 回ずつフリースローを投げたとき，少なくとも 1 人が成功する確率を求めよ．

(1) さいころを投げる 2 回の試行は，独立な試行である．
1 回目に偶数の目が出る確率は，$\frac{3}{6}$
2 回目に 4 以下の目が出る確率は，$\frac{4}{6}$
よって，求める確率は，

$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

◀ 1 回目は 2，4，6 の 3 通り，2 回目は 1，2，3，4 の 4 通りである．
◀ 独立な試行であることから，掛け合わせる．

(2) X，Y，Z の 3 人がフリースローを投げる試行は，独立な試行である．また，少なくとも 1 人が成功するという事象は，3 人とも失敗するという事象の余事象である．
X が失敗する確率は，$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$
Y が失敗する確率は，$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$
Z が失敗する確率は，$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
したがって，3 人とも失敗する確率は，

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$$

よって，少なくとも 1 人が成功する確率は，

$$1-\frac{1}{60}=\mathbf{\frac{59}{60}}$$

◀ 「少なくとも」が含まれる事象は，余事象を考えるとよい．
◀ （失敗する確率）
=1 −（成功する確率）
◀ 失敗する試行も独立な試行であり，掛け合わせる．
◀ 余事象の確率を考える．

解答 A2.2.2 ★ 問題 p.71

問題文

袋 A には赤玉 6 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている．それぞれの袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．
(1) 袋 A から赤玉，袋 B から白玉が出る確率
(2) 2 個の玉の色が同じである確率

袋 A から玉を取り出す試行と，袋 B から玉を取り出す試行は，独立な試行である．
(1) 袋 A から取り出した玉が赤玉である確率は，$\frac{6}{11}$
袋 B から取り出した玉が白玉である確率は，$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$
よって，求める確率は，$\frac{6}{11}\times\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{18}{55}}$

(2) (i) 袋 A から赤玉，袋 B から赤玉が出るとき，その確率は，$\frac{6}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{12}{55}$
(ii) 袋 A から白玉，袋 B から白玉が出るとき，その確率は，$\frac{5}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{15}{55}$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，$\frac{12}{55}+\frac{15}{55}=\mathbf{\frac{27}{55}}$

◀ 袋 A から取り出した玉の色は，袋 B から取り出す玉の色に影響を与えないので，独立な試行である．
◀ 独立な試行であることから，掛け合わせる．
◀ 排反な事象であることから，足し合わせる．

解答 2.2

One math

解答 A2.2.3 ★★ 問題 p.72

問題文

1 個のさいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 1 の目がちょうど 3 回出る確率

(2) 1 の目が出る回数が 1 回以下である確率

(1) 1 個のさいころを 1 回投げるとき，1 の目が出る確率は，$\frac{1}{6}$

◀ 独立な反復試行である．

1 の目が出ない確率は，$\frac{5}{6}$

◀ $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

よって，求める確率は，

$$ {}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{4\times1^3\times5}{6^4}=\mathbf{\frac{5}{324}} $$

◀ $ {}_4C_3\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^3}_{1\text{ が }3\text{ 回}}\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}}_{1\text{ 以外が }1\text{ 回}} $

(2) (i) 1 の目が 0 回出るとき

$$ \left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296} $$

◀ ${}_4C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^4$ としてもよい．${}_4C_0=1$，$\left(\frac{1}{6}\right)^0=1$ である．

(ii) 1 の目が 1 回出るとき

$$ {}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{4\times1\times125}{6^4}=\frac{500}{1296} $$

◀ 4 回のうち 1 の目が 1 回出る場合の数は，${}_4C_1$ 通り

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$ \frac{625}{1296}+\frac{500}{1296}=\mathbf{\frac{375}{432}} $$

◀ 排反な事象であるから，足し合わせる．

解答 A2.2.4 ★★ 問題 p.73

問題文

A，B の 2 人が繰り返しカードゲームで対戦し，先に 3 勝した方が優勝者とする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{2}{5}$ で，引き分けはないものとする．このとき，A が優勝する確率を求めよ．

(i) A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は，$\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$

◀ A が勝つことを ○，A が負けることを × で表し，左から試合順に並べると，

$$ ○○\underbrace{○}_{\text{A が勝つ}} $$

(ii) A が 3 勝 1 敗で優勝する確率は，3 試合目までに 2 勝 1 敗となり，4 試合目に勝つ確率であるから，

$$ {}_3C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}=\frac{72}{5^4}=\frac{72}{625} $$

◀ $\underbrace{○\times○}_{2\text{ 勝 }1\text{ 敗}}\underbrace{○}_{\text{A が勝つ}}$

(iii) A が 3 勝 2 敗で優勝する確率は，4 試合目までに 2 勝 2 敗となり，5 試合目に勝つ確率であるから，

$$ {}_4C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{432}{5^5}=\frac{432}{3125} $$

◀ $\underbrace{○\times\times○}_{2\text{ 勝 }2\text{ 敗}}\underbrace{○}_{\text{A が勝つ}}$

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は，

$$ \frac{8}{125}+\frac{72}{625}+\frac{432}{3125}=\mathbf{\frac{992}{3125}} $$

解答 A2.2.5 ★★★ 問題 p.74

問題文

赤玉 1 個，白玉 2 個，青玉 2 個が入っている袋の中から，1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを 5 回行うとき，次の確率を求めよ．
(1) 赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る確率
(2) 赤玉が出る回数が白玉が出る回数よりも 1 回だけ多くなる確率

この袋から玉を 1 個取り出すとき, 赤玉, 白玉, 青玉が出る確率は, それぞれ $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$ である．

(1) 求める確率は,

$$\frac{5!}{1!2!2!}\times\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{96}{625}}$$

◀ 5 回のうち赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る場合の数は，$\frac{5!}{1!2!2!}$ 通りである．

(2) 赤玉が出る回数が白玉が出る回数よりも 1 回だけ多くなるのは，以下の 3 つの場合がある．

(i) 赤玉が 1 回，白玉が 0 回，青玉が 4 回出るとき

$$\frac{5!}{1!4!}\times\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$$

◀ 5 回のうち赤玉が 1 回，白玉が 0 回，青玉が 4 回出る場合の数は，$\frac{5!}{1!0!4!}$ 通りである．

(ii) 赤玉が 2 回，白玉が 1 回，青玉が 2 回出るとき

$$\frac{5!}{2!1!2!}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{48}{625}$$

(iii) 赤玉が 3 回，白玉が 2 回，青玉が 0 回出るとき

$$\frac{5!}{3!2!}\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{8}{625}$$

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は,

$$\frac{16}{625}+\frac{48}{625}+\frac{8}{625}=\mathbf{\frac{72}{625}}$$

解答 A2.2.6 ★★★ 問題 p.75

問題文

(1) 数直線上の原点にある点 P が，毎回確率 $\frac{1}{3}$ で正の方向に 1 だけ移動し，確率 $\frac{2}{3}$ で負の方向に 2 だけ移動する．6 回の移動後に点 P が原点にある確率を求めよ．
(2) 数直線上の原点にある点 P が，1 個のさいころを投げて，1 か 2 の目が出たときは正の方向に 2 だけ移動し，3 か 4 の目が出たときは負の方向に 1 だけ移動し，5 か 6 の目が出たときは移動しないとする．さいころを 4 回投げたとき，点 P が原点にある確率を求めよ．

(1) x 回正の方向に 1，y 回負の方向に 2 だけ移動したとすると，

$$x+y=6\cdots\text{(i)}$$

◀ 6 回移動することから，$x+y=6$

移動後の位置は，$x-2y=0\cdots\text{(ii)}$
(i)，(ii) を解くと，$x=4$，$y=2$
よって，求める確率は，6 回の移動のうち 4 回正の方向に 1 だけ移動する確率であるので，

◀ 正の方向に 4 回，負の方向に 2 回移動する反復試行である．

$${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{20}{243}}$$

(2) 1 個のさいころを投げるとき，1 か 2 の目が出る事象を A_1，3 か 4 の目が出る事象を A_2，5 か 6 の目が出る事象を A_3，とする．これらの確率は，それぞれ，

$$P(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(A_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(A_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

A_1 が x 回，A_2 が y 回，A_3 が z 回 $(x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$ 起こったとすると，

$$x+y+z=4\cdots\text{(i)}$$

移動後の位置は，$2x-y=0\cdots\text{(ii)}$

◀ $2x=y$

(i)，(ii) より，$x=0$，$y=0$，$z=4$ または $x=1$，$y=2$，$z=1$
よって，求める確率は，

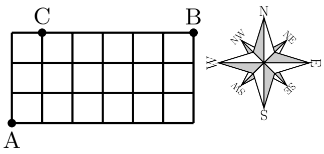
◀ $x\geqq 0$ より，$x=0$ から順に考える．$x=y=0$ のとき，(i) より $z=4$ であり，$x=1$，$y=2$ のとき，(i) より $z=1$ である．

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4+\frac{4!}{1!2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\boldsymbol{\frac{13}{81}}$$

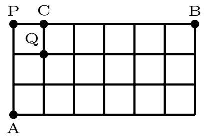
解答 A2.2.7 ★★★ 問題 p.76

問題文

右の図のような格子状の A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，C 地点を通る確率を求めよ．ただし，各交差点において，東，北のいずれの進路も進む確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であり，一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進むものとする．



右の図のように，地点 P，Q をとる．C を通る道順は 2 つの場合があり，その確率はそれぞれ次のようになる．



◀ P 地点を通るか，Q 地点を通るかで場合分けをする．

(i) A から P を通り C に行くとき，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{8}$

(ii) A から Q を通り C に行くとき

A 地点から Q 地点へは，東へ 1 区画，北へ 2 区画進む必要があるから，その確率は，

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

したがって，A から Q を通り C に行く確率は，

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

解答 A2.2.8 ★★★ 問題 p.77

問題文

4 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出る目の最小値が 4 以上である確率　　(2) 出る目の最小値が 4 である確率

(1) 目の最小値が 4 以上であるためには，4 個のさいころの目がすべて 4，5，6 のいずれかであればよい．

よって，求める確率は，$\left(\frac{3}{6}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boldsymbol{\frac{1}{16}}\cdots$(i)

(2) 目の最小値が 4 となるのは，目の最小値が 4 以上である場合から，目の最小値が 5 以上である場合を除いた場合である．

◀ 最小値が k となる確率は，最小値が k 以上の確率から $k+1$ 以上の確率を引く．

目の最小値が 5 以上である確率は，$\left(\frac{2}{6}\right)^4=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}\cdots$(ii)

よって，(i)，(ii) より，求める確率は，$\frac{1}{16}-\frac{1}{81}=\boldsymbol{\frac{65}{1296}}$

解答 A2.2.9 ★★★★ 問題 p.78

問題文

1 個のさいころを 18 回投げるとき，2 の目が何回出る確率が最も大きくなるか.

さいころを 1 回投げたとき，2 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから，さいころを 18 回投げたときに 2 の目が n 回（$0 \leqq n \leqq 18$）出る確率 p_n は，

$$p_n = {}_{18}\mathrm{C}_n \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{18-n} = \frac{18!}{n!(18-n)!} \cdot \frac{5^{18-n}}{6^{18}}$$

◀ 反復試行の確率を考える．また，${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ を用いる．

$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 17$ において，p_{n+1} と p_n の比を求めると，

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \left\{\frac{18!}{(n+1)!(17-n)!} \cdot \frac{5^{17-n}}{6^{18}}\right\} \div \left\{\frac{18!}{n!(18-n)!} \cdot \frac{5^{18-n}}{6^{18}}\right\} \\ &= \frac{n!(18-n)!}{(n+1)!(17-n)!} \cdot \frac{5^{17-n}}{5^{18-n}} = \frac{18-n}{5(n+1)}\end{aligned}$$

◀ p_{n+1} は p_n の n に $n+1$ を代入して求められる．

◀ $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$，$(18-n)! = (18-n) \cdot (17-n)!$，$5^{18-n} = 5^{17-n} \cdot 5$ より，約分する．

(i) $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqq 1$ のとき

$\frac{18-n}{5(n+1)} \geqq 1$ より，$18 - n \geqq 5(n+1)$ であるから，$n \leqq \frac{13}{6}$

したがって，$n = 0,\ 1,\ 2$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ より，$p_n < p_{n+1}$

◀ $n = 0$ のとき，$p_0 < p_1$，$n = 1$ のとき，$p_1 < p_2$，$n = 2$ のとき，$p_2 < p_3$

(ii) $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ のとき

$\frac{18-n}{5(n+1)} < 1$ より，$18 - n < 5(n+1)$ であるから，$n > \frac{13}{6}$

したがって，$n = 3,\ 4,\ \ldots,\ 17$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ より，$p_n > p_{n+1}$

◀ $n = 3$ のとき，$p_3 > p_4$，$n = 4$ のとき，$p_4 > p_5$，$\cdots$，$n = 17$ のとき，$p_{17} > p_{18}$

(i)，(ii) より，$p_2 < p_3 > p_4 > p_5 > \cdots > p_{17} > p_{18}$

よって，2 の目が **3 回出る確率が最も大きい．**

解答 A2.2.10 ★ 問題 p.79

問題文

ある町で行った調査によると，読書が好きな住民は全体の 70%，音楽鑑賞が好きな住民は 55%，どちらも好きな住民は 40% いることがわかった．

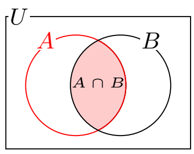
(1) 読書が好きな住民から無作為に 1 人を選んだとき，その住民が音楽鑑賞も好きである確率を求めよ．

(2) 音楽鑑賞が好きな住民から無作為に 1 人を選んだとき，その住民が読書が好きではない確率を求めよ．

この町の住民の中から 1 人を選ぶとき，読書が好きである事象を A，音楽鑑賞が好きである事象を B とすると，

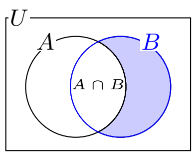
$$P(A) = \frac{70}{100}, \quad P(B) = \frac{55}{100}, \quad P(A \cap B) = \frac{40}{100}$$

(1) 求める確率は，条件付き確率 $P_A(B)$ である．

◀ 

よって，$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{40}{100} \div \frac{70}{100} = \boldsymbol{\frac{4}{7}}$

(2) 求める確率は，条件付き確率 $P_B(\overline{A})$ である．

◀ 

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{55}{100} - \frac{40}{100} = \frac{15}{100}$$

よって，$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{100} \div \frac{55}{100} = \boldsymbol{\frac{3}{11}}$

解答 2.2

解答 A2.2.11 ★★ 問題 p.80

問題文

当たりくじが 4 本入っている 13 本のくじがある．a，b がこの順にくじを 1 本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) a，b がともに当たりくじを引く確率　(2) b が当たりくじを引く確率

a，b が当たりくじを引く事象をそれぞれ A，B とする．

(1) $P(A)=\frac{4}{13}$，$P_A(B)=\frac{3}{12}$ であるから，乗法定理より，求める確率 $P(A\cap B)$ は，

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{4}{13}\times\frac{3}{12}=\mathbf{\frac{1}{13}}$$

◀ $P_A(B)$ は，a が引いたくじが当たりであるとき，残るくじは 12 本あり，その中に当たりくじは 3 本含まれるので，

$$P_A(B)=\frac{4-1}{13-1}=\frac{3}{12}$$

(2) (i) a も b も当たりくじを引くとき

(1) より，$P(A\cap B)=\frac{1}{13}$

(ii) a がはずれくじを引き，b が当たりくじを引くとき

$P(\overline{A})=\frac{9}{13}$，$P_{\overline{A}}(B)=\frac{4}{12}$ であるから，乗法定理より，その確率は，

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\frac{9}{13}\times\frac{4}{12}=\frac{3}{13}$$

◀ $P_{\overline{A}}(B)$ は，a が引いたくじがはずれであるとき，残るくじは 12 本あり，その中に当たりくじは 4 本含まれるので，

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{4}{13-1}=\frac{4}{12}$$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{13}+\frac{3}{13}=\mathbf{\frac{4}{13}}$$

◀ $P(A)=P(B)$ であることがわかる．

解答 A2.2.12 ★★ 問題 p.81

問題文

袋 A には赤玉 5 個と白玉 4 個，袋 B には赤玉 3 個と白玉 6 個が入っている．袋 A から 2 個の玉を同時に取り出して袋 B に入れた後，袋 B から 2 個の玉を同時に取り出すとき，2 個とも白玉である確率を求めよ．

袋 A から取り出す 2 個の玉の色に応じて，次の 3 つの場合がある．

(i) 袋 A から白玉を 2 個取り出すとき

袋 B には赤玉 3 個と白玉 8 個が入っているから，$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_8C_2}{{}_{11}C_2}=\frac{14}{165}$

◀ 袋 A から白玉を 2 個取り出す確率は，$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}$ である．このとき，袋 B には白玉 8 個と赤玉 3 個が入っているから，袋 B から白玉を 2 個取り出す確率は，$\frac{{}_8C_2}{{}_{11}C_2}$ である．

(ii) 袋 A から赤玉と白玉を 1 個ずつ取り出すとき

袋 B には赤玉 4 個と白玉 7 個が入っているから，$\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1}{{}_9C_2}\times\frac{{}_7C_2}{{}_{11}C_2}=\frac{7}{33}$

(iii) 袋 A から赤玉を 2 個取り出すとき

袋 B には赤玉 5 個と白玉 6 個が入っているから，$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_6C_2}{{}_{11}C_2}=\frac{5}{66}$

よって，(i)〜(iii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{14}{165}+\frac{7}{33}+\frac{5}{66}=\mathbf{\frac{41}{110}}$$

解答 A2.2.13 ★★★ 問題 p.82

問題文

ある地域に 2 つの病院 a，b があり，a 病院で実施される検査は全体の 70% である．また，a 病院で実施された検査では 4% の誤判定が含まれており，b 病院で実施された検査では 3% の誤判定が含まれている．2 つの病院で実施された多くの検査の中から，無作為に 1 件の検査を選んだとき，次の確率を求めよ．
(1) 選んだ検査で誤判定が発生している確率
(2) 選んだ検査で誤判定が発生していたとき，それが a 病院で実施されたものである確率

選んだ 1 件の検査が a 病院で実施されたものである事象を A，b 病院で実施されたものである事象を B，誤判定が発生している事象を E とすると，a 病院で実施される検査は全体の 70% であるので，

$$P(A) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}, \quad P(B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

a 病院と b 病院で実施される検査の誤判定率はそれぞれ 4%，3% であるから，

$$P_A(E) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}, \quad P_B(E) = \frac{3}{100}$$

◀ 検査が a 病院で実施されたものであったときに，誤判定が発生する確率 $P_A(E)$ と，検査が b 病院で実施されたものであったときに，誤判定が発生する確率 $P_B(E)$ がわかる．

(1)

$$P(A \cap E) = P(A) \times P_A(E) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{25} = \frac{7}{250},$$
$$P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{9}{1000}$$

よって，求める確率は，

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{7}{250} + \frac{9}{1000} = \mathbf{\frac{37}{1000}}$$

◀ $A \cap E$ と $B \cap E$ は互いに排反である．

(2) 誤判定が発生していたときに，それが a 病院で実施されたものである確率は $P_E(A)$ であるから，

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{7}{250} \div \frac{37}{1000} = \mathbf{\frac{28}{37}}$$

解答 2.2

解答 A2.2.14 ★★★★ 問題 p.83

問題文

3 つの袋 A，B，C があり，袋 A には赤いボール 3 個と青いボール 5 個，袋 B には赤いボール 2 個と青いボール 6 個，袋 C には赤いボール 4 個と青いボール 4 個が入っている．3 つの袋のうち 1 つを無作為に選び，その袋から 1 個のボールを取り出したところ赤いボールであった．このとき，その赤いボールが袋 B から取り出されたものである確率を求めよ．

袋 A を選ぶ事象を A，袋 B を選ぶ事象を B，袋 C を選ぶ事象を C，赤いボールを取り出す事象を W とする．
袋 A，袋 B，袋 C を選ぶ確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ は，すべて $\frac{1}{3}$
それぞれの袋から赤いボールを取り出す条件付き確率は，

$$P_A(W)=\frac{3}{8},\quad P_B(W)=\frac{2}{8},\quad P_C(W)=\frac{4}{8}$$

したがって，赤いボールを取り出す確率は，

$$\begin{aligned}P(W)&=P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W)\\&=P(A)P_A(W)+P(B)P_B(W)+P(C)P_C(W)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{8}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

◀ 乗法定理を用いる．

よって，求める確率は，

$$P_W(B)=\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=\frac{P(B)P_B(W)}{P(W)}=\frac{1}{12}\div\frac{3}{8}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

解答 A2.2.15 ★ 問題 p.84

問題文

2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和の期待値を求めよ．

2 個のさいころ A，B の出た目の和を X とすると，出る和 X の値とその確率は，右の表のようになり，出方は，$6\times6=36$ (通り)
したがって，A，B の出た目の和を X とすると，X のとりうる値とそれぞれの値をとる確率は，下の表のようになる．

A\B	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

◀ 表にまとめることで場合の数を数えやすくする．

和 X の値ごとの確率は以下の通り：

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

◀ 確率の総和（計）が 1 になることを確認する．

よって，求める期待値は，

$$\begin{aligned}&2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}\\&+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}\\&=\mathbf{7}\end{aligned}$$

解答 A2.2.16 ★★ 問題 p.85

問題文

10 本のうち，当たりくじが 3 本，はずれくじが 7 本ある．くじを 1 回引いてはもとに戻すことを 3 回行う．このとき，次の 2 つの場合のうち，どちらを選ぶ方が有利であるか．
(i) 当たりくじ 1 本につき 300 円をもらう．
(ii) 当たりくじを 2 本引いたときだけ 1500 円をもらう．

(i)，(ii) のそれぞれの場合について，もらえる金額の期待値を E_1 円，E_2 円とする．
(i) E_1 について
当たりくじが 0 本となる確率は，$\left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000}$
当たりくじが 1 本となる確率は，${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000}$
当たりくじが 2 本となる確率は，${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{189}{1000}$
当たりくじが 3 本となる確率は，$\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000}$
したがって，もらえる金額を X 円とすると，X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は，次の表のようになる．

◀ 反復試行の確率を考える．なお，くじを 3 回引いて k 回当たりが出る確率は，
$${}_3\mathrm{C}_k\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{3-k}$$

X	0	300	600	900	計
確率	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	1

ゆえに，
$$E_1 = 0 \times \frac{343}{1000} + 300 \times \frac{441}{1000} + 600 \times \frac{189}{1000} + 900 \times \frac{27}{1000} = 270 \text{ (円)}$$
(ii) E_2 について
当たりくじが 2 本となる確率は，${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{189}{1000}$
当たりくじが 0 本または 1 本または 3 本となる確率は，$1 - \frac{189}{1000} = \frac{811}{1000}$
したがって，もらえる金額を Y 円とすると，Y のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は，次の表のようになる．

Y	1500	0	計
確率	$\frac{189}{1000}$	$\frac{811}{1000}$	1

ゆえに $E_2 = 1500 \times \frac{189}{1000} + 0 \times \frac{811}{1000} \fallingdotseq 283.5$ (円)
よって，$E_1 < E_2$ であるから，**(ii) を選ぶ方が有利である．**

◀ $270 < 283.5$

解答 2.2

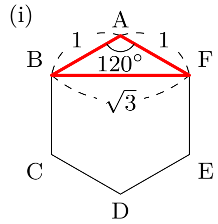
解答 A2.2.17 ★★★★ 問題 p.86

問題文

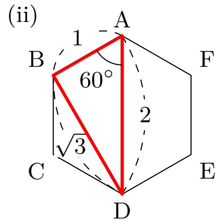
1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の頂点から異なる 3 点を選び，それらの 3 点を頂点とする三角形をつくる．このとき，三角形の周の長さの期待値を求めよ．

3 つの頂点の選び方の総数は ${}_6C_3 = 20$ (通り)
三角形の形は次の (i)〜(iii) の 3 種類がある．

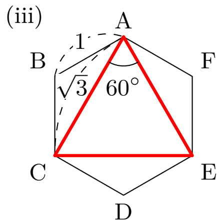
(i) 正六角形と 2 辺を共有するとき
3 辺が 1，1，$\sqrt{3}$ の二等辺三角形となり，その周の長さは，$1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$
このような三角形は，正六角形の各頂点に対して 1 つずつできるから，6 通り



(ii) 正六角形と 1 辺だけを共有するとき
3 辺が 1，$\sqrt{3}$，2 の直角三角形となり，その周の長さは，$1 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3}$
このような三角形は，AD，BE，CF を斜辺としたときに，それぞれ 4 通りずつできるから，$3 \times 4 = 12$ (通り)



(iii) 正六角形と辺を共有しないとき
1 辺が $\sqrt{3}$ の正三角形となり，その周の長さは，$3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
このような三角形は，△ACE，△BDF の 2 通り



よって，(i)〜(iii) より，求める期待値は，

$$(2+\sqrt{3}) \times \frac{6}{20} + (3+\sqrt{3}) \times \frac{12}{20} + 3\sqrt{3} \times \frac{2}{20} = \boldsymbol{\frac{12+6\sqrt{3}}{5}}$$

解答 2.2

One math

解答（節末）A2.2.1 ★★ 節末 p.87

問題文

X，Y の 2 人が繰り返しあるゲームで対戦し，先に 4 ゲーム勝った方が優勝者とする．各ゲームにおいて X が勝つ確率は $\frac{3}{4}$ で，引き分けはないものとする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 4 ゲーム目で優勝が決まる確率を求めよ．
(2) 5 ゲーム目で X が優勝する確率を求めよ．

(1) X が 4 連勝で勝つ確率は，$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$
1 回のゲームで Y が勝つ確率は，$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ であるから，Y が 4 連勝で勝つ確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

よって，求める確率は，$\frac{81}{256} + \frac{1}{256} = \frac{82}{256} = \boldsymbol{\frac{41}{128}}$
(2) X が 4 ゲーム目までに 3 勝 1 敗となり，5 ゲーム目に勝つ確率であるから，

◀ $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\times\bigcirc}_{3\text{ 勝 }1\text{ 敗}}\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{X が勝つ}}$

$$_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \frac{3}{4} = \boldsymbol{\frac{81}{256}}$$

解答（節末）A2.2.2 ★★★ 節末 p.88

問題文

1 個のさいころを 4 回投げるとき，1 の目と 6 の目が同じ回数だけ出る確率を求めよ．

さいころを 1 回投げるとき，1 の目，6 の目が出る確率は，それぞれ $\frac{1}{6}$ であり，1，6 以外の目が出る確率は，$\frac{2}{3}$ である．
1 の目と 6 の目が出る回数が同じであるのは，1 の目と 6 の目の出る回数が 0 回，1 回，2 回の 3 つの場合がある．
(i) 1 の目と 6 の目が 1 回も出ないとき

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

◀ 4 回とも 1，6 以外の目が出る（1 の目 0 回，6 の目 0 回）．

(ii) 1 の目と 6 の目が 1 回ずつ出るとき

$$\frac{4!}{2!1!1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

(iii) 1 の目と 6 の目が 2 回ずつ出るとき

$$\frac{4!}{2!2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{216}$$

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は，

$$\frac{16}{81} + \frac{4}{27} + \frac{1}{216} = \boldsymbol{\frac{227}{648}}$$

解答（節末）A2.2.3 ★★★★ 節末 p.89

問題文

12 本のくじの中に 3 本の当たりくじがある．当たりくじを 2 回引くまで繰り返しくじを引くとき，n 回目で終わる確率 p_n を最大にする n の値を求めよ．ただし，引いたくじは毎回もとに戻すものとする．

このくじから 1 本を引くとき，当たりくじを引く確率は $\frac{1}{4}$ であり，$n \geqq 2$ である．n 回目で終わるのは，$n-1$ 回目までに当たりくじを 1 回引き，n 回目で当たりくじを引くときであるから，

◀ 当たりくじが出ない確率は，$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \times \frac{1}{4} = \frac{3^{n-2}(n-1)}{4^n}$$

◀ 反復試行の確率を考える．また，${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1 \quad (n \geqq 2)$ を用いる．

$n=2,\ 3,\ \ldots,\ 12$ において，p_{n+1} と p_n の比を求めると，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{3^{n-1}n}{4^{n+1}} \div \frac{3^{n-2}(n-1)}{4^n} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}\cdot 4^n}{3^{n-2}\cdot 4^{n+1}} = \frac{3n}{4(n-1)}$$

◀ p_{n+1} は p_n の n に $n+1$ を代入して求められる．

(i) $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqq 1$ のとき
$\frac{3n}{4(n-1)} \geqq 1$ より，$3n \geqq 4(n-1)$ であるから，$n \leqq 4$

◀ $4(n-1)>0$ である．

したがって，$n=2,\ 3$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ より，$p_n < p_{n+1}$
$n=4$ のとき，$p_4 = p_5$
(ii) $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ のとき
$\frac{3n}{4(n-1)} < 1$ より，$3n < 4(n-1)$ であるから，$n > 4$
したがって，$n=5,\ 6,\ \ldots,\ 12$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ より，$p_n > p_{n+1}$

◀ $n=2$ のとき，$p_2 < p_3$，$n=3$ のとき，$p_3 < p_4$，$n=4$ のとき，$p_4 = p_5$

(i)，(ii) より　$p_2 < p_3 < p_4$，$p_4 = p_5$，$p_5 > p_6 > \cdots > p_{11} > p_{12}$
よって，p_n を最大にする n の値は，$n = \mathbf{4,\ 5}$

解答（節末）A2.2.4 ★★ 節末 p.90

問題文

あるコンテストで，a が優勝する確率は 70% である．4 回に 1 回の割合でうそをつく b が a の結果を知ったうえで「a が優勝した」と発言した．このとき，a が本当に優勝した確率を求めよ．

このコンテストで，a が優勝する事象を E，b が「a が優勝した」と発言する事象を F とする．

◀ 求める確率は，
$$P_F(E) = \frac{P(F\cap E)}{P(F)} = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$P(E\cap F) = P(E)\times P_E(F) = \frac{70}{100}\times\frac{3}{4} = \frac{21}{40},$$
$$P(\overline{E}\cap F) = P(\overline{E})\times P_{\overline{E}}(F) = \frac{30}{100}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{40}$$

◀ a が優勝しなかったとき，b が「a は優勝した」とうそをつくときの確率は，$P_{\overline{E}}(F) = \frac{1}{4}$

したがって，

$$P(F) = P(E\cap F) + P(\overline{E}\cap F) = \frac{21}{40} + \frac{3}{40} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

◀ $E\cap F$ と $\overline{E}\cap F$ は互いに排反である．

よって，求める確率は，

$$P_F(E) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{21}{40}\div\frac{3}{5} = \mathbf{\frac{7}{8}}$$

解答（節末）A2.2.5 ★★★★ 節末 p.91

問題文

原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．P は，1 枚の硬貨を投げて表が出た場合には $+5$，裏が出た場合は $+3$ 移動する．硬貨を続けて投げていき，点 P の座標が初めて 18 以上になるまでの投げた回数を X とする．

(1) $X=4$ となる確率を求めよ．　(2) X の期待値を求めよ．

(1) 4 回投げて P の座標が初めて 18 以上になるのは，4 回とも表が出る場合と，4 回のうち 3 回表，1 回裏が出る場合があるから，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

◀ 4 回とも表のとき，P の座標は 20 となり，3 回表，1 回裏のとき，P の座標は 18 となる．

(2) 硬貨を投げる回数が 3 回以下のとき，P の座標は 18 以上にならない．また，硬貨を 6 回投げるまでに必ず P の座標は 18 以上になる．つまり，X の値は 4，5，6 の 3 つの場合がある．

◀ 3 回とも表のとき，P の座標は 15，6 回とも裏のとき，P の座標は 18 である．

(i) $X=4$ のとき

(1) より，その確率は，$\frac{5}{16}$

(ii) $X=5$ のとき

2 回表，2 回裏で，5 回目に表が出る確率は，${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

2 回表，3 回裏が出る確率は，${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

したがって，$X=5$ になる確率は，

$$\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$$

(iii) $X=6$ のとき

6 回とも裏が出る確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

1 回表，4 回裏で，6 回目に表が出る確率は，${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$

1 回表，5 回裏が出る確率は，${}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$

したがって，$X=6$ になる確率は，

$$\frac{1}{64}+\frac{5}{64}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

◀ $X=4$，5 のときの確率の和を，1 から引くことで求めてもよい．

(i)〜(iii) より，X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は，次の表のようになる．

X	4	5	6	計
確率	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	1

よって，求める期待値は，

$$4\times\frac{5}{16}+5\times\frac{1}{2}+6\times\frac{3}{16}=\boldsymbol{\frac{39}{8}}$$

章末問題 2（解答）

解答（章末）A2.1 ★★★ 章末 p.92

問題文

正六角形の頂点を反時計回りに 1 から 6 までの番号を付ける．1 個のさいころを 3 回投げて，出た目の番号に対応する頂点を線分で結び図形を作るとき，次の確率を求めよ．

(1) 三角形ができる確率　　(2) 正三角形ができる確率

(3) 直角三角形ができる確率

さいころを 3 回投げるとき，目の出方の総数は，$6^3 = 216$ (通り)

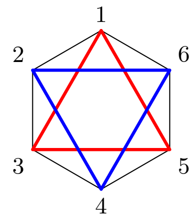
(1) 3 点がすべて異なる場合の数は，${}_6\mathrm{P}_3 = 120$ (通り)

◀ 三角形ができるのは，3 点がすべて異なるときである．

よって，求める確率は，$\frac{120}{216} = \mathbf{\frac{5}{9}}$

(2) 正三角形ができるには，選ばれる 3 個の頂点が $\{1,\ 3,\ 5\}$ または $\{2,\ 4,\ 6\}$ のときであり，それぞれの目の出方は 3! 通りあるので，正三角形ができる目の出方は，

◀

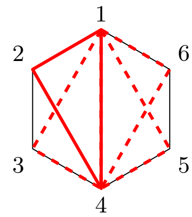


$$2 \times 3! = 12 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，$\frac{12}{216} = \mathbf{\frac{1}{18}}$

(3) 向かい合う 2 個の頂点と残りの 4 個の頂点から 1 個の頂点を選ぶと，1 個の直角三角形ができる．向かい合う 2 個の頂点の選び方は 3 組あるので，直角三角形は全部で，

◀ 向かい合う 2 個の頂点を結ぶと，直径となる．



$$3 \times 4 = 12 \text{ (個)}$$

それぞれの 3 個の番号の目の出方は 3! 通り

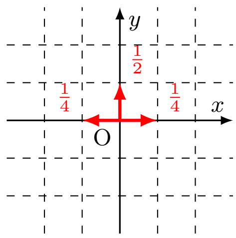
したがって，直角三角形ができる目の出方は，$12 \times 3! = 72$ (通り)

よって，求める確率は，$\frac{72}{216} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

解答（章末）A2.2 ★★★ 章末 p.93

問題文

座標平面上の原点 O から出発して，毎回確率 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ でそれぞれ左，上，右へ 1 ずつ移動する点 Q がある．8 回の移動後に点 (2, 4) にいる確率を求めよ．



左へ x 回，上へ y 回，右へ z 回進むとすると，$x + y + z = 8 \cdots$(i)

◀ 3 つの方向に移動するので，未知数を 3 つ設定する．

このとき，x 軸方向には $-x + z$，y 軸方向には y 動くので，移動後の座標は $(-x + z,\ y)$ であるから，$-x + z = 2,\quad y = 4 \cdots$(ii)

(i)，(ii) より，$x = 1,\ y = 4,\ z = 3$

よって，求める確率は，

◀ 左の方向に 1 回，右の方向に 3 回，上の方向に 4 回移動する反復試行である．

$$\frac{8!}{1!3!4!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \mathbf{\frac{35}{512}}$$

解答（章末）A2.3 ★★★★ 章末 p.94

問題文

3 個のさいころ A, B, C を同時に振り，出た目の最小値が 3 であったとき，最大値が 5 である条件付き確率を求めよ．

出た目の最小値が 3 であるという事象を A，最大値が 5 であるという事象を B とする．

A は，出た目がすべて 3 以上である場合から，出た目がすべて 4 以上である場合を除いた場合であるから，

◀ 最小値が k となる確率は，最小値が k 以上の確率から，$k+1$ 以上の確率を引く．

$$P(A)=\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{64-27}{216}=\frac{37}{216}$$

また，最小値が 3，最大値が 5 となる目の組合せは，$\{3,\ 3,\ 5\}$，$\{3,\ 4,\ 5\}$，$\{3,\ 5,\ 5\}$ したがって，それぞれの確率を考えると，

$$P(A\cap B)=\frac{2\times{}_3\mathrm{C}_1+3!}{6^3}=\frac{12}{216}$$

◀ $\{3,\ 3,\ 5\}$，$\{3,\ 5,\ 5\}$ のとき，${}_3\mathrm{C}_1$ 通りあり，$\{3,\ 4,\ 5\}$ のとき，$3!$ 通りある．

よって，求める確率は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{12}{216}\div\frac{37}{216}=\boldsymbol{\frac{12}{37}}$$

解答 2.3

解答（章末）A2.4 ★★★ 章末 p.95

問題文

箱の中に 4 個の白玉と n 個の赤玉が入っている．この箱から同時に 2 個の玉を取り出したとき，赤玉の数を X とする．X の期待値が 1.5 であるとき，n の値を求めよ．ただし，$n\geqq 2$ であるとする．

$X=k$ である確率を $P(X=k)$ で表すとする．

玉の取り出し方の総数は，${}_{n+4}\mathrm{C}_2$ 通り

$X=1$ となるのは，白玉と赤玉を 1 個ずつ取り出す場合であり，その確率は，

$$P(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{8n}{(n+4)(n+3)}$$

◀ ${}_{n+4}\mathrm{C}_2=\frac{(n+4)(n+3)}{2\cdot 1}$

$X=2$ となるのは，赤玉を 2 個取り出す場合であり，その確率は，

$$P(X=2)=\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2}=\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)}$$

したがって，X の期待値は，

$$\begin{aligned}&1\times\frac{8n}{(n+4)(n+3)}+2\times\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)}\\&=\frac{8n+2n(n-1)}{(n+4)(n+3)}=\frac{2n(n+3)}{(n+4)(n+3)}=\frac{2n}{n+4}\end{aligned}$$

◀ $n+3\neq 0$ で分母・分子を割る．

よって，$\frac{2n}{n+4}=1.5$ であるとき，$n=\mathbf{12}$

One math

解答（章末）A2.5 ★★★★ 章末 p.96

問題文

2 つのチーム A，B が繰り返し試合をして，先に 4 勝した方を優勝チームとする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{2}{3}$ で，引き分けはないとする．このとき，優勝チームが決まるまでの試合数の期待値を求めよ．

(i) 4 試合目に A が優勝するとき

A が 4 勝 0 敗する場合であるから，その確率は，$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

◀ 試合数は 4，5，6，7 の 4 つの場合がある．

(ii) 4 試合目に B が優勝するとき

B が 4 勝 0 敗する場合であるから，その確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

(iii) 5 試合目に A が優勝するとき

4 試合目までに A が 3 勝 1 敗となり，5 試合目に A が勝つ場合であるから，その確率は，

$$_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \frac{2}{3} = \frac{64}{243}$$

◀ 例えば，A が勝つことを ○，A が負けることを × で表し，左から試合順に並べると，

$$\underbrace{○○×○}_{3\text{勝}1\text{敗}}\ \underbrace{○}_{\text{A が勝つ}}$$

(iv) 5 試合目に B が優勝するとき

4 試合目までに B が 3 勝 1 敗となり，5 試合目に B が勝つ場合であるから，その確率は，

$$_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{243}$$

(v) 6 試合目に A が優勝するとき

5 試合目までに A が 3 勝 2 敗となり，6 試合目に A が勝つ場合であるから，その確率は，

$$_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{160}{729}$$

(vi) 6 試合目に B が優勝するとき

5 試合目までに B が 3 勝 2 敗となり，6 試合目に B が勝つ場合であるから，その確率は，

$$_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{40}{729}$$

(vii) 7 試合目に優勝チームが決まるとき

6 試合目までに A と B が 3 勝 3 敗となり，このとき，7 試合目はどちらのチームが勝っても優勝チームが決まるから，その確率は，

$$_6\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 1 = \frac{160}{729}$$

試合数	4	5	6	7	計
確率	$\frac{17}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{200}{729}$	$\frac{160}{729}$	1

◀ (i) と (ii)，(iii) と (iv)，(v) と (vi) は同じ試合数であるから，その確率をそれぞれ足し合わせて 1 つの枠にまとめている．

よって，(i)〜(vii) より，求める試合数の期待値は，

$$4 \times \frac{17}{81} + 5 \times \frac{8}{27} + 6 \times \frac{200}{729} + 7 \times \frac{160}{729} = \mathbf{\frac{4012}{729}}$$

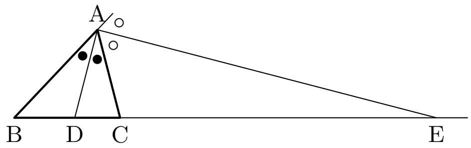
図形の性質（解答）

平面図形の基本（解答）

解答 A3.1.1 ★★ 問題 p.98

問題文

AB $=8$, BC $=7$, CA $=6$ である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を，それぞれ D, E とする．このとき，線分 DE の長さを求めよ．

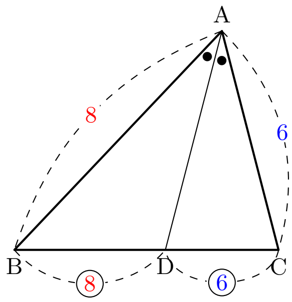


AD は ∠A の二等分線であるから，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$

したがって，BD : DC $= 8 : 6 = 4 : 3$
ゆえに，DC : BC $= 3 : 7$ であるから，

$$\mathrm{DC}=\frac{3}{7}\mathrm{BC}=\frac{3}{7}\cdot 7=3$$



◀ BC $=7$ であることを用いて，BD : DC $=$ AB : AC，すなわち，

$$(7-\mathrm{DC}):\mathrm{DC}=8:6$$

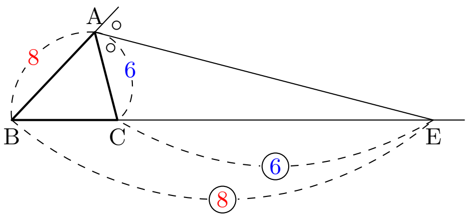
より，DC の長さを求めてもよい．

$$8\mathrm{DC}=6(7-\mathrm{DC})$$

であるから，DC $=3$ となる．

また，AE は ∠A の外角の二等分線であるから，

$$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$



したがって，BE : EC $= 8 : 6 = 4 : 3$
ゆえに，BC : EC $= 1 : 3$ であるから，

$$\mathrm{EC}=3\mathrm{BC}=3\cdot 7=21$$

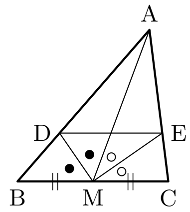
よって，DE $=$ DC $+$ EC $= 3 + 21 =$ **24**

解答 3.1

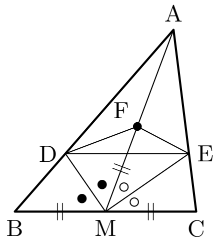
解答 A3.1.2 ★★ 問題 p.99

問題文

△ABC において，辺 BC の中点を M とし，∠AMB, ∠AMC の二等分線が辺 AB, AC と交わる点をそれぞれ D, E とする．このとき，$DE < BD + CE$ であることを示せ．



右の図のように，線分 AM 上で，$BM = CM = FM$ となるように点 F をとる．



◀ 2 つの線分の長さの和は，1 つの線分の長さより大きいことを示すことから，三角形の成立条件「三角形の 2 辺の長さの和は，残りの辺の長さより大きい」を用いることを考える．$BD = FD$, $CE = FE$ となる △FDE が存在することを示すために，線分 AM 上で，$BM = CM = FM$ となるように点 F をとる．

△BDM と △FDM において，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，$\triangle BDM \equiv \triangle FDM$

したがって，$BD = FD \cdots$(i)，$\angle DBM = \angle DFM \cdots$(ii)

△CEM と △FEM においても同様に考えると，$\triangle CEM \equiv \triangle FEM$

ゆえに，$CE = FE \quad \cdots$(iii)，$\angle ECM = \angle EFM \cdots$(iv)

(ii)，(iv) より，

$$\begin{aligned} \angle DFM + \angle EFM &= \angle DBM + \angle ECM \\ &= \angle ABC + \angle ACB \\ &= 180^\circ - \angle BAC < 180^\circ \end{aligned}$$

したがって，3 点 D，F，E は同一直線上にない．

ゆえに，三角形の成立条件より，$DE < FD + FE \cdots$(v)

よって，(i)，(iii)，(v) より，$DE < BD + CE$ ■

◀ 3 点が同一直線上にあるとき，$DE = BD + CE$ となり，△FDE が存在せず，三角形の成立条件を適用できない．

解答 A3.1.3 ★★★ 問題 p.100

問題文

△ABC の 2 辺 AB，AC 上に DE∥BC となるような 2 点 D，E をとり，辺 BC の中点を M とする．このとき，MD が ∠AMB の二等分線であれば，ME は ∠AMC の二等分線であることを示せ．

△MAB において，MD は ∠AMB の二等分線であるから，$AD : DB = MA : MB \cdots$(i)

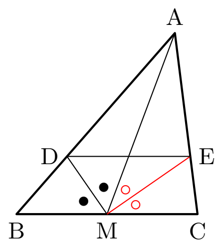
△ABC において，DE∥BC であるから，

$$AD : DB = AE : EC \cdots \text{(ii)}$$

◀ 平行線と線分の比の定理を利用する．

(i)，(ii) より，$AE : EC = MA : MB$

M は BC の中点であるから，$MB = MC$ より，



$$AE : EC = MA : MC$$

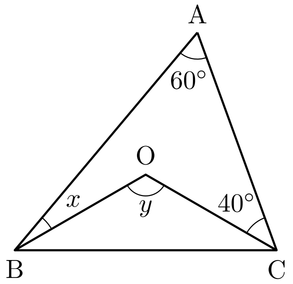
よって，ME は ∠AMC の二等分線である． ■

解答 A3.1.4 ★ 問題 p.101

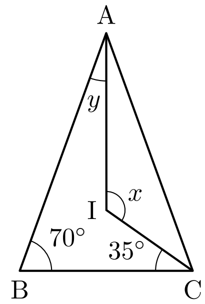
問題文

次の図において，△ABC の外心を O，内心を I とするとき，角 x, y を求めよ．

(1)



(2)

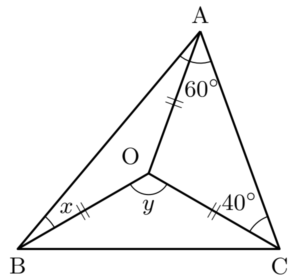


(1) O は △ABC の外心であるから，

$$\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{OCA} = 40^\circ$$

したがって，$\angle\mathrm{OAB} = 20^\circ$

よって，$x = \angle\mathrm{OBA} = \mathbf{20^\circ}$



◀ △OAB は二等辺三角形である．

◀ $\angle\mathrm{OAB} = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$

◀ $\angle\mathrm{OBA} = \angle\mathrm{OAB}$

△ABC において，$60^\circ + (20^\circ + \angle\mathrm{OBC}) + (40^\circ + \angle\mathrm{OCB}) = 180^\circ$

したがって，$\angle\mathrm{OBC} + \angle\mathrm{OCB} = 60^\circ$

よって，$y = 180^\circ - (\angle\mathrm{OBC} + \angle\mathrm{OCB}) = \mathbf{120^\circ}$

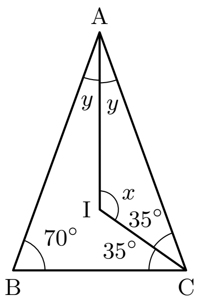
◀ 三角形の内角の和は 180° である．

(2) I は △ABC の内心であるから，

$$\angle\mathrm{ICA} = \angle\mathrm{ICB} = 35^\circ, \quad \angle\mathrm{IAB} = \angle\mathrm{IAC} = y$$

△ABC において，$2y + 2 \times 35^\circ + 70^\circ = 180^\circ$

よって，$y = \mathbf{20^\circ}$



◀ 内心は 3 つの内角の二等分線の交点である．

◀ 三角形の内角の和は 180° である．

また，△IAC において，$x = 180^\circ - (\angle\mathrm{IAC} + \angle\mathrm{ICA}) = \mathbf{125^\circ}$

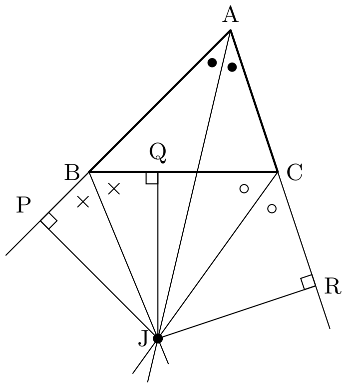
解答 A3.1.5 ★★ 問題 p.102

問題文

$\triangle$ABC において，$\angle$A の二等分線と，$\angle$B と $\angle$C の外角の二等分線は，1 点で交わることを示せ．

$\angle$B と $\angle$C の外角の二等分線の交点を J とする．
J から直線 AB，BC，CA に下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q，R とする．
P，R は垂線の足であるから，

$$\angle \mathrm{APJ} = \angle \mathrm{ARJ} = 90^\circ \cdots (\mathrm{i})$$



また，BJ は $\angle$CBP の二等分線であることから，

$$\mathrm{JP} = \mathrm{JQ}$$

CJ は $\angle$BCR の二等分線であることから，

$$\mathrm{JQ} = \mathrm{JR}$$

◀ 角の二等分線上の点から，角を作る直線までの距離は等しい．

したがって，

$$\mathrm{JP} = \mathrm{JR} \quad \cdots (\mathrm{ii})$$

ゆえに，(i)，(ii) より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから，

◀ AJ は共通の辺である．

$$\triangle \mathrm{APJ} \equiv \triangle \mathrm{ARJ}$$

したがって，$\angle \mathrm{JAP} = \angle \mathrm{JAR}$
ゆえに，AJ は $\angle$A の二等分線である．
よって，$\angle$A の二等分線と，$\angle$B と $\angle$C の外角の二等分線は，1 点で交わる． ■

解答 3.1

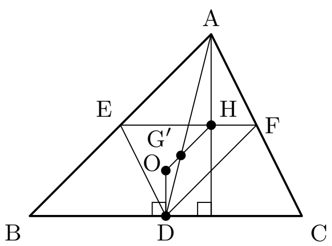
解答 A3.1.6 ★★★ 問題 p.103

問題文

$\triangle$ABC の垂心を H とし，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とする．$\triangle$DEF の垂心を O とするとき，AD と OH の交点 G が，$\triangle$ABC の重心であることを示せ．

O は $\triangle$DEF の垂心であるから，$\mathrm{OD} \perp \mathrm{EF}$
E，F はそれぞれ辺 CAAB の中点であるから，中点連結定理より，

$$\mathrm{EF} /\!/ \mathrm{BC}$$



したがって，$\mathrm{OD} \perp \mathrm{BC} \cdots (\mathrm{i})$
また，H は $\triangle$ABC の垂心であるから，$\mathrm{AH} \perp \mathrm{BC} \cdots (\mathrm{ii})$
(i)，(ii) より，$\mathrm{OD} /\!/ \mathrm{AH}$
$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{DEF}$ であるから，$\mathrm{AH} : \mathrm{OD} = 2 : 1$
$\mathrm{OD} /\!/ \mathrm{AH}$ より，$\mathrm{AG} : \mathrm{DG} = \mathrm{AH} : \mathrm{OD} = 2 : 1$
よって，G は $\triangle$ABC の中線 AD を $2 : 1$ に内分する点であるから，点 G は $\triangle$ABC の重心である． ■

◀ 中点連結定理より，

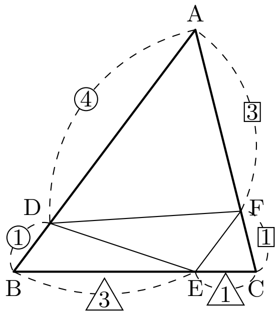
$$\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = 2 : 1,$$
$$\mathrm{BC} : \mathrm{EF} = 2 : 1,$$
$$\mathrm{CA} : \mathrm{FD} = 2 : 1$$

であるから，3 組の辺の比がすべて等しい．

解答 A3.1.7 ★★ 問題 p.104

問題文

△ABC において，線分 AB を 4 : 1 に内分する点を D，線分 BC を 3 : 1 に内分する点を E，線分 CA を 1 : 3 に内分する点を F とする．このとき，△ABC と △DEF の面積比を求めよ．



$$\triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} - (\triangle\mathrm{ADF} + \triangle\mathrm{BED} + \triangle\mathrm{CFE}) \cdots \text{(i)}$$

◀ △ABC の面積から，△DEF のまわりの三角形の面積を引く．

また，$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ABC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF} : \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$ より，

$$\triangle\mathrm{ADF} = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 4}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}$$

◀ 与えられた条件より，
$\mathrm{AD}:\mathrm{DB} = 4:1$,
$\mathrm{BE}:\mathrm{EC} = 3:1$,
$\mathrm{CF}:\mathrm{FA} = 1:3$
である．

同様に，

$$\triangle\mathrm{BED} = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 5}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{3}{20}\triangle\mathrm{ABC}, \quad \triangle\mathrm{CFE} = \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{16}\triangle\mathrm{ABC}$$

したがって，これらを (i) に代入すると，

$$\triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{20} + \frac{1}{16}\right)\triangle\mathrm{ABC} = \frac{3}{16}\triangle\mathrm{ABC}$$

◀ △DEF を △ABC で表す．

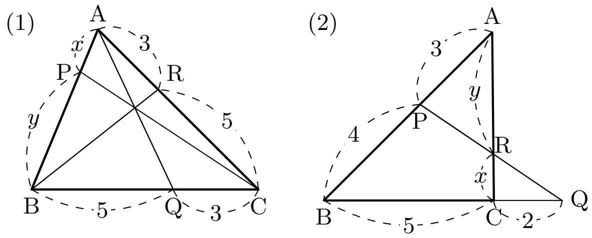
よって，

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} : \frac{3}{16}\triangle\mathrm{ABC} = \mathbf{16:3}$$

解答 A3.1.8 ★ 問題 p.105

問題文

右の図のような △ABC において，$x : y$ を求めよ．



(1) △ABC において，チェバの定理より，$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}} = 1$

◀ $\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\cdot\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\cdot\frac{\boxed{5}}{\boxed{6}} = 1$

したがって，$\frac{x}{y}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3} = 1$

ゆえに，$\frac{x}{y} = \frac{9}{25}$

よって，$x : y = \mathbf{9:25}$

(2) △ABC と直線 PQ について，メネラウスの定理より，$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}} = 1$

◀ $\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\cdot\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\cdot\frac{\boxed{5}}{\boxed{6}} = 1$

したがって，$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{x}{y} = 1$

ゆえに，$\frac{x}{y} = \frac{8}{21}$

よって，$x : y = \mathbf{8:21}$

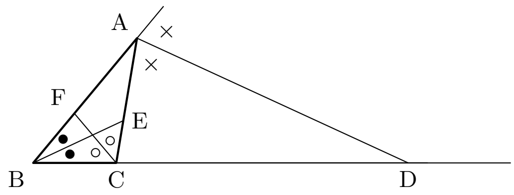
解答 A3.1.9 ★★ 問題 p.106

問題文

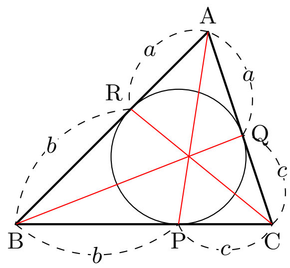
△ABC において，次のことを示せ．

(1) △ABC の内接円が 3 辺 BC，CA，AB に接する点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

(2) 右の △ABC において，∠A の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わるとき，その交点を D とする．また，∠B，∠C の二等分線と辺 AC，AB の交点をそれぞれ E，F とする．このとき，3 点 D，E，F は一直線上にある．



(1) △ABC の内接円が P，Q，R でそれぞれ 3 辺 BC，CA，AB と接するから，



$$\mathrm{AQ}=\mathrm{AR},\quad \mathrm{BR}=\mathrm{BP},\quad \mathrm{CP}=\mathrm{CQ}$$

◀ 円の外部の点から円に引いた 2 本の接線の長さは等しいことを利用する

したがって，AR = AQ = a，BR = BP = b，CP = CQ = c とおくと，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$$

よって，チェバの定理の逆より，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．■

(2) BE，CF はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線であるから，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdots(\mathrm{i}),\quad \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdots(\mathrm{ii})$$

◀ BC : BA = CE : EA,
CA : CB = AF : FB

AD は ∠A の外角の二等分線であるから，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdots(\mathrm{iii})$$

◀ AB : AC = BD : DC

したがって，(i) ～(iii) の辺々を掛け合わせると，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdots(\mathrm{iv})$$

ゆえに，

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=1$$

すなわち，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

よって，メネラウスの定理の逆より，3 点 D，E，F は一直線上にある．■

◀ △ABC と 3 点 D，E，F に注目する．

解答 A3.1.10 ★★★ 問題 p.107

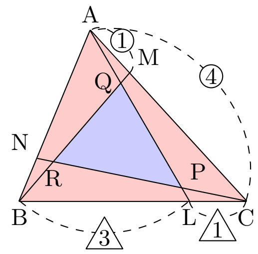
問題文

△ABC の辺 BC，CA，AB を 3 : 1 に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，AL と CN，AL と BM，BM と CN の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，次の三角形の面積を △ABC の面積 S を用いて表せ．

(1) △ABQ　　(2) △PQR

CM : AM = 3 : 1 より，CA : AM = 4 : 1

また，BL : LC = 3 : 1 であるから，△BCM と直線 AL について，メネラウスの定理より，



$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AM}}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=1$$

$\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=1$ より，$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=\frac{1}{12}$

したがって，MQ : QB = 1 : 12

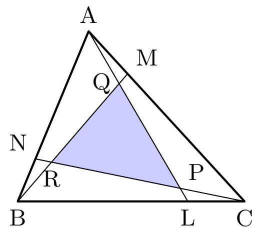
ゆえに，MB : QB = 13 : 12

よって，

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{12}{13}\triangle\mathrm{ABM}=\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\boldsymbol{\frac{3}{13}S}$$

◀ CA : AM = 4 : 1 より，$\triangle\mathrm{ABM}=\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}$

(2) (1) と同様に，△CAN と直線 BM，△ABL と直線 CN について，メネラウスの定理より，



$$\triangle\mathrm{BCR}=\triangle\mathrm{CAP}=\frac{3}{13}S$$

よって，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-(\triangle\mathrm{ABQ}+\triangle\mathrm{BCR}+\triangle\mathrm{CAP})$$
$$=S-3\cdot\frac{3}{13}S=\boldsymbol{\frac{4}{13}S}$$

解答（節末）A3.1.1 ★★ 節末 p.108

問題文

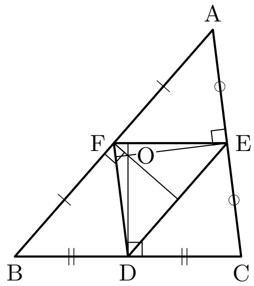
△ABC の辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D，E，F とすると，△ABC の外心 O は，△DEF の垂心であることを証明せよ．

O は △ABC の外心であり，D は BC の中点であるから，$\mathrm{OD} \perp \mathrm{BC} \cdots$ (i)

◀ O は BC の垂直二等分線上にある．

また，中点連結定理より，

$$\mathrm{FE} /\!/ \mathrm{BC} \cdots \text{(ii)}$$



(i)，(ii) より，$\mathrm{OD} \perp \mathrm{FE}$

同様にして，

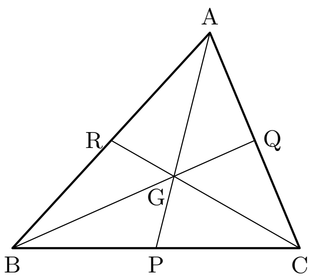
$$\mathrm{OE} \perp \mathrm{FD}, \quad \mathrm{OF} \perp \mathrm{DE}$$

よって，O は △DEF の垂心である． ■

解答（節末）A3.1.2 ★★ 節末 p.109

問題文

右の図において，△ABC の重心を G とするとき，△ABC の面積と四角形 ARGQ の面積比を求めよ．



(四角形 ARGQ) $= \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{CBR} - \triangle\mathrm{CGQ} \cdots$ (i)

◀ △CBR，△CGQ を △ABC で表すことを考える．

また，G は重心より，R は辺 AB の中点であるから，

$$\triangle\mathrm{CBR} = \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC} \cdots \text{(ii)}$$

◀ $\triangle\mathrm{CBR} : \triangle\mathrm{ABC}$
$= \mathrm{BR} : \mathrm{BA} = 1 : 2$

また，$\triangle\mathrm{CGQ} : \triangle\mathrm{CRA} = \mathrm{CG} \cdot \mathrm{CQ} : \mathrm{CR} \cdot \mathrm{CA}$

G は重心より，$\mathrm{CG} : \mathrm{CR} = 2 : 3$，$\mathrm{CQ} : \mathrm{CA} = 1 : 2$ であるから，

$$\triangle\mathrm{CGQ} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}\triangle\mathrm{CRA} = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{CRA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC} \cdots \text{(iii)}$$

◀ $\triangle\mathrm{CRA} : \triangle\mathrm{ABC}$
$= \mathrm{AR} : \mathrm{AB} = 1 : 2$

(ii)，(iii) を (i) に代入すると，

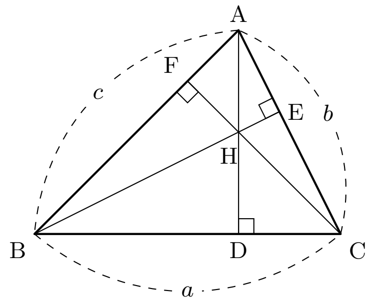
$$(\text{四角形 ARGQ}) = \triangle\mathrm{ABC} - \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC} - \frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，△ABC の面積と四角形 ARGQ の面積比は，**3 : 1**

解答（節末）A3.1.3 ★★ 節末 p.110

問題文

鋭角三角形である △ABC において，3 つの頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点で交わることを証明せよ．



3 辺 BC, CA, AB の長さを，それぞれ a, b, c とする．また，3 つの頂点 $\mathrm{A, B, C}$ から対辺へ下ろした垂線をそれぞれ AD, BE, CF とする．
△ABE と △ACF において，

$$\angle\mathrm{BEA} = \angle\mathrm{CFA} = 90^\circ$$

したがって，$\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{ACF}$

◀ ∠A は共通の角であるから，2 組の角がそれぞれ等しい．

これより，$\mathrm{AE : AF = AB : AC} = c : b$
同様に考えると，$\triangle\mathrm{CBF} \backsim \triangle\mathrm{ABD}$ より，$\mathrm{BF : BD = CB : AB} = a : c$
また，$\triangle\mathrm{ACD} \backsim \triangle\mathrm{BCE}$ より，$\mathrm{CD : CE = AC : BC} = b : a$
ゆえに，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{EA}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 1$$

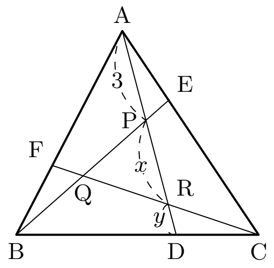
よって，チェバの定理の逆より，3 つの頂点から対辺へ下ろした垂線は 1 点で交わる． ■

解答 3.1

解答（節末）A3.1.4 ★★★ 節末 p.111

問題文

△ABC の辺 BC, CA, AB を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D, E, F とし，AD と BE, BE と CF, CF と AD の交点をそれぞれ P, Q, R とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) AP : PR : RD = 3 : x : y とするとき，x, y の値を求めよ．
(2) △ABC と △PQR の面積比を求めよ．



(1) △ABD と直線 CF について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}} = 1$$

$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{y}{x+3} = 1$ より，$x - 6y = -3 \cdots$(i)

◀ $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}} = 1$

また，△ACD と直線 BE について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} \cdot \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}} \cdot \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}} = 1$$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{y+x}{3} = 1$ より，$x + y = 4 \cdots$(ii)

◀ $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}} = 1$

よって，(i)，(ii) より，$x = \mathbf{3}$，$y = \mathbf{1}$

◀ 連立方程式を解く．

(2) (1) と同様に，BQ : QP : PM = 3 : 3 : 1 より，$\triangle\mathrm{PBR} = \frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABD}$
$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{PBR} = \frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABD} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC}$$

また，$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{3}{6}\triangle\mathrm{PBR}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{3}{6}\triangle\mathrm{PBR} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{PQR} = \triangle\mathrm{ABC} : \frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC} = \mathbf{7 : 1}$$

【別解】 $\triangle\mathrm{ABP} = \frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABD} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC}$
△BCQ，△CAR も同様に，

$$\triangle\mathrm{BCQ} = \triangle\mathrm{CAR} = \frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC}$$

したがって，$\triangle\mathrm{PQR} = \triangle\mathrm{ABC} - (\triangle\mathrm{ABP} + \triangle\mathrm{BCQ} + \triangle\mathrm{CAR}) = \frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC}$
よって，△ABC と △PQR の面積比は，

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{PQR} = \triangle\mathrm{ABC} : \frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC} = \mathbf{7 : 1}$$

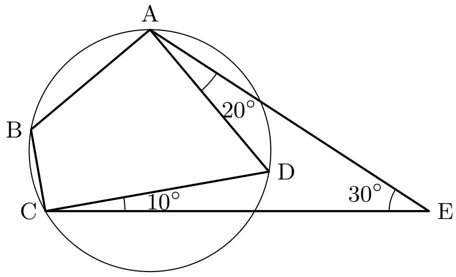
解答 3.1

円の性質と作図（解答）

解答 A3.2.1 ★★ 問題 p.112

問題文

右の図において，四角形 ABCD は円に内接している．$\angle\mathrm{AEC}=30^\circ$，$\angle\mathrm{EAD}=20^\circ$，$\angle\mathrm{ECD}=10^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．



四角形 ABCD は円に内接するから，$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$
四角形 ABCE の内角の和は 360° であるから，

$$\angle\mathrm{ABC}+180^\circ+20^\circ+30^\circ+10^\circ=360^\circ$$

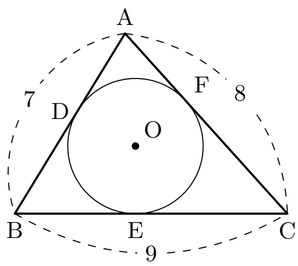
よって，$\angle\mathrm{ABC}=\mathbf{120^\circ}$

◀ 円に内接する四角形の対角の和は 180° であることを用いる．

解答 A3.2.2 ★★ 問題 p.113

問題文

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=7$，$\mathrm{BC}=9$，$\mathrm{CA}=8$ とする．また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円と辺 BC，CA，AB の接点を，それぞれ点 D，E，F とするとき，AD の長さを求めよ．



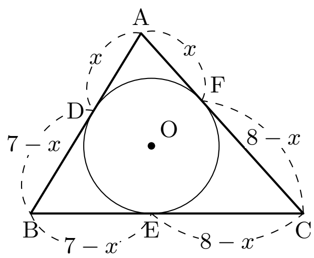
$\mathrm{AD}=x$ とすると，$\mathrm{BD}=\mathrm{BE}=7-x\cdots$(i)

また，$\mathrm{AF}=x$ であるから，$\mathrm{FC}=\mathrm{EC}=8-x\cdots$(ii)
(i)，(ii) より，

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BE}+\mathrm{EC}=(7-x)+(8-x)=9$$

したがって，$x=3$

よって，$\mathrm{AD}=\mathbf{3}$

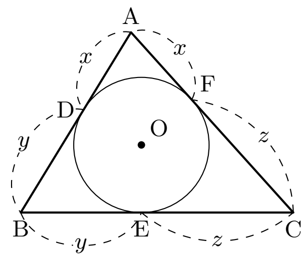


【別解】 $\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{BE}=y$，$\mathrm{CF}=z$ とすると，$\mathrm{AD}=\mathrm{AF}$，$\mathrm{BE}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{CF}=\mathrm{CE}$ であるから，

$$x+y=7,\quad y+z=9,\quad z+x=8$$

◀ $\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=\mathrm{AB}$，$\mathrm{BE}+\mathrm{EC}=\mathrm{BC}$，$\mathrm{CF}+\mathrm{FA}=\mathrm{CA}$

辺々を足し合わせると，$2(x+y+z)=24$
したがって，$x+y+z=12$
ゆえに，$y+z=9$ より，$x=3$
よって，$\mathrm{AD}=\mathbf{3}$

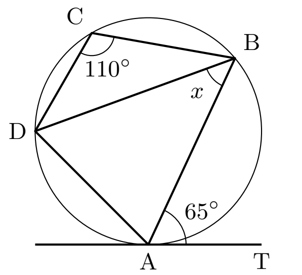


One math

解答 A3.2.3 ★ 問題 p.114

問題文

右の図において，AT は点 A における接線とするとき，角 x を求めよ．

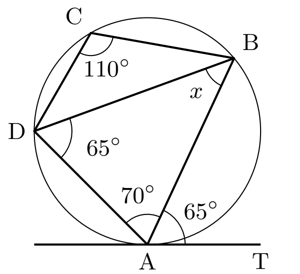


(1) 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$$

したがって，$\angle\mathrm{BAD}=180^\circ-110^\circ=70^\circ$
接弦定理より，$\angle\mathrm{BAT}=\angle\mathrm{ADB}=65^\circ$
よって，$\triangle\mathrm{ABD}$ の内角の和は 180° であるから，

$$x=180^\circ-(70^\circ+65^\circ)=\mathbf{45^\circ}$$



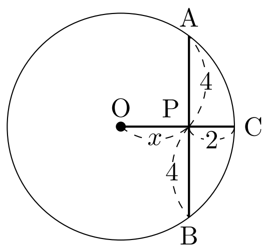
◀ 接線 AT と弦 AB について，接弦定理を考える．

解答 A3.2.4 ★ 問題 p.115

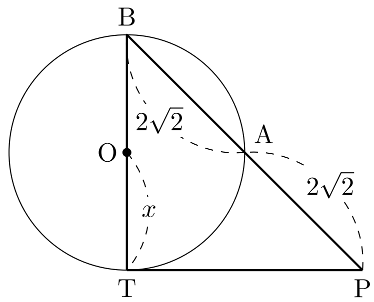
問題文

次の図において，O は円の中心，PT は点 T における接線とするとき，x の値を求めよ．

(1)



(2)



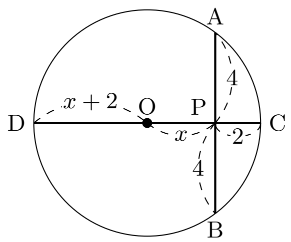
(1) CO の延長と円との交点を D とすると，

$$\mathrm{PD}=2x+2$$

方べきの定理より，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$
したがって，

$$4\cdot4=2\cdot(2x+2)$$

よって，$x=\mathbf{3}$



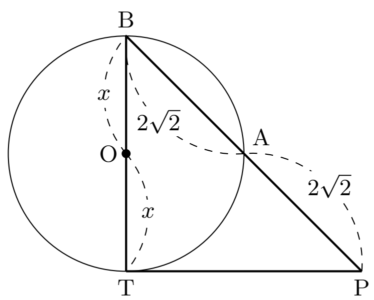
◀ 半径は，$\mathrm{OP}+\mathrm{PC}=x+2$ であり，$\mathrm{PD}=\mathrm{PO}+\mathrm{OD}$ より，$\mathrm{PD}=2x+2$

(2) 方べきの定理より，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

したがって，$2\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=\mathrm{PT}^2$ より，$\mathrm{PT}^2=16$
$\triangle\mathrm{PTB}$ は直角三角形であるから，三平方の定理より，

$$\mathrm{PB}^2=\mathrm{PT}^2+\mathrm{BT}^2$$

ゆえに，$(4\sqrt{2})^2=16+(2x)^2$ より，$x^2=4$
よって，$x>0$ より，$x=\mathbf{2}$



◀ $\mathrm{PB}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

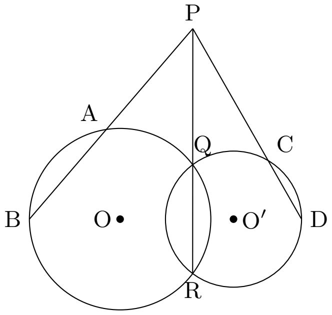
◀ $\triangle\mathrm{PTB}$ は $1:1:\sqrt{2}$ の直角三角形であることを利用して，x の値を求めてもよい．

◀ $\mathrm{BT}=2\mathrm{OT}=2x$

解答 A3.2.5 ★★ 問題 p.116

問題文

右の図のように，2 つの円 O，O′ が 2 点 Q，R で交わっており，QR の延長上の点 P から，円 O，O′ にそれぞれ A，B および C，D で交わる直線を引くとする．このとき，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることを示せ．



円 O において，方べきの定理より，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}$
円 O′ において，方べきの定理より，$\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}=\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}$
したがって，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$
よって，方べきの定理の逆より，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある．■

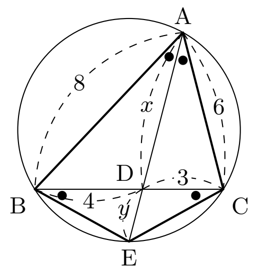
◀ 方べきの定理の逆を用いることができる．

解答 A3.2.6 ★★★ 問題 p.117

問題文

三角形 △ABC において，AB = 8，BC = 7，CA = 6 とする．∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，三角形 △ABC の外接円と交わる点を E とする．このとき，AD，DE の長さをトレミーの定理を用いて求めよ．

$\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{DE}=y$ とする．
AD は ∠A の二等分線であるから，



$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=8:6=4:3$$

$\mathrm{BC}=7$ より，$\mathrm{BD}=4$，$\mathrm{DC}=3$
四角形 ABEC において，方べきの定理より，

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$$

すなわち，$xy=12\cdots(\mathrm{i})$
$\triangle\mathrm{ACD}\backsim\triangle\mathrm{BED}$ であるから，$\mathrm{AC}:\mathrm{BE}=\mathrm{CD}:\mathrm{ED}$ より，$6\cdot y=\mathrm{BE}\cdot 3$
したがって，$\mathrm{BE}=2y$
また，$\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{EAC}$，$\angle\mathrm{ECB}=\angle\mathrm{EAB}$，$\angle\mathrm{EAC}=\angle\mathrm{EAB}$ より，△EBC は二等辺三角形であるから，$\mathrm{EC}=2y$
ゆえに，四角形 ABEC において，トレミーの定理より，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{EC}+\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AE}$$

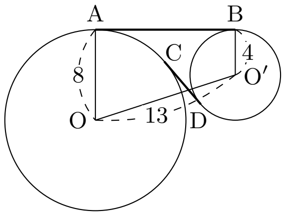
すなわち，$8\cdot 2y+6\cdot 2y=7\cdot(x+y)$
したがって，$x=3y$
これを (i) に代入すると，$3y^2=12$
$y>0$ より，$y=2$
このとき，$x=3\cdot 2=6$
よって，$\mathrm{AD}=\mathbf{6}$，$\mathrm{DE}=\mathbf{2}$

◀ 円周角の定理より，$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{EBD}$ であり，対頂角は等しいから，$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDE}$ となる．2 組の角がそれぞれ等しいから，$\triangle\mathrm{ACD}\backsim\triangle\mathrm{BED}$ が成り立つ．

解答 A3.2.7 ★★★ 問題 p.118

問題文

右の図のように，半径 8 の円 O と半径 4 の円 O′ があり，中心間の距離 $OO' = 13$ とする．2 つの円の共通接線を 2 本引き，これらの接点を A，B，C，D とするとき，線分 AB，CD の長さを求めよ．



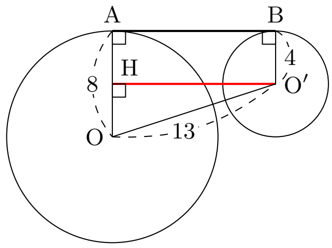
O′ から OA に垂線 OH を下ろすと，$\angle OAB = \angle O'BA = 90^\circ$ であるから，

$$AB = O'H, \quad AH = BO' = 4$$

$\triangle OO'H$ において，$\angle OHO' = 90^\circ$ であるから，

$$\begin{aligned} O'H^2 &= OO'^2 - OH^2 \\ &= 13^2 - (8-4)^2 \\ &= 13^2 - 4^2 \\ &= 153 \end{aligned}$$

◀ 三平方の定理を用いる．



$O'H > 0$ より，$O'H = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$

よって，$AB = O'H = \mathbf{3\sqrt{17}}$

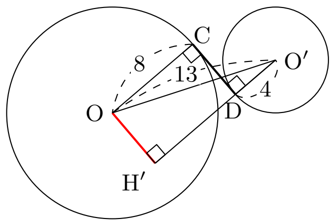
O から線分 O′D の延長に垂線 OH′ を下ろすと，$\angle OCD = \angle O'DC = 90^\circ$

したがって，$CD = OH'$，$DH' = CO = 8$

$\triangle OO'H'$ において，$\angle OH'O' = 90^\circ$ であるから，

$$\begin{aligned} OH'^2 &= OO'^2 - O'H'^2 \\ &= 13^2 - (4+8)^2 \\ &= 13^2 - 12^2 \\ &= 169 - 144 \\ &= 25 \end{aligned}$$

◀ 三平方の定理を用いる．



$OH' > 0$ より，$OH' = \sqrt{25} = 5$

よって，$CD = OH' = \mathbf{5}$

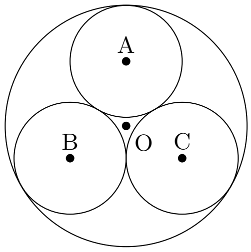
解答 3.2

One math

解答 A3.2.8 ★★ 問題 p.119

問題文

右の図のように，半径 1 の円 O に，半径が同じ 3 つの円が内接している．このとき，円 A の面積 S を求めよ．



右の図のように，内接円の半径を r，線分 AB と内接円の交点を D とする．
$\angle \mathrm{OAD} = 30^\circ, \angle \mathrm{ODA} = 90^\circ$ より，

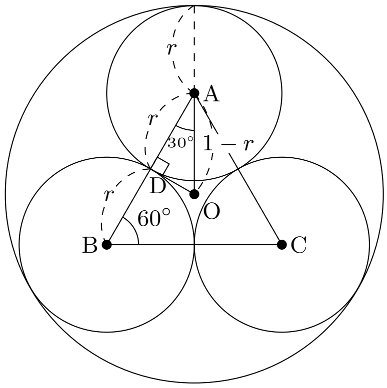
$$\mathrm{OA} : \mathrm{AD} = 2 : \sqrt{3}$$

$(1-r) : r = 2 : \sqrt{3}$ より，

$$2r = \sqrt{3}(1-r)$$

したがって，$r = 2\sqrt{3} - 3$
よって，求める面積 S は，

$$S = \pi r^2 = \pi(2\sqrt{3}-3)^2 = \boldsymbol{(21 - 12\sqrt{3})\pi}$$



◀ △ABC は正三角形である．

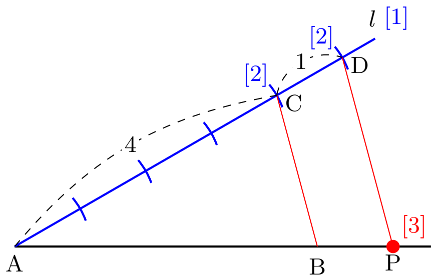
解答 3.2

解答 A3.2.9 ★ 問題 p.120

問題文

与えられた線分 AB について，線分 AB を 5 : 1 に外分する点 P を作図せよ．

[1] 点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 l を引く．
[2] 半直線 l 上に，AC : CD = 4 : 1となるように点 C，D をとる．
[3] 点 D を通り，直線 CB に平行な直線を引き，直線 AB との交点を P とする．このとき，点 P が求める点である．



BC∥PD より，AB : BP = AC : CD = 4 : 1
よって，AP : PB = 5 : 1 であるから，点 P は線分 AB を 5 : 1 に外分する点である．

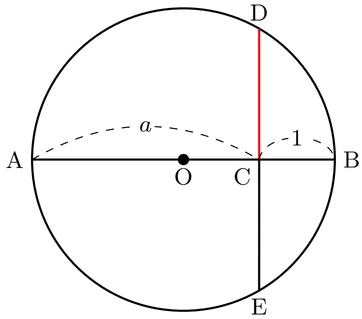
◀ 点 C，D を作図するときにコンパスでとる等しい長さは，適当でよい．

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

解答 A3.2.10 ★★★ 問題 p.121

問題文

長さ 1，a の線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{a}$ の線分を作図せよ．



直線上に，$\mathrm{AC}=a$，$\mathrm{CB}=1$ となる 3 点 A，C，B をこの順にとる．
[1] 線分 AB を直径とする円 O をかく．
[2] 点 C を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，[1] の円との交点をそれぞれ D，E とする．このとき，線分 CD が求める線分である．

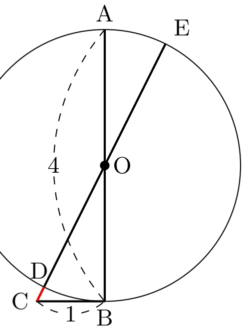
方べきの定理より，$\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CE}=\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}$
$\mathrm{CD}=\mathrm{CE}$ であるから，$\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CB}=a$ より，$\mathrm{CD}=\sqrt{a}$
よって，線分 CD は長さ $\sqrt{a}$ の線分である．

◀ 長さ $\sqrt{m}$ の線分の作図は，方べきの定理を利用するとよい．

解答 A3.2.11 ★★ 問題 p.122

問題文

長さ 1 の線分が与えられたとき，2 次方程式 $x^2+4x-1=0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ．



$x^2+4x-1=0$ より，$x(x+4)=1^2$
[1] 長さ 4 の線分 AB を直径とする円 O をかく．
[2] 円 O 上の点 B を通る線分 AB の垂線を引き，この直線上で $\mathrm{BC}=1$ となる点 C をとる．
[3] 点 C と AB の中点である O を結ぶ直線と円 O との交点を，右の図のように D，E とすると，線分 CD，CE が求める線分である．

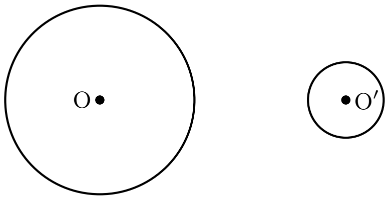
CB は円に接するから，方べきの定理より，$\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CE}=\mathrm{CB}^2=1^2$
$\mathrm{CD}=x$ とすると，$\mathrm{CE}=x+4$ より，$x(x+4)=1^2$
よって，線分 CD は 2 次方程式 $x^2+4x-1=0$ の正の解を長さとする線分である．

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．
◀ $x=-2+\sqrt{5}$

解答 A3.2.12 ★★★ 問題 p.123

問題文

右の図のように，半径がそれぞれ r，r' $(r > r')$ である 2 つの円 O，O$'$ がある．この 2 つの円の共通内接線を作図せよ．



[1] 線分 OO$'$ を直径とする円をかく．

◀ 垂直二等分線を引く．

[2] O を中心とする半径 $r + r'$ の円をかく．

[3] [1] の円と [2] の円の交点を P，Q とする．

[4] 半直線 OP，OQ と円 O の交点を，それぞれ A，C とする．また，点 O$'$ を通り，線分 OA，OC に平行な直線と円 O$'$ との交点を，それぞれ B，D とする．このとき，直線 AB と直線 CD を引くと，この 2 直線が 2 つの円 O，O$'$ の共通内接線である．

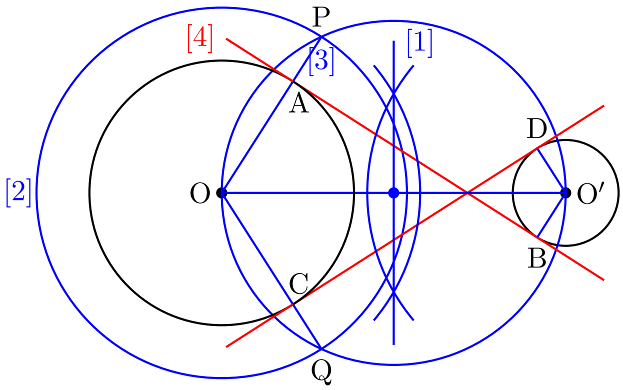
$\angle \mathrm{OPO}' = 90^\circ$，$\mathrm{AP} = \mathrm{OP} - \mathrm{OA} = (r + r') - r = r'$ であり，$\mathrm{OA} /\!/ \mathrm{O'B}$ であるから，四角形 APO$'$B は長方形となる．

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

したがって，$\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{O'BA} = 90^\circ$

よって，直線 AB は 2 つの円 O，O$'$ の共通内接線である．

直線 CD についても同様に示される．



解答（節末）A3.2.1 ★★★ 節末 p.124

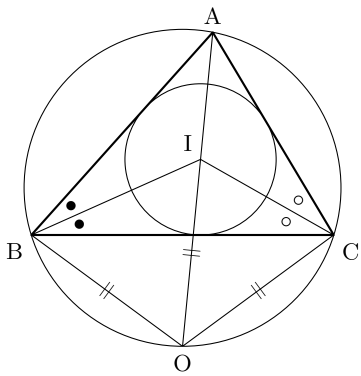
問題文

△ABC の内心を I，△BCI の外心を O とする．4 点 A，B，C，O は同一円周上にあることを示せ．

点 I が △ABC の内心であるから，

$$\angle\mathrm{IBC} = \angle\mathrm{IBA}, \quad \angle\mathrm{ICB} = \angle\mathrm{ICA}$$

したがって，



$$\begin{aligned}\angle\mathrm{IBC} + \angle\mathrm{ICB} &= \frac{1}{2}\angle\mathrm{ABC} + \frac{1}{2}\angle\mathrm{ACB} \\ &= \frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{ACB}) \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle\mathrm{BAC}) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC} \cdots \text{(i)}\end{aligned}$$

また，点 O が △BCI の外心であるから OB = OI = OC

ゆえに，∠BOI = 180° − 2∠BIO，∠COI = 180° − 2∠CIO

◀ △BOI，△COI は二等辺三角形であるから，∠BIO = ∠IBO，∠CIO = ∠ICO

したがって，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BOC} &= \angle\mathrm{BOI} + \angle\mathrm{COI} \\ &= (180^\circ - 2\angle\mathrm{BIO}) + (180^\circ - 2\angle\mathrm{CIO}) \\ &= 360^\circ - 2(\angle\mathrm{BIO} + \angle\mathrm{CIO}) \\ &= 360^\circ - 2\angle\mathrm{BIC} \cdots \text{(ii)}\end{aligned}$$

ここで，(i) より，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BIC} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{IBC} + \angle\mathrm{ICB}) \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}\right) \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}\end{aligned}$$

◀ (i) より，

$$\begin{aligned}&\angle\mathrm{IBC} + \angle\mathrm{ICB} \\ =&90^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}\end{aligned}$$

これを (ii) に代入すると，

$$\angle\mathrm{BOC} = 360^\circ - 2\left(90^\circ + \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}\right) = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC}$$

ゆえに，∠BOC + ∠BAC = 180°

よって，四角形 ABCO は円に内接する，すなわち，4 点 A，B，C，O は同一円周上にある． ■

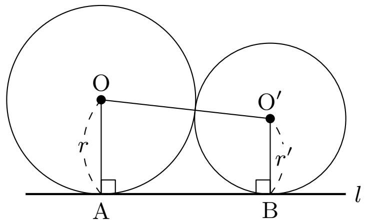
◀ 円に内接する四角形の対角の和は 180° である．

解答 3.2

解答（節末）A3.2.2 ★★ 節末 p.125

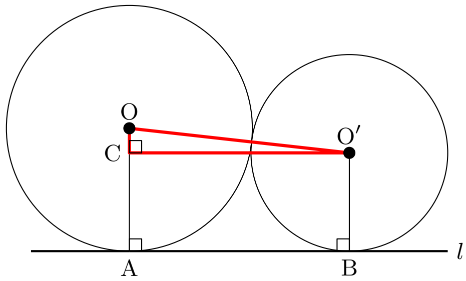
問題文

右の図のように，半径 r, r' $(r > r')$ の円 O と O′ が外接しており，さらに直線 l にそれぞれ A, B で接しているとする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 線分 AB の長さを r, r' で表せ．
(2) 2 つの円 O, O′ に外接し，さらに線分 AB に接する円 O″ の半径 x を求めよ．



(1) 円 O, O′ が外接しているから，$\mathrm{OO'} = r + r'$
O′ から OA に垂線 O′C を下ろすと，$\mathrm{OC} = r - r'$

△OO′C において，

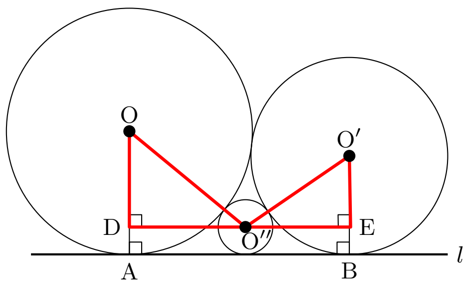


$$\begin{aligned}\mathrm{O'C} &= \sqrt{\mathrm{OO'}^2 - \mathrm{OC}^2} \\ &= \sqrt{(r + r')^2 - (r - r')^2} \\ &= 2\sqrt{rr'}\end{aligned}$$

◀ 三平方の定理を用いる．

よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{O'C} = \boldsymbol{2\sqrt{rr'}}$

(2) 中心 O″ から OA, O′B に垂線 O″D, O″E をそれぞれ下ろすと，



$$\mathrm{DO''} = \sqrt{\mathrm{OO''}^2 - \mathrm{OD}^2} = 2\sqrt{rx},$$
$$\mathrm{EO''} = \sqrt{\mathrm{O'O''}^2 - \mathrm{O'E}^2} = 2\sqrt{r'x}$$

◀ 三平方の定理を用いる．

$\mathrm{DE} = \mathrm{DO''} + \mathrm{EO''}$ であるから，

$$2\sqrt{rx} + 2\sqrt{r'x} = 2\sqrt{rr'}$$

したがって，$(\sqrt{r} + \sqrt{r'})\sqrt{x} = \sqrt{rr'}$

◀ $\sqrt{x}$ をくくり出す．

ゆえに，$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{rr'}}{\sqrt{r}+\sqrt{r'}}$
よって，$x = \boldsymbol{\frac{rr'}{(\sqrt{r}+\sqrt{r'})^2}}$

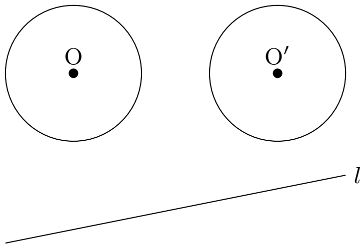
解答
3.2

One math

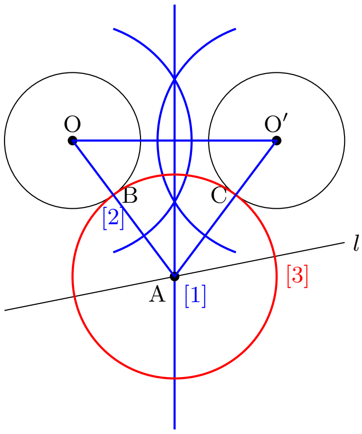
解答（節末）A3.2.3 ★★ 節末 p.126

問題文

右の図のように，半径が等しい 2 つの円 O，O′ と直線 l がある．直線 l 上に中心があり，この 2 つの円 O，O′ に外接する円を作図せよ．



[1] 線分 OO′ の垂直二等分線を引き，直線 l との交点を A とする．
[2] 線分 OA と円 O の交点を B，線分 O′A と円 O′ の交点を C とする．
[3] 点 A を中心として，半径 AB の円をかく．この円が求める円である．



A は O と O′ の垂直二等分線上にあるから，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{O'A}$$

したがって，$\mathrm{OB} + \mathrm{AB} = \mathrm{O'C} + \mathrm{AC}$

また，円 O と円 O′ の半径が等しいから，$\mathrm{OB} = \mathrm{O'C}$
ゆえに，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$
よって，円 A は 2 つの円 O，O′ に接する．

◀ 求める円の中心は，2 つの円の中心 O，O′ からの距離が等しい．

◀ AC をかいてもよい．

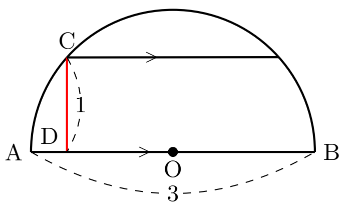
◀ $\mathrm{OA} - \mathrm{OB} = \mathrm{O'A} - \mathrm{O'}C$

解答（節末）A3.2.4 ★★ 節末 p.127

問題文

長さ 3 の線分が与えられたとき，連立方程式 $x + y = 3$，$xy = 1$ の解を長さとする線分を作図せよ．

[1] 長さ 3 の線分 AB を直径とする半円をかく．
[2] 線分 AB に平行で，線分 AB との距離が 1 である直線と，[1] の半円との交点の 1 つを C とする．



[3] C から線分 AB に垂線を引き，その交点を D とすると，線分 AD，BD が求める線分である．

$\mathrm{AD} = x$，$\mathrm{BD} = y$ とすると，$\mathrm{AD} + \mathrm{BD} = \mathrm{AB}$ より，

$$x + y = 3$$

また，方べきの定理より，$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DB} = \mathrm{CD}^2$ であるから，$xy = 1$
よって，線分 AD，BD は連立方程式 $x + y = 3$，$xy = 1$ の解を長さとする線分である．

◀ $x + y = 3$ より，

$$y = 3 - x$$

これを $xy = 1$ に代入すると，$x(3 - x) = 1$ となることから，方べきの定理の利用を考える．

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

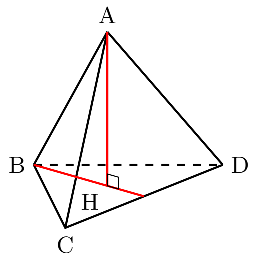
解答 3.2

空間図形（解答）

解答 A3.3.1 ★★ 問題 p.128

問題文

四面体 ABCD において, $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ であるとする．このとき，A から平面 BCD に垂線 AH を下ろすとき, 点 H は $\triangle BCD$ の垂心であることを示せ.



$AH \perp$ 平面 BCD より，$AH \perp CD$
また, $AB \perp CD$ より, CD は平面 ABH 上の交わる 2 直線 AB, AH に垂直であるから,

$$CD \perp \text{平面 ABH}$$

BH は平面 ABH 上にあるから，$BH \perp CD \cdots$(i)
$CD \perp$ 平面 ABH と同様に考えると，$BD \perp$ 平面 ACH
したがって，$CH \perp BD \cdots$(ii)
よって，点 H は $\triangle BCD$ の垂心である． ■

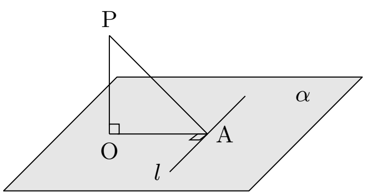
◀ 直線 l と平面 α について，平面 α 上の交わる 2 直線が垂直であるならば，直線 l と平面 α は垂直である．

◀ $AH \perp BD$，$AC \perp BD$ より，$BD \perp$ 平面 ACH

解答 A3.3.2 ★★★ 問題 p.129

問題文

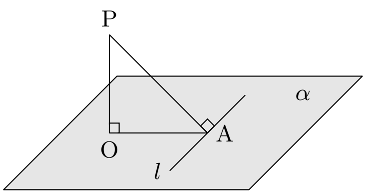
l を平面 α 上の直線，P を平面 α 上にない点，A を直線 l 上の点，O を l 上にない平面 α 上の点とするとき，次のことを示せ．
(1) $PO \perp \alpha$，$PA \perp l$ ならば $OA \perp l$
(2) $PO \perp \alpha$，$OA \perp l$ ならば $PA \perp l$



(1) $PO \perp \alpha$ より $PO \perp l \cdots$(i)
仮定より，$PA \perp l \cdots$(ii)
(i)，(ii) より，l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PA，PO に垂直であるから，$l \perp$ 平面 AOP

よって，OA は平面 AOP 上にあるから，$OA \perp l$ ■

◀ 直線 PA，PO は点 P で交わる．



(2) $PO \perp \alpha$ より，$PO \perp l \cdots$(i)
仮定より，$OA \perp l \cdots$(ii)
(i)，(ii) より，l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，OA に垂直であるから，$l \perp$ 平面 AOP

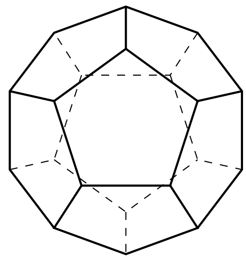
よって，PA は平面 AOP 上にあるから，$PA \perp l$ ■

◀ 直線 PO，OA は点 O で交わる．

解答 A3.3.3 ★★★ 問題 p.130

問題文

正二十面体において，各辺の中点を通る平面ですべてのかどを切り取ったときにできる多面体の面の数 f，辺の数 e，頂点の数 v をそれぞれ求めよ．



正十二面体は，各面が正五角形であり，1 つの頂点に集まる面の数は 3 個である．
したがって，正十二面体の辺の数は $5 \times 12 \div 2 = 30$
頂点の数は，$5 \times 12 \div 3 = 20 \cdots$ (i)

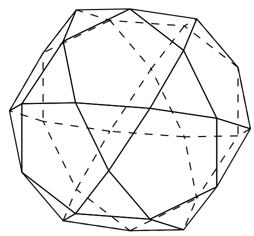
◀ 先に，正十二面体の辺の数と頂点の数を求める．

ここで，正二十面体の 1 つのかどを切り取ると，新しい面として正三角形の面が 1 つできる．
(i) より，新しく増える面として正三角形が 20 個できる．
ゆえに，面の数は，$f = 12 + 20 = \mathbf{32}$
辺の数は，正三角形が 20 個あるから，

$$e = 3 \times 20 = \mathbf{60}$$

頂点の数は，オイラーの（多面体）定理から，$v = 60 - 32 + 2 = \mathbf{30}$

◀ なお，正二十面体の各辺の中点でかどを切り取ったときにできる多面体と，同じ多面体となる．

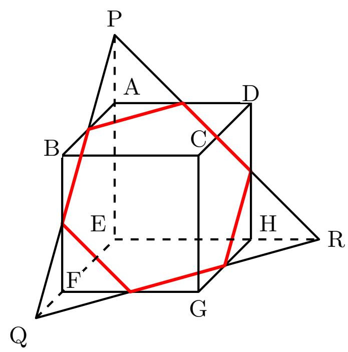


解答 3.3

解答 A3.3.4 ★★★ 問題 p.131

問題文

右の図のような三角錐 P − EQR と，1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD − EFGH における共通部分の立体の体積を求めよ．ただし，AP，FQ，HR の長さを 1 とする．



求める立体は，三角錐 P − EQR から立方体に重なっていない部分の 3 つの三角錐の体積を除いたものである．
三角錐 P − EQR の体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle \mathrm{EQR} \cdot \mathrm{EP} = \frac{1}{3} \times \left\{ \frac{1}{2} \times (2+1) \times (2+1) \right\} \times (2+1) = \frac{9}{2}$$

三角錐 P − EQR において，立方体に重なっていない部分の 3 つの三角錐の体積は，

◀ 3 つの三角錐は，三角錐 P − EQR と相似である．

$$\mathrm{AP} : \mathrm{EP} = \mathrm{FQ} : \mathrm{EQ} = \mathrm{HR} : \mathrm{ER} = 1 : 3$$

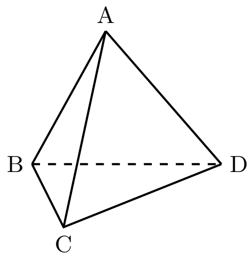
◀ 相似比が 1 : 3 であるから，体積比は $1^3 : 3^3$ となることを利用する．

より，それぞれ $\frac{1}{27}V$ である．
よって，求める体積は，$V - 3 \times \frac{1}{27}V = \frac{8}{9}V = \mathbf{4}$

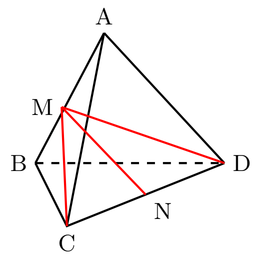
解答（節末）A3.3.1 ★★　節末 p.132

問題文

正四面体 ABCD において，向かい合う 2 辺 AB と CD は垂直であることを示せ．



辺 AB と辺 CD の中点をそれぞれ M, N とすると, $\triangle$NAB は NA $=$ NB の二等辺三角形であるから,



$$\mathrm{MN} \perp \mathrm{AB} \cdots (\mathrm{i})$$

また，$\triangle$CAB は CA $=$ CB の二等辺三角形であるから,

$$\mathrm{CM} \perp \mathrm{AB} \cdots (\mathrm{ii})$$

したがって，(i)，(ii) より，AB は直線 MN，CM を含む平面 MCD に垂直である．AB は平面 MCD 上にある直線 CD に垂直である，すなわち，向かい合う 2 辺 AB と CD は垂直である． ■

◀ 直線 h が平面 α 上の交わる 2 直線に垂直 $\Longrightarrow$ 直線 $h \perp$ 平面 α

解答（節末）A3.3.2 ★★　節末 p.133

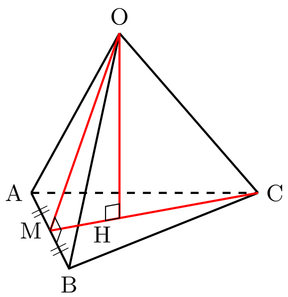
問題文

正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から線分 CM に下ろした垂線を OH とする．このとき，OH $\perp$ 平面 ABC であることを示せ．

辺 CM は正三角形である $\triangle$CAB の中線であるから,

◀ 点 M は辺 AB の中点である．

$$\mathrm{CM} \perp \mathrm{AB} \cdots (\mathrm{i})$$



辺 OM は正三角形である $\triangle$OAB の中線であるから,

◀ 点 M は辺 AB の中点である．

$$\mathrm{OM} \perp \mathrm{AB} \cdots (\mathrm{ii})$$

また，与えられた条件より，OH $\perp$ CM であるから,

$$\mathrm{OH} \perp \mathrm{HM} \cdots (\mathrm{iii})$$

(i)〜(iii) より，三垂線の定理を用いて，OH $\perp$ 平面ABC である． ■

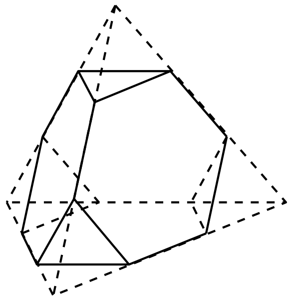
◀ PA $\perp l$，OA $\perp l$，PO $\perp$ OA $\Longrightarrow$ PO $\perp \alpha$

解答
3.3

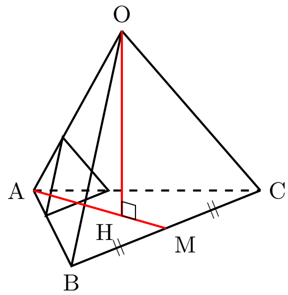
解答（節末）A3.3.3 ★★★ 節末 p.134

問題文

1 辺の長さが 3 の正四面体がある．この正四面体を右の図のように，1 つの頂点に集まる 3 つの辺においてそれぞれ 3 等分した点のうち，頂点に近い方の点を結んでできる正三角形を含む平面で切り，頂点を含む正四面体を取り除く．すべての頂点において同様に正四面体を取り除いたとき，残った立体の体積 V を求めよ．



右の図のように，正四面体 OABC の頂点 O から底面 ABC に垂線を下ろすと，その足 H は，正三角形 ABC の重心と一致する．
辺 BC の中点を M とすると，



$$\mathrm{AH} = \frac{2}{3}\mathrm{AM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB} = \sqrt{3}$$

したがって，

$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

正四面体 OABC の体積を V_0 とすると，

$$V_0 = \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

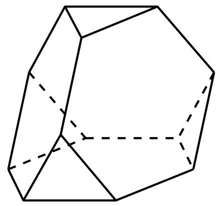
また，取り除かれる正四面体の 1 辺の長さは 1 であるから，その体積を V_1 とすると，

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

取り除かれる正四面体の数は正四面体の頂点の数と同じであるから，4 個取り除かれる．
よって，残った立体の体積 V は，

$$V = V_0 - 4V_1 = \frac{9\sqrt{2}}{4} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{12} = \boldsymbol{\frac{23\sqrt{2}}{12}}$$

◀ なお，すべての頂点で正四面体を取り除いたときにできる残った多面体を切頂四面体ということがある．



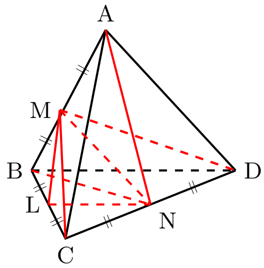
解答
3.3

解答（節末）A3.3.4 ★★★ 節末 p.135

問題文

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD の 2 辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．2 直線 CM，DM のなす角を α，2 直線 MN，AC のなす角を β とするとき，$\cos\alpha$ と β を求めよ．

CM と DM のなす角 α は $\angle$CMD に等しい．
ここで，$\angle\mathrm{AMD} = 90^\circ$ より，



◀ 2 つの面 ABC，ABD のなす角でもある．

$$\mathrm{CM} = \mathrm{DM} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

◀ 三平方の定理を用いる．

したがって，$\triangle$CMD において余弦定理を用いると，

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{CM}^2 + \mathrm{DM}^2 - \mathrm{CD}^2}{2 \cdot \mathrm{CM} \cdot \mathrm{DM}} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

また，辺 BC の中点を L とすると，AC$/\!/$ML であることから，MN と AC のなす角 β は $\angle$LMN に等しい．
ここで，$\angle\mathrm{CNM} = 90^\circ$ より，

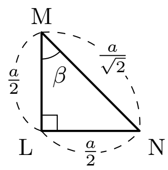
$$\mathrm{MN} = \sqrt{\mathrm{CM}^2 - \mathrm{CN}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

◀ 三平方の定理を用いる．

$\mathrm{ML} = \mathrm{LN} = \frac{a}{2}$ であるから，$\triangle$LNM において余弦定理を用いると，

◀ $\triangle$LNM は，$\angle\mathrm{L} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である．

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{ML}^2 + \mathrm{MN}^2 - \mathrm{LN}^2}{2 \cdot \mathrm{ML} \cdot \mathrm{MN}} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



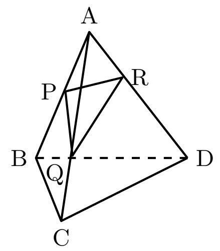
よって，$\beta = \mathbf{45^\circ}$

章末問題 3（解答）

解答（章末）A3.1 ★★　章末 p.136

問題文

右の図のような四面体 ABCD において, AP : PB = $a_1 : b_1$, AQ : QC = $a_2 : b_2$, AR : RD = $a_3 : b_3$ とする．このとき，四面体 APQR と四面体 ABCD の体積比を求めよ．



$$\triangle\mathrm{AQR} : \triangle\mathrm{ACD} = \mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AR} : \mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD} = a_2a_3 : (a_2+b_2)(a_3+b_3)\cdots(\mathrm{i})$$

◀ $\triangle\mathrm{AQR} = \frac{1}{2}\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AR}\sin\angle\mathrm{CAD}$, $\triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{CAD}$

B から面 ACD に下ろした垂線の足を M，P から面 ACD に下ろした垂線の足を N とすると，

$$\mathrm{PN} : \mathrm{BM} = \mathrm{AP} : \mathrm{AB} = a_1 : (a_1+b_1)\cdots(\mathrm{ii})$$

◀ AB と面 ACD のなす角を α とすると，
$\mathrm{PN} : \mathrm{BM}$
$= \mathrm{AP}\sin\alpha : \mathrm{AB}\sin\alpha$
$= \mathrm{AP} : \mathrm{AB}$

よって，(i)，(ii) より，求める体積比は，

$$a_2a_3\cdot a_1 : (a_2+b_2)(a_3+b_3)\cdot(a_1+b_1) = \boldsymbol{a_1a_2a_3 : (a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}$$

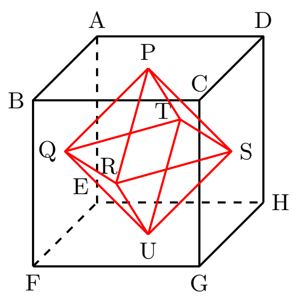
解答（章末）A3.2 ★★　章末 p.137

問題文

1 辺の長さが 2 の立方体がある．この立方体の各面の正方形における，対角線の交点を頂点とする正八面体について，次の問いに答えよ．

(1) 正八面体の 1 辺の長さを求めよ．　(2) 正八面体の体積を求めよ．

右の図のように，立方体を ABCD − EFGH とし，各面の対角線の交点を頂点とする正八面体を PQRSTU とする．



(1) 辺 AB，BC の中点をそれぞれ M，N とすると，

$$\mathrm{QR} = \mathrm{MN} = \sqrt{1^2+1^2} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

◀ 三平方の定理を用いる．

(2) PU は平面 QRST に垂直であり，四角錐 P − QRST と四角錐 U − QRST は合同であるから，求める正八面体の体積は，

$$\begin{aligned} 2\times(\text{四角錐 P−QRST}) &= 2\cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot(\text{四角形QRST})\cdot\frac{1}{2}\mathrm{PU}\right\} \\ &= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

◀ 四角形 QRST は正方形である．また，PU = 2

解答 3.4

解答（章末）A3.3 ★★★★ 章末 p.138

問題文

各面が正三角形である正多面体は何種類あるか．すべて挙げよ．

正 m 面体（m は 4 以上の自然数）の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とする．
正 m 面体の 1 つの頂点に集まる角の和は $360°$ より小さく，1 つの頂点には少なくとも 3 つ以上の面が集まる．
したがって，1 つの頂点に集まる面の数を n （n は 3 以上の自然数）とすると，

$$60° \times n < 360°$$

◀ 正三角形の 1 つの角は $60°$ であるから，$60° \times n$

ゆえに，$n < 6$ であるから，$n = 3,\ 4,\ 5$ の場合について考える．
(i) $n = 3$ のとき
1 つの頂点に 3 つの面が集まるから，

$$v = \frac{3 \times m}{3} = m, \quad e = \frac{3 \times m}{2} = \frac{3}{2}m, \quad f = m$$

◀ $v = \dfrac{\text{すべての面の頂点の数の和}}{\text{1 つの頂点に集まる面の数}}$，$e = \dfrac{\text{すべての面の辺の数の和}}{\text{1 つの辺に共有される面の数}}$

これらをオイラーの定理に代入すると，

$$m - \frac{3}{2}m + m = 2$$

したがって，$m = 4$ であるから，この正多面体は正四面体である．
(ii) $n = 4$ のとき
1 つの頂点に 4 つの面が集まるから，

$$v = \frac{3 \times m}{4} = \frac{3}{4}m, \quad e = \frac{3 \times m}{2} = \frac{3}{2}m, \quad f = m$$

これらをオイラーの定理に代入すると，

◀ オイラーの（多面体）定理
$$v - e + f = 2$$

$$\frac{3}{4}m - \frac{3}{2}m + m = 2m = 8$$

したがって，$m = 8$ であるから，この正多面体は正八面体である．
(iii) $n = 5$ のとき
1 つの頂点に 5 つの面が集まるから，

$$v = \frac{3 \times m}{5} = \frac{3}{5}m, \quad e = \frac{3 \times m}{2} = \frac{3}{2}m, \quad f = m$$

これらをオイラーの定理に代入すると，

$$\frac{3}{5}m - \frac{3}{2}m + m = 2$$

したがって，$m = 20$ であるから，この正多面体は正二十面体である．
よって，(i)〜(iii) より，各面が正三角形である正多面体は，正四面体，正八面体，正二十面体の **3 種類**ある．

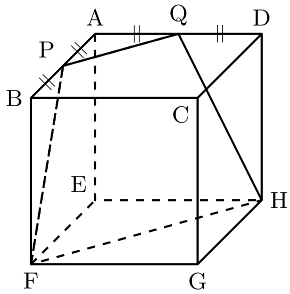
解答（章末）A3.4 ★★★ 章末 p.139

問題文

1 辺の長さが 8 の立方体 ABCD − EFGH において，辺 AB，AD の中点をそれぞれ P，Q とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 立体 PQA − EFH の体積を求めよ．

(2) 台形 PQHF の面積を求めよ．



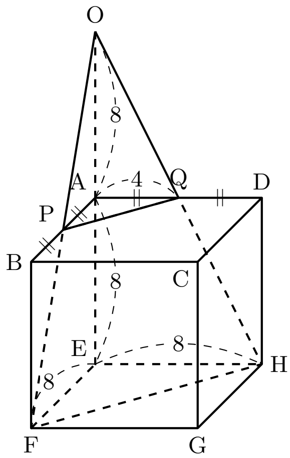
(1) 線分 FP,線分 EA,線分 HQ の延長の交点を O とすると,QA : HE = 4 : 8 = 1 : 2 であるから，OA : OE = 1 : 2

◀ △OAQ ∽ △OEH である．

したがって，三角錐 OPQA と三角錐 OFHE の体積比は，

$$1^3 : 2^3 = 1 : 8$$

◀ 相似比が $m : n$ のとき，体積比は $m^3 : n^3$ となる．



ここで，三角錐 OFHE の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{FHE}\cdot\mathrm{OE} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\right)\cdot 16$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 32\cdot 16 = \frac{512}{3}$$

よって，求める体積は，

$$\frac{512}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{512}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{3584}{24} = \boldsymbol{\frac{448}{3}}$$

◀ 三角錐 OPQA と三角錐 OFHE の体積比が 1 : 8 であることから,立体 PQA−EFH の体積は，三角錐 OFHE の体積の $\frac{7}{8}$ 倍である．

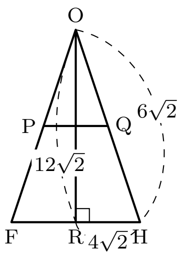
(2) O から FH に垂線 OR を下ろす．△OFH は二等辺三角形であるから，OR は FH の垂直二等分線である．

$\mathrm{FP} = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}$，$\mathrm{FH} = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}$ より，$\mathrm{FO} = 8\sqrt{5}$，$\mathrm{RH} = 4\sqrt{2}$

したがって，

$$\mathrm{OR} = \sqrt{(8\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2} = 12\sqrt{2}$$

◀ 三平方の定理を用いる．



ゆえに，

$$\triangle\mathrm{OFH} = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 192 = 96$$

ここで，△OPQ ∽ △OFH であり，OP : OF = 1 : 2 より，△OPQ と △OFH の面積比は，

$$1^2 : 2^2 = 1 : 4$$

◀ 相似比が $m : n$ のとき，面積比は $m^2 : n^2$ である．

よって，台形 PQHF の面積は，$96\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = 96\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{72}$

解答 3.4

数学と人間の活動（解答）

約数と倍数（解答）

解答 A4.1.1 ★★ 問題 p.141

問題文

一の位と十の位の数字がわからない 5 桁の自然数 317□□ に，それぞれ数を入れると，9 の倍数となる．このとき，5 桁の自然数が最小となるものを求めよ．

□ に入る十の位の数を a (a は整数，$0 \leqq a \leqq 9$)，一の位に入る数を b (b は整数，$0 \leqq b \leqq 9$) とする．
各桁の数字の和は，$3+1+7+a+b=a+b+11$ である．これが 9 の倍数となるとき，317□□ は 9 の倍数となる．
$0 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$ より，$0 \leqq a+b \leqq 18$ であるから，$a+b+11$ が 9 の倍数となるのは，$a+b=7$ または $a+b=16$ のときである．

◀ $11 \leqq a+b+11 \leqq 29$ において，$a+b+11$ が 9 の倍数となるのは，$a+b+11=9\cdot 2$，$a+b+11=9\cdot 3$ のとき，すなわち，$a+b=7$ または $a+b=16$ のときである．

自然数が最小となるものを求めるから，$a+b=7$
これを満たす a，b のうち，a が最小となるものを求めればよい．
したがって，$a=0$，$b=7$
よって，求める自然数は，**31707** である．

解答 A4.1.2 ★★ 問題 p.142

問題文

(1) n を自然数とする．$\sqrt{27000n}$ が自然数となるような最小の n を求めよ．
(2) $\frac{n}{6}$，$\frac{n^2}{196}$，$\frac{n^3}{1323}$ がすべて自然数となるような最小の自然数 n を求めよ．

(1) $\sqrt{27000n}$ が自然数となるのは，27000 がある自然数の 2 乗になるとき，つまり，27000 を素因数分解したときの素因数の指数がすべて偶数となるときである．
27000 を素因数分解すると，$27000=2^3\cdot 3^3\cdot 5^3$
したがって，求める自然数 n は，$n=2\cdot 3\cdot 5$
よって，$n=2\cdot 3\cdot 5=\mathbf{30}$

(2) $\frac{n}{6}$ が自然数となるのは，n が 6 の倍数のときである．

◀ 分母が 6 であることから，$n=6k$ とおく．

したがって，$n=6k$（k は自然数）とおくと，$n=2\cdot 3\cdot k$
このとき，

$$\frac{n^2}{196}=\frac{(2\cdot 3\cdot k)^2}{2^2\cdot 7^2}=\frac{3^2\cdot k^2}{7^2}$$

これが自然数となるのは，k が 7 の倍数のときである．

◀ 分母が 2^2 であることから，$k=7l$ とおく．

ゆえに，$k=7l$（l は自然数）とおくと，$n=2\cdot 3\cdot 7\cdot l\cdots$(i)
このとき，

$$\frac{n^3}{1323}=\frac{(2\cdot 3\cdot 7\cdot l)^3}{3^3\cdot 7^2}=2^3\cdot 7\cdot l^3$$

よって，これが自然数となるもので最小のものは，$l=1$ のときであるから，(i) に代入すると，

◀ l が最小のとき，n も最小となる．

$$n=2\cdot 3\cdot 7\cdot 1=\mathbf{42}$$

解答 4.1

One math

解答 A4.1.3 ★★ 問題 p.143

問題文

(1) 360 の正の約数の個数と，正の約数の総和を求めよ．
(2) 18 の倍数のうち，正の約数の個数が 9 個である自然数 n をすべて求めよ．
(3) 400 以下の自然数のうち，正の約数が 15 個である自然数の個数をすべて求めよ．

(1) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ であるから，正の約数の個数は，

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24}\ \textbf{(個)}$$

また，正の約数の総和は，

$$\left(1+2+2^2+2^3\right)\left(1+3+3^2\right)(1+5) = 15 \cdot 13 \cdot 6 = \mathbf{1170}$$

(2) 9 を素因数分解すると，$9 = 3^2$
したがって，正の約数の個数が 9 個である自然数 n を素因数分解すると，p^8，p^2q^2 (p，q は異なる素数) のいずれかの形で表される．
n は 18 の倍数であり，$18 = 2 \cdot 3^2$ であるから，n は p^2q^2 の形で表される．
ゆえに，求める自然数 n は，$n = 2^2 \cdot 3^2$
よって，$n = \mathbf{36}$

◀ $9 = 3^2 = 3 \cdot 3$ より，$p^{9-1}q^{1-1}$ または $p^{3-1}q^{3-1}$

◀ p^8 の場合は起こらない．

(3) 15 を素因数分解すると，$15 = 3 \cdot 5$
したがって，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を素因数分解すると，p^{14}，p^4q^2 (p，q は異なる素数) のいずれかの形で表される．

(i) 自然数 n が p^{14} の形で表されるとき
2^{14} は 400 以下ではないので，該当する自然数はない．
(ii) 自然数 n が p^4q^2 の形で表されるとき

$$2^4 \cdot 3^2,\ 2^4 \cdot 5^2,\ 3^4 \cdot 2^2$$

が条件を満たすから，3 個

よって，(i)，(ii) より，**3 個**

◀ p^{14} の正の約数の個数は，$14+1 = 15$ (個) であり，p^4q^2 の正の約数の個数は，$(4+1)(2+1) = 15$ (個) である．

◀ 2^{14} は $2^{14} = 16384$ であるから，条件を満たさない．

解答 A4.1.4 ★★ 問題 p.144

問題文

(1) 15! が 2^k で割り切れるとき，自然数 k の最大値を求めよ．

(2) 50! は，末尾には 0 が何個連続して並ぶ整数であるか答えよ．

(1) 1 から 15 までの自然数について，

$$2 \text{ の倍数は } 7 \text{ 個，} 2^2 \text{ の倍数は } 3 \text{ 個，} 2^3 \text{ の倍数は } 1 \text{ 個}$$

したがって，15! に含まれる因数 2 の個数は，$7+3+1=11$ (個)
よって，求める自然数 k の最大値は，$k = \mathbf{11}$
(2) 求める 0 の個数は 50! に含まれる因数 10 の個数に等しい．また，$10 = 2 \cdot 5$ であり，50!に含まれる因数 5 の個数が因数 2 の個数より少ないので，因数 10 の個数は因数 5 の個数に等しい．

◀ 1 から 50 までの自然数について，2 の倍数は 25 個，5 の倍数は 10 個である．

1 から 50 までの自然数について，

$$5 \text{ の倍数は } 10 \text{ 個，} 5^2 \text{ の倍数は } 2 \text{ 個}$$

◀ 5，25 の倍数の個数をそれぞれ求める．

$50 = 5 \times 10$，$50 = 25 \times 2$

したがって，50! に含まれる因数 5 の個数は，$10+2=12$ (個)
よって，求める 0 の個数は，**12 個**

解答 A4.1.5 ★ 問題 p.145

問題文

(1) 次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めよ．

(i) 144，192　　(ii) 210，360，540

(2) n を正の整数とする．n と 20 の最小公倍数が 80 となるような n をすべて求めよ．

(1) (i) 与えられた 2 つの数を素因数分解すると，

◀
$$\begin{array}{r|r} 2 & 144 \\ \hline 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 192 \\ \hline 2 & 96 \\ \hline 2 & 48 \\ \hline 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$144 = 2^4 \cdot 3^2, \quad 192 = 2^6 \cdot 3$$

最大公約数は，$2^4 \cdot 3 = \mathbf{48}$
最小公倍数は，$2^6 \cdot 3^2 = \mathbf{576}$

(ii) 与えられた 3 つの数を素因数分解すると，

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

最大公約数は，$2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{30}$
最小公倍数は，$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{7560}$

◀ 共通する素因数は，2，3，5 であり，すべての素因数は，2，3，5，7 であると考える．それらの指数のうち，それぞれ最小のもの，最大のものを掛け合わせる．

(2) 20，80 をそれぞれ素因数分解すると，

$$20 = 2^2 \cdot 5, \quad 80 = 2^4 \cdot 5$$

したがって，20 との最小公倍数が 80 である正の整数は，$2^4 \cdot 5^a$ $(a = 0,\ 1)$
ゆえに，求める正の整数 n は，

◀ n は複数の値が考えられるので注意すること．

$$n = 2^4 \cdot 5^0, \quad 2^4 \cdot 5^1$$

よって，$n = \mathbf{16，80}$

解答 4.1

解答 A4.1.6 ★★ 問題 p.146

問題文

次の条件を満たす 2 つの自然数 a, b の組をすべて求めよ．ただし，$a < b$ とする．

(1) 和が 180，最大公約数が 15　　(2) 積が 400，最小公倍数が 80

(1) 最大公約数が 15 であるから，2 つの自然数 a, b は $a = 15a'$, $b = 15b'$ とおける．ただし，a', b' は互いに素な自然数であり，$a < b$ より，$a' < b'$

◀ $a = ga'$, $b = gb'$

和が 180 であるから，$15a' + 15b' = 180$

したがって，$a' + b' = 12$

これを満たす，互いに素な自然数 a', b' の組は，

◀「a, b が互いに素 $\Longleftrightarrow$ a, b の最大公約数が 1」が成り立つ．これより，例えば，$(a',\ b') = (2,\ 10)$ は，a' と b' が互いに素ではないので不適である（最大公約数が 1 ではない）．

$$(a',\ b') = (1,\ 11),\ (5,\ 7)$$

よって，$(a,\ b) = \mathbf{(15,\ 165),\ (75,\ 105)}$

(2) 最大公約数を g とすると，積が 400，最小公倍数が 80 であるから，$400 = g \cdot 80$

したがって，$g = 5$ であるから，$a = 5a'$, $b = 5b'$ とおける．ただし，a', b' は互いに素な自然数であり，$a < b$ より，$a' < b'$

◀ $a = ga'$, $b = gb'$

$80 = 5a'b'$ が成り立つから，$a'b' = 16$

◀ $l = a'b'g$

これを満たす，互いに素な自然数 a', b' の組は，

$$(a',\ b') = (1,\ 16)$$

よって，$(a,\ b) = \mathbf{(5,\ 80)}$

解答 A4.1.7 ★★ 問題 p.147

問題文

n を自然数とする．$n+3$ が 6 の倍数であり，$n+1$ が 8 の倍数であるとき，$n+9$ が 24 の倍数であることを証明せよ．

$n+3$, $n+1$ は，それぞれ $n+3 = 6k$, $n+1 = 8l$ (k, l は自然数) とおける．

$n+9$ を k, l を用いて表すと，

$$n+9 = (n+3)+6 = 6k+6 = 6(k+1) \cdots \text{(i)},$$

$$n+9 = (n+1)+8 = 8l+8 = 8(l+1)$$

したがって，$6(k+1) = 8(l+1)$

すなわち，$3(k+1) = 4(l+1)$ であり，3 と 4 は互いに素であるから，$k+1$ は 4 の倍数である．

ゆえに，$k+1 = 4m$ (m は自然数) と表せる．

(i) より，$n+9 = 6(k+1) = 6 \cdot 4m = 24m$

よって，$n+9$ は 24 の倍数である．■

◀ m は自然数であるから，$24m$ は 24 の倍数である．

解答 4.1

One math

解答 A4.1.8 ★★★ 問題 p.148

問題文

a，b を自然数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) $a+b$ と ab が互いに素であるとき，a と b も互いに素であることを証明せよ．
(2) a と b が互いに素であるとき，a^2 と b^2 も互いに素であることを証明せよ．

(1) a と b が互いに素ではないと仮定すると，a，b はある素数 p を約数にもち，$a = pm \cdots$(i)，$b = pn \cdots$(ii) とおける．ただし，m と n は互いに素な自然数とする．

◀ 背理法を用いる．

(i) と (ii) を辺々足し合わせると，$a+b = pm+pn = p(m+n)$
(i) と (ii) を辺々掛け合わせると，$ab = p^2mn$
したがって，p は $a+b$ と ab は公約数となり，これは $a+b$ と ab が互いに素であることに矛盾する．
よって，a と b は互いに素である．■

(2) a^2 と b^2 が互いに素ではないと仮定すると，a^2 と b^2 は共通の素因数 p をもつ．
a^2 は p の倍数であるから，a は p の倍数であり，b^2 は p の倍数であるから，b も p の倍数である．
これは a と b が互いに素であることに矛盾する．
よって，a^2 と b^2 は互いに素である．■

◀ 背理法を用いる．
◀ n^2 が k の倍数ならば，n も k の倍数である．

解答 A4.1.9 ★★★ 問題 p.149

問題文

n 以下の自然数で，n と互いに素である自然数の個数を $f(n)$ とするとき，次の値を求めよ．ただし，p，q，r は異なる素数とする．

(1) $f(75)$　(2) $f(p^2q)$　(3) $f\left(2^m\right)$

(1) $75 = 3\cdot 5^2$ であるから，75 と互いに素ではない自然数は，3 または 5 の倍数である．
75 以下の自然数について，3 の倍数は 25 個，5 の倍数は 15 個，15 の倍数は 5 個
したがって，75 以下の自然数のうち 3 または 5 の倍数は，$25+15-5=35$ (個)
よって，$f(75) = 75-35 = \mathbf{40}$

◀ $n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(2) p，q はともに素数であるから，p^2q と互いに素ではない自然数は，p または q の倍数である．
p^2q 以下の自然数について，

$$\begin{gathered} p \text{ の倍数は，} p^2q = pq\cdot p \text{ より，} pq \text{ 個，} \\ q \text{ の倍数は，} p^2q = p^2\cdot q \text{ より，} p^2 \text{ 個，} \\ pq \text{ の倍数は，} p^2q = p\cdot pq \text{ より，} p \text{ 個} \end{gathered}$$

◀ $1\cdot p$，$2\cdot p$，$\ldots$，$(pq-1)\cdot p$，$pq\cdot p$ の pq 個

したがって，p^2q 以下の自然数のうち p または q の倍数は，$pq+p^2-p$ 個
よって，$f(p^2q) = p^2q-(pq+p^2-p) = \boldsymbol{p^2q-p^2-pq+p}$

◀ $n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(3) 2^m 以下の自然数について，2 の倍数は，$2^m = 2\cdot 2^{m-1}$ より，2^{m-1} 個
よって，$f\left(2^m\right) = \boldsymbol{2^m-2^{m-1}}$

◀ $1\cdot 2$，$2\cdot 2$，$\ldots$，$2^{m-1}\cdot 2$ の 2^{m-1} 個

解答 4.1

One math

解答 A4.1.10 ★ 問題 p.150

問題文

a, b を整数とする．a を 7 で割ると 4 余り，b を 7 で割ると 5 余る．このとき，次の数を 7 で割った余りを求めよ．

(1) $a+2b$　(2) ab　(3) a^4

$a=7k+4,\ b=7l+5$ ($k,\ l$ は整数) と表される．

(1)

$$\begin{aligned} a+2b &= 7k+4+2(7l+5) \\ &= 7k+4+14l+10 \\ &= 7(k+2l+2) \end{aligned}$$

よって，求める余りは，**0**

(2)

$$\begin{aligned} ab &= (7k+4)(7l+5) \\ &= 49kl+35k+28l+20 \\ &= 7(7kl+5k+4l+2)+6 \end{aligned}$$

よって，求める余りは，**6**

(3)

$$a^2=(7k+4)^2=49k^2+56k+16=7(7k^2+8k+2)+2$$

◀ a^2 を 7 で割った余りを考えるとよい．

したがって，$a^2=7m+2$ (m は整数) と表されるから，

$$a^4=(a^2)^2=(7m+2)^2=49m^2+28m+4=7(7m^2+4m)+4$$

よって，求める余りは，**4**

解答 A4.1.11 ★★ 問題 p.151

問題文

n を整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) n^2-5n+4 は偶数であることを証明せよ．

(2) n^3+2n+1 を 3 で割った余りが 1 であることを証明せよ．

(1) すべての整数 n は，$n=2k$，$n=2k+1$ (k は整数) のいずれかの形で表される．

(i) $n=2k$ のとき

$$n^2-5n+4=(2k)^2-5\cdot 2k+4=4k^2-10k+4=2(2k^2-5k+2)$$

◀ 偶数である（2 で割り切れる）．

(ii) $n=2k+1$ のとき

$$n^2-5n+4=(2k+1)^2-5(2k+1)+4=4k^2-6k=2(2k^2-3k)$$

◀ 偶数である（2 で割り切れる）．

よって，(i)，(ii) より，n^2-5n+4 は偶数である． ■

(2) すべての整数 n は，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ (k は整数) のいずれかの形で表される．

(i) $n=3k$ のとき

$$\begin{aligned} n^3+2n+1&=(3k)^3+2\cdot 3k+1\\ &27k^3+6k+1\\ &=3(9k^3+2k)+1 \end{aligned}$$

(ii) $n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3+2n+1&=(3k+1)^3+2(3k+1)+1\\ &=27k^3+27k^2+15k+4\\ &=3(9k^3+9k^2+5k+1)+1 \end{aligned}$$

(iii) $n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} n^3+2n+1&=(3k+2)^3+2(3k+2)+1\\ &=27k^3+54k^2+42k+13\\ &=3(9k^3+18k^2+14k+4)+1 \end{aligned}$$

よって，(i)〜(iii) より，n^3+2n+1 を 3 で割ると余りは 1 である． ■

解答 4.1

解答 A4.1.12 ★★★ 問題 p.152

問題文

(1) n を整数とする．このとき，n^2 を 3 で割った余りが 0 または 1 であることを証明せよ．
(2) a，b，c を整数とする．$a^2+b^2=c^2$ のとき，a，b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを証明せよ．

(1) すべての整数 n は，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ (k は整数) のいずれかの形で表される．

(i) $n=3k$ のとき

$$n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$$

となるから，n^2 を 3 で割った余りは 0 である．
(ii) $n=3k+1$ のとき

$$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$

となるから，n^2 を 3 で割った余りは 1 である．
(iii) $n=3k+2$ のとき

$$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$$

となるから，n^2 を 3 で割った余りは 1 である．

よって，(i)〜(iii) より，n^2 を 3 で割った余りは，0 または 1 である． ■

(2) a と b がともに 3 の倍数ではないと仮定すると，(1) より，a^2 と b^2 を 3 で割った余りはそれぞれ 1 である．
したがって，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2 である．
一方，(1) より，c^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 であり，$a^2+b^2=c^2$ の両辺を 3 で割った余りが一致しないので，矛盾する．
よって，a，b の少なくとも一方は 3 の倍数である． ■

◀ 背理法を用いる．

◀ m，n を整数とすると，$a^2=3m+1$，$b^2=3n+1$ より，

$$a^2+b^2=3(m+n)+2$$

解答 4.1

解答 A4.1.13 ★★★ 問題 p.153

問題文

(1) 2^{50} を 7 で割ったときの余りを求めよ．

(2) 1000^{100} を 14 で割ったときの余りを求めよ．

(3) 456^{456} の一の位の数を求めよ．

(1) $2^1 \equiv 2 \pmod 7$，$2^2 \equiv 4 \pmod 7$，$2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$ より，

$$2^{50} \equiv \left(2^3\right)^{16} \cdot 2^2 \equiv 1^{16} \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7$$

◀ $2^3 \equiv 1$ より，$(2^3)^n \equiv 1$ (mod 7)

◀ $50 = 3 \cdot 16 + 2$

よって，2^{50} を 7 で割ったときの余りは，**4**

(2) $1000 \equiv 6 \pmod{14}$ より，$1000^{100} \equiv 6^{100} \pmod{14}$

ここで，$6^2 \equiv 36 \equiv 8 \pmod{14}$，$6^3 \equiv 8 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{14}$，$6^4 \equiv 6^2 \equiv 8 \pmod{14}$ より，k を自然数とすると，

$$6^{2k} \equiv 8 \pmod{14}$$

◀ $6^5 \equiv 6 \pmod{14}$，$6^6 \equiv 8$ $(\mathrm{mod}\ 14), \ldots$ と余りは 6 と 8 が繰り返される．

したがって，$1000^{100} \equiv 6^{100} \equiv 8 \pmod{14}$

よって，1000^{100} を 14 で割ったときの余りは，**8**

◀ 6^{2k} において，$k = 50$ のとき，$6^{2 \cdot 50} = 6^{100}$

(3) $456 \equiv 6 \pmod{10}$，$456^2 \equiv 6^2 \equiv 6 \pmod{10}$，$456^3 \equiv 6^3 \equiv 6 \pmod{10}$ より，k を自然数とすると，

$$456^k \equiv 6 \pmod{10}$$

よって，456^{456} の一の位の数は，**6**

解答 A4.1.14 ★★★ 問題 p.154

問題文

(1) n を整数とする．n^2 を 7 で割った余りをすべて求めよ．
(2) n を自然数とする．合同式を用いて，$7^n + 2 \cdot 5^{2n}$ は 3 の倍数であることを証明せよ．

(1) すべての整数 n について

$$n \equiv 0 \pmod 7, \quad n \equiv 1 \pmod 7, \quad n \equiv 2 \pmod 7, \quad n \equiv 3 \pmod 7,$$
$$n \equiv 4 \pmod 7, \quad n \equiv 5 \pmod 7, \quad n \equiv 6 \pmod 7$$

のいずれかである．

(i) $n \equiv 0 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 7$
(ii) $n \equiv 1 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 7$
(iii) $n \equiv 2 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 7$
(iv) $n \equiv 3 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$
(v) $n \equiv 4 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$
(vi) $n \equiv 5 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv 4 \pmod 7$
(vii) $n \equiv 6 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 6^2 \equiv 36 \equiv 1 \pmod 7$

よって，(i)〜(vii) より，n^2 を 7 で割った余りは **0，1，2，4** のいずれかである．

(2) $7 = 6 + 1$ より，$7 \equiv 1 \pmod 3$ であるから，

$$7^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 3$$

◀ $a \equiv b \pmod m$ のとき，
$$a^n \equiv b^n \pmod m$$

$5 = 3 + 2$ より，$5 \equiv 2 \pmod 3$ であるから，

$$5^{2n} \equiv (2)^{2n} \equiv 4^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 3$$

したがって，

$$7^n + 2 \cdot 5^{2n} \equiv 1 + 2 \cdot 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$$

◀ $a \equiv b \pmod m$，$c \equiv d \pmod m$ のとき，
$$a + c \equiv b + d \pmod m$$

よって，$7^n + 2 \cdot 5^{2n}$ は 3 の倍数である．■

解答 4.1

解答（節末）A4.1.1 ★★ 節末 p.155

問題文

正の約数の個数が 12 個である自然数のうち，最も小さい数を求めよ．

正の約数の個数が 12 個である自然数は，次の 4 つの場合がある．

(i) 素数 p を用いて p^{11} と表されるとき

このような自然数のうち，最も小さい数は，$2^{11} = 2048$

◀ p^{11} の正の約数の個数は，$11+1=12$ (個)

(ii) 2 つの異なる素数 p，q を用いて p^5q と表されるとき

このような自然数のうち，最も小さい数は，$2^5 \cdot 3 = 96$

◀ p^5q の正の約数の個数は，$(5+1)(1+1)=12$ (個)

(iii) 2 つの異なる素数 p，q を用いて p^3q^2 と表されるとき

このような自然数のうち，最も小さい数は，$2^3 \cdot 3^2 = 72$

◀ p^3q^2 の正の約数の個数は，$(3+1)(2+1)=12$ (個)

(iv) 3 つの異なる素数 p，q，r を用いて p^2qr と表されるとき

このような自然数のうち，最も小さい数は，$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

◀ p^2qr の正の約数の個数は，$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ (個)

(i)〜(iv) より，求める自然数は，**60**

解答（節末）A4.1.2 ★★ 節末 p.156

問題文

$n!$ について，下 4 桁に 0 が 4 個連続して並ぶような最小の自然数 n を求めよ．

$n!$ が因数 10 を 4 個含むとき，下 4 桁に 0 が 4 個並ぶ．また，$10 = 2 \cdot 5$ であり，$n!$ に含まれる因数 5 の個数が因数 2 の個数より少ないので，因数 10 の個数は因数 5 の個数に等しい．

◀ 末尾に並ぶ 0 の個数は，因数 10 の個数と一致する．

よって，$n!$ に 5 の倍数を 4 個含むような自然数 n のうち，最小のものが求める数となるから，

◀ $n!$ は因数 5 を 4 個含む数となる．

$$5 \times 4 = 20$$

◀ $20 < 5^2$ であるから，5^2 の倍数を考える必要はない．

より，求める自然数 n は，**20**

解答（節末）A4.1.3 ★★ 節末 p.157

問題文

分数 $\frac{144}{35}$，$\frac{234}{55}$ のいずれに掛けても積が自然数となるような分数のうち，最小のものを求めよ．

与えられた条件を満たす分数を $\frac{a}{b}$ (a，b は互いに素な自然数) とすると，a は 35 と 55 の公倍数，b は 144 と 234 の公約数である．

したがって，$\frac{a}{b}$ が最小となるには，35 と 55 の最小公倍数を a，144 と 234 の最大公約数を b とすればよい．

◀ $\frac{144}{35} \times \frac{a}{b}$ が自然数となるとき，a は 35 の倍数であり，b は 144 の約数である．また，$\frac{234}{55} \times \frac{a}{b}$ が自然数となるとき，a は 55 の倍数であり，b は 234 の約数である．

よって，$35 = 5 \cdot 7$，$55 = 5 \cdot 11$，$144 = 2^4 \cdot 3^2$，$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$ であるから，

$$a = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385, \quad b = 2 \cdot 3^2 = 18$$

とすると，求める最小値は，$\boldsymbol{\frac{385}{18}}$

解答（節末）A4.1.4 ★★★ 節末 p.158

問題文

すべての自然数 n について，n と $n+1$ は互いに素であることを証明せよ．

n と $n+1$ が互いに素ではないと仮定すると，n と $n+1$ は共通の素数 p を約数にもち，

$$n=ap, \quad n+1=bp$$

とおける．ただし，a, b は自然数である．
このとき，

$$(n+1)-n=bp-ap$$

すなわち，$1=(b-a)p$
ここで，$b-a$ は整数であるから，p は 1 の約数である．
これは p が素数であることに矛盾する．
よって，n と $n+1$ は互いに素である．■

◀ 背理法を用いる．n と $n+1$ が互いに素ではない $\Leftrightarrow$ n と $n+1$ が素数を公約数にもつ

◀ 1 の約数は，1，-1 であり，どちらも素数ではない．

解答（節末）A4.1.5 ★★★ 節末 p.159

問題文

$\frac{n}{196}$ が 1 より小さい既約分数となるような正の整数 n は全部で何個あるか．

n は 196 と互いに素である 195 以下の正の整数である．$196=2^2\cdot 7^2$ であるから，このような数は，1 から 195 までの 195 個の自然数のうち，2 または 7 の倍数を除いたものである．1 から 195 までの自然数について，

2 の倍数の個数は，$1\cdot 2$，$2\cdot 2$，$\ldots$，$97\cdot 2$ の 97 個
7 の倍数の個数は，$1\cdot 7$，$2\cdot 7$，$\ldots$，$27\cdot 7$ の 27 個
14 の倍数の個数は，$1\cdot 14$，$2\cdot 14$，$\ldots$，$13\cdot 14$ の 13 個

◀ $195=2\times 97+1$
◀ $195=7\times 27+6$
◀ $195=13\times 14+13$

よって，求める個数は，

$$195-(97+27-13)=\mathbf{84}\ \textbf{(個)}$$

◀ オイラー関数を用いると，$\phi(196)=\phi(2^2\cdot 7^2)=196\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=84$ のように検算できる．

解答
4.1

ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法（解答）

解答 A4.2.1 ★ 問題 p.160

問題文

(1) ユークリッドの互除法を用いて，462 と 700 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．
(2) ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{871}{1209}$ を既約分数にせよ．

(1)

$$\begin{aligned}700 &= 462 \times 1 + 238\\462 &= 238 \times 1 + 224\\238 &= 224 \times 1 + 14\\224 &= 14 \times 16\end{aligned}$$

◀ 余りが 0 となり，このときの 14 が最大公約数である．

224 と 14 の最大公約数は 14 であるから，462 と 700 の最大公約数は，**14**
したがって，$462 = 33 \times 14$，$700 = 50 \times 14$
よって，462 と 700 の最小公倍数は，

$$33 \times 50 \times 14 = \mathbf{23100}$$

(2)

$$\begin{aligned}1209 &= 871 \times 1 + 338\\871 &= 338 \times 2 + 195\\338 &= 195 \times 1 + 143\\195 &= 143 \times 1 + 52\\143 &= 52 \times 2 + 39\\52 &= 39 \times 1 + 13\\39 &= 13 \times 3\end{aligned}$$

◀ 余りが 0 となり，このときの 13 が最大公約数である．

39 と 13 の最大公約数は 13 であるから，871 と 1209 の最大公約数は，13
よって，$\frac{871}{1209} = \frac{13\times67}{13\times93} = \boldsymbol{\frac{67}{93}}$

◀ 最大公約数で約分できる．

解答 4.2

One math

解答 A4.2.2 ★★★ 問題 p.161

問題文

(1) $6n+1$ と $5n+3$ の最大公約数が 13 になるような 70 以下の自然数 n をすべて求めよ．
(2) $7n+4$ と $3n+1$ が互いに素になるような 120 以下の自然数 n は全部でいくつあるか．

(1)

$$6n+1=(5n+3)\times1+(n-2)$$
$$5n+3=(n-2)\times5+13$$

◀ 余りが 13 となり，定数項になる．

ここで，$6n+1$ と $5n+3$ の最大公約数は，$n-2$ と 13 の最大公約数に等しい．
$n-2$ と 13 の最大公約数が 13 となるのは，$n-2$ が 13 の倍数のときである．
n は 70 以下の自然数より，$1\leqq n\leqq70$

◀ n は 70 以下の自然数であることから，$n-2$ の値の範囲を定める．

したがって，$-1\leqq n-2\leqq68$
この範囲において，$n-2$ が 13 の倍数となるのは，0，13，26，39，52，65
よって，$n-2=0$，13，26，39，52，65 より，$n=$ **2，15，28，41，54，67**

(2)

$$7n+4=(3n+1)\times2+(n+2)$$
$$3n+1=(n+2)\times3-5$$

◀ 余りが 5 となり，定数項になる．

$7n+4$ と $3n+1$ が互いに素であるとき，$n+2$ と 5 も互いに素であるから，求める個数は，$n+2$ と 5 が互いに素であるような 120 以下の自然数 n の個数に等しい．

◀ $a=bq-r$ のときも，a と b の最大公約数は b と r の最大公約数と等しいことを利用する．

n は 120 以下の自然数より，$1\leqq n\leqq120$
したがって，$3\leqq n+2\leqq122$
この範囲において，$n+2$ が 5 の倍数となるのは，

$$n+2=5\times1,\ 5\times2,\ \ldots,\ 5\times23,\ 5\times24$$

◀ 5 の倍数となるとき（互いに素ではないとき）の個数を求め，全体の 120 個から引くことを考える．

より，24 個
よって，求める個数は，$120-24=$ **96 (個)**

解答 4.2

One math

解答 A4.2.3 ★★ 問題 p.162

問題文

次の不定方程式の整数解を求めよ．

(1) $7x-3y=18$　　(2) $39x+56y=17$

(1) $7x-3y=18$ より，$7x=3(y+6)\cdots$(i)
7 と 3 は互いに素であるから，x は 3 の倍数となる．
したがって，k を整数として，$x=3k$ とおける．
これを (i) に代入すると，$7\times 3k=3(y+6)$
$7k=y+6$ より，$y=7k-6$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=3k,\ y=7k-6}$ **(k は整数)**

◀ 3 と 18 は 1 より大きい公約数 3 をもつ．

【別解】 $7x-3y=18$ より，$y=\frac{7}{3}x-6$
y は整数より，x は 3 の倍数となる．
したがって，$x=3k$ (k は整数) とおけ，$y=7k-6$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=3k,\ y=7k-6}$ **(k は整数)**

◀ x が 3 の倍数ではないとき，y は整数ではない．

(2) $56=39\times 1+17$ より，

$$39x+(39\times 1+17)y=17$$

◀ x と y の係数のうち，大きい数の 56 を小さい数の 39 で割ることを考える．

したがって，$39(x+y)=17(1-y)\cdots$(i)
39 と 17 は互いに素であるから，$x+y$ は 17 の倍数となる．
したがって，k を整数として，$x+y=17k$，すなわち，$x=17k-y\cdots$(ii) とおける．
(ii) を (i) に代入すると，$39\times 17k=17(1-y)$
$39k=1-y$ より，$y=-39k+1$
これを (ii) に代入すると，$x=56k-1$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=56k-1,\ y=-39k+1}$ **(k は整数)**

解答 A4.2.4 ★★ 問題 p.163

問題文

不定方程式 $4x+7y=1$ の整数解をすべて求めよ．

$4\times 2+7\times(-1)=1$であるから，$x=2,\ y=-1$ は $4x+7y=1$ を満たす整数解の 1 つである．
したがって，

◀ 特殊解を 1 つ見つける．$x=9,\ y=-5$ なども特殊解である．

$$4x+7y=1\cdots(\text{i}),\quad 4\times 2+7\times(-1)=1\cdots(\text{ii})$$

とすると，(i) − (ii) より，$4(x-2)+7(y+1)=0$
したがって，$4(x-2)=-7(y+1)\cdots$(iii)
ここで，4 と 7 は互いに素であるから，$x-2$ は 7 の倍数となり，k を整数とすると，$x-2=7k$，すなわち，$x=7k+2$
これを (iii) に代入すると，$4\times 7k=-7(y+1)$
$4k=-(y+1)$ より，$y=-4k-1$
よって，一般解は，$\boldsymbol{x=7k+2,\ y=-4k-1}$ **(k は整数)**

◀ $a,\ b$ が互いに素で，an が b の倍数ならば，n は b の倍数であることを利用する．

解答 A4.2.5 ★★★ 問題 p.164

問題文

不定方程式 $47x+19y=1$ の整数解をすべて求めよ．

不定方程式 $47x+19y=1 \cdots$(i) の係数である 47 と 19 について，ユークリッドの互除法を用いる．

$$47 = 19\times 2+9 \text{ より，} \quad 47-19\times 2 = 9 \cdots \text{(ii)}$$
$$19 = 9\times 2+1 \text{ より，} \quad 19-9\times 2 = 1 \cdots \text{(iii)}$$

(iii) に (ii) を代入すると，$19-(47-19\times 2)\times 2=1$ より，

◀ $9=47-19\times 2$

$$-47\times 2+19\times 5=1 \cdots \text{(iv)}$$

したがって，$x=-2$，$y=5$ は不定方程式 $47x+19y=1$ を満たす整数解の 1 つである．

◀ $x=-2$，$y=5$ が特殊解の 1 つである．

(i) − (iv) より，$47(x+2)+19(y-5)=0$

ゆえに，$47(x+2)=19(5-y)\cdots$(v)

47 と 19 は互いに素であるから，$x+2$ は 19 の倍数となり，k を整数とすると，

$x+2=19k$，すなわち，$x=19k-2$

これを (v) に代入すると，$47\times 19k=19(5-y)$

$47k=5-y$ より，$y=-47k+5$

よって，求める一般解は，$\boldsymbol{x=19k-2}$**，**$\boldsymbol{y=-47k+5}$ **(k は整数)**

解答 A4.2.6 ★★★ 問題 p.165

問題文

不定方程式 $x+3y+4z=15$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

与えられた不定方程式 $x+3y+4z=15$ を z について整理すると，$4z=15-x-3y$

◀ 係数の大きい $4z$ について注目して整理する．

x，y は自然数であるから，$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ より，

$$4z=15-x-3y \leqq 15-1-3\times 1=11$$

したがって，$z \leqq \frac{11}{4}$ より，$z=1,\ 2$ となる．

◀ $1 \leqq z \leqq \frac{11}{4}$ を満たす自然数 z の値は，$z=1,\ 2$ である．

（ア）$z=1$ のとき

$x+3y+4\times 1=15$ より，$x+3y=11\cdots$(i)

$x \geqq 1$ より，$3y=11-x \leqq 11-1=10$

◀ $4z$ のときと同様に，不等式を利用して，係数の大きい $3y$ について注目して整理する．

したがって，$y \leqq \frac{10}{3}$ より，$y=1,\ 2,\ 3$

(i) より，$(x,\ y)=(8,\ 1)，(5,\ 2)，(2,\ 3)$

（イ）$z=2$ のとき

$x+3y+4\times 2=15$ より，$x+3y=7\cdots$(ii)

$x \geqq 1$ より，$3y=7-x \leqq 7-1=6$

したがって，$y \leqq 2$ より，$y=1,\ 2$

(ii) より，$(x,\ y)=(4,\ 1)，(1,\ 2)$

よって，（ア），（イ）より，求める自然数の組は，

$$(x,\ y,\ z)=\boldsymbol{(8,\ 1,\ 1),\ (5,\ 2,\ 1),\ (2,\ 3,\ 1),\ (4,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 2)}$$

解答 A4.2.7 ★★★ 問題 p.166

問題文

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$，$x \leqq y \leqq z$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

$0<x \leqq y \leqq z$ より，$\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x}$ である．

これより，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$

したがって，$\frac{3}{2} \leqq \frac{3}{x}$ より，$x \leqq 2$

◀ 両辺に $x\ (>0)$ を掛ける．

(i) $x=1$ のとき

◀ $x=1,\ 2$

$\frac{1}{1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$ より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

◀ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$ に $x=1$ を代入する．

ここで，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}$ より，$\frac{1}{2} \leqq \frac{2}{y}$

したがって，$y \leqq 4$

◀ 両辺に $y\ (>0)$ を掛ける．

$y=2$ のとき，$\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

これは，z は正の整数であるので不適である．

$y=3$ のとき，$\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より，$z=6$

$y=4$ のとき，$\frac{1}{4}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より，$z=4$

(ii) $x=2$ のとき，$\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$ より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

ここで，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}$ より，$1 \leqq \frac{2}{y}$

したがって，$y \leqq 2$

◀ 両辺に $y\ (>0)$ を掛ける．

ゆえに，$x \leqq y$ より，$y=2$

このとき，$\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=1$ より，$z=2$

よって，(i)，(ii) より，$(x,\ y,\ z)=\mathbf{(1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 4),\ (2,\ 2,\ 2)}$

解答 4.2

解答 A4.2.8 ★★★ 問題 p.167

問題文

(1) $x^2-y^2=45$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．
(2) $\sqrt{n^2-63}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ．

(1) $x^2-y^2=45$ より，$(x-y)(x+y)=45$
ここで，$x,\ y$ は自然数であり，$x^2-y^2>0$ より，$x>y$ であるから，$x-y,\ x+y$ も自然数であり，

$$x-y<x+y$$

◀ $y>0$ より，$x-y$ と $x+y$ の大小が定まる．

よって，$(x-y,\ x+y)=(1,\ 45),\ (3,\ 15),\ (5,\ 9)$

◀ $n-m,\ n+m$ はともに $45=3^2\cdot5$ の正の約数である．
◀ 連立方程式を解くことで，$(x,\ y)$ を求めることができる．

(i) $x-y=1,\ x+y=45$ のとき，$(x,\ y)=(23,\ 22)$
(ii) $x-y=3,\ x+y=15$ のとき，$(x,\ y)=(9,\ 6)$
(iii) $x-y=5,\ x+y=9$ のとき，$(x,\ y)=(7,\ 2)$

(i)〜(iii) より，求める自然数の組は，

$$(x,\ y)=\mathbf{(23,\ 22),\ (9,\ 6),\ (7,\ 2)}$$

(2) $\sqrt{n^2-63}=m$ （m は自然数）とおく．

◀ $m\leqq0$ となる自然数 n は存在しない．

両辺を 2 乗すると，$n^2-63=m^2$
したがって，$n^2-m^2=63$ より，$(n-m)(n+m)=63$
ここで，$n,\ m$ は自然数であり，$n^2-m^2>0$ より，$n>m$ であるから，$n-m,\ n+m$ も自然数であり，

$$n-m<n+m$$

ゆえに，$(n-m,\ n+m)=(1,\ 63),\ (3,\ 21),\ (7,\ 9)$

◀ $x-y,\ x+y$ はともに $63=3^2\cdot7$ の正の約数である．

(i) $n-m=1,\ n+m=63$ のとき，$(n,\ m)=(32,\ 31)$
(ii) $n-m=3,\ n+m=21$ のとき，$(n,\ m)=(12,\ 9)$
(iii) $n-m=7,\ n+m=9$ のとき，$(n,\ m)=(8,\ 1)$

よって，(i)〜(iii) より，$n=\mathbf{8,\ 12,\ 32}$

解答 A4.2.9 ★★★ 問題 p.168

問題文

次の方程式を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(1) $xy + x + 2y = 0$　　(2) $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 1$

(1) $xy + x + 2y = 0$ より，$(x+2)(y+1) = 2$
$x,\ y$ は整数であるから，$x+2,\ y+1$ も整数である．
したがって，

$$(x+2,\ y+1) = (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-2,\ -1)$$

よって，

$$(x,\ y) = \mathbf{(-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (-3,\ -3),\ (-4,\ -2)}$$

◀ 与えられた式の左辺の係数から，$(x+2)(y+1)$ を作る．

◀ 掛けて 2 になる整数の組を求める．

(2) $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 1$ より，$xy = 3y + x$
したがって，$xy - x - 3y = 0$ であるから，$(x-3)(y-1) = 3$
$x,\ y$ は整数であるから，$x-3,\ y-1$ も整数である．
ここで，$x \neq 0,\ y \neq 0$ より，$x-3 \neq -3,\ y-1 \neq -1$ であるから，

$$(x-3,\ y-1) = (3,\ 1),\ (1,\ 3),\ (-1,\ -3)$$

よって，

$$(x,\ y) = \mathbf{(6,\ 2),\ (4,\ 4),\ (2,\ -2)}$$

◀ 両辺に xy を掛ける．

◀ $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 1$ の分母は 0 ではない．

◀ $x-3 \neq -3,\ y-1 \neq -1$ より，$(x-3,\ y-1) = (-3,\ -1)$ は不適であることに注意すること．

解答 4.2

解答 A4.2.10 ★★★★ 問題 p.169

問題文

$2x^2-7xy+3y^2+8x-9y-5=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ．

$$2x^2-7xy+3y^2=(2x-y)(x-3y)$$

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{cccc} 2 & \times & -1 & \longrightarrow -1 \\ 1 & & -3 & \longrightarrow -6 \\ \hline & & & -7 \end{array}$$

と因数分解できるので，定数 $p,\ q$ を用いて $(2x-y+p)(x-3y+q)$ を展開し，与えられた式の左辺と比較する．

$$\begin{aligned}(2x-y+p)(x-3y+q)&=(2x-y)(x-3y)+q(2x-y)+p(x-3y)+pq\\&=2x^2-7xy+3y^2+(p+2q)x-(3p+q)y+pq\end{aligned}$$

◀ $(2x-y)$，$(x-3y)$ をまとめて扱って展開するとよい．

したがって，与えられた式と $x,\ y$ の項の係数を比較すると，

$$\begin{cases} p+2q=8 \\ -3p-q=-9 \end{cases}$$

これを解くと，$p=2,\ q=3$

ゆえに，

$$(2x-y+2)(x-3y+3)=2x^2-7xy+3y^2+8x-9y+6$$

したがって，与えられた式は，

$$2x^2-7xy+3y^2+8x-9y+6-11=0$$

整理すると，

$$(2x-y+2)(x-3y+3)=11$$

ゆえに，

$$(2x-y+2,\ x-3y+3)=(1,\ 11),\ (11,\ 1),\ (-1,\ -11),\ (-11,\ -1)$$

◀ なお，連立方程式をそれぞれ解いて，$x,\ y$ の値を求めてもよいが，

$$\begin{cases} 2x-y+2=A \\ x-3y+3=B \end{cases}$$

を解くと考え，

$$\begin{cases} x=\frac{3A-B-3}{5} \\ y=\frac{A-2B+4}{5} \end{cases}$$

を用いると計算が楽になる．

これを解いて，

$$(x,\ y)=\left(-\frac{11}{5},\ -\frac{17}{5}\right),\ \left(\frac{29}{5},\ \frac{13}{5}\right),\ (1,\ 5),\ (-7,\ -1)$$

よって，$x,\ y$ は整数より，$(x,\ y)=\mathbf{(1,\ 5),\ (-7,\ -1)}$

解答 4.2

解答 A4.2.11 ★★★★　問題 p.170

問題文

方程式 $x^2-2xy+2y^2-2x-2y+4=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

$x^2-2xy+2y^2-2x-2y+4=0$ を x について整理すると，

$$x^2-2(y+1)x+\left(2y^2-2y+4\right)=0\cdots\text{(i)}$$

◀ x に注目して，x の 2 次方程式と考える．なお，y について整理して解いてもよい．

2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(y+1)^2-1\cdot\left(2y^2-2y+4\right)=y^2+2y+1-\left(2y^2+2y-4\right)=-y^2+4y-3$$

(i) の解が実数となるから，$\frac{D}{4}\geqq 0$

◀ 解は実数（整数）である．

したがって，$-y^2+4y-3\geqq 0$ より，$-(y-1)(y-3)\geqq 0$

ゆえに，$1\leqq y\leqq 3$

y は整数であるから，$y=1,\ 2,\ 3$

(ア) $y=1$ のとき，(i) より，$x^2-4x+4=0$

これを解くと，$x=2$

(イ) $y=2$ のとき，(i) より，$x^2-6x+8=0$

これを解くと，$x=4,\ 2$

(ウ) $y=3$ のとき，(i) より，$x^2-8x+16=0$

これを解くと，$x=4$

よって，(ア)〜(ウ) より，$(x,\ y)=\mathbf{(2,\ 1),\ (4,\ 2),\ (2,\ 2),\ (4,\ 3)}$

解答 A4.2.12 ★　問題 p.171

問題文

(1) $11001_{(2)}$，$354_{(6)}$ をそれぞれ 10 進法で表せ．
(2) 10 進法で表された数 42 を，2 進法，3 進法，6 進法でそれぞれ表せ．
(3) $2.13_{(5)}$ を 10 進法で表せ．
(4) 10 進法で表された小数 0.625 を 2 進法で表せ．

(1)
$$11001_{(2)}=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=\mathbf{25},$$
$$354_{(6)}=3\times6^2+5\times6^1+4\times6^0=\mathbf{142}$$

(2)
$$42=1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0=\mathbf{101010_{(2)}},$$
$$42=1\times3^3+1\times3^2+2\times3^1+0\times3^0=\mathbf{1120_{(3)}},$$
$$42=1\times6^2+1\times6^1+0\times6^0=\mathbf{110_{(6)}}$$

◀ 42 を 2^5 で割り，その余りを 2^4 で割り，$\cdots$ という操作を繰り返す．

(3)$2.13_{(5)}=2+1\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5^2}=2+0.2+0.12=\mathbf{2.32}$

(4)$0.625=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2^2}+1\times\frac{1}{2^3}=\mathbf{0.101_{(2)}}$

【別解】 $0.625=0.abc\ldots_{(2)}$ とおくと，

◀ 2 を掛ける操作を繰り返し，整数部分を取り出してその数字を各位の数にする．

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1\ .25 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0\ .50 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1\ .0 \end{array}$$

$$0.625=a\times\frac{1}{2}+b\times\frac{1}{4}+c\times\frac{1}{8}+\cdots$$

両辺に 2 を掛けると，$1.25=a+b\times\frac{1}{2}+c\times\frac{1}{4}+\cdots$ より，$a=1$

これを代入して，両辺に 2 を掛けると，$0.5=b+c\times\frac{1}{2}+d\times\frac{1}{4}+\cdots$ より，$b=0$

これを代入して，両辺に 2 を掛けると，$1=c+d\times\frac{1}{2}+e\times\frac{1}{4}+\cdots$ より，$c=1$

よって，$0.625=\mathbf{0.101_{(2)}}$

解答 A4.2.13 ★ 問題 p.172

問題文

次の計算をせよ．

(1) $10101_{(2)}+1110_{(2)}$　　(2) $210_{(3)}\times 12_{(3)}$　　(3) $543_{(6)}-312_{(6)}$

(1) $10101_{(2)}$，$1110_{(2)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$10101_{(2)}=1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1=21,$$
$$1110_{(2)}=1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+0=14$$

よって，

$$\begin{aligned}10101_{(2)}+1110_{(2)}&=21+14=35\\&=1\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\\&=\mathbf{100011_{(2)}}\end{aligned}$$

◀ 筆算を用いてもよいが，$1+1=2=10_{(2)}$ のように，2 で繰り上がることに注意すること．

$$\begin{array}{r}10101_{(2)}\\ +\ \ 1110_{(2)}\\ \hline 100011_{(2)}\end{array}$$

(2) $210_{(3)}$，$12_{(3)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$210_{(3)}=2\times 3^2+1\times 3^1+0=18+3+0=21,$$
$$12_{(3)}=1\times 3^1+2=3+2=5$$

よって，

$$\begin{aligned}210_{(3)}\times 12_{(3)}&=21\times 5=105\\&=1\times 3^4+0\times 3^3+2\times 3^2+2\times 3^1+0\\&=\mathbf{10220_{(3)}}\end{aligned}$$

◀ 筆算を用いてもよいが，3 で繰り上がることに注意すること．

$$\begin{array}{r}210_{(3)}\\ \times 12_{(3)}\\ \hline 1120\\ 210\ \\ \hline 10220_{(3)}\end{array}$$

(3) $543_{(6)}$，$312_{(6)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$543_{(6)}=5\times 6^2+4\times 6^1+3=180+24+3=207,$$
$$312_{(6)}=3\times 6^2+1\times 6^1+2=108+6+2=116$$

よって，$543_{(6)}-312_{(6)}=207-116=91=2\times 6^2+3\times 6^1+1=\mathbf{231_{(6)}}$

解答 A4.2.14 ★★★ 問題 p.173

問題文

自然数 N を 4 進法と 7 進法で表すと，それぞれ 2 桁の数 $ab_{(4)}$ と $ba_{(7)}$ になるとする．このとき a，b の値を求めよ．また，N を 10 進法で表せ．

自然数 N を 4 進法，7 進法で表すと，それぞれ $ab_{(4)}$ と $ba_{(7)}$ であるから，

$$1\leqq a\leqq 3,\quad 1\leqq b\leqq 3\cdots\text{(i)}$$

◀ a，b は 4 進法の数 $ab_{(4)}$ の各位の数字であるから，a，b はそれぞれ 0，1，2，3 のいずれかの整数である．また，$ab_{(4)}$ と $ba_{(7)}$ はどちらも 2 桁の数であるから，最高位になる a，b は，$a\neq 0$，$b\neq 0$ であることに注意すること．

$ab_{(4)}$，$ba_{(7)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$ab_{(4)}=a\cdot 4^1+b\cdot 4^0=4a+b\cdots\text{(ii)},$$
$$ba_{(7)}=b\cdot 7^1+a\cdot 7^0=7b+a$$

これらが等しいから，$4a+b=7b+a$

したがって，$a=2b$

よって，(i) において，これを満たす a，b を求めると，$a=\mathbf{2}$，$b=\mathbf{1}$

また，この値を (ii) に代入すると，$N=4\cdot 2+1=\mathbf{9}$

解答 A4.2.15 ★★ 問題 p.174

問題文

0，1，2 の 3 種類の数字のみを用いて表される自然数を，小さい方から順に並べると，

$$1,\ 2,\ 10,\ 11,\ 12,\ 20,\ 21,\ 22,\ 100,\ \ldots$$

となる．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 2102 は小さい方から何番目の数であるかを求めよ．
(2) 小さい方から 87 番目の数を求めよ．

0，1，2 の 3 種類の数で表されているので，この数の列は，3 進法で表されている．
(1) $2102_{(3)}$ を 10 進法で表すと，

$$2102_{(3)} = 2\times3^3 + 1\times3^2 + 0\times3^1 + 2 = 65$$

よって，2102 は，**65 番目**の数である．
(2) 87 を 3 進法で表すと，

$$87 = 10020_{(3)}$$

よって，87 番目の数は，**10020** である．

◀
$$\begin{array}{r|l} 3 & 87 \quad \textbf{余り} \\ 3 & 29 \ \cdots\ 0 \\ 3 & 9 \ \cdots\ 2 \\ 3 & 3 \ \cdots\ 0 \\ 3 & 1 \ \cdots\ 0 \end{array}$$
順に並べると，10020

解答 A4.2.16 ★★ 問題 p.175

問題文

赤玉が 6 個，白玉が 4 個，青玉が 3 個入っている箱がある．この箱から玉を取り出すとき，いずれかの色の玉が必ず 3 個以上になるためには，最低何個取り出せばよいか．

いずれの色の玉も 2 個以下となるように取り出せる最大の個数は，$2+2+2=6$（個）である．
したがって，箱から 7 個取り出すと，少なくとも 1 つの色の玉が 3 個以上となる．
よって，最低 **7 個**取り出せばよい．

◀ 部屋割り論法の考え方を用いる．

解答 A4.2.17 ★★ 問題 p.176

問題文

$[x]$ を x 以下の最大の整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $[3.2]$，$[-0.7]$，$[2]$，$[\sqrt{7}+1]$ の値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=2[x]$ のグラフをかけ．

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=-[2x]$ のグラフをかけ．

(1) $3 \leqq 3.2 < 4$ であるから，$[3.2]=\mathbf{3}$

$-1 \leqq -0.7 < 0$ であるから，$[-0.7]=\mathbf{-1}$

◀ $[-0.7]=0$ ではないので注意すること．

$2 \leqq 2 < 3$ であるから，$[2]=\mathbf{2}$

$3 \leqq \sqrt{7}+1 < 4$ であるから，$[\sqrt{7}+1]=\mathbf{3}$

◀ $2 \leqq \sqrt{7} < 3$ より，$3 \leqq \sqrt{7}+1 < 4$

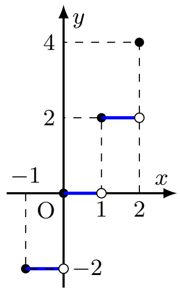
(2) $-1 \leqq x < 0$ のとき，$y=2[x]=-2$

$0 \leqq x < 1$ のとき，$y=2[x]=0$

$1 \leqq x < 2$ のとき，$y=2[x]=2$

$x=2$ のとき，$y=2[x]=4$

よって，グラフは右の図のようになる．



(3) $-1 \leqq x < -\frac{1}{2}$ のとき，$y=-[2x]=2$

$-\frac{1}{2} \leqq x < 0$ のとき，$y=-[2x]=1$

$0 \leqq x < \frac{1}{2}$ のとき，$y=-[2x]=0$

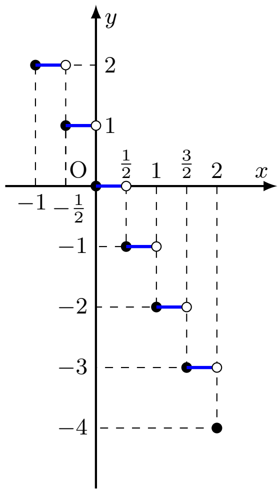
$\frac{1}{2} \leqq x < 1$ のとき，$y=-[2x]=-1$

$1 \leqq x < \frac{3}{2}$ のとき，$y=-[2x]=-2$

$\frac{3}{2} \leqq x < 2$ のとき，$y=-[2x]=-3$

$x=2$ のとき，$y=-[2x]=-4$

よって，グラフは右の図のようになる．



解答 A4.2.18 ★★★ 問題 p.177

問題文

座標空間において，A(3，2，4) B(4，3，0) C(5，4，5) を頂点とする三角形は，直角三角形であることを示せ．

$$\begin{aligned} AB^2 &= (4-3)^2+(3-2)^2+(0-4)^2=18, \\ BC^2 &= (5-4)^2+(4-3)^2+(5-0)^2=27, \\ CA^2 &= (3-5)^2+(2-4)^2+(4-5)^2=9 \end{aligned}$$

$BC^2=CA^2+AB^2$ であるから，三平方の定理の逆より，$\triangle ABC$ は$\angle A=90^\circ$ の直角三角形である． ■

◀ 直角である角を示す．

解答
4.2

One math

解答（節末）A4.2.1 ★★ 節末 p.178

問題文

120 と 168 の最大公約数 g を求め，$g=120m+168n$ となる整数 m，n の組を 1 つ求めよ．

120 と 168 について，ユークリッドの互除法を用いる．

$$\begin{aligned} &168=120\times1+48 \text{ より，} && 168-120\times1=48\cdots\text{(i)}\\ &120=48\times2+24 \text{ より，} && 120-48\times2=24\cdots\text{(ii)}\\ &48=24\times2 \end{aligned}$$

よって，最大公約数 g は，$g=\mathbf{24}$

(ii) に (i) を代入すると，$120-(168-120\times1)\times2=24$ より，$120\times3-168\times2=24$

◀ $48=168-120\times1$

よって，求める整数 m，n の組の 1 つは，$(m,\ n)=\mathbf{(3,\ -2)}$

解答（節末）A4.2.2 ★★★ 節末 p.179

問題文

方程式 $19x+53y=7$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の中で，$|x-y|$ が最小となるものを求めよ．

方程式 $19x+53y=7\cdots$(i) の係数である 19 と 53 について，ユークリッドの互除法を用いる．

$$\begin{aligned} &53=19\times2+15 \text{ より，} && 53-19\times2=15\cdots\text{(ii)}\\ &19=15\times1+4 \text{ より，} && 19-15\times1=4\cdots\text{(iii)}\\ &15=4\times3+3 \text{ より，} && 15-4\times3=3\cdots\text{(iv)}\\ &4=3\times1+1 \text{ より，} && 4-3\times1=1\cdots\text{(v)} \end{aligned}$$

(v) に (iv) を代入すると，$4-(15-4\times3)\times1=1$ より，

◀ $3=15-4\times3$

$$4\times4+15\times(-1)=1$$

これに (iii) を代入すると，$(19-15\times1)\times4+15\times(-1)=1$ より，

◀ $4=19-15\times1$

$$19\times4+15\times(-5)=1$$

これに (ii) を代入すると，$19\times4+(53-19\times2)\times(-5)=1$ より，

◀ $15=53-19\times2$

$$53\times(-5)+19\times14=1$$

この両辺に 7 を掛け合わせると，$53\times(-35)+19\times98=7\cdots$(vi)

◀ $x=98$，$y=-35$ は方程式 $19x+53y=7$ を満たす整数解の 1 つである．

(i) − (vi) より，$19(x-98)+53(y+35)=0$

したがって，$19(x-98)=-53(y+35)\cdots$(vii)

19 と 53 は互いに素であるから，$x-98$ は 53 の倍数となり，k を整数とすると，

$x-98=53k$，すなわち，$x=53k+98$

これを (vii) に代入して整理すると，$y=-19k-35$

ゆえに，(i) を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は，$\begin{cases} x=53k+98\\ y=-19k-35 \end{cases}$ （k は整数）$\cdots$(viii)

したがって，$|x-y|=|72k+133|$

これが最小となる k の値は，$k=-2$

◀ $k=-2$ のとき，$|x-y|=11$

よって，求める整数の組 $(x,\ y)$ は，(viii) より，$(x,\ y)=\mathbf{(-8,\ 3)}$

解答 4.2

One math

解答（節末）A4.2.3 ★★ 節末 p.180

問題文

ある自然数から 35 を引いた数と，36 を加えた数がともに平方数となった．このとき，その自然数を求めよ．

求める自然数を n とする．
n から 35 を引いた数，n に 36 を足した数はともに平方数となるから，

$$n-35=p^2\cdots\text{(i)},\quad n+36=q^2\cdots\text{(ii)}$$

とおける．ただし，p, q は自然数とする．
ここで，$n-35<n+36$ より，$p^2<q^2$，すなわち，$p<q$
(ii)−(i) より，$q^2-p^2=71$
したがって，$(q+p)(q-p)=71$

◀ 71 は素数である．

$q+p>q-p>0$ より，$\begin{cases} q+p=71 \\ q-p=1 \end{cases}$

◀ $0<p<q$ より，
$q+p>q-p$

これを解くと，$p=35$，$q=36$
ゆえに，(i) に代入すると，$n-35=35^2$
したがって，$n=1260$
よって，求める自然数は，**1260**

解答（節末）A4.2.4 ★★ 節末 p.181

問題文

n を 5 以上の整数とする．
(1) 十進法で表された数 $(n+1)^2$ を n 進法で表せ．
(2) 十進法で表された数 $(2n-1)^2$ を n 進法で表したとき，n の位の数を求めよ．

(1) $(n+1)^2=n^2+2n+1=1\times n^2+2\times n+1=\mathbf{121_{(n)}}$
(2)
$$\begin{aligned}(2n-1)^2&=4n^2-4n+1\\&=3n^2+n^2-4n+1\\&=3n^2+(n-4)n+1\\&=3\times n^2+(n-4)\times n+1\end{aligned}$$

◀ n の位の数が 0 以上 $n-1$ 以下の整数となるように，$(n-4)n$ と式変形する．
◀ n は 5 以上の整数であるから，$n-4$ は $0\leqq n-4\leqq n-1$ を満たす．

よって，n 進法で表したときの n の位の数は，$\boldsymbol{n-4}$

解答（節末）A4.2.5 ★★ 節末 p.182

問題文

十進法の 1440 を n 進法で表すと $10400_{(n)}$ になった．n の値を求めよ．

$10400_{(n)}$ を十進法で表すと，

$$10400_{(n)}=1\times n^4+0\times n^3+4\times n^2+0\times n+0=n^4+4n^2$$

これが 1440 と等しくなるので，$n^4+4n^2=1440$
したがって，$n^4+4n^2-1440=0$
ゆえに，

$$(n^2+40)(n^2-36)=0$$

◀ $n^2=t$ とおくと，
$t^2+4t-1440=0$
これを因数分解すると，
$(t+40)(t-36)=0$

よって，n は 5 以上の自然数であるから，$n=\mathbf{6}$

解答
4.2

章末問題 4（解答）

解答（章末）A4.1 ★★★ 章末 p.183

問題文
${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ が 2^n で割り切れるとき，自然数 n の最大値を求めよ．

与えられた ${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ は，${}_{80}\mathrm{C}_{40} = \frac{80!}{40!40!}$ と表される．
1 から 40 までの自然数について，

2 の倍数は 20 個，4 の倍数は 10 個，8 の倍数は 5 個，
16 の倍数は 2 個，32 の倍数は 1 個

したがって，40! に含まれる因数 2 の個数は，

$$20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 38 \text{ (個)}$$

また，1 から 80 までの自然数について，

2 の倍数は 40 個，4 の倍数は 20 個，8 の倍数は 10 個，
16 の倍数は 5 個，32 の倍数は 2 個，64 の倍数は 1 個

ゆえに，80! に含まれる因数 2 の個数は，

$$40 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 78 \text{ (個)}$$

したがって，${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ に含まれる因数 2 の個数は，

$$78 - 38 \times 2 = 2 \text{ (個)}$$

よって，求める自然数 n の最大値は，$n = \mathbf{2}$

◀ 80!　40! に含まれる因数 2 の個数をそれぞれ p, q とすると，2 を因数にもたない自然数を用いて，

$$80! = m \cdot 2^p, \quad 40! = n \cdot 2^q$$

と表される．このとき，

$$\frac{80!}{40! \cdot 40!} = \frac{m}{n^2} \cdot 2^{p-2q}$$

よって，${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ に含まれる因数 2 の個数は，$(p - 2q)$ 個となる．

◀ ${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ に含まれる因数 2 の個数は，$(p - 2q)$ 個

解答（章末）A4.2 ★★ 章末 p.184

問題文
n を自然数とする．$n + 4$ は 5 の倍数であり，$n + 9$ は 11 の倍数である．このような自然数 n で 300 より小さいものは何個あるか．

$n + 4$, $n + 9$ は，それぞれ $n + 4 = 5k \cdots$ (i),　$n + 9 = 11l \cdots$ (ii) (k, l は自然数) とおける．
(ii)−(i) より，$5 = 11l - 5k$
したがって，$11l = 5(k + 1)$
11 と 5 は互いに素であるから，l は 5 の倍数である．
ゆえに，$l = 5m$ (m は自然数) と表せる．
(ii) より，$n + 9 = 11l = 11 \cdot 5m = 55m$ であるから，$n = 55m - 9$
したがって，$1 \leqq n < 300$ より，$1 \leqq 55m - 9 < 300$ であるから，

$$\frac{10}{55} \leqq m < \frac{309}{55}$$

m は自然数であるから，$1 \leqq m \leqq 5$
よって，これを満たす自然数 m は 5 個であるから，条件を満たす自然数 n は，**5 個**

◀ a, b は互いに素で，ak が b の倍数であるならば，k は b の倍数である (a, b, k は整数)．

◀ $\frac{309}{55} = 5.618\ldots$

解答（章末）A4.3 ★★★★ 章末 p.185

問題文

(1) 2 つの自然数 a と b $(a>b)$ が互いに素であるとき，a と $a-b$ も互いに素であることを証明せよ．
(2) 504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数はいくつあるか答えよ．
(3) 504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数の総和を求めよ．

(1) a と $a-b$ が互いに素ではないと仮定すると，a と $a-b$ はある素数 p を約数にもち，$a=pm\cdots$(i)，$a-b=pn\cdots$(ii) とおける．ただし，m と n は互いに素な自然数とする．
(i) − (ii) より，$b=p(m-n)$
ここで，$m-n$ は整数であるから，p は b の約数でもある．
したがって，p は a と b の公約数となり，これは a と b が互いに素であることに矛盾する．
よって，a と $a-b$ は互いに素である．■

◀ 背理法を用いる．

(2) $504=2^3\times3^2\times7$ であるから，504 は素因数として 2，3，7 をもつ．
504 以下の自然数について，

2 の倍数は 252 個，3 の倍数は 168 個，7 の倍数は 72 個
6 の倍数は 84 個，21 の倍数は 24 個，14 の倍数は 36 個，42 の倍数は 12 個

◀ 例えば，$504\div2=252$ (個)
◀ 最小公倍数の倍数を考える．

したがって，504 以下の自然数で，504 と互いに素ではない自然数の個数は，

$$252+168+72-84-24-36+12=360 \text{ (個)}$$

◀ 2 または 3 または 7 の倍数である．
◀ $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

よって，504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数の個数は，

$$504-360=\mathbf{144}\ \textbf{(個)}$$

(3) 504 以下の自然数で 504 と互いに素な自然数は，

$$1,\ 5,\ 11,\ 13,\ \ldots,\ 491,\ 493,\ 499,\ 503$$

の計 144 個である．

◀ $1+503=504$，$5+499=504$，$11+493=504$，… と和が 504 になっていることに注目する．

ここで，(1) より，504 以下の自然数の 1 つを n とすると，504 と n が互いに素であるとき，$504-n$ と 504 も互いに素である．
したがって，504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数は，和が 504 となる 2 つの数の組に分けることができ，その組の数は，

$$144\div2=72 \text{ (組)}$$

◀ (1，503)，(5，499)，… のように，和が 504 となる 2 つの数の組が 72 組できる．

よって，504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数の総和は，

$$504\times72=\mathbf{36288}$$

解答（章末）A4.4 ★★★ 章末 p.186

問題文

x についての 2 次方程式 $x^2+2ax+2a-8=0$ が異なる 2 つの整数解をもつような整数 a の値を求めよ．

与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=a^2-(2a-8)=a^2-2a+8=(a-1)^2+7$$

したがって，この 2 次方程式は，a の値に関わらず，異なる 2 つの実数解をもつ．
この 2 次方程式の解は，

$$x=-a\pm\sqrt{(a-1)^2+7}$$

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

を用いるとよい．

方程式が異なる 2 つの整数解をもつとき，$\sqrt{(a-1)^2+7}$ は整数となるから，
$\sqrt{(a-1)^2+7}=b$ （b は正の整数）とおける．
両辺を 2 乗して整理すると，

$$(a-1)^2-b^2=-7$$

ゆえに，

$$\{(a-1)+b\}\{(a-1)-b\}=-7$$

ここで，$b>0$ より，$a-1+b>a-1-b$ であるから，

$$(a-1+b,\ a-1-b)=(7,\ -1),\ (1,\ -7)$$

したがって，

$$(a,\ b)=(4,\ 4),\ (-2,\ 4)$$

◀ a は整数，b は正の整数である．また，$\sqrt{(a-1)^2+7}$ が整数であれば，$x=-a\pm\sqrt{(a-1)^2+7}$ は整数となるから，逆を確かめなくてよい．

よって，

$$a=\mathbf{4,\ -2}$$

解答（章末）A4.5 ★★★★ 章末 p.187

問題文

6 の約数 1，2，3，6 の和は 6 の 2 倍になっている．このように，正の約数の和がその数の 2 倍に等しいとき，その数を完全数という．p，q を異なる素数として，次の問いに答えよ．

(1) pq の形の完全数をすべて求めよ．　(2) p^2q の形の完全数をすべて求めよ．

(1) pq の約数は，1，p，q，pq の 4 個であるから，pq が完全数であるための条件は，

$$1+p+q+pq=2pq$$

したがって，$(p-1)(q-1)=2$

◀ 移項して，因数分解する．

ここで，$p \geqq 2$，$q \geqq 2$ であるから，

$$(p-1,\ q-1)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

ゆえに，$(p,\ q)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

よって，pq の形の完全数は，**6**

(2) p^2q の約数は，1，p，q，p^2，pq，p^2q の 6 個であるから，p^2q が完全数であるための条件は，

$$1+p+q+p^2+pq+p^2q=2p^2q$$

◀ $q+pq+p^2q=q(1+p+p^2)$ より，$(1+p+p^2)(1+q)$ と因数分解できる．

したがって，$(1+p+p^2)(1+q)=2p^2q \cdots$ (i)

ここで，$1+p+p^2$ は p で割り切れないから，$1+q$ は p で割り切れる．

◀ $1+p+p^2$ を p で割ると 1 余るので，p で割り切れない．

ゆえに，(i) を，

$$\left(1+p+p^2\right)\frac{1+q}{p}=2pq$$

と式変形すると，$1+p+p^2$ は同様に p で割り切れないから，$\frac{1+q}{p}$ は p で割り切れ，さらに 2 で割り切れる．

◀ $1+p+p^2=1+p(p+1)$ は奇数であるから，2 で割り切れない．

ゆえに，

$$1+q=2p^2\cdot r\ (r\ \text{は整数})\cdots\text{(ii)}$$

とおける．これを (i) に代入すると，

$$\left(1+p+p^2\right)r=q\cdots\text{(iii)}$$

◀ 両辺を $2p^2 \neq 0$ で割り，整理している．

ここで，q は素数であるから，$r=1$ であり．(ii)，(iii) に代入すると，

$$1+q=2p^2,\quad 1+p+p^2=q$$

これを解くと，$p=2$，$q=7$

◀ $p \geqq 2$，$q \geqq 2$ である．

よって，p^2q の形の完全数は，**28**

解答 4.4

One math

問題一覧

第 1 章　場合の数

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
問題 A1.1.1	集合の要素の個数 1	★	7	193		
問題 A1.1.2	集合の要素の個数 2	★	8	194		
問題 A1.1.3	3 つの集合の要素の個数	★★★	9	195		
問題 A1.1.4	集合の要素の個数の最大・最小	★★★	10	195		
問題 A1.1.5	樹形図による数え上げ	★	11	196		
問題 A1.1.6	和の法則，積の法則	★	12	196		
問題 A1.1.7	約数の個数・総和	★★	13	197		
問題 A1.1.8	支払える金額の種類	★★	14	197		
問題 A1.1.9	出る目の総数を用いる場合の数	★★	15	197		
問題 A1.2.1	0 を含む数字の順列	★★	21	202		
問題 A1.2.2	条件付きの順列 1	★★	22	203		
問題 A1.2.3	条件付きの順列 2	★★	23	203		
問題 A1.2.4	辞書式配列	★★	24	204		
問題 A1.2.5	円順列・数珠順列	★	25	204		
問題 A1.2.6	条件付きの円順列	★★	26	205		
問題 A1.2.7	重複順列	★★	27	205		
問題 A1.2.8	部屋割りの問題	★★★	28	206		
問題 A1.2.9	平面の色分け	★	29	206		
問題 A1.2.10	立体の色分け	★★	30	206		
問題 A1.2.11	組合せ	★	31	207		
問題 A1.2.12	長方形の個数	★★	32	207		
問題 A1.2.13	正多角形と組合せ	★★	33	208		
問題 A1.2.14	グループ分け	★★	34	208		
問題 A1.2.15	同じものを含む順列	★	35	209		
問題 A1.2.16	一部の文字の順序が定められた順列	★★	36	209		
問題 A1.2.17	最短経路 1	★★	37	210		
問題 A1.2.18	最短経路 2	★★★	38	211		
問題 A1.2.19	同じものを含む順列と組合せ	★★★	39	211		
問題 A1.2.20	同じものを含む円順列・数珠順列	★★★	40	212		
問題 A1.2.21	重複組合せ	★★★	41	212		
問題 A1.2.22	整数解の個数	★★★★	42	213		
問題 A1.2.23	大小関係を満たす整数	★★★	43	213		
問題 A1.2.24	完全順列	★★★	44	214		

第 2 章　確率

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
問題 A2.1.1	確率の計算	★	56	222		
問題 A2.1.2	順列と確率	★★	57	222		
問題 A2.1.3	組合せと確率	★	58	223		
問題 A2.1.4	同じものを含む順列と確率	★★★	59	223		
問題 A2.1.5	2 次方程式が満たす条件と確率	★★★	60	224		
問題 A2.1.6	確率の加法定理	★	61	224		
問題 A2.1.7	和事象の確率	★★	62	225		
問題 A2.1.8	余事象の確率	★★	63	225		
問題 A2.1.9	じゃんけんの確率	★★★	64	226		
問題 A2.2.1	独立な試行の確率	★	70	230		
問題 A2.2.2	独立な試行の確率と加法定理	★	71	230		
問題 A2.2.3	反復試行の確率 1	★★	72	231		
問題 A2.2.4	反復試行の確率 2	★★	73	231		
問題 A2.2.5	3 つの事象に関する反復試行の確率	★★★	74	232		
問題 A2.2.6	反復試行の確率（ランダムウォーク）	★★★	75	233		
問題 A2.2.7	反復試行の確率（平面上の点の移動）	★★★	76	234		
問題 A2.2.8	さいころの目の最大値・最小値	★★★	77	234		
問題 A2.2.9	確率の最大値	★★★★	78	235		
問題 A2.2.10	条件付き確率 1	★	79	235		
問題 A2.2.11	確率の乗法定理 1	★★	80	236		
問題 A2.2.12	確率の乗法定理 2	★★	81	236		
問題 A2.2.13	条件付き確率 2	★★★	82	237		
問題 A2.2.14	ベイズの定理	★★★★	83	238		
問題 A2.2.15	期待値（さいころの目）	★	84	238		
問題 A2.2.16	期待値（有利・不利）	★★	85	239		
問題 A2.2.17	期待値（図形）	★★★★	86	240		

第 3 章　図形の性質

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
問題 A3.1.1	角の二等分線と比	★★	98	247		
問題 A3.1.2	三角形の性質	★★	99	248		
問題 A3.1.3	角の二等分線	★★★	100	248		
問題 A3.1.4	三角形の外心・内心の角の大きさ	★	101	249		
問題 A3.1.5	三角形の傍心	★★	102	250		
問題 A3.1.6	オイラー線	★★★	103	250		
問題 A3.1.7	三角形の面積比	★★	104	251		
問題 A3.1.8	チェバの定理・メネラウスの定理	★	105	251		
問題 A3.1.9	チェバの定理・メネラウスの定理の逆	★★	106	252		
問題 A3.1.10	メネラウスの定理と面積比	★★★	107	253		
問題 A3.2.1	円に内接する四角形	★★	112	257		
問題 A3.2.2	接線の長さ	★★	113	257		
問題 A3.2.3	接弦定理	★	114	258		
問題 A3.2.4	方べきの定理	★	115	258		
問題 A3.2.5	方べきの定理の逆	★★	116	259		
問題 A3.2.6	トレミーの定理	★★★	117	259		
問題 A3.2.7	共通接線	★★★	118	260		
問題 A3.2.8	互いに接する円	★★	119	261		
問題 A3.2.9	基本的な作図	★	120	261		
問題 A3.2.10	長さが与えられた線分の作図	★★★	121	262		
問題 A3.2.11	2 次方程式の解と作図	★★	122	262		
問題 A3.2.12	2 つの円の共通接線の作図	★★★	123	263		
問題 A3.3.1	直線と平面の垂直	★★	128	267		
問題 A3.3.2	三垂線の定理	★★★	129	267		
問題 A3.3.3	多面体の面・辺・頂点の数	★★★	130	268		
問題 A3.3.4	多面体の切断・体積	★★★	131	268		

第 4 章　数学と人間の活動

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
問題 A4.1.1	倍数の判定法	★★	141	275		
問題 A4.1.2	自然数となる条件	★★	142	275		
問題 A4.1.3	約数の個数と自然数	★★	143	276		
問題 A4.1.4	素因数の個数	★★	144	277		
問題 A4.1.5	最大公約数・最小公倍数 1	★	145	277		
問題 A4.1.6	最大公約数・最小公倍数 2	★★	146	278		
問題 A4.1.7	互いに素に関する証明 1	★★	147	278		
問題 A4.1.8	互いに素に関する証明 2	★★★	148	279		
問題 A4.1.9	互いに素な自然数の個数	★★★	149	279		
問題 A4.1.10	整数の除法と余り	★	150	280		
問題 A4.1.11	余りによる場合分け 1	★★	151	281		
問題 A4.1.12	余りによる場合分け 2	★★★	152	282		
問題 A4.1.13	合同式の利用 1	★★★	153	283		
問題 A4.1.14	合同式の利用 2	★★★	154	284		
問題 A4.2.1	ユークリッドの互除法	★	160	287		
問題 A4.2.2	文字式におけるユークリッドの互除法	★★★	161	288		
問題 A4.2.3	方程式の整数解 1	★★	162	289		
問題 A4.2.4	方程式の整数解 2	★★	163	289		
問題 A4.2.5	方程式の整数解 3	★★★	164	290		
問題 A4.2.6	方程式の整数解 4	★★★	165	290		
問題 A4.2.7	方程式の整数解 5	★★★	166	291		
問題 A4.2.8	方程式の整数解 6	★★★	167	292		
問題 A4.2.9	方程式の整数解 7	★★★	168	293		
問題 A4.2.10	方程式の整数解 8	★★★★	169	294		
問題 A4.2.11	方程式の整数解 9	★★★★	170	295		
問題 A4.2.12	記数法	★	171	295		
問題 A4.2.13	n 進法の四則計算	★	172	296		
問題 A4.2.14	n 進法の位の数	★★★	173	296		
問題 A4.2.15	n 進数の利用	★★	174	297		
問題 A4.2.16	部屋割り論法	★★	175	297		
問題 A4.2.17	ガウス記号を含むグラフ	★★	176	298		
問題 A4.2.18	座標空間における点	★★★	177	298		

三角比の表

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	——

電子版（PDF 版）を利用している方へ

プルダウン機能（1 回目，2 回目）と動画視聴（チェック）の記録をすべてリセットしたい場合は，次の「すべての記録をリセット」を押下してください．

すべての記録をリセット

ギリシャ文字の表

読み方	大文字	小文字	読み方	大文字	小文字
alpha	A	α	beta	B	β
gamma	Γ	γ	delta	Δ	δ
epsilon	E	ϵ, ε	zeta	Z	ζ
eta	H	η	theta	Θ	θ, ϑ
iota	I	ι	kappa	K	κ
lambda	Λ	λ	mu	M	μ
nu	N	ν	omicron	O	o
xi	Ξ	ξ	pi	Π	π, ϖ
rho	P	ρ, ϱ	sigma	Σ	σ, ς
tau	T	τ	upsilon	Υ	υ
phi	Φ	ϕ, φ	chi	X	χ
psi	Ψ	ψ	omega	Ω	ω

著者紹介

著者：犬飼 シムラ（いぬかい・しむら）

早稲田大学教育学部数学科を卒業し，高等学校の公立学校教員として勤務している．専門は函数解析，数学教育など．好きなものは，漫画，犬，動物，スポーツ，サウナとのこと．神奈川県在住との噂がある．

表紙デザイン：PGF/TikZ を使用して作成
本文：LaTeX を使用して作成
図版：PGF/TikZ を使用して作成

One More（数学 A）書き込み式ワークブック

2025年 6月 22日　初版公開

著者： 犬飼（いぬかい） シムラ
発行： Onemath

検印欄

年　　　　組　　　　番　氏名

Onemath