One More（数学 A）

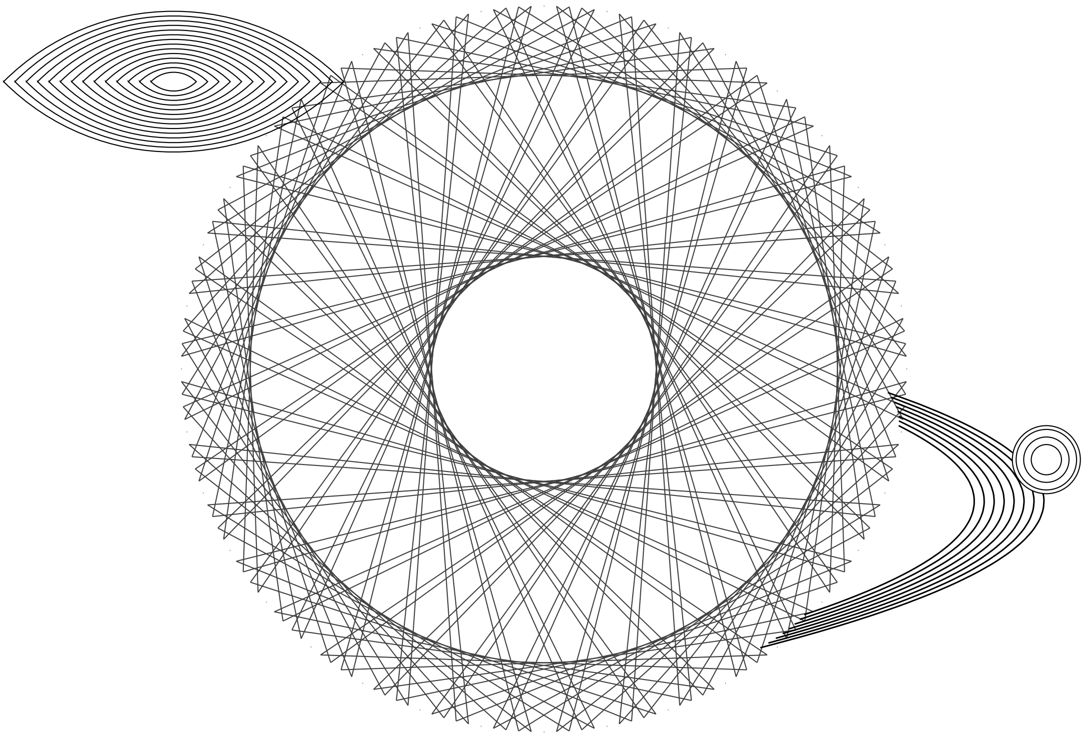
高等学校数学科用

Onemath

※ 本 PDF は，プルダウン機能やチェックボックス機能を取り除いたものとなります．そのため，説明文中にプルダウンやチェックボックス機能に関する記述が残っておりますが，実際には使用できませんので，あらかじめご了承ください．

One More 数学 A

Onemath



はじめに

本書を手に取っていただき，ありがとうございます．本書は，高等学校の数学学習を効率的かつ効果的にサポートするために執筆された参考書です．基本的な知識の整理から，発展的な内容の習得までを目指した，いわゆる網羅系の参考書として編纂しました．動画解説や豊富なリンク機能を導入し，学習者が便利に活用できる設計となっています．特に電子版（PDF 版）では，解説動画への簡単なアクセスを可能にし，紙媒体では二次元コードを活用することで，繰り返し学習できる環境を整えました．

現在の大学入試用の数学参考書は，どれも非常に高品質で，高校数学教育の長い歴史の中で積み上げられた知識が見事に反映されています．これらの参考書は，数学的な厳密さと分かりやすさを両立させながら，限られた紙面の中で効率よく内容を伝えるためのフォーマットが確立され，最適化されつつあります．数学教育自体は性質上，既存の知識を整理し，体系的に伝達する「祖述の学問」に近いものがあります．そのため，現在の市場には質の高い教材が数多く存在し，学習者にとっても多くの選択肢が揃っています．

そうした素晴らしい既存の参考書を踏まえてリスペクトしつつ，本書は更なる効率的な学習を目指して設計しました．問題数を厳選し，入試対策の基盤を短期間で築けるよう随所で工夫するとともに，動画を繰り返し視聴することで，視覚的・聴覚的に記憶の定着を図ることができます．こうした工夫により，数学教育として最適化されつつある内容を効率良く学習できるように精選したものが本書となっております．

一方で，効率性だけに依存せず，数学的な厳密さや思考力も重視し，その両立を目指しています．あえて直感的すぎる説明を避けている箇所もあり，表現が周りくどく感じられることもあるかもしれません．しかし，これは数学的な厳密さや，高校数学に限らない一般的な数学の記法などを優先した結果です．最初は本書の表現に戸惑うかもしれませんが，読み進めるうちに自然と慣れ，着実に数学の力を身につけることができることでしょう．

また，作題や解答の作成には特に力を注ぎました．一部の有名問題を除き，殆どの問題と解説は自作したものです．多くの入試問題を参照し，個性を出しすぎず，広く入試問題に対応できる汎用性を持たせることに労力を掛けました．日本の高校数学における特有の慣習や配慮，細かいニュアンスなどが反映されているはずです．しかし，執筆量が多かったため，校正には万全を期したつもりですが，計算ミスや誤字・脱字，誤りなどが残っている可能性があります．お手数ですが，皆さんからの御叱正の程をよろしくお願いしたいと思っております．

本書は，私自身の教員経験を活かし，学習者や教員が便利に，自由に活用できる網羅系の参考書として作り上げました．誰でも気楽に使えるような，「こんな参考書があっても良いのではないか」という思いを込めて作成しています．また，本書は複数ページにまたがる記述や他のページを参照する記し方を可能な限り排し，1 ページで完結するようにしました．動画で補足的に他のページを参照することもありますが，基本的には 1 ページで完結するので，扱いやすさが増していると思います．自分の弱点箇所だけを印刷したり，印刷したものをシャッフルしてテストのように使ったりするなど，活用の幅は広がるはずです．本書が，皆さんの学びのパートナーとなり，さらなる数学の探求へと導く一助となれば幸いです．ぜひ，楽しみながら学習を進めてください．

著者：犬飼　シムラ

本書は，YouTube 動画と対応した教材として，PDF 形式で提供されています．内容の改善や更新に伴い，動画が削除または変更される場合があります．常に最新版の教材を使用し，最新の動画リンクを参照するようにしてください．最新バージョンは，YouTube の各動画の概要欄またはホームページからダウンロードできます．

本書は印刷された書籍として販売されているわけではありません．そのため，印刷したものが必要な場合は，学習者ご自身で PDF をダウンロードし，お手元で印刷してご利用ください．なお，PDF 版には，リンク機能や，プルダウン機能，チェックボックス機能を用いた学習の進捗状況を記録する機能があり，デジタル環境での利用がより便利です．しかし，利用環境によってはこれらの機能が正しく動作しない場合がありますのでご注意ください（ブラウザ上ではなく，PDF をダウンロードして使ったり，環境を変えたりすると正しく動作することがあります）．

本書の構成

本書には，これからの学習計画を立てたり，復習したりする際に便利な章扉と例題（問題）一覧のページがあります．章扉は各章のはじめに，例題（問題）一覧は巻末にあります．適宜ご活用ください．

【章扉】

問題への取り組み状況をメモすることで，学習の振り返りがしやすくなります．電子版（PDF 版）には，各問題へのリンクがついています．

【例題・問題の番号について】

例題や問題，節末問題（基本事項）は次のような規則に基づいて，番号をつけています．

問題 A 1.3.2 $\cdots$ 数学 A の 1 章の 3 節の 2 番目の問題（事項）

また，章末問題は次のような規則に基づいて，番号をつけています．

章末 A 2.1 $\cdots$ 数学 A の 2 章の 1番目の問題

【プルダウン機能について】

本書の章扉ページ，例題・節末・章末問題ページ，例題（問題）一覧ページには，日々の学習記録を管理できるプルダウン機能が備わっています．一箇所で勉強の記録をチェックすると，その情報は該当する他のページにも自動的に反映され，保存されます．この機能により，学習の進捗状況を効率的に把握することができます．なお，環境によっては，印刷時にプルダウン部分に枠線が印刷されることもあります．

プルダウン機能

1 回目：　2 回目：

【チェックボックス機能について】

本書の例題ページ，動画一覧ページには，日々の動画視聴の記録を管理できるチェックボックス機能が備わっています．一箇所で動画視聴の記録をチェックすると，その情報は該当する他のページにも自動的に反映され，保存されます．この機能により，動画視聴の進捗状況を効率的に把握することができます．

チェックボックス機能

解説動画 ☐

解説動画 ☑

【基本事項について】

1.1.3　多項式の計算

	加法	乗法
交換法則	$A+B=B+A$	$AB=BA$
結合法則	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$

分配法則 $\cdots A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$

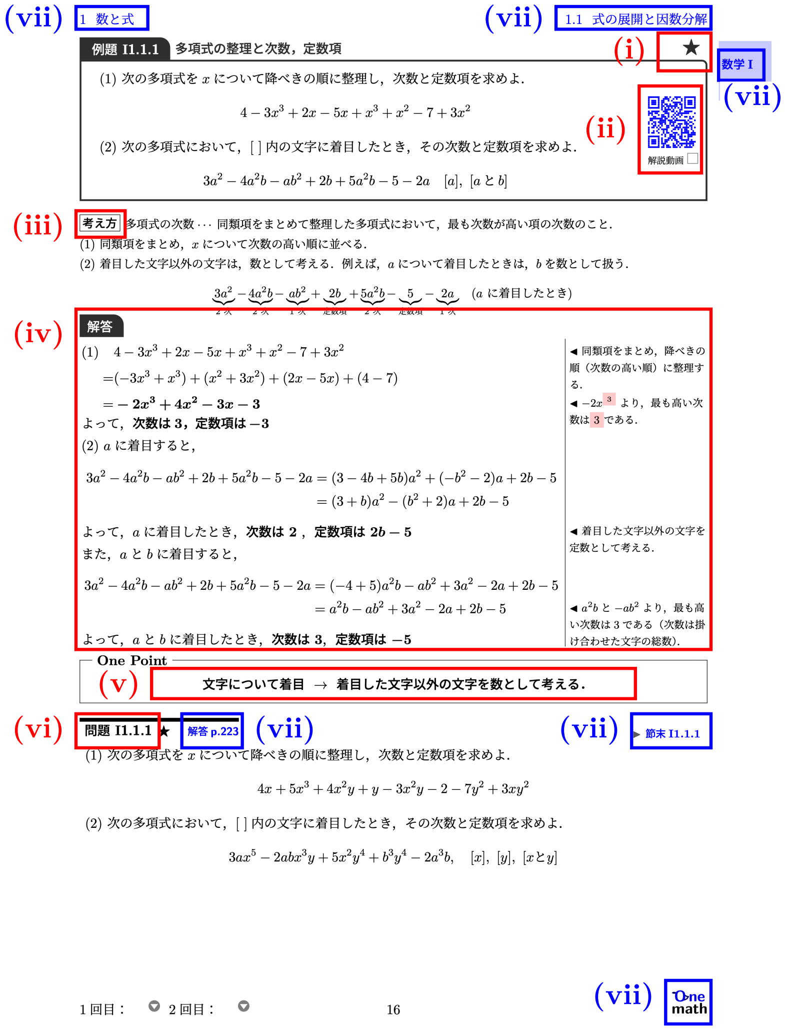
とくに $A-B$ のような場合においては，括弧を忘れないように注意すること（右の例を参照）．また，分配法則を用いて多項式を変形，単項式の和のみの形にすることを**多項式の展開**という．

◀ 例：$A=2x+3y$，$B=x-y$ のとき，

$$\begin{aligned} &A-B\\ =&(2x+3y)-(x-y)\\ =&2x+3y-x+y\\ =&x+4y \end{aligned}$$

各節の冒頭には，その節で扱う基本事項を分かりやすく整理しています．定理や公式など，問題を解く際に必要となる重要なポイントを簡潔に整理しています．

【例題・問題について】


(vii) 1　数と式　(vii) 1.1　式の展開と因数分解

例題 I1.1.1　多項式の整理と次数，定数項　(i) ★　数学 I (vii)

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$4-3x^3+2x-5x+x^3+x^2-7+3x^2$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．(ii) 解説動画

$$3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a \quad [a],\ [a と b]$$

(iii) 考え方　多項式の次数 $\cdots$ 同類項をまとめて整理した多項式において，最も次数が高い項の次数のこと．
(1) 同類項をまとめ，x について次数の高い順に並べる．
(2) 着目した文字以外の文字は，数として考える．例えば，a について着目したときは，b を数として扱う．

$$\underbrace{3a^2}_{2次}-\underbrace{4a^2b}_{2次}-\underbrace{ab^2}_{1次}+\underbrace{2b}_{定数項}+\underbrace{5a^2b}_{2次}-\underbrace{5}_{定数項}-\underbrace{2a}_{1次} \quad (a に着目したとき)$$

(iv) 解答

(1)　$4-3x^3+2x-5x+x^3+x^2-7+3x^2$
$=(-3x^3+x^3)+(x^2+3x^2)+(2x-5x)+(4-7)$
$=-\mathbf{2x^3+4x^2-3x-3}$
よって，**次数は 3，定数項は -3**

◀ 同類項をまとめ，降べきの順（次数の高い順）に整理する．
◀ $-2x^3$ より，最も高い次数は 3 である．

(2) a に着目すると，

$$3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a=(3-4b+5b)a^2+(-b^2-2)a+2b-5$$
$$=(3+b)a^2-(b^2+2)a+2b-5$$

よって，a に着目したとき，**次数は 2，定数項は $2b-5$**

◀ 着目した文字以外の文字を定数として考える．

また，a と b に着目すると，

$$3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a=(-4+5)a^2b-ab^2+3a^2-2a+2b-5$$
$$=a^2b-ab^2+3a^2-2a+2b-5$$

よって，a と b に着目したとき，**次数は 3，定数項は -5**

◀ a^2b と $-ab^2$ より，最も高い次数は 3 である（次数は掛け合わせた文字の総数）．

One Point
(v) **文字について着目 → 着目した文字以外の文字を数として考える．**

(vi) 問題 I1.1.1 ★ 解答 p.223 (vii)　(vii) ▶ 節末 I1.1.1

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$4x+5x^3+4x^2y+y-3x^2y-2-7y^2+3xy^2$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．

$$3ax^5-2abx^3y+5x^2y^4+b^3y^4-2a^3b, \quad [x],\ [y],\ [x と y]$$

1 回目：　2 回目：　16　(vii) One math

(i) 難易度（レベル）：★ の数に応じて，4 段階の難易度に分けて設定しています．

★ $\cdots$ 基礎問題（教科書の標準程度）
★★ $\cdots$ 標準問題（教科書の発展程度）
★★★ $\cdots$ 応用問題（入試問題の基礎程度）
★★★★ $\cdots$ 発展問題（入試問題の標準程度）

節末問題，章末問題の問題にも，同じように難易度（レベル）で分けて設定しています．

(ii) 解説動画：PDF 版では，青色部分の二次元コードをタップもしくはクリックすると，解説動画にアクセスできます．また，チェックボックスに動画視聴の履歴を記録できます．

(iii) 考え方：例題の解放や方針，まとめなどを記しています．

(iv) 解答：標準的な解法や，別解を記しています．側注には，適宜解答を補足しています．

(v) One Point：解答後にポイントが確認できるように，簡潔にまとめています．

(vi) 問題：例題の類題で構成しています．関連する節末問題や章末問題の番号を示した箇所もあります．

(vii) リンク機能：PDF 版では，リンク付きの箇所は青色で表示されており，活用することができます．それとは別に，図や解答に青色が使われることもあります．右下のフッターにあるロゴには，「例題（問題）一覧」へのリンク機能がついています．

また，上記以外にも必要に応じて，【注意】【余談】を記し，補足情報を提供しています．

【節末問題】

節ごとに 1 ページで構成された，各節のまとめとなる問題です．例題に沿ったものを中心として，標準的な内容から入試レベルの問題を中心に構成しています．

【章末問題】

章ごとに 1 ページで構成された，各章のまとめとなる問題です．節末問題との差は大きくありませんが，より実践的なものや，既に学習した章との融合問題を含むことがあります．

【コラム】

本書の効果的な使い方など，様々なことについてまとめています．

【例題（問題）一覧】

各例題（問題）のタイトルが一覧としてまとめられたもので，巻末にあります．利便性を上げるために，PDF 版からは各ページの右下のフッターにあるロゴに「例題（問題）一覧」へのリンク機能がついています．印刷時にページを参照するときや，タイトルから例題を探したいときに便利です．

One math
ロゴにリンク機能あり

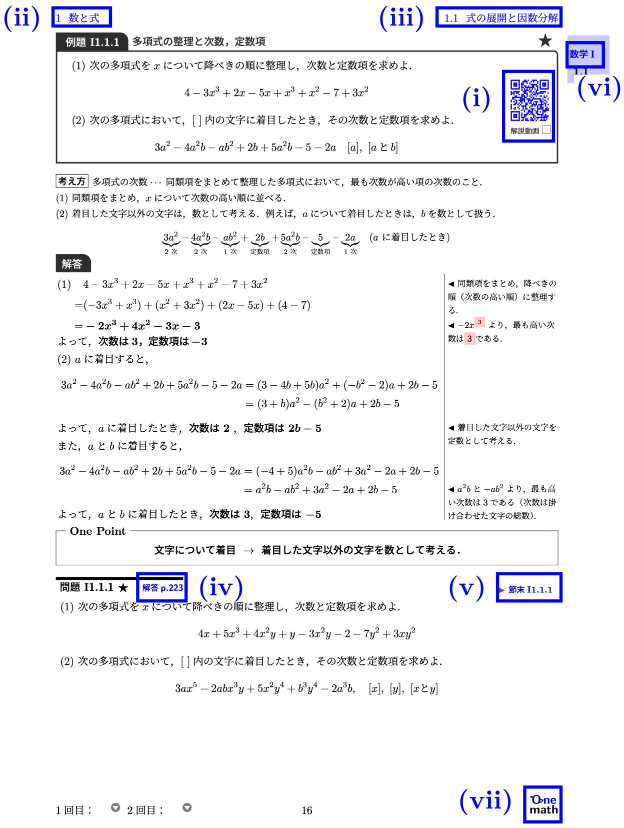
【索引】

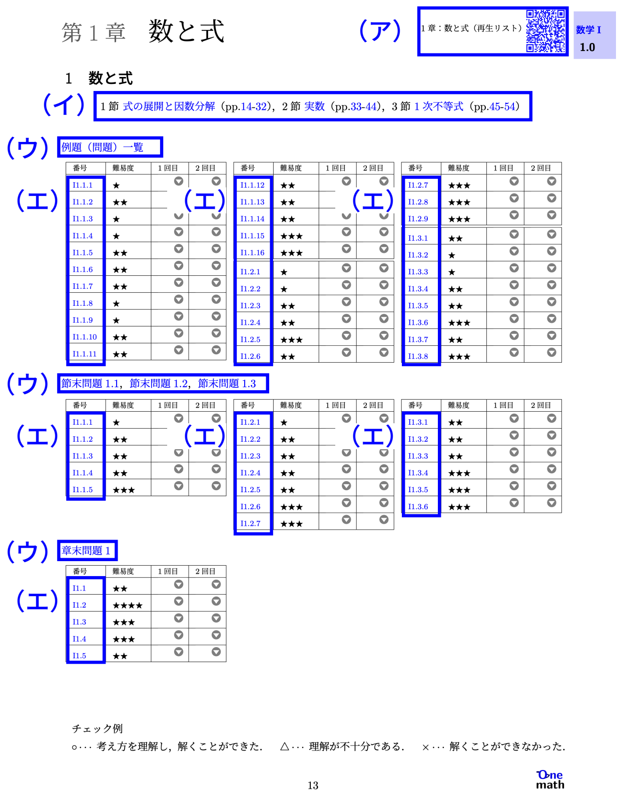
数学の用語を五十音に並べたもので，巻末にあります．用語から確認したいときなどに便利です．

リンク機能について

本書では，学習者がより効率的に教材を活用できるよう，PDF 版においてリンク機能を多数取り入れています．青色で表示されている箇所にはリンク機能が埋め込まれており（それとは別に，図や解答でも青色が使用されることがあります），関連する情報やコンテンツに素早くアクセスすることが可能です．

リンク機能の詳細をすべて説明するには紙面の都合上限りがありますが，以下にその一部を紹介します．リンク機能を活用することで，学習を効率化し，理解を深めることができます．使い込むほどに便利さを実感していただけるはずですので，ぜひ積極的に試してみてください．





例題ページ･･･ 例題ページには，学習をサポートするための多様なリンクが設定されています．以下のような用途で活用できます．

(i) YouTube で解説動画を閲覧したいとき

(ii) 該当する章の章扉を確認したいとき

(iii) 該当する節の基本事項を確認したいとき

(iv) 問題の解答を確認したいとき

(v) 関連する問題を確認したいとき

(vi) 目次を確認したいとき

(vii) 例題（問題）一覧を確認したいとき

章扉ページ･･･ 章扉ページには，章全体の学習をサポートするリンクが設定されています．以下のような用途で活用できます

（ア）YouTube で該当する章の解説動画のリストを閲覧したいとき

（イ）該当する節の基本事項を確認したいとき

（ウ）例題（問題）一覧，節末問題，章末問題を確認したいとき

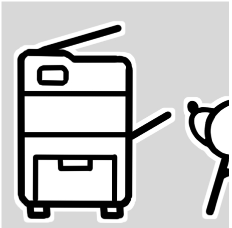
（エ）該当する問題を各問題番号から直接確認したいとき

本書を用いた学習例

本書は，印刷物（ご自宅の印刷機などで印刷してください）を利用した学習方法と，PDF 版（電子版）を利用した学習方法を想定しています．ご自身に最適な方法を探し出し，効果的に学習を進めてください．なお，印刷環境が整っていない場合は，PDF 版（電子版）をご利用ください．

【印刷物を活用する例】

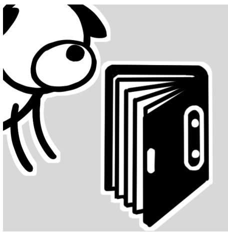
本書を印刷して利用する場合，**A4 サイズの用紙での印刷を推奨**しています．一般的な家庭の印刷機は A4 サイズに対応しているものが多いことから，A4 サイズでの活用を想定して執筆しました（全ページを印刷して冊子のように使用する場合は，やや嵩張り重量が増してしまいますが）．B5 サイズなどに縮小印刷すると文字が小さくなり，読みづらくなる可能性がありますのでご注意ください．



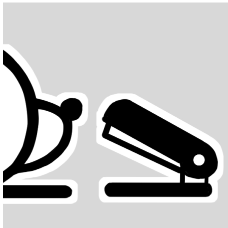
苦手な部分や特定の節や章だけを印刷して学習することも可能です．必要な部分だけを手元に置くことで，効率的な学習が期待できます．

【バインダーを使用する方法】

印刷物を活用する方法の中で特に**推奨するのが，市販のバインダーを活用**する方法です．全ページを印刷する場合でも，一部だけ印刷する場合でも，2 穴タイプのバインダーを使用すると便利です．穴あけパンチとバインダーがあれば，本書を本のように快適に扱うことができます．全ページを収納する場合は，大容量のバインダー（数百枚収納できるもの）を選ぶと良いでしょう．バインダーはページの順番を自由に入れ替えられるため，自分だけのカスタマイズが簡単に可能なのでおすすめです．



【ホチキスを使用する方法】

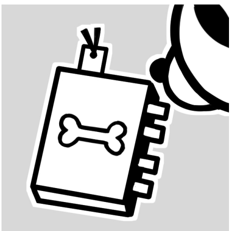


特定の節や章を印刷して利用する際には，ホチキスを用いれば簡単に冊子形式にまとめることができます．ただし，ページ数が多い場合は強力な大型のホチキスが必要となりますのでご注意ください．また，ホチキスの針の裏側は手を傷つける恐れがありますので，セロハンテープや製本テープで保護することをおすすめします．

【爪かけを活用する方法】

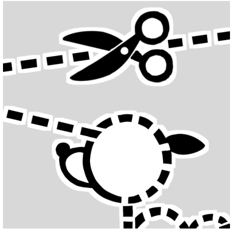
辞書や辞典のような厚みのある本で，本文の内容を小口側から検索しやすくするものを爪かけといい，本書にもページの右端部分につけています．爪かけを活用すると，目的のページを素早く見つけることができます．ただし，ご自宅のプリンターで印刷する場合，設定によっては印刷範囲の関係で紙の端まで印刷できず，ページの右端の爪かけ部分が機能されないことがあります（本書を横から見た時に，爪かけ部分が見えなくなります）．この場合，カッターと定規を使って本の小口（ページの外側の端）を少し切り落とすと，爪かけが機能するようになります．

【オリジナル参考書を作成する方法】



自分の**苦手な問題だけを集めて印刷したり，特定の節を組み合わせてオリジナルの参考書**を作成することも可能です．自分だけの参考書を作ることで，学習意欲も高まるでしょう．自分の学習スタイルやニーズに合わせて参考書をカスタマイズすることで，学習効率を飛躍的に高めることができます．

【オリジナルノートを作成する方法】

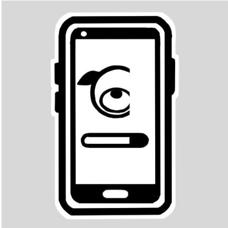


本書は A4 サイズですが，印刷した際の本文部分の幅は B5 サイズのノートにぴったり収まるように設計されています（ギリギリですが）．本文部分をきれいに切り取り，B5 サイズのノートに貼り付けることで，自分だけのオリジナルノートを作成できます．苦手な問題や重要なポイントをまとめたノートを作成し，学習効率をさらに高めましょう．

【PDF 版（電子版）を活用する例】

本書は PDF 版も用意しており，リンク機能や学習の結果をプルダウンやチェックボックスで選択し，記録する機能を備えているため非常に便利です．以下に，PDF 版を活用する方法を紹介します．

【スマートフォンでの活用】



スマートフォンに PDF 版をダウンロードしておけば，通学・通勤時間やちょっとした隙間時間に学習することができます．どこでも手軽にアクセスできるため，学習のハードルが下がります．YouTube のチャンネルを登録し，動画をお気に入りに登録しておくと，興味のある箇所をすぐに見返すことができます．また，紙での勉強に疲れた時などにも，動画による学習はおすすめです．

【タブレット端末・PC での活用】

タブレットやパソコンでは大画面で閲覧できるため，細かな数式や図も見やすくなります．自宅で集中して勉強したい時や，カフェなどでリラックスして学習する時に最適です．画面が大きいことで長時間の学習でも目の負担が軽減されます．

【学習アプリとの併用】

PDF に書き込みができる学習アプリを使用すると，デジタル上でメモやマーカーを追加できます．ただし，一部のアプリではリンク機能やプルダウン機能，チェックボックス機能が失われることがありますのでご注意ください．書き込み機能を活用することで，紙のノートと同じように自分だけの学習記録を残すことができます．

【その他の活用方法】

他の参考書と併用したり（本書を補足・演習用にするなど），**ページを抜き出してシャッフルしたりして学習するなど，自由な発想**で本書を活用してください．また，他の読者の学習にも役立つことがあるかもしれませんので，「こんな学習方法を試してみた」などのアイデアがあれば，ぜひご連絡ください．

第 I 部

数学 A

目次

例題（問題）一覧へのリンク

PDF 版からは各ページの右下のフッターにあるロゴに「例題（問題）一覧」へのリンク機能がついています．印刷時にページを参照するときや，タイトルから例題を探したいときに便利です．

ロゴにリンク機能あり

第 1 章　場合の数

1 章：場合の数（再生リスト）：

数学 A
1.0

1　場合の数

1 節 数え上げの原則（pp.14-26），2 節 順列・組合せ（pp.27-52）

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.1.1	★		
A1.1.2	★		
A1.1.3	★★★		
A1.1.4	★★★		
A1.1.5	★		
A1.1.6	★		
A1.1.7	★★		
A1.1.8	★★		
A1.1.9	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.2.1	★★		
A1.2.2	★★		
A1.2.3	★★		
A1.2.4	★★		
A1.2.5	★		
A1.2.6	★★		
A1.2.7	★★		
A1.2.8	★★★		
A1.2.9	★		
A1.2.10	★★		
A1.2.11	★		
A1.2.12	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.2.13	★★		
A1.2.14	★★		
A1.2.15	★		
A1.2.16	★★		
A1.2.17	★★		
A1.2.18	★★★		
A1.2.19	★★★		
A1.2.20	★★★		
A1.2.21	★★★		
A1.2.22	★★★★		
A1.2.23	★★★		
A1.2.24	★★★		

節末問題 1.1，節末問題 1.2

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.1.1	★★		
A1.1.2	★★★		
A1.1.3	★★★		
A1.1.4	★★		
A1.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.2.1	★★★		
A1.2.2	★★★		
A1.2.3	★★		
A1.2.4	★★★		
A1.2.5	★★★★		

章末問題 1

番号	難易度	1 回目	2 回目
A1.1	★★		
A1.2	★★★		
A1.3	★★★		
A1.4	★★★		
A1.5	★★★★		

チェック例

○ · · · 考え方を理解し，解くことができた．　△ · · · 理解が不十分である．　× · · · 解くことができなかった．

1.1 数え上げの原則

1.1.1 集合

(1) 明確な範囲をもつ事物の集まりを**集合**という．また，集合に属する 1 つ 1 つのものを，その集合の**要素**という．ある要素 a が集合 A に含まれる場合，a は集合 A に**属する**といい，$\boldsymbol{a \in A}$ と表す．逆に，要素 b が集合 A に含まれない場合には，$\boldsymbol{b \notin A}$ と表す．このとき，任意の要素 a と集合 A の関係において，$a \in A$ または $a \notin A$ のいずれかが成り立つ．要素が有限個である集合を**有限集合**，要素の数が無限に存在する集合を**無限集合**という．

◀ 要素は元(げん)と訳されることもある．

(2) 集合を表すには，次の 2 つの方法がある．

(i) **要素を列記する方法**

(ii) **要素の満たす条件を述べて表す方法**

例えば，1 桁の正の奇数の集合を A とすると，A には次のような表し方がある．

(i) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(ii) $A = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 9,\ x$ は奇数 $\}$, $A = \{2n-1 \mid 1 \leqq n \leqq 5,\ n$ は整数 $\}$

◀ 波括弧（brace）を用いて表す．

(3) 2 つの集合 $A,\ B$ に関して，A のすべての要素が B の要素でもある場合，つまり $x \in A$ ならば $x \in B$ が成り立つとき，A を B の**部分集合**といい，$A \subset B$ と表す．このとき，A は B に**含まれる**，あるいは B は A を**含む**という．また，A は A 自身の部分集合でもあり，任意の集合 A について $A \subset A$ が成り立つ．

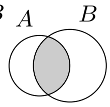
2 つの集合 $A,\ B$ が一致しているとは，互いに他方の部分集合となっていることである．すなわち，A と B が等しい $\Longleftrightarrow A \subset B$ かつ $B \subset A \Longleftrightarrow A = B$

◀ $\Longleftrightarrow$ は同値を表す．また，$A \Longleftrightarrow B$ のことを，A iff B と表すこともある．

(4) **空集合** $\varnothing$ は，要素を 1 つも含まない集合を指す．任意の集合 A に対して，$\varnothing$ は A の部分集合であるとする．すなわち，$\varnothing \subset A$ と約束する．

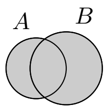
$A,\ B$ の両方に属するような要素全体の集合を A と B の **共通部分** (A と B の交わり) といい，$A \cap B$ で表す．

◀ $A \cap B$



$A,\ B$ の少なくとも一方に属するような要素全体の集合を A と B の **和集合** (A と B の結び) といい，$A \cup B$ で表す．

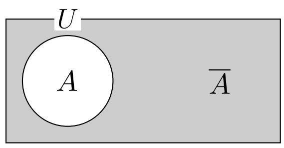
$A \cup B$



(5) **全体集合**とは，特定の文脈や議論において，考えられるすべての要素を含む集合である．**補集合**とは，全体集合 U に属し，かつ U の部分集合 A に属さない要素全体からなる集合である．これを $\overline{A}$ で表す（A^c で表されることもある）また，次のことが成り立つ．

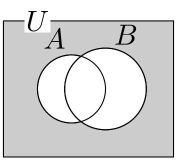
$$\overline{\varnothing} = U, \quad \overline{U} = \varnothing, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad \overline{\overline{A}} = A$$

◀ 全体集合と補集合

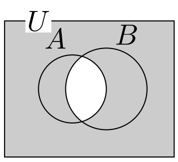


(6) **ド・モルガンの法則（ド・モーガンの法則）**

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



◀ このような図をベン図という．ド・モルガンの法則はベン図を用いて確認できる．

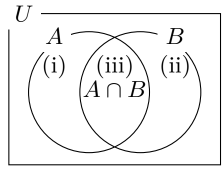
1.1.2 有限集合の要素の個数

有限集合 A の要素の個数を $\boldsymbol{n(A)}$ で表す．全体集合 U の部分集合である A，B，C に対して，

(1) 和集合の要素の個数

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

とくに，$\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$ のとき，$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$



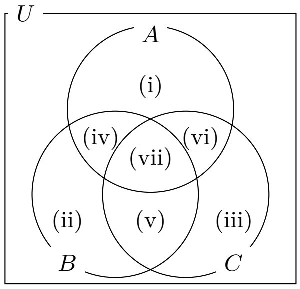
単に $n(A) + n(B)$ を考えると，(iii) の部分を 2 回重複して数えたことになる．そのため，(iii) の部分を 1 回除いている．

(2) 補集合の要素の個数

$$\boldsymbol{n(\overline{A}) = n(U) - n(A)}$$

(3) 3 つの集合の和集合の要素の個数

単に $n(A) + n(B) + n(C)$ を考えると，(iv)，(v)，(vi) の部分を 2 回，(vii) の部分を 3 回重複して数えたことになる．(iv)，(v)，(vi) の部分が重複しないように $A \cap B$，$B \cap C$，$C \cap A$ を 1 回ずつ除くと，(vii) の部分が 3 回除かれる．そのため，最後に (vii) の部分を加えると，次の式が成り立つ．



$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

1.1.3 場合の数

ある事柄について，考えられるすべての場合を，もれなく数え上げるときのその総数のことを**場合の数**という．数え上げる方法は，辞書の単語のようにアルファベット順に並べる**辞書式に並べる方法（辞書式配列）**や，**樹形図**を用いる方法がある．

辞書式配列，樹形図を用いると，例えば，a，a，b，c の 4 文字から 3 文字を選んで 1 列に並べる方法の総数は右のように考えることができ，12 通りとなる．また，1 文字目に b を選んだとすると，樹形図を作成する手順は次のようになる．

[1] 1 文字目に b を選ぶとする．

[2] 2 文字目に a を選ぶ．

[3] 3 文字目に a を選ぶ．

[4] 3 文字目に戻り，c を選ぶ

[5] 2 文字目に戻り，c を選ぶ．

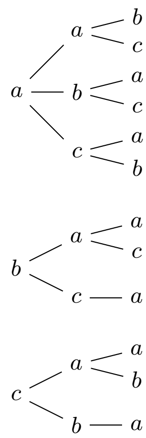
[6] 3 文字目に a を選ぶ．

[7] 1 文字目が b の場合はすべて考え尽くしたので，1 文字目が a の場合や c の場合も同様に考える．

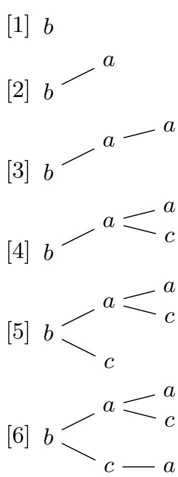
辞書式配列

aab
aac
aba
abc
aca
acb
baa
bac
bca
caa
cab
cba

樹形図



◀ 樹形図を作成する手順



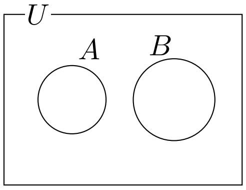
1.1.4 和の法則・積の法則

(1) 和の法則

2 つの事柄 A, B について，A である場合が m 通り，B である場合が n 通りで，A と B が同時に起こらないとする．このとき，A または B が起こる場合の数は，$\boldsymbol{m+n}$ 通りである．

つまり，$n(A\cap B)=0$ のとき，

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$



◀ $n(A\cap B)=0$ のとき，$A\cap B=\varnothing$ であり,$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ が成り立つ．

(2) 積の法則

2 つの事柄 A, B について，A である場合が m 通りあり，そのどの場合についても B である場合が n 通りあるとき，A, B がともに起こる場合の数は，$\boldsymbol{m\times n}$ 通りである．

◀ なお，(1)，(2) とも，3 つ以上の事柄 A, B, C, ... についても同様に成り立つ．

(3) 自然数 N が $N=p^aq^br^c\cdots$ と素因数分解されているとき，

(i) N の約数の個数は，

$$\boldsymbol{(a+1)(b+1)(c+1)\cdots}\ \textbf{(個)}$$

(ii) N の約数の総和は，

$$\boldsymbol{(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)(1+r+r^2+\cdots+r^c)\cdots}$$

例題 A1.1.1 集合の要素の個数 1 ★

3 桁の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 5 の倍数かつ 8 の倍数の数　　(2) 5 の倍数または 8 の倍数の数

(3) 5 で割り切れるが 8 で割り切れない数　　(4) 5 でも 8 でも割り切れない数

解説動画

考え方 3 桁の自然数は 100 から 999 までの整数であり，その個数は $999 - 100 + 1 = 900$（個）である．このとき，$900 - 100 = 899$（個）としないように注意すること．自然数 m, n $(m < n)$ に対して，m から n までの整数の個数は，右のように，$n - (m - 1) = n - m + 1$（個）となる．

(3) $n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B)$ を考える．$A \cap \overline{B}$ は，A から $A \cap B$ を除いた部分のことである．

(4) ド・モルガンの法則 $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ を用いるとよい．

$$\overbrace{\underbrace{1,\ 2,\ \ldots,\ m-1}_{m-1\ 個},\ \underbrace{m,\ m+1,\ \ldots,\ n}_{n-(m-1)\ 個}}^{n\ 個}$$

m から n までの整数の個数は，

$$n - (m - 1) = n - m + 1\ (個)$$

解答

100 以上 999 以下の自然数全体の集合を U とし，そのうち，5 の倍数，8 の倍数全体の集合をそれぞれ A, B とする．

このとき，$n(U) = 999 - 100 + 1 = 900$

$A = \{5 \cdot 20,\ 5 \cdot 21,\ \cdots,\ 5 \cdot 199\}$, $B = \{8 \cdot 13,\ 8 \cdot 14,\ \cdots,\ 8 \cdot 124\}$ であるから，

$$n(A) = 199 - 20 + 1 = 180, \quad n(B) = 124 - 13 + 1 = 112$$

◀ $5 \times 20 = 100$, $5 \times 199 = 995$ より，$n(A) = 199 - 20 + 1$
また，$8 \times 13 = 104$, $8 \times 124 = 992$ より，$n(B) = 124 - 13 + 1$

(1) 5 の倍数かつ 8 の倍数，すなわち，40 の倍数全体の集合は $A \cap B$ であるから，

◀ 5 と 8 の最小公倍数は 40 である．

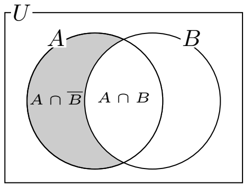
$$A \cap B = \{40 \cdot 3,\ 40 \cdot 4,\ \cdots,\ 40 \cdot 24\}$$

よって，$n(A \cap B) = 24 - 3 + 1 = $ **22 (個)**

(2) 5 の倍数または 8 の倍数全体の集合は $A \cup B$ であるから，

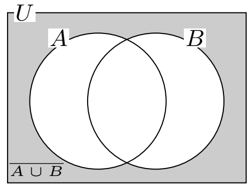
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 180 + 112 - 22 = \mathbf{270}\ \textbf{(個)}$$

(3) 5 で割り切れるが 8 で割り切れない数全体の集合は $A \cap \overline{B}$ であるから，

◀


$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 180 - 22 = \mathbf{158}\ \textbf{(個)}$$

(4) 5 でも 8 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ であるから，

◀


$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 900 - 270 = \mathbf{630}\ \textbf{(個)}$$

問題 A1.1.1 ★ 解答 p.175

▶ 章末 A1.1

100 から 200 までの整数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 5 でも 6 でも割り切れる数　　(2) 5 または 6 で割り切れる数

(3) 5 で割り切れるが 6 で割り切れない数　　(4) 5 でも 6 でも割り切れない数

例題 A1.1.2 集合の要素の個数 2 ★

100 人の社員に英語研修とコンピュータ研修の参加状況を調査したところ，英語研修に参加している社員は 72 人，両方の研修に参加している社員は 18 人，どちらの研修にも参加していない社員は 16 人であった．このとき，次の社員の人数を求めよ．

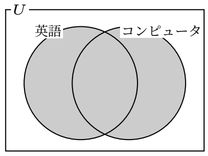
(1) 少なくとも 1 つの研修に参加している社員

(2) コンピュータ研修に参加している社員

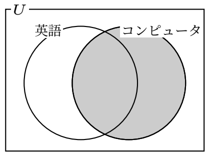
解説動画

考え方 図をかいて考えるとよい．全体集合を U とし，英語研修に参加している社員の集合を A，コンピュータ研修に参加している社員の集合を B とすると，求める人数の集合はそれぞれ右の図のようになる．
(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ を整理した，$n(B)=n(A\cup B)-n(A)+n(A\cap B)$ と (1) で求めた $n(A\cup B)$ を利用する．

(1)



(2)



解答

100 人の社員全体の集合を U，英語研修に参加している社員の集合を A，コンピュータ研修に参加している社員の集合を B とすると，

$$n(U)=100,\quad n(A)=72,\quad n(A\cap B)=18,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B})=16$$

◀ どちらの研修にも参加していない社員の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ である．

(1) 少なくとも 1 つの研修に参加している社員の集合は $A\cup B$ であるから，その人数は，

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(U)-n(\overline{A\cup B})\\ &=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})\\ &=100-16=\mathbf{84}\ \textbf{(人)} \end{aligned}$$

◀ ド・モルガンの法則
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より，コンピュータ研修に参加している社員の人数 $n(B)$ は，

$$n(B)=n(A\cup B)-n(A)+n(A\cap B)=84-72+18=\mathbf{30}\ \textbf{(人)}$$

◀ (1) より，$n(A\cup B)=84$

One Point

補集合の要素の個数

$$\boldsymbol{n(\overline{A})=n(U)-n(A)}$$

ド・モルガンの法則

$$\boldsymbol{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$$

問題 A1.1.2 ★ 解答 p.176

▶ 節末 A1.1.1

200 人の学生を対象に数学の講座と理科の講座の参加状況を調査したところ，数学の講座に参加している学生は 120 人，両方の講座に参加している学生は 50 人，どちらの講座にも参加していない学生は 30 人であった．このとき，次の学生の人数を求めよ．

(1) 少なくとも 1 つの講座に参加している学生

(2) 理科の講座に参加している学生

例題 A1.1.3 3 つの集合の要素の個数 ★★★

80 人の顧客に対して，講座 A，講座 B，講座 C の受講状況を調査したところ，講座 A を受講している顧客は 46 人，講座 B を受講している顧客は 34 人，講座 C を受講している顧客は 38 人であり，講座 A と講座 B の両方を受講している顧客は 15 人，講座 B と講座 C の両方を受講している顧客は 17 人，講座 C と講座 A の両方を受講している顧客は 14 人であった．このとき，次の場合の人数を求めよ．ただし，3 つの講座すべてを受講していない顧客はいないものとする．

(1) 3 つの講座すべてを受講している顧客　(2) 講座 A だけを受講している顧客

解説動画

考え方

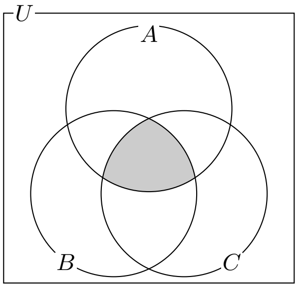
(1) 3 つの集合について，次の式が成り立つことを利用する．

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

(2) (1) の結果を用いて，ベン図に書き入れることによって求めてもよい．

解答

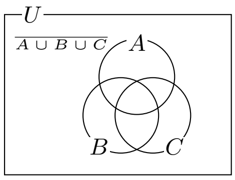
80 人の顧客全体の集合を U とし，講座 A，講座 B，講座 C を受講している顧客の集合をそれぞれ A，B，C とすると，3 つの講座すべてを受講している顧客の集合は $A\cap B\cap C$ である．



$n(U)=80,\quad n(A)=46,\quad n(B)=34,\quad n(C)=38,$
$n(A\cap B)=15,\quad n(B\cap C)=17,\quad n(C\cap A)=14$

であり，3 つの講座すべてを受講していない顧客はいないので，

$$n(\overline{A\cup B\cup C})=0,\quad n(A\cup B\cup C)=n(U)=80$$

◀ 

したがって，

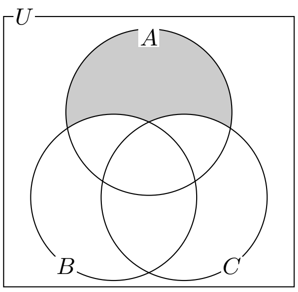
$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\+n(A\cap B\cap C)$$

であるから，$80=46+34+38-15-17-14+n(A\cap B\cap C)$

よって，$n(A\cap B\cap C)=8$ より，3 つの講座すべてを受講しているのは **8（人）**

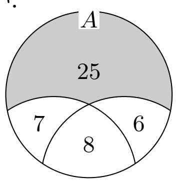
(2) 講座 A だけ受講している顧客の集合は $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ であるから，

$$\begin{aligned}&n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\=&n(A\cup B\cup C)-n(B\cup C)\\=&n(A\cup B\cup C)-\{n(B)+n(C)-n(B\cap C)\}\\=&80-(34+38-17)=25\end{aligned}$$



よって，講座 A だけを受講しているのは **25（人）**

◀ (1) の結果を用いて，次のような図に注目し，人数を書き入れることによって求めてもよい．



問題 A1.1.3 ★★★ 解答 p.177

▶ 節末 A1.1.2 ▶ 節末 A1.1.3

1 から 100 までの整数のうち，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の個数を求めよ．

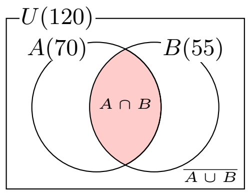
例題 A1.1.4 集合の要素の個数の最大・最小 ★★★

集合 U とその部分集合 A，B に対して，$n(U)=120$，$n(A)=70$，$n(B)=55$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A\cap B)$ の最大値　　　(2) $n(A\cap B)$ の最小値

解説動画

考え方 $n(A)+n(B)=70+55=125$ であり，$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$ であるから，$n(A\cup B)$ が最大となるとき，$n(A\cap B)$ は最小となり，$n(A\cup B)$ が最小となるとき，$n(A\cap B)$ は最大となることを利用する．

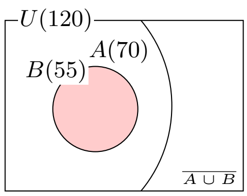


解答

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=70+55-n(A\cup B)=125-n(A\cup B)$$

(1) $n(A)>n(B)$ であるから，$n(A\cup B)$ が最小となるのは $A\supset B$ のときである．
したがって，右の図より，

$$n(A\cup B)=n(A)=70$$



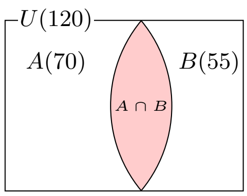
◀ このとき，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ の要素の個数が最大である．

よって，$n(A\cap B)$ **の最大値は，**$125-70=\mathbf{55}$

◀ $n(A\cap B)=125-n(A\cup B)$

(2) $n(A)+n(B)>n(U)$ であるから，$n(A\cup B)$ が最大となるのは $A\cup B=U$ のときである．
したがって，右の図より，

$$n(A\cup B)=n(U)=120$$



◀ $A\cup B=U$，すなわち，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$

よって，$n(A\cap B)$ **の最小値は，** $125-120=\mathbf{5}$

◀ $n(A\cap B)=125-n(A\cup B)$

問題 A1.1.4 ★★★ 解答 p.177

集合 U とその部分集合 A，B に対して，$n(U)=200$，$n(A)=90$，$n(B)=120$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A\cap B)$ の最大値　　　(2) $n(A\cap B)$ の最小値

例題 A1.1.5 樹形図による数え上げ ★

6 個の文字 a, a, a, b, b, c から，3 個を選んで 1 列に並べる方法の総数を求めよ．

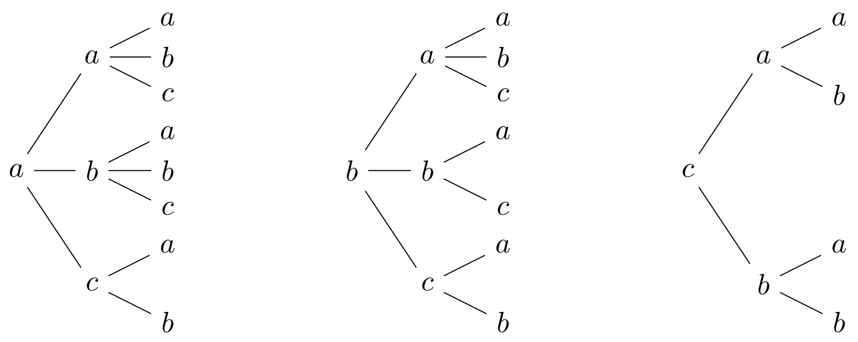
解説動画

考え方 樹形図は，アルファベット順にかき出すなど，重複や漏れのないようにかくとよい．

解答

左から順に，1 番目，2 番目，3 番目とし，樹形図をかく．

8 通り　　7 通り　　4 通り



樹形図より，$8 + 7 + 4 =$ **19 (通り)**

◀ 次のように辞書式に並べる方法（辞書式配列）で求めてもよい．
aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, baa, bab, bac, bba, bbc, bca, bcb, caa, cab, cba, cbb

【注意】 使える文字の個数に注意すること（b は 2 個までしか使えないなど）．また，順序が異なるものを区別するか否かにも注意すること（例題では「1 列に並べる」ので，a, a, b と a, b, a は区別する）．

One Point

樹形図か辞書式配列を用いて，重複や漏れのないようにかく．

問題 A1.1.5 ★ 解答 p.178

大中小の 3 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 10 になる数の組は何通りあるか．

例題 A1.1.6 和の法則，積の法則 ★

(1) 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 4 の倍数となる場合は何通りあるか.

(2) 数学の参考書 a，b，c，d の 4 冊から 1 冊，p，q，r の 3 冊の国語の参考書の中から 1 冊，合計 2 冊の参考書を選ぶ方法は何通りあるか.

解説動画

考え方

(1) 和が 4 の倍数，すなわち，和が 4 または 8 または 12 となる目の出方をそれぞれ数え上げ，和の法則を用いる.

(2) a，b，c，d のそれぞれの場合について p，q，r を選ぶことから，積の法則を用いる.

解答

(1) 大小 2 個のさいころの目がそれぞれ x，y であることを $(x,\ y)$ で表す．目の和が 4 の倍数となるのは，目の和 $x+y$ が次の 3 つの場合である.

(i) $x+y=4$ のとき

$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$より，3 通り

(ii) $x+y=8$ のとき

$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$ より，5 通り

(iii) $x+y=12$ のとき

$(x,\ y)=(6,\ 6)$ より，1 通り

よって，(i)〜(iii) は同時に起こらないから，和の法則より，$3+5+1=$ **9 (通り)**

(2) a，b，c，d の 4 冊から 1 冊を選ぶ方法は 4 通りあり，それぞれの場合について，p，q，r の 3 冊から 1 冊を選ぶ方法は 3 通りずつある.

よって，合計 2 冊の参考書を選ぶ方法は，積の法則より，$4\times 3=$ **12 (通り)**

◀「大小 2 個」という区別があるから, 例えば, (1，3)，(3，1) は異なる目の出方であると考える.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

One Point

和の法則 ･･･ A または B が起こる場合の数は，$m+n$ 通り

積の法則 ･･･ A，B がともに起こる場合の数は，$m\times n$ 通り

問題 A1.1.6 ★ 解答 p.178

▶ 章末 A1.2

(1) 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 5 の倍数となる場合は何通りあるか.

(2) 英語の参考書 a，b，c，d の 4 冊から 1 冊と，理科の参考書 x，y の 2 冊から 1 冊，合計 2 冊の参考書を選ぶ方法は何通りあるか.

例題 A1.1.7 約数の個数・総和 ★★

72 の正の約数の個数とその総和を求めよ．

解説動画

考え方 72 を素因数分解すると，$72 = 2^{3} \times 3^{2}$ であるから，正の約数は，次のようになる．

$$1\times1,\ 2\times1,\ 2^2\times1,\ 2^3\times1,\ 1\times3,\ 2\times3,\ 2^2\times3,\ 2^3\times3,\ 1\times3^2,\ 2\times3^2,\ 2^2\times3^2,\ 2^3\times3^2 \cdots\text{(i)}$$

72 の正の約数は，因数 2 を 0，1，2，3 個（4 通り）のいずれかをもち，因数 3 を 0，1，2 個（3 通り）のいずれかをもつことから，積の法則より，

$$4\times3=12\ (\text{個})$$

3 通り

4 通り

	1	3	3^2
1	$1\cdot1$	$1\cdot3$	$1\cdot3^2$
2	$2\cdot1$	$2\cdot3$	$2\cdot3^2$
2^2	$2^2\cdot1$	$2^2\cdot3$	$2^2\cdot3^2$
2^3	$2^3\cdot1$	$2^3\cdot3$	$2^3\cdot3^2$

また，$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)$ を展開すると，

$$\begin{aligned}(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2) &= 1\times1+2\times1+2^2\times1+2^3\times1\\ &\quad+1\times3+2\times3+2^2\times3+2^3\times3\\ &\quad+1\times3^2+2\times3^2+2^2\times3^2+2^3\times3^2\end{aligned}$$

これは，(i) の総和と一致し，約数の総和は $(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)$ で求めることができる．

解答

72 を素因数分解すると，$72=2^3\times3^2$

$$(3+1)\times(2+1)=12$$

より，約数の個数は，**12 個**

また，約数の総和は，

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=15\times13=\mathbf{195}$$

◀ 積の法則を用いる．なお，「$3\times2=6$ より，約数の個数は，6 個」などと答えてしまわないように注意すること．

正の約数の個数と総和

自然数 N が $N=p^aq^br^c\cdots$ と素因数分解されているとき，

正の約数の個数は，

$$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\ (\text{個})$$

正の約数の総和は，

$$(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)(1+r+r^2+\cdots+r^c)\cdots$$

問題 A1.1.7 ★★ 解答 p.179

▶ 節末 A1.1.4

120 の正の約数の個数とその総和を求めよ．

例題 A1.1.8 支払える金額の種類 ★★

硬貨の枚数が次のようなとき，硬貨の一部または全部を使って，ちょうど支払える金額の種類は何通りあるか．
(1) 100 円硬貨が 2 枚，50 円硬貨が 1 枚，10 円硬貨が 3 枚
(2) 100 円硬貨が 3 枚，50 円硬貨が 2 枚, 10 円硬貨が 4 枚

解説動画

考え方 それぞれの硬貨の使い方が何通りあるかを考えて，積の法則を利用する．このとき，金額が 0 円となる 100 円硬貨 0 枚，50 円硬貨 0 枚，10 円硬貨 0 枚の場合は，支払いにならないので除くことに注意すること．
(2) 50 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚は同じ 100 円を表す．(1) のように単に積の法則を用いて計算すると，例えば 100 円の支払いの場合は，50 円硬貨 2 枚の場合と 100 円硬貨 1 枚の場合を重複して数えてしまう．そこで，大きい金額の硬貨である 100 円硬貨 3 枚を小さい金額の硬貨である 50 円硬貨 6 枚として考え，もとの 50 円硬貨 2 枚と合わせて，50 円硬貨 8 枚，10 円硬貨 4 枚とするとよい．このように考えることで，3 種類の硬貨を使った支払い可能な金額を定めることができる．

解答

(1) 100 円硬貨 2 枚の使い方は，0 ～ 2 枚の 3 通り
50 円硬貨 1 枚の使い方は，0，1 枚の 2 通り
10 円硬貨 3 枚の使い方は，0 ～ 3 枚の 4 通り
したがって，$3 \times 2 \times 4 = 24$ (通り)
よって，求める総数は，$24 - 1 = \mathbf{23}$ **(通り)**

◀「支払える金額」であるから，0 円の場合を引く．

(2) 50 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚は，同じ金額 100 円を表すので，100 円硬貨 3 枚を 50 円硬貨 6 枚と考えて，50 円硬貨 8 枚と 10 円硬貨 4 枚で支払える金額を求める．

◀ もとの 50 円硬貨 2 枚と，100 円硬貨を 50 円硬貨として考えた 6 枚とを合わせた，合計 8 枚と考える．

50 円硬貨 8 枚の使い方は，0 ～ 8 枚の 9 通り
10 円硬貨 4 枚の使い方は，0 ～ 4 枚の 5 通り
したがって，$9 \times 5 = 45$ (通り)
よって，求める総数は，$45 - 1 = \mathbf{44}$ **(通り)**

◀ 0 円の場合を引く．

One Point

同じ金額となる硬貨の組合せがあるときは，金額の大きい硬貨を金額の小さい硬貨として考える．

問題 A1.1.8 ★★ 解答 p.179

硬貨の枚数が次のようなとき，硬貨の一部または全部を使って，ちょうど支払える金額の種類は何通りあるか．
(1) 500 円硬貨が 1 枚，100 円硬貨が 2 枚，10 円硬貨が 3 枚
(2) 500 円硬貨が 2 枚，100 円硬貨が 5 枚，10 円硬貨が 4 枚

例題 A1.1.9 出る目の総数を用いる場合の数 ★★

大，中，小 3 個のさいころを投げるとき，目の積が 3 の倍数となる場合は何通りあるか．

解説動画

考え方 目の積が 3 の倍数である場合の数を，場合分けを用いて求めようとすると手間が掛かる．そこで，出る目の総数から目の積が 3 の倍数ではないものを引いた，(目の積が 3 の倍数) = (出る目の総数) − (目の積が 3 の倍数ではない) を考えるとよい．ここで，目の積が 3 の倍数にならないのは，3 個とも 1，2，4，5 の目（4 通り）の場合である．

解答

さいころの出る目の総数は，

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ (通り)}$$

さいころの目の積が 3 の倍数となるのは，3 個のさいころのうち少なくとも 1 つが 3 または 6 である場合である．

3 個のさいころの目がすべて 3 または 6 以外である場合の数は，

◀ 3 個とも 1，2，4，5 の目が出る場合の数を考える．

$$4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ (通り)}$$

よって，求める場合の数は，$216 - 64 = \mathbf{152}$ **(通り)**

【余談】目の積が 3 の倍数になる場合の数を場合分けを用いて求めると，次のようになる．

(i) 3 つの目がすべて 3 の倍数のとき，$2^3 = 8$ (通り)

(ii) 2 つの目が 3 の倍数で，残り 1 つの目が 3 の倍数ではないとき，$\left(2^2 \times 4\right) \times 3 = 48$ (通り)

(iii) 1 つの目が 3 の倍数で，残り 2 つの目が 3 の倍数ではないとき，$\left(2 \times 4^2\right) \times 3 = 96$ (通り)

よって，(i)〜(iii) より，求める場合の数は，$8 + 48 + 96 = 152$ (通り)

One Point

全体から引いたものを考えると，楽に求めることができる．

問題 A1.1.9 ★★ 解答 p.179

大，中，小 3 個のさいころを投げるとき，目の積が 5 の倍数となる場合は何通りあるか．

節末問題 1.1 数え上げの原則

節末 A1.1.1 ★★ 解答（節末）p.180

▶ 例題 A1.1.2

ある町の住民の一部にアンケートを実施したところ，スポーツが好きと答えた住民は全体の 65% ，読書が好きと答えた住民は全体の 55% ，両方とも好きではないと答えた住民は全体の 15% ，さらに両方とも好きと答えた住民は 42 人であった．アンケートに答えた住民の総数を求めよ．また，スポーツだけが好きと答えた住民の人数を求めよ．

節末 A1.1.2 ★★★ 解答（節末）p.181

▶ 例題 A1.1.3

ある企業の社員 140 人を対象にアンケートを実施したところ，英語が得意な社員は 110 人，中国語が得意な社員は 100 人，スペイン語が得意な社員は 90 人であった．このとき，3 言語すべてが得意な社員の人数は，少なくとも何人であるか．

節末 A1.1.3 ★★★ 解答（節末）p.182

▶ 例題 A1.1.3

50 人の社員に対し，異なる 3 種類の技術 A，B，C を習得しているか調査したところ，全員が A, B, C のうち少なくとも 1 つの技術を習得していた．また，A と B の両方，B と C の両方，A と C の両方を習得している社員の数はそれぞれ 10 人，8 人，12 人であった．さらに，A と B の少なくとも一方，B と C の少なくとも一方，A と C の少なくとも一方を習得している社員の数は，それぞれ 40 人，35 人，45 人であった．このとき，次の社員の人数を求めよ．

(1) 技術 A を習得している社員

(2) 技術 B を習得している社員

(3) 技術 C を習得している社員

(4) A，B，C のすべての技術を習得している社員

節末 A1.1.4 ★★ 解答（節末）p.182

▶ 例題 A1.1.7

720 の正の約数の個数は何個あるか．そのうち，奇数の約数は何個あるか．

節末 A1.1.5 ★★★ 解答（節末）p.183

赤玉 3 個，白玉 2 個，青玉 1 個，黄玉 1 個がある．この中から 4 個の玉を選ぶ方法は全部で何通りあるか．ただし，選ばれない色があってもよいものとする．

1.2 順列・組合せ

1.2.1 順列

(1) 順列（permutation）$\cdots$ 異なる n 個のものから r 個を取り出して 1 列に並べる**順列**の総数は，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r}$ と表し，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{個の連続する自然数の積}}}$$

◀ P は順列（permutation）の頭文字である．

◀ ${}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7\cdot6\cdot5}_{3\ \text{個}}$

(2) n の**階乗**を $\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$ とし，$0! = 1$ と定める．階乗の記号を用いると，順列は，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}_{r\ \text{個の連続する自然数の積}} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

また，n 個のものすべての順列の総数は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_n = n!}$ であり，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_0 = 1}$ と定める．

◀ 階乗の記号 ! は factorial という．

◀ ${}_7\mathrm{P}_3 = 7\cdot6\cdot5 = \dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7!}{(7-3)!}$

1.2.2 円順列と数珠順列

異なる n 個の円順列の総数は，

$$\boldsymbol{\text{円順列の総数} = \frac{{}_n\mathrm{P}_n}{n} = (n-1)!}$$

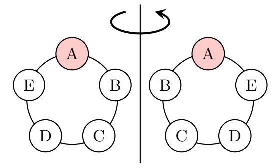
◀ $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

異なる n 個の数珠順列の総数は，

$$\text{数珠順列の総数} = \frac{\text{円順列の総数}}{2} = \frac{{}_n\mathrm{P}_n}{2n} = \frac{(n-1)!}{2} \quad (n \geqq 3)$$

なお，裏表があるので，2 で割ることに注意すること．

◀ 裏返すと同じものになる．



1.2.3 重複順列

重複順列 $\cdots$ 異なる n 個のものから重複を許して，r 個を取り出して並べる順列の総数は，$\boldsymbol{n^r}$

◀ $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\ \text{個}} = n^r$

1.2.4 組合せ

組合せ（combination）$\cdots$ 異なる n 個のものから r 個取った組合せの総数は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r}$ と表し，異なる n 個のものから r 個とった順列の総数を，異なる r 個のものから r 個とった順列の総数で割った値となる．つまり，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

また，次の等式が成り立つ．

$${}_n\mathrm{C}_0 = 1,\quad {}_n\mathrm{C}_n = 1,\quad {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r},\quad {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

◀ C は組合せ（combination）の頭文字である．また，${}_n\mathrm{C}_r$ を $\binom{n}{r}$ と表すこともある．

◀ ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{\overbrace{7\cdot6\cdot5}^{3\ \text{個}}}{\underbrace{3\cdot2\cdot1}_{3\ \text{個}}}$

1.2.5 同じものを含む順列

同じものを含む順列 $\cdots$ n 個のものから，同じものがそれぞれ，p 個，q 個，r 個，$\cdots$ あるとき，n 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は，

$$\boldsymbol{\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \quad (p+q+r+\cdots = n)}$$

◀ ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r \times \cdots$ とも表される．

例題 A1.2.1 0 を含む数字の順列 ★★

0，1，2，3，4，5 の 6 個の数字の中から異なる 4 個の数字を選んで 4 桁の整数を作る．このとき，次のような数の個数を求めよ．

(1) すべての整数　　(2) 偶数　　(3) 3 の倍数

解説動画

考え方

(1) 0 を含む数字の順列の問題では，最高位は 0 にはならないことに注意すること．

(2) 偶数になるのは，一の位が偶数，すなわち，0，2，4 の場合である．このとき，一の位で 0 を選ぶか否かで千の位の考え方が異なる（場合分けをするとよい）．

(3) 3 の倍数となるのは，各位の数の和が 3 の倍数のときであることを利用する．

4 桁の整数の場合

千　百　十　一

↑

0 にはならない

解答

(1) 千の位の数字は 0 以外の数であるから，5 通り

そのそれぞれについて，百，十，一の位に 0 を含めた残りの 5 個の数字から 3 個を選んで並べると，4 桁の整数となる．

よって，求める個数は，$5 \times {}_5P_3 = 5 \times (5 \times 4 \times 3) = \mathbf{300}$ **(個)**

◀ 最高位は 0 にはならないので，千の位から考える．

(2) 4 桁の整数が偶数となるから，一の位は 0，2，4 である．

(i) 一の位が 0 のとき

千，百，十の位に残りの 5 個の数字から 3 個を選んで並べればよいので，その個数は，${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (個)

◀ 一の位が 0 のとき，最高位は 0 にはならない．

(ii) 一の位が 2 または 4 のとき

一の位は 2，4 の 2 通りあり，そのそれぞれについて，千の位は 0 以外で一の位の数字を除く 4 通りある．百と十の位は残りの 4 個の数字から 2 個を選んで並べればよいので，その個数は，$2 \times 4 \times {}_4P_2 = 96$ (個)

◀ 最高位は 0 にはならないので注意すること．

よって，(i)，(ii) より，求める個数は，$60 + 96 = \mathbf{156}$ **(個)**

(3) 3 の倍数となるのは，各位の数の和が 3 の倍数のときである．その 4 個の数の組は，$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，$\{0,\ 1,\ 3,\ 5\}$，$\{0,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$\{0,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ の 5 つの場合がある．

◀ 各位の数の和が 6，9，12 になる場合を考える．なお，倍数の判定法については，数学 A の「数学と人間の活動」で詳しく学習する．

(i) 選んだ 4 個の数に 0 を含むとき

$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，$\{0,\ 1,\ 3,\ 5\}$，$\{0,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$\{0,\ 3,\ 4,\ 5\}$ の 4 組があり，それぞれの組でできる 4 桁の整数は，千の位は 0 ではないから，

$3 \times 3! = 18$ (個)

よって，$4 \times 18 = 72$ (個)

(ii) 選んだ 4 個の数に 0 を含まないとき

$\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ の 1 組があり，この 4 個の数でできる 4 桁の整数は，

$4! = 24$ (個)

よって，(i)，(ii) より，求める個数は，$72 + 24 = \mathbf{96}$ **(個)**

問題 A1.2.1 ★★ 解答 p.184

▶ 節末 A1.2.1

0，1，2，3，4 の 5 個の数字の中から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次のような数の個数を求めよ．

(1) すべての整数　　(2) 奇数　　(3) 3 の倍数

例題 A1.2.2 条件付きの順列 1 ★★

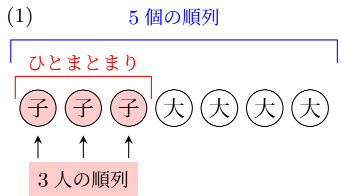
大人 4 人，子供 3 人の合計 7 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 子供 3 人が隣り合う　　(2) 子供 3 人ともが隣り合わない

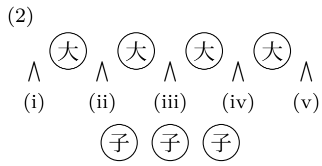
解説動画

考え方

(1) 先に子供 3 人をひとまとまりにして考え，残りの大人 4 人と合わせた合計 5 個の順列を求める．次に，子供 3 人の中の並び方（3 人の順列）について考える．



(2) 大人 4 人を並べて，大人 4 人の間と両端の 5 箇所 (i)〜(v) から，子供 3 人が 1 人ずつ入る 3 箇所を決める順列と考える．すると，子供 3 人ともが隣り合わない並び方を求めることができる．



解答

(1) 子供 3 人をひとまとまりにして 1 人として考え，大人 4 人と合わせた 5 個の並び方は，

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ (通り)}$$

◀ 先にひとまとまりにして考え，次に，そのそれぞれについて子供の並び方を考える．

そのそれぞれについて，1 人として考えた子供 3 人の並び方は，$3! = 6$ (通り)
よって，子供 3 人が隣り合う並び方は，

$$120 \times 6 = \mathbf{720} \text{ **(通り)**}$$

◀ 積の法則を用いる．

(2) 大人 4 人の並び方は，$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (通り)
大人 4 人の間と両端の 5 箇所のうち，3 箇所に子供 3 人が 1 人ずつ入ればよい．
したがって，5 箇所から 3 箇所選んで並べる順列であるから，

$${}_5\mathrm{P}_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ (通り)}$$

よって，子供 3 人とも隣り合わない並び方は，$24 \times 60 = \mathbf{1440}$ **(通り)**

◀ 積の法則を用いる．

問題 A1.2.2 ★★ 解答 p.185

▶ 節末 A1.2.2 ▶ 節末 A1.2.4

男子 5 人，女子 2 人の合計 7 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 女子 2 人が隣り合う　　(2) 女子 2 人ともが隣り合わない

例題 A1.2.3 条件付きの順列 2 ★★

大人 5 人，子供 3 人の合計 8 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 並び方の総数　　(2) 両端が大人である

(3) 少なくとも一方の端が子供である

解説動画

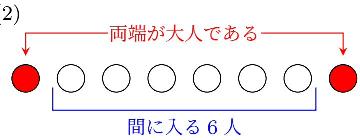
考え方

(2) 先に両端に大人を並べ，次に間に入る 6 人の並び方を考える．

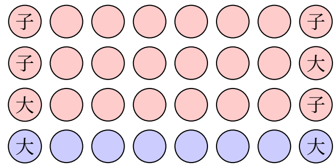
(3) 少なくとも一方の端が子供である 並び方は，両端が子供，左端が子供で右端が大人，左端が大人で右端が子供の 3 つの場合がある．場合分けを用いて求めようとすると手間が掛かるので，並び方の総数から， 両端が大人である 並び方を引くことを考えるとよい．

(少なくとも一方の端が子供である) = (並び方の総数)− (両端が大人である)

(2)



(3)



解答

(1) 8 人が 1 列に並ぶ順列であるから，並び方の総数は，

$$ {}_8\mathrm{P}_8 = 8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \mathbf{40320}\ \textbf{(通り)} $$

(2) 両端が大人である並び方は，${}_5\mathrm{P}_2 = 5\cdot4 = 20$ (通り)

残りの 6 人を並べる順列は，$6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$ (通り)

よって，両端が大人である並び方は，

$$ 20\times720 = \mathbf{14400}\ \textbf{(通り)} $$

◀ 大人 5 人から 2 人が 1 列に並ぶ順列を考える（両端には右端と左端があるから，単に選ぶだけではなく，順序も考える）．

(3) 少なくとも一方の端が子供である並び方は，全体から両端が大人である並び方を引いたものである．

よって，(1)，(2) より，少なくとも一方の端が子供である並び方は，

$$ 40320 - 14400 = \mathbf{25920}\ \textbf{(通り)} $$

◀ $n(A) = n(U) - n(\overline{A})$

問題 A1.2.3 ★★ 解答 p.185

▶ 節末 A1.2.2

男性 4 人，女性 4 人の合計 8 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 並び方の総数　　(2) 両端が男性である

(3) 少なくとも一方の端が女性である

例題 A1.2.4 辞書式配列 ★★

a，b，c，d，e の 5 文字を並べた文字列を，アルファベット順に，1 番目を abcde，2 番目を abced，⋯，120 番目を edcba と番号を付ける．

(1) dbeca は何番目にあるか． (2) 50 番目の文字列は何か．

解説動画

考え方 a，b，c，d，e の文字列は，$5! = 120$ (通り) である．

(1) dbeca より前に並んでいる順列を，左側の文字から整理して，

a□□□□ の形の文字列 (□ は a 以外の残りの 4 個の順列)，
b□□□□ の形の文字列 (□ は a 以外の残りの 4 個の順列)，
c□□□□ の形の文字列 (□ は a 以外の残りの 4 個の順列)，
da□□□ の形の文字列 (□ は d，a 以外の残りの 3 個の順列)

のように，個数を数えて，それぞれの順列の個数の和を求める．

(2) a□□□□ の形の文字列は，$4! = 24$ より 24 個であるから，25 番目の文字列は bacde，などのように，区切りのよいところを境に個数を数える．

解答

(1) a□□□□ の形の文字列は，$4! = 24$ (通り)
b□□□□ の形の文字列は，$4! = 24$ (通り)
c□□□□ の形の文字列は，$4! = 24$ (通り)
da□□□ の形の文字列は，$3! = 6$ (通り)
dba□□ の形の文字列は，$2! = 2$ (通り)
dbc□□ の形の文字列は，$2! = 2$ (通り)
dbeac の形の文字列で 1 通り，dbeca の形の文字列で 1 通りある．
よって，$24 + 24 + 24 + 6 + 2 + 2 + 1 + 1 =$ **84 (番目)**

◀ 求める dbeca を得ることができたので，ここまでの合計を求める．

(2) a□□□□ の形の文字列は，$4! = 24$ (通り)
b□□□□ の形の文字列は，$4! = 24$ (通り)
ここまでの合計は，$24 + 24 = 48$ (通り)
49 番目が cabde であるから，50 番目の文字列は，**cabed**

◀ 50 番目に近くなったので，書き出して求める．

One Point

辞書式配列は，形に注目して左から順に文字を決めて個数を求める．

問題 A1.2.4 ★★ 解答 p.186

▶ 節末 A1.2.1

1，2，3，4，5 の 5 つの数字を並べた数列を，数値順に，1 番目を 12345，2 番目を 12354，⋯，120 番目を 54321 と番号を付ける．

(1) 32415 は何番目にあるか． (2) 74 番目の数列は何か．

例題 A1.2.5 円順列・数珠順列 ★

1，2，3，4，5 の数字が書かれた玉が 1 個ずつあるとき，次の問いに答えよ．

(1) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらの 5 個の玉から 3 個の玉を取り出して円形に並べる方法は何通りあるか．

(3) 1，2 が隣り合うように円形に並べる方法は何通りあるか．

(4) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

解説動画

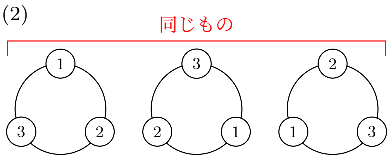
考え方

(2) 異なる 3 個の円順列と同様に，5 個から 3 個選んで円形に並べる場合も，右の図のように重複する（同じものとなる）場合がある．

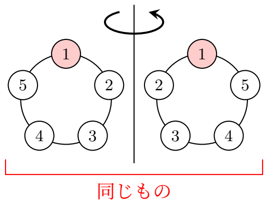
(3) 1，2 をまとめて 1 つの玉として考えて，4 個の円順列を求める．

(4) ひもを通し首飾りを作るとき，右の図のように円順列では異なる 2 通りとして考えたものが，裏返すと同じものになる．よって，円順列の場合の数を 2 で割ることで求めることができる．このような順列を**数珠順列**という．

(2)



(4)



解答

(1) 異なる 5 個の円順列であるから，

$$(5-1)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}\ \textbf{(通り)}$$

(2) 異なる 5 個から 3 個選んだ円順列であるから，

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3} = \mathbf{20}\ \textbf{(通り)}$$

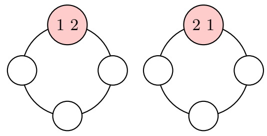
◀ 3 つずつ重複するので，3 で割る．

(3) 1，2 をまとめて 1 つの玉と考えると，残りの 3 個と合わせた 4 個の円順列より，$(4-1)!$ 通り

そのそれぞれについて，1，2 の並び方は，$2!$ 通り

よって，$(4-1)! \times 2! = \mathbf{12}$ **(通り)**

◀ 1，2 と 2，1 の 2 通りある．



(4) 5 個の円順列において，$(5-1)!$ 通りあるが，首飾りは裏返すことができる．

裏返すと同じものが 2 つずつできるから，

$$\frac{(5-1)!}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = \mathbf{12}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 異なる n 個の数珠順列は，$\frac{(n-1)!}{2}$ (通り)

One Point

$$\textbf{円順列の総数} = (n-1)!,\quad \textbf{数珠順列の総数} = \frac{(n-1)!}{2}\quad (n \geqq 3)$$

問題 A1.2.5 ★ 解答 p.186

A，B，C，D，E，F の文字が書かれた玉が 1 個ずつあるとき，次の問いに答えよ．

(1) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらの 6 個の玉から 4 個の玉を取り出して円形に並べる方法は何通りあるか．

(3) D，E が隣り合うように円形に並べる方法は何通りあるか．

(4) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

例題 A1.2.6 条件付きの円順列 ★★

数学 A 1.2

両親と息子 2 人，娘 2 人の合計 6 人が円卓に座るとき，次の問いに答えよ．
(1) 両親が正面に向かい合う座り方は何通りあるか．
(2) 男性と女性が交互になる座り方は何通りあるか．

解説動画

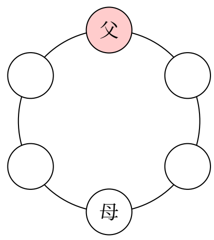
考え方

(1) 両親の並び方は 父の席を固定 すると，母の座る席も固定されるから 1 通りとなり，残りの子供の座り方を 4 箇所に並べる順列で考える．
(2) 男性 3 人を円形 に並べて，間の 3 箇所に女性 3 人を並べる．

解答

(1) 父の席を固定すると，母の席は正面に 1 通りとなる．残りの 4 人の子供の座り方は，4 箇所に並べる順列であるから，4! 通り
よって，両親が正面に向かい合う座り方は，

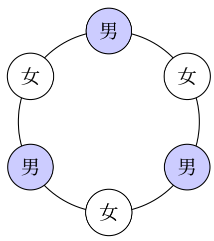
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}\ \textbf{(通り)}$$



◀ 残りの 4 人の子供の座り方を円順列として考えるのは誤りであるので注意すること．

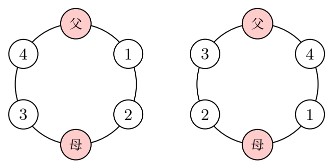
(2) 男性 3 人が円形に座る座り方は，$(3-1)!$ 通り
そのそれぞれについて，間に入る残りの 3 人の女性の座り方は，3 箇所に並べる順列であるから，3! 通り
よって，男性と女性が交互になる座り方は，

$$(3-1)! \times 3! = \mathbf{12}\ \textbf{(通り)}$$



◀ 間に入る女性 3 人の座り方を円順列として考えるのは誤りであるので注意すること．

【注意】例題のような問題は，残りの人の座り方を円順列として考えるのは誤りであるので注意すること．円順列として扱ってしまうと，例えば (1) において残りの人にそれぞれ 1，2 のように番号をつけると，右の図のような座り方を同じ座り方として考えることになってしまう．しかし，これらは回転させて同じ座り方にならないので，円順列ではなく単に順列を考える．



問題 A1.2.6 ★★ 解答 p.187

▶ 節末 A1.2.2

両親と息子 3 人，娘 3 人の合計 8 人が円卓に座るとき，次の問いに答えよ．
(1) 両親が正面に向かい合う座り方は何通りあるか．
(2) 男性と女性が交互になる座り方は何通りあるか．

数学 A 1.2

例題 A1.2.7　重複順列　★★

(1) 5 人でじゃんけんを 1 回するとき，5 人のグー，チョキ，パーの手の出し方は何通りあるか．

(2) 集合 $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ の部分集合は全部で何個あるか．

(3) 0，1，2，3 の 4 個の数字の中から，重複を許して 4 個取って 1 列に並べるとき，4 桁の整数は何個できるか．

解説動画

考え方

(1) 5 人がそれぞれ 3 通りずつの手を出すことができるので，3^5 通りを考える．

(2) すべての部分集合を書き出して求めようとすると，手間が掛かる．部分集合は，それぞれの要素がその部分集合に属しているか否かで決まるので，(1) と同様に n^r を考える．部分集合に属している場合を ○，属していない場合を × で表すと，右の表のようになる．5 個の要素がそれぞれ部分集合に含まれるか否かの 2 通りで決まるので，2^5 通りを考える．

a	b	c	d	e	
○	○	○	○	○	$\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$
○	○	○	○	×	$\{a,\ b,\ c,\ d\}$
○	○	○	×	○	$\{a,\ b,\ c,\ e\}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
×	×	×	×	×	$\varnothing$

解答

(1) 1 人の手の出し方はグー，チョキ，パーの 3 通りずつある．
よって，5 人の手の出し方は，

$$3\times3\times3\times3\times3=3^5=\mathbf{243}\ (\textbf{通り})$$

◀ $\underbrace{3\times3\times3\times3\times3}_{5\text{ 個}}$

(2) 集合 A の部分集合の個数は，A の 5 つの要素 a，b，c，d，e のそれぞれが，部分集合に属しているか否かの決め方の数だけある．
よって，集合 A の部分集合の個数は，

$$2^5=\mathbf{32}\ (\textbf{個})$$

◀ 部分集合は，A 自身である $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ と空集合 $\varnothing$ を含むことに注意すること．

(3) 千の位に並べる数は，1，2，3 の 3 通り
そのそれぞれについて，百の位と十の位と一の位に並べる数は，0，1，2，3 のいずれでもよいから，その個数は，4^3 通り
よって，求める 4 桁の整数の個数は，

$$3\times4^3=\mathbf{192}\ (\textbf{個})$$

◀ 千の位は 0 ではないことに注意すること．

千　百　十　一
↑
1，2，3 の 3 通り

One Point

重複を許して並べるときは，重複順列 n^r を用いる．

問題 A1.2.7 ★★　解答 p.187

(1) 集合 $A=\{x,\ y,\ z,\ w\}$ の部分集合は全部で何個あるか．

(2) 0，1，2，3，4 の 5 個の数字の中から，重複を許して 3 個取って 1 列に並べるとき，3 桁の整数は何個できるか．

例題 A1.2.8 部屋割りの問題 ★★★

4 人が A，B，C の 3 つの部屋に入るとき，次の場合のような入り方は何通りあるか．

(1) 空き部屋があってもよい場合　　(2) 空き部屋がないようにする場合

解説動画

考え方

(1) 4 人すべてが A，B，C のいずれかに入ることから，重複順列を用いる．

(2) (1) の場合から，空き部屋がある場合を除くことを考える．3 つの部屋があるので，空き部屋が 2 つのときと 1 つのときの 2 つの場合があることに注意すること．

解答

(1) 4 人それぞれが部屋に入る入り方は，A，B，C の 3 通りずつあるから，

$$3^4 = \mathbf{81}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 異なる 4 個のものから 3 個取り出して並べる重複順列である．

(2) (1) で求めた総数から，空き部屋の数が 2 つまたは 1 つとなる場合を除けばよい．

◀ 空き部屋が 3 つとなることはない．

(i) 空き部屋が 2 つのとき

空き部屋が 2 つとなるのは，A か B か C の 1 つの部屋に 4 人全員が入るときであるから，3 通り

(ii) 空き部屋が 1 つのとき

空き部屋が 1 つとなるとき，空き部屋となる部屋の選び方は，3 通り

◀ 空き部屋は A か B か C の 3 通りとなる．

そのそれぞれについて，4 人の 2 つの部屋への入り方は，2^4 通り

このうち，1 つの部屋に全員が入るときが 2 通りあるから，1 つの部屋だけが空き部屋になる分け方は，

$$3 \times (2^4 - 2) = 42\ \text{(通り)}$$

◀ 例えば A と B に 4 人が入り，C が空き部屋の場合は，4 人とも A，4 人とも B の 2 通りを除いて，$2^4 - 2$ (通り)
A と C，B と C に 4 人が入るときも同様である．

よって，(1) と (i)，(ii) より，求める入り方は，

$$81 - (3 + 42) = \mathbf{36}\ \textbf{(通り)}$$

One Point

部屋割りは重複順列を考える．

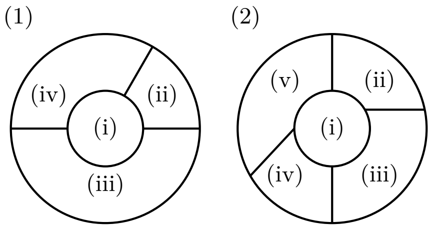
問題 A1.2.8 ★★★ 解答 p.188

5 人が X，Y，Z の 3 つの部屋に入るとき，次の場合のような入り方は何通りあるか．

(1) 空き部屋があってもよい場合　　(2) 空き部屋がないようにする場合

例題 A1.2.9 平面の色分け ★

右のそれぞれの図において，分けられた領域を互いに異なる 4 色すべてを用いて塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，同じ色を複数回用いることはできるが，隣り合う領域は異なる色で塗るものとする．



解説動画

考え方

(1) 4 箇所を 4 色で塗ることから，順列の考え方を用いる．
(2) 先に同じ色を塗る 2 箇所を選び，次に残りの箇所を合わせた塗り方を考える．

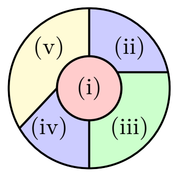
解答

(1) 領域は 4 箇所あるから，4 色すべてを用いて塗る場合の数は，

$$_4\mathrm{P}_4 = 4! = \mathbf{24}\ \textbf{(通り)}$$

(2) 領域は 5 箇所あるから，4 色を用いて塗るとき，2 箇所は同じ色を使う．
同じ色を用いる 2 箇所の組は，(ii) と (iv)，(iii) と (v) の 2 通り
同じ色を塗る 2 箇所をまとめて 1 箇所として考えると，残りの 3 箇所を合わせた 4 箇所に 4 色を塗るから，その塗り方は $_4\mathrm{P}_4$ 通り
よって，$2 \times 4! = \mathbf{48}$ **(通り)**

◀ 隣り合う領域は同じ色にはならない．



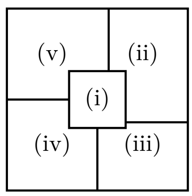
One Point

同じ色を用いる場合は，同じ色を塗る箇所から考える．

【余談】一般に，平面上のどのような地図においても，異なる色で地図を塗り分ける（隣接する国が同じ色にならないように塗る）には 4 色で十分であることが知られている（4 色定理）．このことは，1976 年にコンピュータを用いた方法で証明されている．

問題 A1.2.9 ★ 解答 p.188

右の図において，分けられた領域を互いに異なる 5 色すべてを用いて塗り分ける方法は何通りあるか．



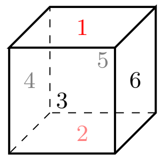
例題 A1.2.10 立体の色分け ★★

立方体の各面を，互いに異なる 6 色すべてを用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，立方体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

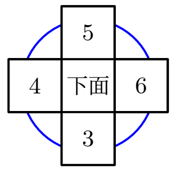
解説動画

考え方 回転させて一致する場合は同じ塗り方と見なすとき，特定の面を固定してから，他の面の配置を考えるとよい．例題のような立方体の場合は，上面に 1 色を固定し（右の図の (i) において 1 の面を固定し），残りの 5 面の塗り方を考える．
このとき，先に下面に塗る色を決め，次に，側面の並び方を円順列を用いて求める．右の図の (ii) のような上面を除いた展開図において，側面 4 面の異なる色を用いた円順列を考える．

(i) 1 の面を固定



(ii) 3，4，5，6 の面の円順列



解答

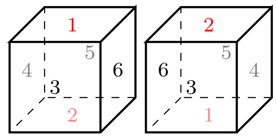
ある面を 1 色で塗り，その面を上面として固定する．
このとき，下面には残りの 5 色のうちの 1 色を用いるため，塗り方は，5 通り
そのそれぞれについて，側面 4 面は異なる色を用いた円順列と考えられるから，

$$(4-1)! = 3! = 6 \text{ (通り)}$$

よって，求める塗り分ける方法は，

$$5 \times 6 = \mathbf{30} \text{ (通り)}$$

◀ 次の 2 つの塗り方は，上下を回転させると塗り方が同じものとなってしまう．このような同じ塗り方にならないように，上面に 1 色を固定する．



One Point

回転体の面の色分けは，1 つの面を固定する．

問題 A1.2.10 ★★ 　解答 p.188

▶ 節末 A1.2.3

正四面体の各面を，互いに異なる 4 色すべてを用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，正四面体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

例題 A1.2.11 組合せ ★

A チーム 6 人, B チーム 5 人の合計 11 人のグループから 5 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか.

(1) 5 人の選び方

(2) 5 人のうち，A チームの特定の 2 人 X，Y と B チームの 1 人 Z を含む選び方

(3) A チームから 2 人，B チームから 3 人選ぶ選び方

解説動画

考え方 次の 2 つの違いに注意すること．例題では，組合せの考え方 ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いる．

異なる n 個から r 個を選び，1 列に並べる方法 $\cdots$ 順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$

異なる n 個から r 個を選ぶ方法 $\cdots$ 組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$

(1) 11 人から 5 人選ぶ組合せを考える．

(2) 11 人のうち，特定の 3 人 X，Y，Z を除いた 8 人から 2 人選ぶ組合せを考える．

(3) A チーム 6 人から 2 人，B チーム 5 人から 3 人を選び，積の法則を用いる．

解答

(1) 11 人から 5 人を選ぶ組合せであるから，求める選び方は，

$$ {}_{11}\mathrm{C}_5 = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{462}\ \textbf{(通り)} $$

◀ ${}_{11}\mathrm{C}_5 = \frac{{}_{11}\mathrm{P}_5}{5!}$

(2) 5 人のうち，A チームの 2 人 X，Y と B チームの 1 人 Z が選ばれているので，残りの 8 人から 2 人を選べばよい．
よって，求める選び方は，

◀ 特定の 3 人がすでに選ばれていると考える．11 人のうち，X，Y，Z を除いた 8 人から，2 人を選ぶ．

$$ {}_8\mathrm{C}_2 = \frac{8\cdot7}{2\cdot1} = \mathbf{28}\ \textbf{(通り)} $$

◀ 選ぶ 2 人は順序を問わない．

(3) A チーム 6 人から 2 人を選ぶ組合せは，${}_6\mathrm{C}_2$ 通り
B チーム 5 人から 3 人を選ぶ組合せは，${}_5\mathrm{C}_3$ 通り
よって，求める選び方は，

$$ {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} \times \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{150}\ \textbf{(通り)} $$

◀ 積の法則を用いる．

【余談】 順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ は選んだものの順序を考え，組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は選んだものの順序は考えない．つまり，${}_n\mathrm{C}_r$ のそれぞれ組み合わせは，r 個の異なる要素から成り立っており，この r 個に順序をつけると $r!$ 通りの順列が作れる．よって，${}_n\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r \times r!$ が成り立つ．

問題 A1.2.11 ★ 解答 p.189

男子 4 人, 女子 3 人の合計 7 人のグループから 4 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか.

(1) 4 人の選び方

(2) 4 人のうち，男子の特定の 2 人 a，b と女子の 1 人 c を含む選び方

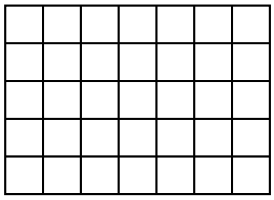
(3) 男子から 2 人，女子から 2 人選ぶ選び方

(4) 男子 3 人，女子 1 人を選んで 1 列に並べる方法

例題 A1.2.12 長方形の個数 ★★

縦の長さが 5，横の長さが 7 の長方形を，右の図のように縦を 5 等分，横を 7 等分に区切るとする．このとき，この図形に含まれる線分を辺とする次の図形の個数を求めよ．

(1) 長方形の個数　　(2) 正方形の個数



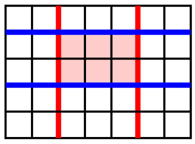
解説動画

考え方

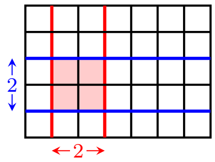
(1) 右の図のように，縦線 2 本と横線 2 本の線分を選べば，1 個の長方形を定めることができる．なお，正方形も長方形に含まれることに注意すること．

(2) 長方形のときとは異なり，縦線，横線からそれぞれ同じ間隔の 2 本を選ばなければならない．組合せを用いることが難しいため，積の法則，和の法則を用いて数え上げる．なお，例えば幅が 2 の縦線，横線（1 辺の長さが 2 の正方形）は，右の図のようになる．

(1) 1 個の長方形が定まる



(2) 幅が 2 の正方形の例



解答

(1) 8 本の縦線から 2 本を選び，6 本の横線から 2 本を選ぶと 1 個の長方形が定まる．
よって，長方形の個数は，

$$ {}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 28 \times 15 = \mathbf{420\ (個)} $$

◀ 積の法則を用いる．

(2) この図形には，1 辺が 1，2，3，4，5 の 5 種類の正方形が含まれている．
1 辺が 1 の正方形は，縦線，横線から幅が 1 の 2 本を選ぶと，1 個の正方形が定まる．　◀ 隣り合う 2 本を考える．
したがって，縦線 7 通り，横線 5 通りより，$7 \times 5 = 35$ (個)　◀ 積の法則を用いる．
同様に，1 辺が 2 の正方形は，縦線 6 通り，横線 4 通りより，$6 \times 4 = 24$ (個)　◀ 幅が 2 の縦線，横線（1 辺が 2 の正方形）の選び方はそれぞれ 6 通り，4 通りとなる．幅が 3，4，5 の縦線，横線も同様に考える．
1 辺が 3 の正方形は，縦線 5 通り，横線 3 通りより，$5 \times 3 = 15$ (個)
1 辺が 4 の正方形は，縦線 4 通り，横線 2 通りより，$4 \times 2 = 8$ (個)
1 辺が 5 の正方形は，縦線 3 通り，横線 1 通りより，$3 \times 1 = 3$ (個)
よって，正方形の個数は，

$$ 35 + 24 + 15 + 8 + 3 = \mathbf{85\ (個)} $$

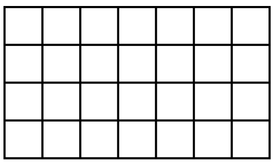
◀ 和の法則を用いる．

問題 A1.2.12 ★★ 解答 p.189

縦の長さが 4，横の長さが 7 の長方形を，右の図のように縦を 4 等分，横を 7 等分に区切るとする．このとき，この図形に含まれる線分を辺とする次の図形の個数を求めよ．

(1) 長方形の個数　　(2) 正方形の個数

(3) 長方形であって正方形ではないもの



例題 A1.2.13 正多角形と組合せ ★★

正八角形について，次のものを求めよ．

(1) 正八角形と 1 辺だけを共有する三角形の個数

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，正八角形と辺を共有しないものの個数

(3) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形となるものの個数

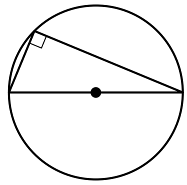
解説動画

考え方

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形は，正八角形と1 辺を共有するものと，2 辺を共有するもの，辺を共有しないものがある．8 個の頂点から 3 点を選んでできる三角形の総数を求め，1 辺を共有するものと 2 辺を共有するものの個数を引くとよい．

(3) 斜辺が正八角形の外接円の直径となる（向かい合う 2 個の頂点を結ぶ）ことを考えると，円周角の定理によって直角三角形ができる．

(3)

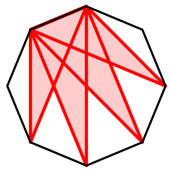


解答

(1) 正八角形と 1 辺だけを共有する三角形は，各辺に対して，その辺の両端および両隣の 2 個の頂点を除く頂点の選び方が 4 通りずつあるから，求める三角形の個数は，

$$8 \times 4 = \mathbf{32}\ \textbf{(個)}$$

◀ 1 辺に対して，頂点の選び方は 4 通りある．

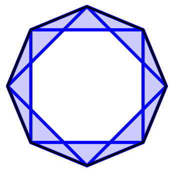


(2) 正八角形の 8 個の頂点から 3 点を選んでできる三角形の総数は，${}_8\mathrm{C}_3$ 個

正八角形と 1 辺だけを共有する三角形の個数は，(1) より，32 個

正八角形と 2 辺を共有する三角形の個数は，隣り合う 3 個の頂点を選ぶとできるから，8 個

◀



したがって，求める三角形の個数は，

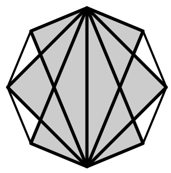
$${}_8\mathrm{C}_3 - (32 + 8) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 40 = \mathbf{16}\ \textbf{(個)}$$

(3) 向かい合う 2 個の頂点と，残りの 6 個の頂点から 1 個を選ぶと，直角三角形が 1 個できる．

向かい合う 2 個の頂点は 4 組あるから，求める直角三角形の個数は，

$$4 \times 6 = \mathbf{24}\ \textbf{(個)}$$

◀ 1 つの斜辺に直角三角形が 6 個できる（斜辺は 4 組ある）．



問題 A1.2.13 ★★　解答 p.190

正十二角形について，次のものを求めよ．

(1) 対角線の本数

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，二等辺三角形となるものの個数

One math

例題 A1.2.14 グループ分け ★★

9 人を次のようなグループに分ける方法は何通りあるか．

(1) 5 人，3 人，1 人のグループ　　(2) 3 人ずつ A，B，C のグループ

(3) 3 人ずつ 3 つのグループ　　(4) 5 人，2 人，2 人のグループ

解説動画

考え方 区別することができないグループは，区別をなくすことを考えなければならないので注意すること．(1) は人数の違いから区別できる．(2) はグループが A，B，C と名称がついているから，区別できる．(3) の 3 人，3 人，3 人の 3 グループ と (4) の 2 人，2 人の 2 グループ は，人数が同じであることから区別することができないので，3! や 2! で割ることによって，区別をなくすことを考える．

(3) において 3! で割ることについての補足

例えば，9 人をそれぞれ a，b，c，d，e，f，g，h，i とし，$\{a,\ b,\ c\}$, $\{d,\ e,\ f\}$, $\{g,\ h,\ i\}$ のように 3 グループに分けた場合を考える．このとき，グループを A，B，C と区別して考えると，右のような分け方があり，3! 通りある．組に区別がなくなると，これらを $\{a,\ b,\ c\}$, $\{d,\ e,\ f\}$, $\{g,\ h,\ i\}$ の 1 通りとして考えることになる．他の分け方である，$\{a,\ d,\ g\}$，$\{b,\ e,\ h\}$ $\{c,\ f,\ i\}$ についても同様に考えることができるので，グループに区別をなくすときは 3! で割る．

A	B	C	
$\{a,\ b,\ c\}$,	$\{d,\ e,\ f\}$,	$\{g,\ h,\ i\}$	3! 通り
$\{a,\ b,\ c\}$,	$\{g,\ h,\ i\}$,	$\{d,\ e,\ f\}$	
$\{d,\ e,\ f\}$,	$\{a,\ b,\ c\}$,	$\{g,\ h,\ i\}$	
$\{d,\ e,\ f\}$,	$\{g,\ h,\ i\}$,	$\{a,\ b,\ c\}$	
$\{g,\ h,\ i\}$,	$\{a,\ b,\ c\}$,	$\{d,\ e,\ f\}$	
$\{g,\ h,\ i\}$,	$\{d,\ e,\ f\}$,	$\{a,\ b,\ c\}$	

解答

(1) 9 人から 5 人を選び，残りの 4 人から 3 人を選ぶと，残りの 1 人は 1 つのグループになる．

◀ 例えば 1 人，3 人，5 人の順に並んでいても結果は同じになる．

よって，求める分け方の総数は，${}_9\mathrm{C}_5 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times 1 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} \times \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} \times 1 = \mathbf{504}$ **(通り)**

◀ ${}_9\mathrm{C}_5 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_1\mathrm{C}_1$ としてもよい．

(2) 9 人から A グループに入る 3 人を選び，残りの 6 人から B グループに入る 3 人を選ぶと，残りの 3 人を C グループとすればよい．

よって，求める分け方の総数は，${}_9\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times 1 = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} \times 1 = \mathbf{1680}$ **(通り)**

◀ 積の法則を用いる．

(3) (2) において，3 つの A，B，C グループの区別をなくすと，同じものが 3! 通りずつできる．

よって，求める分け方の総数は，$({}_9\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3) \div 3! = 1680 \div 6 = \mathbf{280}$ **(通り)**

◀ 区別しないグループの数の階乗で割る．

(4) 9 人を A，B，C グループの 3 グループに分けるとき，5 人，2 人，2 人と分ける方法は，${}_9\mathrm{C}_5 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 1$ (通り)

B，C グループの区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできる．

よって，求める分け方の総数は，$({}_9\mathrm{C}_5 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 1) \div 2! = 756 \div 2 = \mathbf{378}$ **(通り)**

◀ B，C は人数が同じであることから，区別をしないときは同じものとして考える．A は人数が違うことから，常に区別される．

問題 A1.2.14 ★★ 解答 p.190

8 人を次のようなグループに分ける方法は何通りあるか．

(1) 4 人，3 人，1 人のグループ　　(2) 4 人ずつ A，B のグループ

(3) 4 人ずつ 2 つのグループ　　(4) 4 人，2 人，2 人のグループ

例題 A1.2.15 同じものを含む順列 ★

次の問いに答えよ．

(1) a, a, b, b, b, b の 6 文字を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

(2) 赤色のカード 3 枚，青色のカード 3 枚，緑色のカード 1 枚の合計 7 枚を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

(3) 赤玉 5 個と白玉 4 個の合計 9 個を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

解説動画

考え方 同じものを含む順列は，順列を用いる方法と，別解のように組合せを用いる方法の 2 通りの考え方がある．

同じものを含む順列

n 個のものから，同じものがそれぞれ，p 個，q 個，r 個，$\cdots$ あるとき，n 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!} \quad (p+q+r+\cdots=n) = {}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r \times \cdots$$

解答

(1) 2 個の a と 4 個の b を含む 6 個の順列であるから，

$$\frac{6!}{2!4!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{15}\ \textbf{(通り)}$$

(2) 3 枚の赤色のカードと 3 枚の青色のカード，1 枚の緑色のカードを含む 7 枚の順列であるから，

$$\frac{7!}{3!3!1!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1} = \mathbf{140}\ \textbf{(通り)}$$

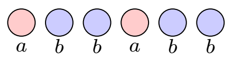
◀ 1! は省略してもよい．

(3) 5 個の赤玉と 4 個の白玉を含む 9 個の順列であるから，

$$\frac{9!}{5!4!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{126}\ \textbf{(通り)}$$

【別解】 (1) ${}_6\mathrm{C}_2 = \mathbf{15}$ **(通り)**

◀ 下の図のように 1 列に並んだ場所があるとすると，6 つの場所から a が入る 2 つの場所を選ぶから，${}_6\mathrm{C}_2$ 通り



(2) ${}_7\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_1\mathrm{C}_1 = 35 \times 4 \times 1 = \mathbf{140}$ **(通り)**

(3) ${}_9\mathrm{C}_5 = \mathbf{126}$ **(通り)**

問題 A1.2.15 ★ 解答 p.191

次の問いに答えよ．

(1) x, x, x, y, y, z の 6 文字を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

(2) 青玉 6 個と緑玉 3 個の合計 9 個を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

例題 A1.2.16 一部の文字の順序が定められた順列 ★★

holiday のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．

(1) o，i，a がこの順で現れる並び方は何通りあるか．

(2) h が l より左に，d が y より右に現れる並び方は何通りあるか．

解説動画

考え方

(1) o，i，a がこの順に現れるので，o，i，a の並び順は考えなくてよい．o，i，a をすべて X とおき，3 個の同じものを含む 7 個の順列を考え，3 つの X の場所に o，i，a を順番に入れると考えればよい．

(2) h，l を X とおき，d，y を Y とおく．すべて X とおいてしまうと，上手く求められないので注意すること．

解答

(1) o，i，a をすべて X とおき，X，X，X，h，l，d，y の 7 文字を 1 列に並べる順列の総数を求めればよい．

◀ X ◯ X X ◯◯◯
o　i　a

よって，求める総数は，

$$\frac{7!}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{840}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 3 個の同じものを含む 7 個の順列である．3 つの X の場所に，左から順に o，i，a を順番に入れると，求める順列になる．

【別解】 7 文字が入る 7 つの場所を考えて，o，i，a が入る場所を X とし，h，l，d，y が入る場所を Y とする．

X，X，X，Y，Y，Y，Y の並び方の総数は，$\frac{7!}{3!4!}=35$ (通り)

X には o，i，a が順番に入るから，1 通りであり，Y には h，l，d，y が入るから，その順列は $4!=24$ (通り)

◀ Y には h，l，d，y が並び順を考えて入るので，4! 通り

X Y X Y Y Y X
o　i　a

よって，求める総数は，$35\times1\times24=$ **840 (通り)**

(2) h，l を X とおき，d，y を Y とおく．X，X，Y，Y，o，i，a の 7 文字を 1 列に並べる順列の総数を求めればよい．

◀ X，Y とおくとよい．

X ◯ Y X ◯◯ Y
h　y　l　d

よって，求める総数は，

$$\frac{7!}{2!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=\mathbf{1260}\ \textbf{(通り)}$$

One Point

順序を定めて並べるものは，同じものとして考える．

問題 A1.2.16 ★★ 解答 p.191

▶ 節末 A1.2.4

sunlight のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．

(1) s，u，n がこの順で現れる並び方は何通りあるか．

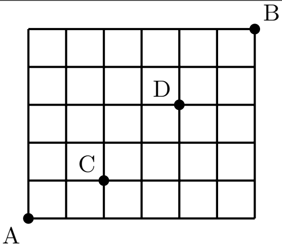
(2) s が t より左に，g が h より右に現れる並び方は何通りあるか．

例題 A1.2.17 最短経路 1 ★★

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．

(1) A 地点から B 地点へ行く道順

(2) 途中で C，D 地点を通る道順



解説動画

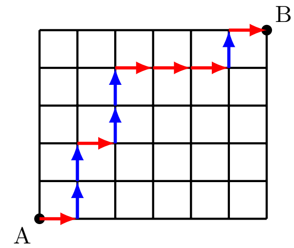
考え方 A 地点から B 地点への最短経路は，右の図の (i) のように，右または上へ進むことによって得られる（左や下へ進まない）．右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ と表すと，例えば右の図のような道順は，

$$\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\ \uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$$

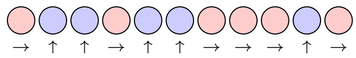
と表される．他の道順も同様に，6 個の → と 5 個の ↑ で表されるので，6 個の → と 5 個の ↑ を 1 列に並べる順列と考える（同じものを含む順列）．

なお，別解のように組合せを用いた考え方で求めてもよい．右の図の (ii) のような 11 個の場所に，↑ が入る 5 個の場所 を選ぶと， 残りの場所 には → が入るので，組合せを用いた考え方でも求めることもできる．

(i)



(ii)



解答

A 地点から B 地点へは，右へ 6 区画，上へ 5 区画進む必要がある．右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ と表すと，A 地点から B 地点へは 6 個の → と 5 個の ↑ の順列で表される．

(1) A 地点から B 地点へは，6 個の → と 5 個の ↑ の順列であるから，

$$\frac{11!}{6!5!} = \mathbf{462\ (通り)}$$

◀ 同じものを含む順列を考える．

(2) A 地点から C 地点へは，右へ 2 区画，上へ 1 区画進めばよい．

つまり，2 個の → と 1 個の ↑ の順列であるから，$\frac{3!}{2!1!} = 3$ (通り)

C 地点から D 地点へは右へ 2 区画，上へ 2 区画進めばよい．

つまり，2 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)

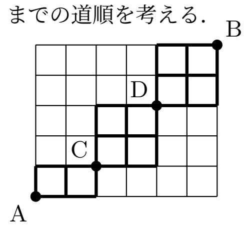
D 地点から B 地点へは右へ 2 区画，上へ 2 区画進めばよい．

つまり，2 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)

よって，A 地点から C，D を経由して B 地点まで行く道順は，

$$3 \times 6 \times 6 = \mathbf{108\ (通り)}$$

◀ 下の図のように，A から C まで，C から D まで，D から B までの道順を考える．



◀ 積の法則を用いる．

【別解】 (1) ${}_{11}\mathrm{C}_5 = \mathbf{462\ (通り)}$

(2) ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 3 \times 6 \times 6 = \mathbf{108\ (通り)}$

◀ 11 個の場所から，↑ が入る 5 個の場所を選ぶ．

問題 A1.2.17 ★★ 解答 p.192

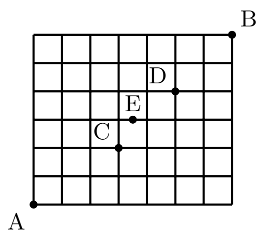
▶ 章末 A1.4

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．

(1) A 地点から B 地点へ行く道順

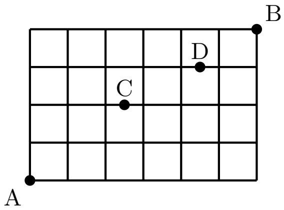
(2) 途中で C，D 地点を通る道順

(3) 途中で E 地点を通る道順



例題 A1.2.18 最短経路 2 ★★★

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．
(1) C 地点を通らない道順
(2) C 地点または D 地点を通る道順



解説動画

考え方

(1) A 地点から B 地点への経路は，C 地点を通る場合と通らない場合の 2 つに分けられるので，「C 地点を通らない道順 = A 地点から B 地点へのすべての道順 − C 地点を通る道順」，つまり，$n(\overline{C}) = n(U) - n(C)$ を利用する．
(2) 求める道順は，$n(C \cup D)$ であり，「C または D 地点を通る道順 = C 地点を通る道順 + D 地点を通る道順 − C 地点かつ D 地点を通る道順」，つまり，$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$ を利用する．

解答

(1) A 地点から B 地点へのすべての道順は，$\frac{10!}{6!4!} = 210$（通り）
C 地点を通る道順は，$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{3!2!} = 60$（通り）
よって，C 地点を通らない道順は，$210 - 60 = \mathbf{150}$ **(通り)**

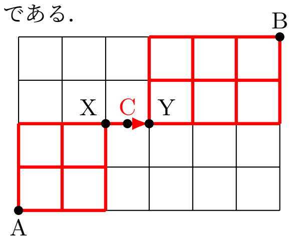
(2) D 地点を通る道順は，$\frac{7!}{4!3!} \times \frac{2!}{1!1!} = 70$ (通り)
C 地点かつ D 地点を通る道順は，

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{2!}{1!1!} \times \frac{2!}{1!1!} = 24 \text{ (通り)}$$

よって，(1) より，C 地点を通る道順は 60 通りであるから，求める道順は，

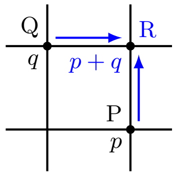
$$60 + 70 - 24 = \mathbf{106} \textbf{ (通り)}$$

◀ C 地点を通る道順は，下の図のように，A から X への道順 $\frac{4!}{2!2!}$ 通り，X から Y への道順 1 通り，Y から B への道順 $\frac{5!}{3!2!}$ 通りを掛け合わせたものである．



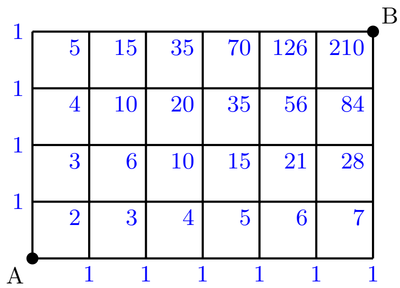
【余談】 道順の総数は，具体的に道順の総数を書き込む（数え上げる）ことによっても求めることができる．右の図の (i) において，P までの道順が p 通り，Q までの道順が q 通りあるとき，R までの道順は $p+q$ 通りとなる．

(i)



このことから，例えば右の図の (ii) のように，A 地点から B 地点までの道順を書き込んでいくと，210 通りであることがわかる．なお，このような書き込むことによって求める方法は，道路の一部が欠けている場合や 3 方向に進ことができる道路（例題では東，北の 2 方向）などの場合に有効であることが多い．

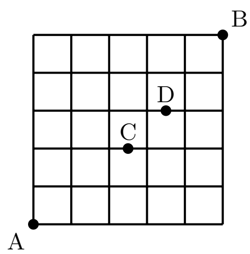
(ii)



問題 A1.2.18 ★★★ 解答 p.193

▶ 節末 A1.2.5 ▶ 章末 A1.4

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．
(1) C 地点を通らない道順
(2) C 地点または D 地点を通る道順



例題 A1.2.19 同じものを含む順列と組合せ ★★★

10 個の数字 1，1，1，1，2，2，2，3，3，4 のうち 4 個を用いてできる 4 桁の整数の個数を求めよ．

解説動画

考え方 1 は 4 個まで，2 は 3 個まで，3 は 2 個までしか用いることができないので，1，2，3，4 から重複を許して 4 個取り出す順列ではないので注意すること．A，B，C，D で 1，2，3，4 のいずれかを表すとして考え，場合分けを用いる．

解答

1，2，3，4 のいずれかを A，B，C，D で表す．ただし，A，B，C，D はすべて異なる数字であるとする．

(i) 4 個の数がすべて同じ $\{A,\ A,\ A,\ A\}$ のとき

A に入る数は 1 のみであるから，1 通り

◀ 1111 の 1 通りのみである．

(ii) 4 個のうち 3 個の数が同じ $\{A,\ A,\ A,\ B\}$ のとき

A に入る数は 1 か 2 であるから，2 通り

B に入る数は A 以外の 3 通り

選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{3!}$ 通り

◀ 4 個の数の順序を考える（同じものを含む順列）．

したがって，$2 \times 3 \times \frac{4!}{3!} = 24$ (通り)

(iii) 4 個のうち 2 個ずつ数が同じ $\{A,\ A,\ B,\ B\}$ のとき

◀ 1122，1133，2233

A，B に入る数は，${}_3\mathrm{C}_2$ 通り

◀ 1，2，3 から A，B に入らない数を 1 つ選ぶと考えて，${}_3\mathrm{C}_1$ 通りとしてもよい．

選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{2!2!}$ 通り

したがって，${}_3\mathrm{C}_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 18$ (通り)

(iv) 4 個のうち 2 個の数が同じで，残りの数は異なる $\{A,\ A,\ B,\ C\}$ のとき

A に入る数は，${}_3\mathrm{C}_1$ 通り

B, C に入る数は残りの ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り

選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{2!}$ 通り

したがって，${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times \frac{4!}{2!} = 108$ (通り)

(v) 4 個の数がすべて異なる $\{A,\ B,\ C,\ D\}$ のとき

4 個の数の並び方は，$4! = 24$ (通り)

よって，(i)〜(v) より，

$$1 + 24 + 18 + 108 + 24 = \mathbf{175}\ \textbf{(個)}$$

◀ 和の法則を用いる．

問題 A1.2.19 ★★★ 解答 p.193

9 個の数字 5，5，5，5，6，6，6，7，7 のうち 4 個を用いてできる 4 桁の整数の個数を求めよ．

例題 A1.2.20 同じものを含む円順列・数珠順列 ★★★

赤玉 4 個，白玉 2 個，青玉 1 個の合計 7 個の玉がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) これらの玉を 1 列に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．

(3) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

解説動画

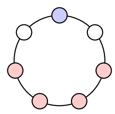
考え方

(2) 同じものを含むものを円形に並べるときは，1 つのものを固定して，その総数を求めるとよい．ここでは，1 個しかない青玉に注目して固定すると，残りは同じものを含む順列として考えることができる．

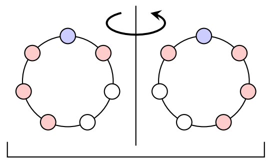
(3) 首飾りを作ることから，単に $\frac{(n-1)!}{2}$ 通りと考えてはならないので注意すること（単に数珠順列の公式を用いてはならない）．

ここでは，同じものを含んでいることから，左右対称になるものと左右対称ではないものに分けて考えなければならない．左右対称であるものは裏返して同じものは含まれず（左右対称の配置は，裏返しても元と同じ配置であるので 1 通り），左右対称ではないものは裏返して同じものが含まれるので，2 で割ることを考える（左右対称ではない配置は，裏返すと別の配置として数えられるので，2 通りが 1 組となる）．

左右対称であるもの



左右対称ではないもの



解答

(1) $\frac{7!}{4!2!} = \mathbf{105}$ **(通り)**

(2) 7 個の玉を円形に並べる総数は，1 個の青玉を固定すると，赤玉 4 個，白玉 2 個を 1 列に並べる順列の総数と一致するから，

$$\frac{6!}{4!2!} = \mathbf{15\ (通り)}$$

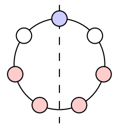
◀ 1 個しかない青玉に注目して固定すると，回転して同じものが含まれなくなる．

◀ 同じものを含む順列を考える．

(3) (2) の順列のうち，左右対称であるものは，青玉を中心として片側に赤玉 2 個，白玉 1 個を 1 列に並べる順列の総数と一致するから，

$$\frac{3!}{2!} = 3\ (通り)$$

◀ 左右対称であるものは，青玉を通る対称軸を中心として，片側である左半分（右半分）の並び方を考えればよい．



したがって，左右対称ではないものは，$15 - 3 = 12$ (通り)

このうち，首飾りを作ったとき，左右対称ではないものは裏返すと同じものが 2 つずつできるから，$\frac{12}{2} = 6$ (通り)

◀ 2 で割る．

よって，求める首飾りの総数は，$3 + 6 = \mathbf{9}$ **(通り)**

One Point

同じものを含む数珠順列は，左右対称のものと左右対称ではないものに注意する．

問題 A1.2.20 ★★★ 解答 p.194

青玉 6 個，赤玉 2 個，白玉 1 個の合計 9 個の玉がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) これらの玉を 1 列に並べる方法は何通りあるか．

(2) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．

(3) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

例題 A1.2.21 重複組合せ ★★★

a，b，c の 3 個の文字の中から，重複を許して 5 個取り出す組合せは何通りあるか．

解説動画

考え方 3 種類から 5 個取り出す重複組合せである（下の余談を参照）．例題では，取り出した組合せ（順列ではない）を考えており，重複順列 3^5 とは異なるので注意すること．
5 個の ◯ を 2 本の仕切り | で 3 つに分ける と考えると，5 個の ◯ と 2 個の | の合計 7 個の同じものを含む並び方の総数を求めればよい．このとき，◯，| と文字 a，b，c は右のように対応する．

aaaaa	⋯	◯◯◯◯◯||
aabbc	⋯	◯◯|◯◯|◯
aaccc	⋯	◯◯||◯◯◯
bbbbb	⋯	|◯◯◯◯◯|
bcccc	⋯	|◯|◯◯◯◯

解答

取り出す 5 個の文字を ◯ で表し，3 種類の文字の区切りを 2 本の | で表すとする．
5 個の ◯ と 2 本の | を 1 列に並べて，

1 本目の | より左側にある ◯ はすべて a，
1 本目と 2 本目の | の間にある ◯ はすべて b，
2 本目の | より右側にある ◯ はすべて c

を表すとする．
このとき，a，b，c から重複を許して 5 個取り出す組合せは，5 個の ◯ と 2 本の | を並べる順列に一致する．
よって，求める組合せの総数は，

$$\frac{7!}{5!2!} = \mathbf{21}\ \textbf{(通り)}$$

【別解】 ◯ と | の個数を合わせた $5+2=7$（個）の場所から，◯ が入る 5 個の場所を選ぶと考えられるから，

$$_7C_5 = {}_7C_2 = \mathbf{21}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 3 種類の文字を表すには，$3-1=2$（本）の | を用いる．

◀ 対応例（aabbc）

$\underbrace{◯◯}_{\text{a（2 個）}} \mid \underbrace{◯◯}_{\text{b（2 個）}} \mid \underbrace{◯}_{\text{c（1 個）}}$

◀ 3 種類から 5 個取り出す重複組合せ $_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5$

【余談】 一般に，n 種類のものから重複を許して r 個を選ぶ組合せを重複組合せといい，総数を $_nH_r$ で表す（H は同次積 homogeneous product の頭文字である）．

これは，r 個の ◯ と，それを n 種類に分けるための $(n-1)$ 本の仕切り | を合わせた合計 $(n+r-1)$ 個のものの並び方の総数と等しい．よって，$(n+r-1)$ 個の場所の中から ◯ に入る r 個の場所を選ぶ組合せの数，または，r 個の ◯ と $(n-1)$ 本の仕切りを含む順列の総数として考えることができるから，

$$_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

問題 A1.2.21 ★★★ 解答 p.194

x，y，z，w の 4 個の文字の中から，重複を許して 6 個取り出す組合せは何通りあるか．

例題 A1.2.22　整数解の個数　★★★★

次の式を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何通りあるか．

(1) $x+y+z=9,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$　　(2) $x+y+z=9,\ x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$

(3) $x+y+z \leqq 9,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$

解説動画

考え方

(1) $x,\ y,\ z$ は整数であるから，9 個の ○ を $x,\ y,\ z$ に分けると考えると，$x,\ y,\ z$ を合わせて 9 個選ぶ重複組合せと同じとなる．9 個の ○ と 2 本の | の合計 11 個の並び方の総数を求めればよい．

(2) $x,\ y,\ z$ は 1 以上の整数（自然数）であるから，先に $x,\ y,\ z$ に 1 個ずつ○を割り振り，次に残りの 6 個の ○ の $x,\ y,\ z$ に割り振ることを考える．

(3) $x,\ y,\ z$ についての式が不等式の場合には，右の図のように $x,\ y,\ z$，残りに対応させると考え，9 個の ○ と 3 本の | の合計 12 個の並び方の総数を求めればよい．

(1) 対応例

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{x\,(4\text{個})}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{y\,(3\text{個})}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{z\,(2\text{個})}\ \cdots\ (x,\ y,\ z)=(4,\ 3,\ 2)$$

(2)

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{x,\ y,\ z\text{に 1 個}}\quad\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{残りを }x,\ y,\ z\text{ に割り振る}}$$

(3) 対応例

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{x}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{y}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{z}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{残り}}\ \cdots\ (x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 2)$$

解答

(1) 求める組の総数は，9 個の ○ と 2 本の | の並び方を考えると，

$${}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=\mathbf{55}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 11 個の場所から，○ が入る 9 個の場所を選ぶ．

◀ $\frac{11!}{9!2!}$

(2) 9 個の ○ のうち，先に 3 個の ○ を 1 個ずつ $x,\ y,\ z$ に割り振ると考え，残りの 6 個の ○ を $x,\ y,\ z$ で割り振ればよい．つまり，求める組の総数は，6 個の ○ と 2 本の | の並び方を考えると，

$${}_{8}\mathrm{C}_6={}_{8}\mathrm{C}_2=\mathbf{28}\ \textbf{(通り)}$$

◀ ○|○○○|○○ のとき，$x=1+1,\ y=3+1,\ z=2+1$

(3) 求める組の総数は，9 個の ○ と 3 本の | を 1 列に並べて，

1 本目の | より左側にある ○ の個数は x の値，
1 本目と 2 本目の | の間にある ○ の個数は y の値，
2 本目と 3 本目の | 間にある ○ の個数は z の値

を表すとすると，求める組の総数は，

$${}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=\mathbf{220}\ \textbf{(通り)}$$

◀ $9-(x+y+z)=u$ とおくと，$x+y+z+u=9$，$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ u \geqq 0$ となり，これらを満たす整数の組の個数と考えてもよい．

One Point

整数の組の個数は，重複組合せで考える．

問題 A1.2.22 ★★★★　解答 p.195

次の式を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何通りあるか．

(1) $x+y+z=8,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$　　(2) $x+y+z=8,\ x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$

(3) $x+y+z \leqq 8,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$

例題 A1.2.23 大小関係を満たす整数 ★★★

a から d を 0 から 9 までの整数とするとき，次の条件を満たす a，b，c，d の組は何通りあるか．

(1) $a<b<c<d$　　(2) $a \leqq b \leqq c \leqq d$　　(3) $a<b \leqq c<d$

解説動画

考え方

(1) 0 から 9 までの 10 個の数から 4 個の数を選び，小さい順に a，b，c，d とする．

(2) 与えられている不等式に $\leqq$ が含まれていることより，0 から 9 までの 10 個の数から 重複を許して （例えば 3，5，5，8）4 個の数を選び，小さい順に a，b，c，d とする．つまり，4 個の ○ と 9 本の $|$ を並べる順列と考えればよい．

$$|||\bigcirc||\bigcirc\bigcirc|||\bigcirc| \to \underbrace{\quad}_{0}|\underbrace{\quad}_{1}|\underbrace{\quad}_{2}|\underbrace{\bigcirc}_{3}|\underbrace{\quad}_{4}|\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{5}|\underbrace{\quad}_{6}|\underbrace{\quad}_{7}|\underbrace{\bigcirc}_{8}|\underbrace{\quad}_{9} \cdots a=3,\ b=5,\ c=5,\ d=9$$

(3) 与えられている不等式に $<$ と $\leqq$ の 2 種類が含まれていることから，場合分けを考える．

解答

(1) 0 から 9 までの 10 個の数から異なる 4 個を選び，小さい数から順に a，b，c，d とすればよいから，

$$_{10}\mathrm{C}_4 = \mathbf{210}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 例えば 2, 3, 6, 9 を選ぶとき，$a=2$，$b=3$，$c=6$，$d=9$ と対応させる．

(2) 0 から 9 までの 10 個の数から重複を許して 4 個を選び，小さい数から順に a，b，c，d とすればよい．
よって，求める組の総数は 4 個の ○ と 9 本の $|$ を並べる順列に一致するから，

$$_{13}\mathrm{C}_4 = \mathbf{715}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 10 種類の数から 4 個を取る重複組合せの数であるから，

$$_{10}\mathrm{H}_4 = {}_{10+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_{13}\mathrm{C}_4$$

また，同じものを含む順列として，$\frac{13!}{4!9!}$ でも求められる．

(3) (i) $a<b=c<d$ のとき
0 から 9 までの 10 個の数から異なる 3 個を選び，小さい数から順に a，b と c，d とすればよいから，

$$_{10}\mathrm{C}_3 = 120\ (\text{通り})$$

◀ $b=c$ となるから，異なる 3 個の数を選べばよい．

(ii) $a<b<c<d$ のとき
(1) より，$_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ (通り)

よって，(i)，(ii) より，$120+210=\mathbf{330}$ **(通り)**

問題 A1.2.23 ★★★ 解答 p.195

▶ 章末 A1.5

a から e を 0 から 9 までの整数とするとき，次の条件を満たす a，b，c，d，e の組は何通りあるか．

(1) $a<b<c<d<e$　　(2) $a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$　　(3) $a<b \leqq c<d<e$

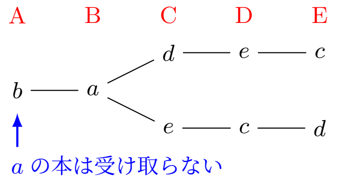
例題 A1.2.24 完全順列 ★★★

5 人の生徒が異なる本を持ち寄り，それらを 1 冊ずつ分配する．このとき，すべての生徒が自分の持ち寄った本とは違う本を受け取る場合は何通りあるか．

解説動画

考え方

5 人の生徒をA，B，C，D，Eとし，本をそれぞれ a，b，c，d，e とすると，生徒が自分の持ち寄った本 k ($k = a$，b，c，d，e) を受け取らないものの個数を考えればよい．このとき，例えば A は a の本を受け取らないことに注意しながら，樹形図や辞書式配列を用いて，重複や漏れのないように場合の数を求める．

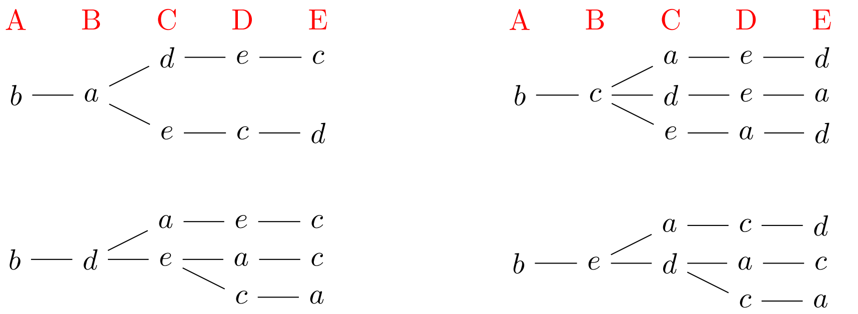


解答

生徒を A，B，C，D，E とし，本をそれぞれ a，b，c，d，e とする．このとき，求める場合の数は，5 人の生徒を 1 列に並べた順列のうち，生徒が自分の持ち寄った本 k ($k = a$，b，c，d，e) を受け取らないものの個数に等しい．

例えば，生徒 A が b の本を受け取る場合，条件を満たす順列は次のように，11 通り

◀ 与えられた条件より，生徒 A は a の本は受け取らない．



A が c，d，e の本を受け取る場合も，同様に 11 通りずつある．

よって，求める場合の数は，$11 \times 4 =$ **44 通り**

◀ 自分の持ち寄った本以外を受け取る．

【余談】 n 個の数字 1，2，3，…，n を 1 列に並べるとき，どの数字 k ($1 \leqq k \leqq n$) も k 番目ではないような並べ方を，**完全順列**という．

なお一般に，完全順列について，次のような関係式が成り立つことが知られている．(i) のような構造の式は漸化式といい，数学 B で学習する．

$$\begin{cases} W(1) = 0, \quad W(2) = 1 \\ W(n) = (n-1)\{W(n-1) + W(n-2)\} \quad (n \geqq 3) \cdots \text{(i)} \end{cases}$$

問題 A1.2.24 ★★★ 解答 p.196

4 人の生徒が異なるおもちゃを持ち寄り，それらを 1 つずつ分配する．このとき，すべての生徒が自分の持ち寄ったおもちゃとは違うおもちゃを受け取る場合は何通りあるか．

節末問題 1.2 順列・組合せ

節末 A1.2.1 ★★★ 解答（節末）p.197

▶ 例題 A1.2.1 ▶ 例題 A1.2.4

6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 偶数の個数を求めよ．

(2) 234 以上の整数の個数を求めよ．

(3) これらを小さい順に並べたとき，第 45 番目にある整数を求めよ．

節末 A1.2.2 ★★★ 解答（節末）p.198

▶ 例題 A1.2.2 ▶ 例題 A1.2.3 ▶ 例題 A1.2.6

大人 4 人，子供 3 人がいるとするとき，次の並び方は何通りあるか．

(1) 子供のうち 2 人だけが隣り合うように 7 人を 1 列に並べる．

(2) 子供の両隣りが必ず大人になるように 7 人を円形に並べる．

節末 A1.2.3 ★★ 解答（節末）p.199

▶ 例題 A1.2.10

立方体の各面を，互いに異なる 7 色からすべて違う色を用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，立方体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

節末 A1.2.4 ★★★ 解答（節末）p.199

▶ 例題 A1.2.2 ▶ 例題 A1.2.16

SUCCESS のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．

(1) 全部で何通りの並び方があるか．

(2) S が 3 つ連続する並び方は何通りあるか．

(3) S が 2 つ以上連続する並び方は何通りあるか．

(4) S が 2 つ以上連続し，かつ，C も 2 つ連続する並び方は何通りあるか．

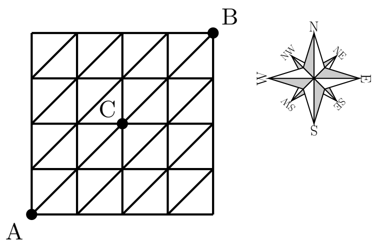
節末 A1.2.5 ★★★★ 解答（節末）p.200

▶ 例題 A1.2.18

右の図のような格子状の道路がある．次のような場合に，道順は何通りあるか．ただし，東方向，北方向，北東方向にしか進めないものとする．

(1) A 地点から C 地点へ行く道順

(2) A 地点から C 地点を通らないで B 地点へ行く道順



章末問題 1 場合の数

1.3 章末問題 1

章末 A1.1 ★★ 解答（章末）p.201

▶ 例題 A1.1.1

分母が 200 であり，分子が 1 から 200 までの 200 個の分数のうち，約分できないものの個数を求めよ．

章末 A1.2 ★★★ 解答（章末）p.201

▶ 例題 A1.1.6

区別のつかない 7 個のボールを区別のつかない 3 つの箱に入れる．1 個も入らない箱があってもよい場合，ボールの入れ方は全部で何通りあるか．

章末 A1.3 ★★★ 解答（章末）p.202

次の等式を満たす自然数 n の値を求めよ．

(1) ${}_n\mathrm{P}_3 = 2{}_n\mathrm{P}_2 + 10{}_n\mathrm{P}_1$　　(2) $2{}_n\mathrm{C}_4 = 5{}_n\mathrm{C}_3$

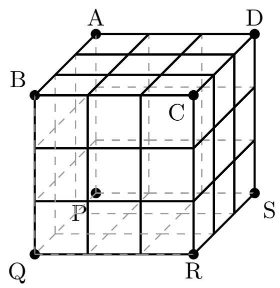
章末 A1.4 ★★★ 解答（章末）p.202

▶ 例題 A1.2.17 ▶ 例題 A1.2.18

1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD − PQRS がある．ただし，2 つの正方形 ABCD，PQRS は立方体の向かい合った面であり，AP，BQ，CR，DS はそれぞれ立方体の辺である．この立方体を 1 辺の長さ 1 の小立方体に区切ったとき，頂点 A から頂点 R へ小立方体の辺を通って行く最短経路について考える．

(1) 最短経路は何通りあるか．

(2) 辺 BC 上の点を通過する最短経路は何通りあるか．



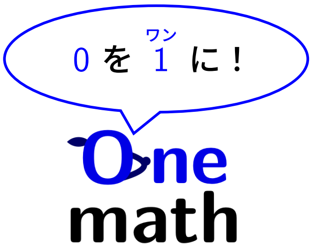
章末 A1.5 ★★★★ 解答（章末）p.203

▶ 例題 A1.2.23

サイコロを 4 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする．このとき，$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4$ となる目の出方は何通りあるか．

Column 1 ～「Onemath」という名前に込めた想いと余談～

「Onemath」という名前には，学ぶ人に対する一人ひとりへの願いと想いが詰まっています．この名前は，数学を通じて 0 を 1 に，そして 1 からその先に成長させるという理念を象徴しています．「数学が得意ではない」「入試に向けて何から受験勉強を始めたらいいかわからない」という 0 の状態から，一歩を踏み出すきっかけを作りたい．そして，基礎をしっかり築いた皆さんが，その 1 を磨き，大きな可能性を広げていく手助けをしたい．そのような想いを込めています．



他には，「One」には「一人ひとり (One by one) に寄り添う」という意味が込められています．学ぶスピードや得意分野は人それぞれ違います．「Onemath」は，皆さんが自分のペースで学び，自分に合った方法で成長できる環境を作ることを目指しています．また，「One」＝「1」は，数学の基本でありながら，そこから無限の可能性が広がるスタート地点でもあります．数学は「0 か 1 か」の世界とも言われることがありますが，実はその背後には数えきれないほどの可能性が広がっているのです．皆さん一人ひとりの可能性を大切にし，その成長を支える道しるべとなりたいと考えています．

「Onemath」は，一人ひとりが学びの旅を進めるための「架け橋」であり，自分の可能性を磨くための「道具箱」となることを目指しています．皆さんがそれぞれの目標に向かって，この教材を自由に，そして存分に活用してくれることを心から願っています．

【余談】 Onemath マスコットキャラクター紹介

名前：One ちゃん（女の子）

誕生日：11 月 11 日

好きな漫画：ワンパンマン

特徴：アルファベットの「O」「n」「e」からできており，耳の部分は葉っぱでできている．One More の作成に利用した LaTeX と Overleaf のロゴから，著者が着想を得て誕生したらしい．体はリンク機能を象徴する青色であるとのこと．

噂：「n」の部分は胴体と足で，「e」の部分は，尻尾と足に分かれているらしいが真相は定かではない（片足をあげている？）．また，「O」の部分は「0」でも構わないとの噂がある．

普通の One ちゃん

見返り美人の One ちゃん

実は「Onemath」という名前には，上述の由来に加え，もうひとつユニークな理由があります．著者が犬好きで，犬の鳴き声「ワン」に愛着があったからです．いくつか候補があったなかで，「Onemath（ワンマス）」に最終決定したのは，この「ワン」が犬のように可愛らしく，学びの場をより身近に感じてもらえると考えたからでした．遊び心を取り入れることで，数学と向き合うときの緊張やハードルを下げ，気軽に学べるようになればという願いを込めています．そんな思いを共有してくれる「One ちゃん」とともに，ぜひ楽しく数学を学んでください．

第 2 章　確率

2 章：確率（再生リスト）：

2　確率

1 節 確率の基本性質（pp.56-66），2 節 いろいろな確率（pp.67-85）

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
A2.1.1	★		
A2.1.2	★★		
A2.1.3	★		
A2.1.4	★★★		
A2.1.5	★★★		
A2.1.6	★		
A2.1.7	★★		
A2.1.8	★★		
A2.1.9	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A2.2.1	★		
A2.2.2	★		
A2.2.3	★★		
A2.2.4	★★		
A2.2.5	★★★		
A2.2.6	★★★		
A2.2.7	★★★		
A2.2.8	★★★		
A2.2.9	★★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A2.2.10	★		
A2.2.11	★★		
A2.2.12	★★		
A2.2.13	★★★		
A2.2.14	★★★★		
A2.2.15	★		
A2.2.16	★★		
A2.2.17	★★★★		

節末問題 2.1，節末問題 2.2

番号	難易度	1 回目	2 回目
A2.1.1	★★		
A2.1.2	★★		
A2.1.3	★★★		
A2.1.4	★★		
A2.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A2.2.1	★★		
A2.2.2	★★★		
A2.2.3	★★★★		
A2.2.4	★★		
A2.2.5	★★★★		

章末問題 2

番号	難易度	1 回目	2 回目
A2.1	★★★		
A2.2	★★★		
A2.3	★★★★		
A2.4	★★★		
A2.5	★★★★		

チェック例

○ · · · 考え方を理解し，解くことができた．　△ · · · 理解が不十分である．　× · · · 解くことができなかった．

2.1 確率の基本性質

2.1.1 事象と確率

(1) さいころを投げる，トランプのカードを引く，ルーレットを回すなど同じ条件のもとで繰り返し行うことのできる実験や観察のことを**試行**という．

(2) 試行の結果生じた事柄，現象のことを**事象**という．

(3) 事象の 1 つ 1 つのこと，これ以上分けることのできない事象のことを**根元事象**という．

(4) 事象をすべて合わせたもの，起こりうるすべての場合のことを**全事象**という．

(5) ある試行において根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という．

(6) ある試行において，根元事象はすべて同様に確からしいとする．全事象 U に含まれる根元事象の個数を $n(U)$，事象 A に含まれる根元事象の個数を $n(A)$ とするとき，事象 A の起こる確率 $P(A)$ は，

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{(\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}}$$

◀ 例：1 つのさいころを投げる試行において，2 の倍数が出る事象を A とすると，全事象 U は，

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

事象 A は，

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$

根元事象は，

$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$

2.1.2 確率の基本性質

(1) 事象 A の確率の範囲 $\cdots\boldsymbol{0 \leqq P(A) \leqq 1}$

(2) 全事象 U の確率 $\cdots\boldsymbol{P(U)=1}$，空事象 $\varnothing$ の確率 $\cdots\boldsymbol{P(\varnothing)=0}$

◀ P は確率（probability）の頭文字である．

2.1.3 積事象と和事象，排反事象

(1) 全事象 U の部分集合 $A,\ B$ について，A と B の**積事象** $\boldsymbol{A\cap B}$ は「A と B がともに起こる」という事象であり，**和事象** $\boldsymbol{A\cup B}$ は「A または B が起こる」という事象である．

(2) 2 つの事象 $A,\ B$ が同時には決して起こらない，すなわち，$A\cap B=\varnothing$ のとき，事象 $A,\ B$ は互いに**排反**である，または，互いに**排反事象**であるという．

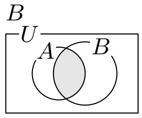
(3) 和事象の確率

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

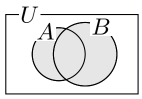
また，事象 $A,\ B$ が互いに排反（$A\cap B=\varnothing$）であるとき，次の**確率の加法定理**が成り立つ．

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

◀ $A\cap B$



$A\cup B$



◀ なお，$\varnothing$ はノルウェー語由来の記号である．空集合を表す $\varnothing$ や $\emptyset$ といった記号は，ϕ（ファイ）で代用されることもある．

2.1.4 余事象の確率

事象 A に対して，A が起こらない事象のことを**余事象**といい，$\boldsymbol{\overline{A}}$ で表す．

$$P(\overline{A})=\frac{(\text{起こりうるすべての場合の数})-(\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}=1-P(A)$$

◀ 事象 A の起こる確率 $P(A)$ を計算するとき，「A が起こらない」という事象の確率を考える方が楽な場合がある．

例題 A2.1.1 確率の計算 ★

次の確率を求めよ．

(1) 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 6 となる確率を求めよ．

(2) 3 枚の硬貨を投げて，表 2 枚，裏 1 枚が出る確率を求めよ．

解説動画

考え方 起こりうるすべての場合の全体の集合 U を定め，求めたい確率の事象 A の根元事象を考える．このとき，求める事象 A の起こる確率は，$P(A)=\dfrac{(\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}$ となる．

なお，確率では，同じ形の硬貨，さいころ，くじ，カード，玉などの 1 つ 1 つを区別して考える（1 つ 1 つを異なるものと考える）ことに注意すること．

解答

(1) 目の出方は，

$$6\times 6=36 \text{ (通り)}$$

目の和が 6 となるのは，

$$(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$$

より，5 通り

よって，求める確率は，$\boldsymbol{\frac{5}{36}}$

◀ 表を作るとよい．例えば，(1，2) と (2，1) は別の出方として考える．

和	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(2) 3 枚の硬貨を投げた場合に起こりうるすべての組み合わせは，

$$2^3=8 \text{ (通り)}$$

このうち，表 2 枚，裏 1 枚が出る組み合わせは，(表，表，裏)，(表，裏，表)，(裏，表，表) より，3 通り

よって，求める確率は，$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$

◀ 3 枚の硬貨を A，B，C と区別すると考えると，次のように表せる．

$$(\underbrace{\text{表か裏}}_{\text{A}},\ \underbrace{\text{表か裏}}_{\text{B}},\ \underbrace{\text{表か裏}}_{\text{C}})$$

One Point

確率では，同じさいころ，硬貨でも区別して考える．

【注意】 (2) において，3 枚の硬貨の表と裏の出方には，次の 4 つの場合があると考えられる．

(i) 表 3 枚　　(ii) 表 2 枚，裏 1 枚　　(iii) 表 1 枚，裏 2 枚　　(iv) 裏 3 枚

これらより，求める確率を 4 つの場合 のうちの (iii) の 1 つの場合 であるから，$\frac{1}{4}$ としてしまうのは誤りであるので注意すること．例えば，(iii) と (iv) は同じ程度に起こることは期待できず，同様に確からしいということができない（数が大きい例を考えるとわかりやすい．300 枚の硬貨を投げるとき，200 枚表，100 枚裏が出ることと，300 枚裏が出ることは同じ程度に期待はできない）．

ある試行において根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は同様に確からしいという．3 枚の硬貨を区別すると考え，表と裏の出方を $2^3=8$ (通り) とすることにより，同様に確からしいと考えることができる．

問題 A2.1.1 ★ 解答 p.204

次の確率を求めよ．

(1) 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 7 となる確率を求めよ．

(2) 4 枚の硬貨を投げて，表 3 枚，裏 1 枚が出る確率を求めよ．

例題 A2.1.2 順列と確率 ★★

大人 5 人と子ども 2 人が次のように並ぶとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 1 列に並ぶとき，両端が大人である確率

(2) 円形に並ぶとき，子ども 2 人が隣り合う確率

解説動画

考え方 順列 ${}_n\mathrm{P}_r$ と円順列 $(n-1)!$ を用いて，求めたい事象 A の確率 $P(A)=\dfrac{(\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}$ を考える．

(1) 求める確率は，$\dfrac{(\text{両端が大人である場合の数})}{(7 \text{ 人を } 1 \text{ 列に並べる場合の数})}$ である．

(2) 求める確率は，$\dfrac{(\text{子ども } 2 \text{ 人が隣り合う場合の数})}{(7 \text{ 人が円形に並ぶ場合の数})}$ である．

解答

(1) すべての場合の数は，7 人を 1 列に並べる順列であるから，

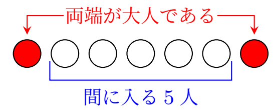
$${}_7\mathrm{P}_7 = 7! \text{ (通り)}$$

両端が大人である並び方は，${}_5\mathrm{P}_2$ 通り

残りの 5 人の並び方は，

$${}_5\mathrm{P}_5 = 5! \text{ (通り)}$$

◀ 先に両端に大人を並べ，次に間に入る 5 人の並び方を考える．



よって，求める確率は，

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_2 \times 5!}{7!} = \frac{5\cdot 4\times 5!}{7!} = \frac{20}{42} = \mathbf{\frac{10}{21}}$$

◀ 5! と 7! は約分できる ($5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ などと計算し，具体的に値を求めなくてよい)．

(2) すべての場合の数は，7 人の円順列であるから，

$$(7-1)! = 6! \text{ (通り)}$$

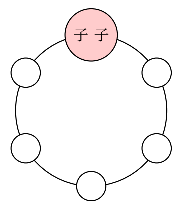
◀ 異なる n 個の円順列は，$(n-1)!$ 通り

隣り合う子ども 2 人をまとめて 1 組と考えると，大人 5 人と合わせた 6 個の円順列より，$(6-1)!$ 通り

そのそれぞれについて，子ども 2 人の並び方は，2! 通り

よって，求める確率は，

$$\frac{5!\times 2!}{6!} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$



問題 A2.1.2 ★★ 解答 p.204

▶ 節末 A2.1.2

A グループ 5 人と B グループ 3 人の生徒が次のように並ぶとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 1 列に並ぶとき，両端が B グループの人である確率

(2) 円形に並ぶとき，特定の 2 人 a，b が隣り合う確率

例題 A2.1.3 組合せと確率 ★

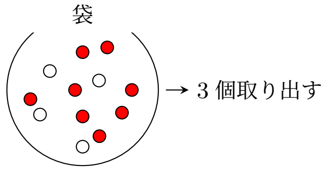
赤玉 8 個と白玉 4 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 個とも赤玉である確率　　(2) 赤玉が 2 個，白玉が 1 個である確率

解説動画

数学 A 2.1

考え方 確率を考えるときは，同じ色の玉を区別して考える（玉それぞれが同じ確率で選ばれる，同様の確からしさ）．試行の内容によって，根元事象の総数を求める．ここでは，並べる（順列を用いる）のではなく，組を作るので組合せを用いて考える．



解答

12 個の玉から 3 個の玉を取り出す場合の数は，${}_{12}\mathrm{C}_3$ 通り

◀ 合計 12 個の玉を 赤$_1$，赤$_2$，…，赤$_8$，白$_1$，白$_2$，…，白$_4$ のように，同じ玉を区別して考えている．

(1) 赤玉 8 個から 3 個の玉を取り出す場合の数は，${}_8\mathrm{C}_3$ 通り

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{3\cdot2\cdot1}{12\cdot11\cdot10} = \mathbf{\frac{14}{55}}$$

◀ $\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} \div \frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}$

(2) 赤玉 8 個から 2 個を取り出す場合の数は，${}_8\mathrm{C}_2$ 通り

そのそれぞれについて，白玉 4 個から 1 個を取り出す場合の数は，${}_4\mathrm{C}_1$ 通り

したがって，赤玉 2 個，白玉 1 個を取り出す場合の数は，

◀ 赤玉 8 個，白玉 4 個から，赤玉 2 個，白玉 1 個を取り出す場合の数を考える．

$${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 \text{ (通り)}$$

◀ 積の法則を用いる．

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \frac{8\cdot7}{2\cdot1} \times 4 \times \frac{3\cdot2\cdot1}{12\cdot11\cdot10} = \mathbf{\frac{28}{55}}$$

問題 A2.1.3 ★ 解答 p.205

▶ 節末 A2.1.3

赤玉 9 個と白玉 6 個の合計 15 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 4 個とも赤玉である確率　　(2) 赤玉が 3 個，白玉が 1 個である確率

例題 A2.1.4 同じものを含む順列と確率 ★★★

A，L，L，O，W，E，D，L，Y の 9 文字からいくつかの文字を取り出して，横に並べるとき，次の確率を求めよ．

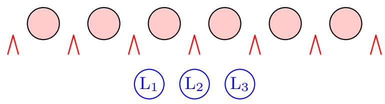
(1) 9 文字を横 1 列に並べるとき，どの 2 つの L も隣り合わない確率

(2) 9 文字の中から 6 文字を取り出して 1 列に並べるとき，どの 2 つの L も隣り合わない確率

解説動画

数学 A 2.1

考え方 確率を考えるときは，同じ文字を L_1，L_2，L_3 のように，区別があると考える（同様の確からしさ）．(1) は，先に L を除いた 6 文字を並べる．次に，6 文字の間と両端の 7 箇所から，L が 1 つずつ入る 3 箇所を決める順列 ${}_7P_3$ を求める．(2) は L の個数の場合分けをして，(1) と同様に考えればよい．



解答

(1) A，L_1，L_2，O，W，E，D，L_3，Y の 9 文字を 1 列に並べる並び方は，9! 通り

L を除いた 6 文字 A，O，W，E，D，Y を並べ，さらに 6 文字の間と両端の 7 箇所のうち，3 箇所に L_1，L_2，L_3 が入ればよい．

したがって，どの 2 つの L も隣り合わない並び方は，

$$6! \times {}_7P_3 \ (\text{通り})$$

よって，求める確率は，

$$\frac{6! \times {}_7P_3}{9!} = \frac{6! \times 7 \cdot 6 \cdot 5}{9!} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

(2) 9 文字の中から 6 文字を取り出して 1 列に並べる場合の数は，${}_9P_6$ (通り)

(i) 6 文字のうち L が 3 つのとき，${}_6P_3 \times {}_4P_3$ (通り)

(ii) 6 文字のうち L が 2 つのとき，${}_6P_4 \times {}_3C_2 \times {}_5P_2$ (通り)

(iii) 6 文字のうち L が 1 つのとき，${}_6P_5 \times {}_3C_1 \times {}_6P_1$ (通り)

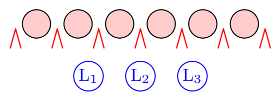
(iv) 6 文字のうち L を含まないとき，${}_6P_6$ 通り

よって，(i) 〜(iv) より，求める確率は，

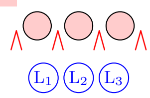
$$\frac{{}_6P_3 \times {}_4P_3 + {}_6P_4 \times {}_3C_2 \times {}_5P_2 + {}_6P_5 \times {}_3C_1 \times {}_6P_1 + {}_6P_6}{{}_9P_6} = \mathbf{\frac{53}{84}}$$

◀ 後の計算で約分できるので，9! の具体的な値を求めなくてよい．

◀ $6! \times {}_7P_3$



◀ ${}_6P_3 \times {}_4P_3$



◀ L_1，L_2，L_3 のうち，どの L を選ぶかを考えて，${}_3C_1$ 通り

問題 A2.1.4 ★★★ 解答 p.205

E，M，P，L，O，Y，E，E の 8 文字からいくつかの文字を取り出して，横に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 8 文字を横 1 列に並べるとき，どの 2 つの E も隣り合わない確率

(2) 8 文字の中から 5 文字を取り出して 1 列に並べるとき，どの 2 つの E も隣り合わない確率

例題 A2.1.5 2 次方程式が満たす条件と確率 ★★★

大中小 3 個のさいころを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ a，b，c とするとき，x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつ確率を求めよ．

解説動画

数学 A 2.1

考え方 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$2\text{ 次方程式が重解をもつ．} \iff b^2-4ac=0\ (D=0)$$

$D=b^2-4ac$ であることから，$b^2-4ac=0$ となる a，b を求める．このとき，a，b，c はさいころの目であり，整数であることを利用して a，b，c の組を定める．

解答

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，$D=b^2-4ac$

2 次方程式が重解をもつから，$D=0$ より，$b^2-4ac=0$

a，b，c は整数であり，$b^2=4ac$ より，b は偶数である．

(i) $b=2$ のとき

$2^2=4ac$ より，$ac=1$

したがって，$(a,\ c)=(1,\ 1)$ の 1 通り

(ii) $b=4$ のとき

$4^2=4ac$ より，$ac=4$

したがって，$(a,\ c)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(4,\ 1)$ の 3 通り

(iii) $b=6$ のとき

$6^2=4ac$ より，$ac=9$

したがって，$(a,\ c)=(3,\ 3)$ の 1 通り

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は，

$$\frac{1+3+1}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{216}}$$

◀ さいころの目であるから，$a \neq 0$

◀ $4ac$ は偶数であるから，b^2 は偶数である．これより，b は偶数である．

◀ 3 個のさいころの目の出方は，6^3 通り

問題 A2.1.5 ★★★ 解答 p.206

大小 2 個のさいころを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ a，b とするとき，x についての 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつ確率を求めよ．

例題 A2.1.6 確率の加法定理 ★

赤玉 7 個と白玉 5 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 赤玉が 3 個以上取り出される確率　(2) 4 個の玉がすべて同じ色である確率

解説動画

考え方 事象A，B が互いに排反（$A\cap B=\varnothing$）であるとき，確率の加法定理 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ を考える．
(1) 「赤玉が 3 個以上」の場合は，「赤玉 3 個と白玉 1 個」と「赤玉 4 個」の場合を合わせたものである．これらは互いに排反であることから，それぞれ確率を求め，確率の加法定理によって足し合わせる．
(2) 「すべて白玉である」と「すべて赤玉である」の 2 つの場合をそれぞれ考え，確率の加法定理によって足し合わせる．

解答

12 個の玉から 4 個の玉を取り出す方法の総数は，${}_{12}\mathrm{C}_4=495$ (通り)

◀ ${}_{12}\mathrm{C}_4=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=495$

(1) 赤玉 7 個から 3 個，白玉 5 個から 1 個を取り出す場合の数は，

$${}_7\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_1=35\times5=175\ (\text{通り})$$

赤玉 7 個から 4 個を取り出す場合の数は，

$${}_7\mathrm{C}_4=35\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は，

$$\frac{175}{495}+\frac{35}{495}=\frac{210}{495}=\boldsymbol{\frac{14}{33}}$$

◀ (赤玉が 3 個以上の確率)
=(赤玉 3 個と白玉 1 個の確率)
＋(赤玉 4 個の確率)

(2) 白玉 5 個から 4 個を取り出す場合の数は，${}_5\mathrm{C}_4=5$ (通り)
(1) より，赤玉 7 個から 4 個を取り出す場合の数は，35 通り
よって，求める確率は，

$$\frac{5}{495}+\frac{35}{495}=\frac{40}{495}=\boldsymbol{\frac{8}{99}}$$

◀「すべて白玉である」と「すべて赤玉である」は互いに排反である．

◀ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

確率の加法定理

事象 A，B が互いに排反（$A\cap B=\varnothing$）であるとき，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

問題 A2.1.6 ★ 解答 p.206　▶ 節末 A2.1.4

赤玉 6 個と白玉 5 個の合計 11 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 赤玉が 2 個以上取り出される確率　(2) 4 個の玉がすべて同じ色である確率

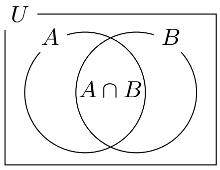
例題 A2.1.7 和事象の確率 ★★

1 から 99 までの番号をつけた 99 枚のカードがあり，この中から 1 枚のカードを取り出すとき，その番号が 5 の倍数または 8 の倍数である確率を求めよ．

解説動画

数学 A 2.1

考え方 5 の倍数である事象と 8 の倍数である事象は互いに排反ではないので，和事象の確率を用いる．5 の倍数である事象と 8 の倍数である事をそれぞれ A，B とすると，5 の倍数かつ 8 の倍数，すなわち，5 と 8 の最小公倍数の 40 の倍数は $A\cap B$ となり，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ を考えればよい．



解答

1 枚のカードを取り出す場合の数は，99 通り

カードの番号が 5 の倍数である事象を A，8 の倍数である事象を B とすると，番号が 5 の倍数または 8 の倍数である事象は $A\cup B$ である．

$A=\{5\cdot 1,\ 5\cdot 2,\ \ldots,\ 5\cdot 19\}$ より，$n(A)=19$　　◀ $5\times 19=95$

$B=\{8\cdot 1,\ 8\cdot 2,\ \ldots,\ 8\cdot 12\}$ より，$n(B)=12$　　◀ $8\times 12=96$

したがって，事象 A，B が起こる確率はそれぞれ，

$$P(A)=\frac{19}{99},\quad P(B)=\frac{12}{99}$$

また，事象 $A\cap B$ は，カードの番号が 5 の倍数かつ 8 の倍数，すなわち，40 の倍数である事象である．　　◀ $A\cap B$ を忘れないように注意すること．

$A\cap B=\{40,\ 80\}$ より，$n(A\cap B)=2$

ゆえに，事象 $A\cap B$ が起こる確率は，$P(A\cap B)=\frac{2}{99}$

よって，求める確率は，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{19}{99}+\frac{12}{99}-\frac{2}{99}=\boldsymbol{\frac{29}{99}}$$

◀ 和事象の確率を考える．

和事象の確率

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

問題 A2.1.7 ★★ 解答 p.207

1 から 120 までの番号をつけた 120 枚のカードがあり，この中から 1 枚のカードを取り出すとき，その番号が 6 の倍数または 7 の倍数である確率を求めよ．

例題 A2.1.8 余事象の確率 ★★

(1) 12 個の部品の中に 3 個の不良品が含まれている．この中から同時に 4 個の部品を取り出すとき，少なくとも 1 個の不良品が含まれる確率を求めよ．
(2) 赤玉 6 個と白玉 7 個の合計 13 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉，白玉がともに少なくとも 1 個取り出される確率を求めよ．

解説動画

考え方 事象 A に対して，A が起こらない事象を余事象 $\overline{A}$ で表し，$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ が成り立つ．一般に，事象に「少なくとも」が含まれる場合，余事象を考えるとよい．
(1) 不良品が 1 個の場合，不良品が 2 個の場合，不良品が 3 個の場合をそれぞれ考えて計算するには手間が掛かる．そこで，余事象となる 4 個とも不良品ではない事象を考える．
(2) 赤玉が 3 個であり白玉が 1 個の場合，赤玉が 2 個であり白玉が 2 個の場合，赤玉が 1 個であり白玉が 3 個の場合をそれぞれ考えて計算するには手間が掛かる．そこで，余事象を考える．

解答

(1) 少なくとも 1 個の不良品が含まれる事象を A とすると，余事象 $\overline{A}$ は 4 個とも不良品ではない事象であるから，その確率は，

$$P(\overline{A}) = \frac{{}_9\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \frac{14}{55}$$

よって，求める確率は，

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{14}{55} = \mathbf{\frac{41}{55}}$$

(2) 玉の取り出し方の総数は，${}_{13}\mathrm{C}_4$ 通り
赤玉，白玉がともに少なくとも 1 個取り出される場合の余事象を考えると，次の 2 つの場合がある．

(i) 4 個すべてが赤玉であるとき，その確率は，$\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_{13}\mathrm{C}_4} = \frac{3}{143}$
(ii) 4 個すべてが白玉であるとき，その確率は，$\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{13}\mathrm{C}_4} = \frac{7}{143}$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$1 - \left(\frac{3}{143} + \frac{7}{143}\right) = \mathbf{\frac{133}{143}}$$

◀「少なくとも」が含まれる事象は，余事象を考えるとよい．

◀ $\frac{{}_9\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \frac{\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9} = \frac{14}{55}$

◀ 余事象の確率を考える．

One Point

「少なくとも」が含まれる事象は，余事象を用いるとよい．

問題 A2.1.8 ★★ 解答 p.207

(1) 11 個の部品の中に 3 個の不良品が含まれている．この中から同時に 4 個の部品を取り出すとき，少なくとも 1 個の不良品が含まれる確率を求めよ．
(2) 赤玉 7 個と白玉 5 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉，白玉がともに少なくとも 1 個取り出される確率を求めよ．

例題 A2.1.9 じゃんけんの確率 ★★★

4 人でじゃんけんを行うとき，次の確率を求めよ．
(1) 1 回のじゃんけんで，1 人だけが勝つ確率
(2) 1 回のじゃんけんで，2 人が勝ち，2 人が負ける確率
(3) 1 回のじゃんけんで，あいこになる確率

解説動画

考え方 4 人のじゃんけんの出し方は，グー，チョキ，パーの異なる 3 個から重複を許して 4 個取り出して並べる重複順列である．
(1) 4 人のうち 誰が勝つか と， 勝つ手の出し方 はグー，チョキ，パーのどの手であるかを考える．
(3) あいこになる（勝敗が決まらない）という事象は，勝敗が決まる事象の余事象であることを利用する．勝負が決まる事象を，場合分けをして考える．

解答

4 人のじゃんけんの手の出し方は，$3^4 = 81$ (通り)

◀ グー，チョキ，パーの 3 通りを 4 人が出す（重複順列）．

(1) 勝つ 1 人の選び方は，${}_4C_1$ 通りであり，その勝つ 1 人の手の出し方は ${}_3C_1$ 通りであるから，その場合の数は，

◀ 勝つ 1 人の手の出し方が決まれば，負ける方の手の出し方も 1 通りに定まる．

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，$\frac{12}{81} = \boldsymbol{\frac{4}{27}}$

(2) 勝つ 2 人の選び方は ${}_4C_2$ 通りであり，その勝つ 2 人の手の出し方は ${}_3C_1$ 通りであるから，その場合の数は，

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 = 18 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，$\frac{18}{81} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$

(3) あいこになる事象は，勝敗が決まる事象の余事象である．勝敗が決まる事象は，以下の 3 つの場合に対応する．

◀ 手の出し方を考えて，次のように求めてもよい．
【別解】
(i) 手の出し方が 1 種類のとき，4 人とも同じ手を出すから，3 通り
(ii) 手の出し方が 3 種類のとき，2 人が同じ手を出し，他の 2 人は異なる手を出す．同じ手を出す 2 人の選び方は，${}_4C_2$ 通りであり，手の出し方は $3!$ 通りである．よって，${}_4C_2 \times 3! = 36$ (通り)
(i)，(ii) より，求める確率は，$\frac{3+36}{81} = \frac{13}{27}$

(i) 1 人だけが勝つとき
(1) より，その確率は，$\frac{4}{27}$
(ii) ちょうど 2 人が勝つとき
(2) より，その確率は，$\frac{2}{9}$
(iii) ちょうど 3 人が勝つとき
勝つ 3 人の選び方は ${}_4C_3$ 通りであり，勝つ 3 人の手の出し方は ${}_3C_1$ 通りであるから，その確率は，$\frac{{}_4C_3 \times {}_3C_1}{81} = \frac{4}{27}$

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は，

◀ 余事象の確率を考える．

$$1 - \left(\frac{4}{27} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}\right) = 1 - \frac{14}{27} = \boldsymbol{\frac{13}{27}}$$

問題 A2.1.9 ★★★ 解答 p.208

▶ 節末 A2.1.5

5 人でじゃんけんを行うとき，次の確率を求めよ．
(1) 1 回のじゃんけんで，1 人だけが勝つ確率
(2) 1 回のじゃんけんで，3 人が勝ち，2 人が負ける確率
(3) 1 回のじゃんけんで，あいこになる確率

節末問題 2.1 確率の基本性質

節末 A2.1.1 ★★ 解答（節末）p.209

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードから 1 枚取り出し，その数字を記録して元に戻す．この操作を 3 回繰り返し，記録した数を順に x, y, z とする．このとき，次の確率を求めよ．

(1) $\frac{y}{x}$ が整数になる確率　　(2) $x < y < z$ になる確率

節末 A2.1.2 ★★ 解答（節末）p.210

▶ 例題 A2.1.2

12 人が円形に座るとき，次の確率を求めよ．

(1) 特定の 2 人 X，Y が 1 人おいて隣り合う確率

(2) 特定の 3 人 X，Y，Z が 1 人ずつおいて隣り合う確率

節末 A2.1.3 ★★★ 解答（節末）p.210

▶ 例題 A2.1.3 ▶ 例題 A2.1.8

赤玉 5 個，白玉 3 個，青玉 4 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 個の玉がすべて同じ色である確率

(2) 3 個とも色が異なる確率

(3) 少なくとも 1 個は青玉である確率

節末 A2.1.4 ★★ 解答（節末）p.211

▶ 例題 A2.1.6

箱の中に赤玉 5 個，白玉 2 個，青玉 4 個が入っている．この箱から同時に 3 個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 玉の色が少なくとも 2 種類ある

(2) 取り出した玉の色がちょうど 2 種類になる

節末 A2.1.5 ★★★ 解答（節末）p.211

▶ 例題 A2.1.9

n 人でじゃんけんを 1 回行うとき，次の確率を求めよ．ただし，$n \geqq 5$ とする．

(1) ちょうど 4 人が勝つ　　(2) あいこになる

2.2 いろいろな確率

2.2.1 独立な試行とその確率

(1) 2 つの試行 T_1, T_2 について，試行の結果が互いに影響し合わないとき，試行 T_1, T_2 は**独立**であるという．

(2) 2 つの独立な試行 T_1, T_2 について，T_1 で事象 A が起こり，T_2 で事象 B が起こるという事象を C とすると，

$$\boldsymbol{P(C) = P(A) \times P(B)}$$

◀ 3 つ以上の試行についても同様である．

2.2.2 反復試行の確率

同じ条件のもとで同じ試行を繰り返し，それらの試行が独立であるとき，これを**反復試行**という．

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とすると，この試行を n 回繰り返し行うとき，事象 A がちょうど r 回起こる確率は，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}}$$

ただし，$p^0 = 1$, $(1-p)^0 = 1$ とする．

◀ 独立重複試行や，単に重複試行，独立試行ともいう．

◀ A が起こる確率が p であるから，A が起こらない確率は，$1-p$

2.2.3 条件付き確率

試行 T_1 では事象 A が起こり，続いて行う試行 T_2 では事象 B が起こる確率 $P(A \cap B)$ は，試行 T_1 で事象 A が起こる確率を $P(A)$，試行 T_1 で事象 A が起こったという条件付きで，続いて行う試行 T_2 で事象 B が起こる条件付き確率を $P_A(B)$ とすると，

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) P_A(B)} \quad \left(\boldsymbol{P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}\right)$$

◀ $P(B|A)$ と表されることもある．

◀ $n(A) \neq 0$, $P(A) \neq 0$

2.2.4 期待値

ある試行を行ったとき，その結果として得られる数値の平均値のことを**期待値**という．試行によって得られる数値 X が x_1, x_2, x_3, …, x_n であり，それぞれの値をとる確率が p_1, p_2, p_3, …, p_n とすると，X の期待値は，

$$\boldsymbol{E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}$$

◀ $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$ が成り立つ．

例題 A2.2.1　独立な試行の確率　★

(1) さいころを 2 回投げる．このとき，1 回目は 3 以下の目，2 回目は 5 以上の目が出る確率を求めよ．

(2) A，B，C の 3 人がゴールに向かって 1 つのボールを蹴るとき，ゴールに成功する確率はそれぞれ $\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$ であるとする．この 3 人がそれぞれ 1 つのボールを蹴ったとき，少なくとも 1 人がゴールを決める確率を求めよ．

解説動画

考え方

(1) さいころを投げる 2 回の試行は独立な試行である．

(2) とくに断りがないことから，A，B，C がゴールに向かってボールを蹴る結果は互いに影響を及ぼさないと考えてよい．独立な試行と考え，「少なくとも」とあることから，余事象を用いて確率を求める．

解答

(1) さいころを投げる 2 回の試行は，独立な試行である．

1 回目に 3 以下の目が出る確率は，$\frac{3}{6}$

2 回目に 5 以上の目が出る確率は，$\frac{2}{6}$

◀ 1 回目は 1，2，3 の 3 通り，2 回目は 5，6 の 2 通りである．

よって，求める確率は，

$$\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

◀ 独立な試行であることから，掛け合わせる．

(2) A，B，C の 3 人がゴールに向かってボールを蹴る試行は，独立な試行である．また，少なくとも 1 人がゴールを決めるという事象は，3 人ともゴールを決めないという事象の余事象である．

◀ 「少なくとも」が含まれる事象は，余事象を考えるとよい．

A がゴールを決めない確率は，$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

B がゴールを決めない確率は，$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

C がゴールを決めない確率は，$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

◀ (ゴールを決めない確率)
=1 − (ゴールを決める確率)

したがって，3 人ともゴールを決めない確率は，

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

◀ ゴールを決めない試行も独立な試行であり，掛け合わせる．

よって，少なくとも 1 人がゴールを決める確率は，

$$1-\frac{1}{24}=\boldsymbol{\frac{23}{24}}$$

◀ 余事象の確率を考える．

独立な試行の確率

試行 T_1，T_2，…，T_n が独立のとき，T_1 で事象 A_1 が起こり，T_2 で事象 A_2 が起こり，…，T_n で事象 A_n が起こる確率は，

$$P(A_1)\times P(A_2)\times\cdots\times P(A_n)$$

問題 A2.2.1 ★　解答 p.212

(1) さいころを 2 回投げる．このとき，1 回目は偶数の目，2 回目は 4 以下の目が出る確率を求めよ．

(2) X，Y，Z の 3 人がフリースローを投げるとき，成功する確率はそれぞれ $\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$ であるとする．この 3 人がそれぞれ 1 回ずつフリースローを投げたとき，少なくとも 1 人が成功する確率を求めよ．

例題 A2.2.2 独立な試行の確率と加法定理 ★

袋 A には赤玉 5 個と白玉 4 個，袋 B には赤玉 3 個と白玉 5 個が入っている．それぞれの袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．
(1) 袋 A から赤玉，袋 B から白玉が出る確率
(2) 2 個の玉の色が同じである確率

解説動画

考え方 「排反」と「独立」の区別に注意すること．排反 は 事象 に対して，独立 は 試行 に対しての概念である．

(1) 袋 A，B からそれぞれ玉を取り出す試行は，独立な試行であるので，袋 A から赤玉が出る確率と袋 B から白玉が出る確率をそれぞれ求め，掛け合わせる．

事象 A，B は排反である．⇔ A，B は同時に起こらない $(A \cap B = \varnothing)$．
試行 T_1，T_2 は 独立である．⇔ T_1，T_2 は互いの結果に影響を及ぼさない．

(2) 玉の色が同じである 2 つの場合があり，次の 2 つの排反事象に分けることができる．

(i) 袋 A から赤玉，袋 B から赤玉が出るとき，(ii) 袋 A から白玉，袋 B から白玉が出るとき

これらは互いに排反であるから，それぞれの確率を求め，足し合わせる（確率の加法定理）．

解答

袋 A から玉を取り出す試行と，袋 B から玉を取り出す試行は，独立な試行である．
(1) 袋 A から取り出した玉が赤玉である確率は，$\frac{5}{9}$
袋 B から取り出した玉が白玉である確率は，$\frac{5}{8}$
よって，求める確率は，

$$\frac{5}{9} \times \frac{5}{8} = \mathbf{\frac{25}{72}}$$

(2) (i) 袋 A から赤玉，袋 B から赤玉が出るとき，その確率は，$\frac{5}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{72}$
(ii) 袋 A から白玉，袋 B から白玉が出るとき，その確率は，$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{72}$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{15}{72} + \frac{20}{72} = \mathbf{\frac{35}{72}}$$

◀ 袋 A から取り出した玉の色は，袋 B から取り出す玉の色に影響を与えないので，独立な試行である．

◀ 独立な試行であることから，掛け合わせる．

◀ 排反な事象であることから，足し合わせる．

One Point

排反 ⟶ 確率を足し合わせる， 独立 ⟶ 確率を掛け合わせる

問題 A2.2.2 ★ 解答 p.212

袋 A には赤玉 6 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている．それぞれの袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．
(1) 袋 A から赤玉，袋 B から白玉が出る確率
(2) 2 個の玉の色が同じである確率

例題 A2.2.3 反復試行の確率 1 ★★

1 個のさいころを 5 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 6 の目がちょうど 3 回出る確率

(2) 6 の目が出る回数が 4 回以上である確率

解説動画

考え方 さいころを投げる試行は，毎回独立な試行である．6 の目が出ることを ○，6 の目が出ないことを × で表すと，6 の目がちょうど 3 回出るのは右の表のような場合である．6 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，6 の目が出ない確率は $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ であることを利用する．

(1) は，5 回の試行のうち，○ となる 3 回を選び（${}_5C_3$ 通り），反復試行を考える．(2) は，6 の目がそれぞれ 4 回，5 回出るときに分けて考えるとよい．

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	確率
○	○	○	×	×	$\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$
○	○	×	○	×	$\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
×	×	○	○	○	$\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$

${}_5C_3$ 通り

解答

(1) 1 個のさいころを 1 回投げるとき，6 の目が出る確率は，$\frac{1}{6}$

6 の目が出ない確率は，$\frac{5}{6}$

よって，求める確率は，

$$ {}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{10\times1^3\times5^2}{6^5}=\mathbf{\frac{125}{3888}} $$

(2)　(i) 6 の目が 4 回出るとき

$$ {}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5\times1^4\times5}{6^5}=\frac{25}{7776} $$

(ii) 6 の目が 5 回出るとき

$$ \left(\frac{1}{6}\right)^5=\frac{1}{7776} $$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$ \frac{25}{7776}+\frac{1}{7776}=\mathbf{\frac{13}{3888}} $$

◀ 独立な反復試行である．

◀ $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

◀ ${}_5C_3\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^3}_{6\text{ が 3 回}}\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{5-3}}_{6\text{ 以外が 2 回}}$

◀ 5 回のうち 6 の目が 4 回出る場合の数は，${}_5C_4$ 通り

◀ ${}_5C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(1-\frac{1}{6}\right)^0$ としてもよい．${}_5C_5=1$，$\left(1-\frac{1}{6}\right)^0=1$ である．

◀ 排反な事象であるから，足し合わせる．

反復試行の確率

事象 A の起こる確率を p とすると，試行を n 回繰り返し行うとき，事象 A が r 回起こる確率は，

$$ {}_nC_r p^r(1-p)^{n-r} $$

問題 A2.2.3 ★★ 解答 p.213

1 個のさいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 1 の目がちょうど 3 回出る確率

(2) 1 の目が出る回数が 1 回以下である確率

例題 A2.2.4 反復試行の確率 2 ★★

A，B の 2 人が繰り返し卓球の試合をして，先に 3 勝した方が優勝者とする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{1}{4}$ で，引き分けはないものとする．このとき，A が優勝する確率を求めよ．

解説動画

考え方 A が優勝するのは，3 勝 0 敗，3 勝 1 敗，3 勝 2 敗の場合があり，優勝する人は最後の試合で勝つことに注意する．例えば，3 勝 1 敗の場合，右のように 3 試合目までに 2 勝 1 敗で，4 試合目に勝つ確率を考える．

$\underbrace{\text{1 試合目, 2 試合目, 3 試合目,}}_{\text{2 勝 1 敗}}\ \underbrace{\text{4 試合目}}_{\text{A が勝つ}}$

解答

(i) A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は，$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

(ii) A が 3 勝 1 敗で優勝する確率は，3 試合目までに 2 勝 1 敗となり，4 試合目に勝つ確率であるから，

$$ {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4^4} = \frac{9}{256} $$

(iii) A が 3 勝 2 敗で優勝する確率は，4 試合目までに 2 勝 2 敗となり，5 試合目に勝つ確率であるから，

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{54}{4^5} = \frac{27}{512} $$

よって，(i)～(iii) より，求める確率は，

$$ \frac{1}{64} + \frac{9}{256} + \frac{27}{512} = \boldsymbol{\frac{53}{512}} $$

◀ A が勝つことを ○，A が負けることを × で表し，左から試合順に並べると，

$○○\ \underbrace{○}_{\text{A が勝つ}}$

◀ $\underbrace{○×○}_{\text{2 勝 1 敗}}\ \underbrace{○}_{\text{A が勝つ}}$

◀ $\underbrace{○××○}_{\text{2 勝 2 敗}}\ \underbrace{○}_{\text{A が勝つ}}$

【注意】 例えば (iii) において，3 勝 2 敗であることから，${}_5\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2$ としないように注意すること．右のように，4 試合で優勝が決まる場合なども含めて考えてしまうので誤りである．

$\underbrace{○×○○}_{\text{4 試合で優勝が決まる}}\ ×$

問題 A2.2.4 ★★ 解答 p.213　　▶ 節末 A2.2.1 ▶ 章末 A2.5

A，B の 2 人が繰り返しカードゲームで対戦し，先に 3 勝した方が優勝者とする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{2}{5}$ で，引き分けはないものとする．このとき，A が優勝する確率を求めよ．

例題 A2.2.5 3 つの事象に関する反復試行の確率 ★★★

赤玉 1 個，白玉 2 個，青玉 3 個が入っている袋の中から，1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを 5 回行うとき，次の確率を求めよ．

(1) 赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る確率

(2) 赤玉と白玉が出る回数が同じである確率

解説動画

考え方 3 つの事象に関する反復試行を考えればよい．(1) は，赤，白，白，青，青玉の同じものを含む順列であり $\left(\frac{5!}{1!2!2!}\text{通り}\right)$，反復試行を考える．(2) は，(i) 赤玉と白玉が 1 回も出ないとき，(ii) 赤玉と白玉が 1 回ずつ出るとき，(iii) 赤玉と白玉が 2 回ずつ出るときの 3 つの場合に分けて考える．

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	確率
赤	白	白	青	青	$\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
赤	白	青	白	青	$\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
青	青	白	白	赤	$\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2$
					$\frac{5!}{1!2!2!}$ 通り

解答

この袋から玉を 1 個取り出すとき，赤玉，白玉，青玉が出る確率は，それぞれ $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ である．

(1) 求める確率は，

$$\frac{5!}{1!2!2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

◀ 5 回のうち赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る場合の数は，$\frac{5!}{1!2!2!}$ 通りである (同じものを含む順列)．

(2) 赤玉と白玉が出る回数が同じであるのは，赤玉と白玉の出る回数が 0 回，1 回，2 回の 3 つの場合がある．

(i) 赤玉と白玉が 1 回も出ないとき

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

◀ 5 回とも青玉が出る（赤玉 0 回，白玉 0 回)．

(ii) 赤玉と白玉が 1 回ずつ出るとき

$$\frac{5!}{1!1!3!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{36}$$

◀ ${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3$ でもよい．

(iii) 赤玉と白玉が 2 回ずつ出るとき

$$\frac{5!}{2!2!1!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{108}$$

◀ 5 回のうち赤玉が 2 回，白玉が 2 回，青玉が 1 回出る場合の数は，$\frac{5!}{2!2!1!}$ 通りである (同じものを含む順列)．

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は，

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{36}+\frac{5}{108}=\boldsymbol{\frac{187}{864}}$$

問題 A2.2.5 ★★★ 解答 p.214

▶ 節末 A2.2.2

赤玉 1 個，白玉 2 個，青玉 2 個が入っている袋の中から，1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを 5 回行うとき，次の確率を求めよ．

(1) 赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る確率

(2) 赤玉が出る回数が白玉が出る回数よりも 1 回だけ多くなる確率

例題 A2.2.6 反復試行の確率（ランダムウォーク） ★★★

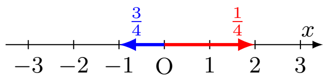
(1) 数直線上の原点にある点 P が，毎回確率 $\frac{1}{4}$ で正の方向に 2 だけ移動し，確率 $\frac{3}{4}$ で負の方向に 1 だけ移動する．6 回の移動後に点 P が原点にある確率を求めよ．

(2) 数直線上の原点にある点 P が，1 個のさいころを投げて，1 か 2 か 3 の目が出たときは正の方向に 1 だけ移動し，4 か 5 の目が出たときは負の方向に 1 だけ移動し，6 の目が出たときは移動しないとする．さいころを 3 回投げたとき，点 P が原点にある確率を求めよ．

解説動画

考え方 移動する方向と，その方向に何回移動するかを求めるために，連立方程式を作る．(2) は移動の順番に，3 つの事象に関する反復試行を考え，同じものを含む順列 $\frac{3!}{1!1!1!}$ を用いる．

(1)



解答

(1) x 回正の方向に 2，y 回負の方向に 1 だけ移動したとすると，

$$x+y=6\cdots(\text{i})$$

◀ 6 回移動することから，$x+y=6$

移動後の位置は，$2x-y=0\cdots(\text{ii})$

(i)，(ii) を解くと，$x=2$，$y=4$

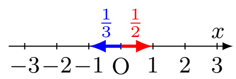
よって，求める確率は，6 回の移動のうち 2 回正の方向に 2 だけ移動する確率であるので，

◀ 正の方向に 2 回，負の方向に 4 回移動する反復試行である．

$$_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4=\boldsymbol{\frac{1215}{4096}}$$

(2) 1 個のさいころを投げるとき，1 か 2 か 3 の目が出る事象を A_1，4 か 5 の目が出る事象を A_2，6 の目が出る事象を A_3，とする．これらの確率は，それぞれ，

$$P(A_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(A_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(A_3)=\frac{1}{6}$$

◀ 

確率 $\frac{1}{6}$ で移動しない

A_1 が x 回，A_2 が y 回，A_3 が z 回 $(x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$ 起こったとすると，

$$x+y+z=3\cdots(\text{i})$$

移動後の位置は，$x-y=0\cdots(\text{ii})$

◀ $x=y$

(i)，(ii) より，$x=y=0$，$z=3$ または $x=y=z=1$

よって，求める確率は，

◀ $x\geqq 0$ より，$x=0$ から順に考える．$x=y=0$ のとき，(i) より $z=3$ であり，$x=y=1$ のとき，(i) より $z=1$ である．

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1=\boldsymbol{\frac{37}{216}}$$

問題 A2.2.6 ★★★ 解答 p.215

▶ 節末 A2.2.5 ▶ 章末 A2.2

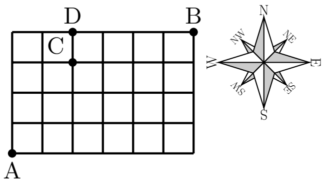
(1) 数直線上の原点にある点 P が，毎回確率 $\frac{1}{3}$ で正の方向に 1 だけ移動し，確率 $\frac{2}{3}$ で負の方向に 2 だけ移動する．6 回の移動後に点 P が原点にある確率を求めよ．

(2) 数直線上の原点にある点 P が，1 個のさいころを投げて，1 か 2 の目が出たときは正の方向に 2 だけ移動し，3 か 4 の目が出たときは負の方向に 1 だけ移動し，5 か 6 の目が出たときは移動しないとする．さいころを 4 回投げたとき，点 P が原点にある確率を求めよ．

例題 A2.2.7 反復試行の確率（平面上の点の移動） ★★★

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次の問いに答えよ．ただし，各交差点において，東，北のいずれの進路も進む確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であり，一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進むものとする．

(1) C 地点を通る確率を求めよ．(2) D 地点を通る確率を求めよ．



解説動画

考え方

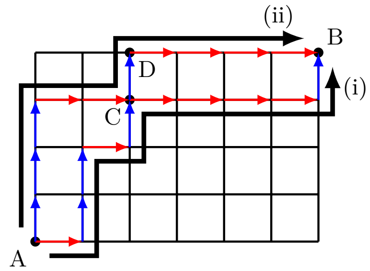
(1) 求める確率を，$\dfrac{(\text{AからCを通りB に行く最短経路の総数})}{(\text{AからB に行く最短経路の総数})}$ と考え，$\dfrac{{}_5C_3 \times {}_5C_1}{{}_{10}C_3}$ などとするのは，道順によって確率が異なる（同様に確からしくない）ので誤りである．右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ と表し，例えば次のような道順を考えると，確率が異なることがわかるので注意すること．

(i) →↑↑→↑→→→→→↑ のとき，その確率は，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{512}$$

(ii) ↑↑↑→→↑→→→→→ のとき，その確率は，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{64}$$



(2) D を通る道順を，通る点で場合分けして確率を求める．

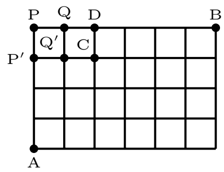
解答

(1) A 地点から C 地点へは，東へ 2 区画，北へ 3 区画進む必要があるから，求める確率は，

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{5}{16}}$$

◀ C 地点を通った後のことは考えなくてよい．

(2) 右の図のように，地点 P，Q，P′，Q′ をとる．D を通る道順は 3 つの場合があり，その確率はそれぞれ次のようになる．



(i) A から P′，P を通り D に行くとき，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{16}$

◀ ↑↑↑↑→→ と進む．

(ii) A から Q′，Q を通り D に行くとき，${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{8}$

◀ …，↑→ と進む．

(iii) A から C を通り D に行くとき，(1) の結果を用いて，$\frac{5}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

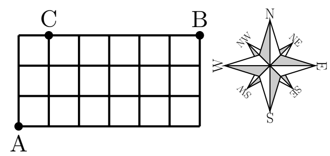
◀ …，↑ と進む．

よって，(i)〜(iii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{5}{32}=\mathbf{\frac{11}{32}}$$

問題 A2.2.7 ★★★ 解答 p.216

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，C 地点を通る確率を求めよ．ただし，各交差点において，東，北のいずれの進路も進む確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であり，一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進むものとする．



例題 A2.2.8 さいころの目の最大値・最小値 ★★★

3 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出る目の最大値が 4 以下である確率

(2) 出る目の最大値が 4 である確率

(3) 出る目の最大値が 4，最小値が 2 である確率

解説動画

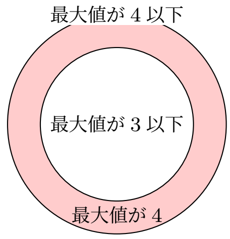
考え方

(1) 最大値が 4 以下の場合であるから，さいころの目がすべて 1，2，3，4 のいずれかの目が出る場合を考えればよい．

(2) (1) の場合は，さいころが「1，1，2」や「1，3，2」など，最大値が 3 以下の場合が含まれている（最大値が 4 ではない）．そこで，(1) から 最大値が 3 以下である場合を除いたもの を考える．

(3) 最大値が 4，最小値が 2 であることから，すべて 2，3，4 の目が出る場合から，2 と 4 の目が少なくとも 1 回ずつ出る確率を考える．つまり，2，3，4 の目が出る場合から，2 または 4 の目が出ない確率を除いたものを求める．

(2)



解答

(1) 目の最大値が 4 以下であるためには，3 個のさいころの目がすべて 1，2，3，4 のいずれかであればよい．

よって，求める確率は，$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{8}{27}} \cdots \text{(i)}$

(2) 目の最大値が 4 となるのは，目の最大値が 4 以下である場合から，目の最大値が 3 以下である場合を 除いた場合 である．

◀ 最大値が k となる確率は，最大値が k 以下の確率から $k-1$ 以下の確率を引く．

目の最大値が 3 以下となる確率は，$\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdots \text{(ii)}$

よって，(i)，(ii) より，求める確率は，$\frac{8}{27} - \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{37}{216}}$

◀ (最大値が 4 の確率)
＝ (最大値が 4 以下の確率)
－ (最大値が 3 以下の確率)

(3) 3 個のさいころの目が，

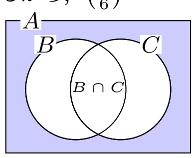
すべて 2，3，4 のいずれかである事象を A，
すべて 3，4 のいずれかである事象を B，
すべて 2，3 のいずれかである事象を C

とすると，求める確率は，

$$\begin{aligned} P(A) - P(B \cup C) &= P(A) - \{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\} \\ &= \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left\{\left(\frac{2}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{18}} \end{aligned}$$

◀ $P(B \cap C)$ は 3 が出る確率であるから，$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

◀



One Point

最大値が k となる確率は，最大値が k 以下の確率から $k-1$ 以下の確率を引く．

問題 A2.2.8 ★★★ 解答 p.216

▶ 章末 A2.3

4 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出る目の最小値が 4 以上である確率　　(2) 出る目の最小値が 4 である確率

例題 A2.2.9 確率の最大値 ★★★★

1 個のさいころを 14 回投げるとき，1 の目が何回出る確率が最も大きくなるか．

解説動画

考え方 さいころを 14 回投げたときに 1 の目が n 回出る確率 p_n を n の式で表す．すると，$p_n = \frac{14!}{n!(14-n)!} \cdot \frac{5^{14-n}}{6^{14}}$ とすることができるが，関数と見て最大値を求めるのは難しい．そこで，p_n，p_{n+1} の大小関係 ($p_n > p_{n+1}$，$p_n < p_{n+1}$) を調べることを考える．$A > B$ を示すには，$A - B > 0$ を示す方法などもあるが，ここでは比を考えて 1 と比べる方法を用いるとよい．

解答

さいころを 1 回投げたとき，1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから，さいころを 14 回投げたときに 1 の目が n 回（$0 \leqq n \leqq 14$）出る確率 p_n は，

$$p_n = {}_{14}\mathrm{C}_n \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{14-n} = \frac{14!}{n!(14-n)!} \cdot \frac{5^{14-n}}{6^{14}}$$

$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 13$ において，p_{n+1} と p_n の比を求めると，

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \left\{\frac{14!}{(n+1)!(13-n)!} \cdot \frac{5^{13-n}}{6^{14}}\right\} \div \left\{\frac{14!}{n!(14-n)!} \cdot \frac{5^{14-n}}{6^{14}}\right\} \\ &= \frac{n!(14-n)!}{(n+1)!(13-n)!} \cdot \frac{5^{13-n}}{5^{14-n}} \\ &= \frac{14-n}{5(n+1)}\end{aligned}$$

(i) $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqq 1$ のとき

$\frac{14-n}{5(n+1)} \geqq 1$ より，$14 - n \geqq 5(n+1)$ であるから，$n \leqq \frac{3}{2}$

したがって，$n = 0,\ 1$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ より，$p_n < p_{n+1}$

(ii) $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ のとき

$\frac{14-n}{5(n+1)} < 1$ より，$14 - n < 5(n+1)$ であるから，$n > \frac{3}{2}$

したがって，$n = 2,\ 3,\ \ldots,\ 13$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ より，$p_n > p_{n+1}$

(i)，(ii) より，$p_1 < p_2 > p_3 > p_4 > \cdots > p_{13} > p_{14}$

よって，1 の目が **2 回出る確率が最も大きい．**

◀ 6 の目が出ない確率は，$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

◀ 反復試行の確率を考える．また，${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ を用いる．

◀ p_{n+1} は p_n の n に $n+1$ を代入して求められる．

◀ $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$，$(14-n)! = (14-n) \cdot (13-n)!$，$5^{14-n} = 5^{13-n} \cdot 5$ より，約分する．

◀ $5(n+1) > 0$ である．

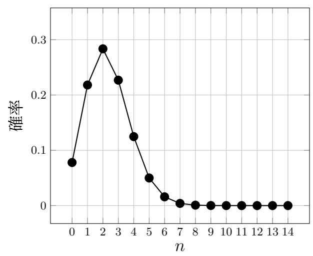
◀ $n = 0$ のとき，$p_0 < p_1$，$n = 1$ のとき，$p_1 < p_2$

◀ $n = 2$ のとき，$p_2 > p_3$，$n = 3$ のとき，$p_3 > p_4$，$\cdots$，$n = 13$ のとき，$p_{13} > p_{14}$

One Point

n 回起こる確率 p_n の最大は，$\frac{p_{n+1}}{p_n}$ と 1 の大小を比べるとよい．

【余談】 p_n をグラフで表すと，右の図のようになり，$n = 2$ で確率が最大となっている（1 の目が 2 回出る確率が最も大きい）．



問題 A2.2.9 ★★★★ 解答 p.217

▶ 節末 A2.2.3

1 個のさいころを 18 回投げるとき，2 の目が何回出る確率が最も大きくなるか．

例題 A2.2.10 条件付き確率 1 ★

ある学校で行った調査によると，サッカーが好きな生徒は全体の 80%，バスケットボールが好きな生徒は 65%，どちらも好きな生徒は 50% いることがわかった．

(1) サッカーが好きな生徒から無作為に 1 人を選んだとき，その生徒がバスケットボールも好きである確率を求めよ．

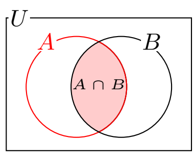
(2) バスケットボールが好きな生徒から無作為に 1 人を選んだとき，その生徒がサッカーが好きではない確率を求めよ．

解説動画

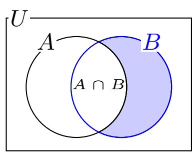
考え方 事象 A が起こったときに，事象 B の起こる条件付き確率は，

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

(1)



(2)



(1) この学校の生徒の中から選んだ 1 人の生徒がサッカーが好きであったときに，その生徒が バスケットボールも好きである 確率を求める．

(2) この学校の生徒の中から選んだ 1 人の生徒がバスケットボールが好きであったときに，その生徒が サッカーが好きではない 確率を求める．

解答

この学校の生徒の中から 1 人を選ぶとき，サッカーが好きである事象を A，バスケットボールが好きである事象を B とすると，

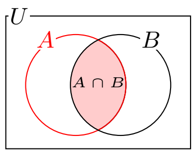
$$P(A) = \frac{80}{100}, \quad P(B) = \frac{65}{100}, \quad P(A \cap B) = \frac{50}{100}$$

(1) 求める確率は，条件付き確率 $P_A(B)$ である．

よって，

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{50}{100} \div \frac{80}{100} = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

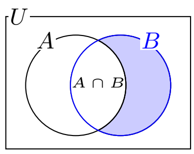
◀



(2) 求める確率は，条件付き確率 $P_B(\overline{A})$ である．

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{65}{100} - \frac{50}{100} = \frac{15}{100}$$

◀



よって，

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{100} \div \frac{65}{100} = \boldsymbol{\frac{3}{13}}$$

問題 A2.2.10 ★ 解答 p.217

ある町で行った調査によると，読書が好きな住民は全体の 70%，音楽鑑賞が好きな住民は 55%，どちらも好きな住民は 40% いることがわかった．

(1) 読書が好きな住民から無作為に 1 人を選んだとき，その住民が音楽鑑賞も好きである確率を求めよ．

(2) 音楽鑑賞が好きな住民から無作為に 1 人を選んだとき，その住民が読書が好きではない確率を求めよ．

例題 A2.2.11 確率の乗法定理 1 ★★

当たりくじが 3 本入っている 10 本のくじがある．a，b がこの順にくじを 1 本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) a，b がともに当たりくじを引く確率　(2) b が当たりくじを引く確率

解説動画

考え方 順列の考え方を用いても解くことができるが，確率の乗法定理 $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ を用いて解くことを考える．a，b の順にくじを引き，引いたくじは戻さないことから，くじの残りの本数に注目して確率を計算する．

解答

a，b が当たりくじを引く事象をそれぞれ A，B とする．

(1) $P(A) = \frac{3}{10}$，$P_A(B) = \frac{2}{9}$ であるから，乗法定理より，求める確率 $P(A \cap B)$ は，

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \mathbf{\frac{1}{15}}$$

◀ $P_A(B)$ は，a が引いたくじが当たりであるとき，残るくじは 9 本あり，その中に当たりくじは 2 本含まれるので，

$$P_A(B) = \frac{3-1}{10-1} = \frac{2}{9}$$

(2) (i) a も b も当たりくじを引くとき

(1) より，$P(A \cap B) = \frac{1}{15}$

(ii) a がはずれくじを引き，b が当たりくじを引くとき

$P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$，$P_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{9}$ であるから，乗法定理より，その確率は，

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

◀ $P_{\overline{A}}(B)$ は，a が引いたくじがはずれであるとき，残るくじは 9 本あり，その中に当たりくじは 3 本含まれるので，

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9}$$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{15} + \frac{7}{30} = \mathbf{\frac{3}{10}}$$

◀ $P(A) = P(B)$ であることがわかる．

【余談】 (1) において，a が当たる確率は $\frac{3}{10}$ であり，これは (1) で求めた b が当たる確率と等しい．一般に，当たりくじを引く確率はくじを引く順番に関係なく一定であり，n 本のくじの中に a 本の当たりくじが入っているとき，k 番目 $(k = 1, 2, \cdots, n)$ にくじを引く人が当たりくじを引く確率は常に $\frac{a}{n}$ である．

問題 A2.2.11 ★★ 解答 p.218

当たりくじが 4 本入っている 13 本のくじがある．a，b がこの順にくじを 1 本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) a，b がともに当たりくじを引く確率　(2) b が当たりくじを引く確率

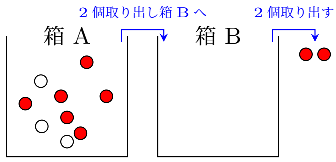
例題 A2.2.12 確率の乗法定理 2 ★★

箱 A には赤玉 6 個と白玉 3 個，箱 B には赤玉 4 個と白玉 4 個が入っている．箱 A から 2 個の玉を同時に取り出して箱 B に入れた後，箱 B から 2 個の玉を同時に取り出すとき，2 個とも赤玉である確率を求めよ．

解説動画

数学 A 2.2

考え方 箱 A から取り出される赤玉と白玉の個数によって，箱 B の赤玉と白玉の個数が変わる．そこで，箱 A から取り出される玉の色や個数に応じて，場合分けをして考える．



解答

箱 A から取り出す 2 個の玉の色に応じて，次の 3 つの場合がある．

(i) 箱 A から赤玉を 2 個取り出すとき

箱 B には赤玉 6 個と白玉 4 個が入っているから，

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{5}{36}$$

◀ 箱 A から赤玉を 2 個取り出す確率は，$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$ である．このとき，箱 B には赤玉 6 個と白玉 4 個が入っているから，箱 B から赤玉を 2 個取り出す確率は，$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}$ である．

(ii) 箱 A から赤玉と白玉を 1 個ずつ取り出すとき

箱 B には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているから，

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{9}$$

(iii) 箱 A から白玉を 2 個取り出すとき

箱 B には赤玉 4 個と白玉 6 個が入っているから，

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{90}$$

よって，(i)〜(iii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{90}=\boldsymbol{\frac{47}{180}}$$

問題 A2.2.12 ★★ 解答 p.218

袋 A には赤玉 5 個と白玉 4 個，袋 B には赤玉 3 個と白玉 6 個が入っている．袋 A から 2 個の玉を同時に取り出して袋 B に入れた後，袋 B から 2 個の玉を同時に取り出すとき，2 個とも白玉である確率を求めよ．

例題 A2.2.13 条件付き確率 2 ★★★

ある製品を製造する 2 つの工場 a，b があり，a 工場で製造される製品は全体の 60% である．また，a 工場で製造された製品には 5% の不良品が含まれており，b 工場で製造された製品には 2% の不良品が含まれている．2 つの工場で製造された多くの製品の中から，無作為に 1 個の製品を取り出したとき，次の確率を求めよ．

(1) 取り出した製品が不良品である確率

(2) 取り出した製品が不良品であったとき，それが a 工場の製品である確率

解説動画

考え方 (1) は，不良品には a 工場で製造された不良品と b 工場で製造された不良品の 2 つの場合があり，これらは互いに排反であることを利用する．(2) は，不良品であることがわかっている条件のもとで，それが a 工場の製品である確率を求める．つまり，取り出した 1 個の製品が a 工場からの製品である事象を A，b 工場からの製品である事象を B，不良品である事象を E とすると，条件付き確率 $P_E(A)$ を考えればよい．

なお，製品の製造数を全体で 10000 個製造されたとするなど，右の表のように具体的な数値を用いて考えると，理解しやすくなる．(1) の確率は $\frac{380}{10000}=\frac{19}{500}$ となり，(2) の確率は $\frac{300}{380}=\frac{15}{19}$ となる．

工場	製造数	不良品
a	6000	300
b	4000	80
計	10000	380

解答

取り出した 1 個の製品が a 工場からの製品である事象を A，b 工場からの製品である事象を B，不良品である事象を E とすると，a 工場で製造される製品は全体の 60% であるので，

$$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\quad P(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

a 工場と b 工場における不良品の割合はそれぞれ 5%，2% であるから，

$$P_A(E)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20},\quad P_B(E)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$$

◀ 製品が a 工場の製品であったときに，不良品である確率 $P_A(E)$ と，製品が b 工場の製品であったときに，不良品である確率 $P_B(E)$ がわかる．

(1)

$$P(A\cap E)=P(A)\times P_A(E)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{20}=\frac{3}{100},$$
$$P(B\cap E)=P(B)\times P_B(E)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{50}=\frac{1}{125}$$

よって，求める確率は，

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{3}{100}+\frac{1}{125}=\mathbf{\frac{19}{500}}$$

◀ $A\cap E$ と $B\cap E$ は互いに排反である．

(2) 不良品であったときに，それが a 工場の製品である確率は $P_E(A)$ であるから，

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{3}{100}\div\frac{19}{500}=\mathbf{\frac{15}{19}}$$

問題 A2.2.13 ★★★ 解答 p.219 ▶ 節末 A2.2.4 ▶ 章末 A2.3

ある地域に 2 つの病院 a，b があり，a 病院で実施される検査は全体の 70% である．また，a 病院で実施された検査では 4% の誤判定が含まれており，b 病院で実施された検査では 3% の誤判定が含まれている．2 つの病院で実施された多くの検査の中から，無作為に 1 件の検査を選んだとき，次の確率を求めよ．

(1) 選んだ検査で誤判定が発生している確率

(2) 選んだ検査で誤判定が発生していたとき，それが a 病院で実施されたものである確率

例題 A2.2.14 ベイズの定理 ★★★★

3 つの箱 A，B，C があり，箱 A には赤玉 2 個と白玉 6 個，箱 B には赤玉 3 個と白玉 3 個，箱 C には赤玉 4 個と白玉 8 個が入っている．3 つの箱のうち 1 つを無作為に選び，その箱から 1 個の玉を取り出したところ赤玉であった．このとき，その赤玉が箱 A から取り出された玉である確率を求めよ．

解説動画

考え方 下の余談におけるベイズの定理の，単純な場合である．箱 A を選ぶ事象を A，赤玉を取り出す事象を W とすると，求める確率は，条件付き確率 $P_W(A)=\frac{P(W\cap A)}{P(W)}=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}$ である．そこで，$P(W)$，$P(A\cap W)$ を求めることを考える．

解答

箱 A を選ぶ事象を A，箱 B を選ぶ事象を B，箱 C を選ぶ事象を C，赤玉を取り出す事象を W とする．

箱 A，箱 B，箱 C を選ぶ確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ は，すべて $\frac{1}{3}$

したがって，赤玉を取り出す確率は，

$$\begin{aligned} P(W) &= P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W) \\ &= P(A)P_A(W)+P(B)P_B(W)+P(C)P_C(W) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{12}=\frac{13}{36} \end{aligned}$$

◀ 乗法定理を用いる．

よって，求める確率は，

$$P_W(A)=\frac{P(W\cap A)}{P(W)}=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{P(A)P_A(W)}{P(W)}=\frac{1}{12}\div\frac{13}{36}=\mathbf{\frac{3}{13}}$$

【余談】 上の例題から，$P_W(A)=\frac{P(A)P_A(W)}{P(A)P_A(W)+P(B)P_B(W)+P(C)P_C(W)}$ が成り立つ．一般に，互いに排反な事象 A_1，A_2，…，A_n のうちの事象 A_k において事象 B が起こるとすると，

$$P_B\left(A_k\right)=\frac{P\left(A_k\right)P_{A_k}(B)}{P\left(A_1\right)P_{A_1}(B)+P\left(A_2\right)P_{A_2}(B)+\cdots+P\left(A_n\right)P_{A_n}(B)} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

が成り立つ．これを，**ベイズの定理**という．

問題 A2.2.14 ★★★★ 解答 p.220

3 つの袋 A，B，C があり，袋 A には赤いボール 3 個と青いボール 5 個，袋 B には赤いボール 2 個と青いボール 6 個，袋 C には赤いボール 4 個と青いボール 4 個が入っている．3 つの袋のうち 1 つを無作為に選び，その袋から 1 個のボールを取り出したところ赤いボールであった．このとき，その赤いボールが袋 B から取り出されたものである確率を求めよ．

例題 A2.2.15 期待値（さいころの目） ★

2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の差の絶対値の期待値を求めよ．

解説動画

考え方 X のとる値とその値になる確率が右の表のようなとき，X の期待値は，

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

となることを利用する．

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

解答

2 個のさいころ A, B とすると, 目の差の絶対値は, 右の表のようになり, 目の出方は $6\times6 = 36$ (通り) したがって，A，B の出た目の差の絶対値を X とすると，X のとりうる値とそれぞれの値をとる確率は，下の表のようになる．

A\B	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

◀ 表にまとめると場合の数を求めやすい．

X	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

◀ 確率の表は，約分しないでおくと期待値の計算が楽になる．また，確率の総和（計）が 1 になることを確認する．

よって，求める期待値は，

$$0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\mathbf{\frac{35}{18}}$$

One Point

期待値は，すべての場合の確率を求める．

問題 A2.2.15 ★ 解答 p.220

2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和の期待値を求めよ．

One math

例題 A2.2.16 期待値（有利・不利） ★★

赤玉 5 個，白玉 4 個が入った袋から玉を 1 個取り出してはもとに戻すことを 3 回行う．このとき，次の 2 つの場合のうち，どちらを選ぶ方が有利であるか．
(i) 赤玉 1 個につき 300 円をもらう．
(ii) 白玉が 2 個出たときだけ 1500 円をもらう．

解説動画

考え方 (i)，(ii) のそれぞれのもらえる金額の期待値を比較して，値の大きい方が有利（得）である．反復試行の確率を用いて，それぞれの期待値を求める．

解答

(i)，(ii) のそれぞれの場合について，もらえる金額の期待値を E_1 円，E_2 円とする．

(i) E_1 について

赤玉が 0 個となる確率は，$\left(\frac{4}{9}\right)^3=\frac{64}{729}$

赤玉が 1 個となる確率は，${}_3C_1\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{240}{729}$

赤玉が 2 個となる確率は，${}_3C_2\left(\frac{5}{9}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{300}{729}$

赤玉が 3 個となる確率は，$\left(\frac{5}{9}\right)^3=\frac{125}{729}$

◀ 反復試行の確率を考える．なお，玉を 3 回取り出して k 回赤玉が出る確率は，

$${}_3C_k\left(\frac{5}{9}\right)^k\left(\frac{4}{9}\right)^{3-k}$$

したがって，もらえる金額を X 円とすると，X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は，次の表のようになる．

X	0	300	600	900	計
確率	$\frac{64}{729}$	$\frac{240}{729}$	$\frac{300}{729}$	$\frac{125}{729}$	1

ゆえに，

$$E_1=0\times\frac{64}{729}+300\times\frac{240}{729}+600\times\frac{300}{729}+900\times\frac{125}{729}=500\ (円)$$

(ii) E_2 について

白玉が 2 個となる確率は，${}_3C_2\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{240}{729}$

白玉が 0 個または 1 個または 3 個となる確率は，$1-\frac{240}{729}=\frac{489}{729}$

◀ 余事象の確率を考えるとよい．また，白玉が 0 個または 1 個または 3 個となるとき，何ももらうことができない（0 円である）．

したがって，もらえる金額を Y 円とすると，Y のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は，次の表のようになる．

Y	1500	0	計
確率	$\frac{240}{729}$	$\frac{489}{729}$	1

ゆえに $E_2=1500\times\frac{240}{729}+0\times\frac{489}{729}\fallingdotseq 493.8$ (円)

よって，$E_1>E_2$ であるから，**(i) を選ぶ方が有利である．**

◀ $500>493.8$

One Point

有利・不利（損・得）の問題は，期待値の大小で判断する．

問題 A2.2.16 ★★

解答 p.221

▶ 節末 A2.2.5 ▶ 章末 2.4 ▶ 章末 A2.5

10 本のうち，当たりくじが 3 本，はずれくじが 7 本ある．くじを 1 回引いてはもとに戻すことを 3 回行う．このとき，次の 2 つの場合のうち，どちらを選ぶ方が有利であるか．
(i) 当たりくじ 1 本につき 300 円をもらう．
(ii) 当たりくじを 2 本引いたときだけ 1500 円をもらう．

例題 A2.2.17 期待値（図形） ★★★★

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の頂点から異なる 3 点を選び，それらの 3 点を頂点とする三角形をつくる．このとき，三角形の面積の期待値を求めよ．

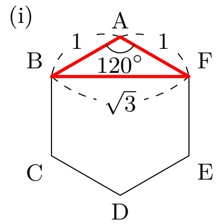
解説動画

考え方 三角形の形は，(i) 正六角形と 2 辺を共有するとき，(ii) 正六角形と 1 辺だけを共有するとき，(iii) 正六角形と辺を共有しないときの 3 つの場合がある（3 種類）．それぞれの場合分けをして，面積を求める．(i)，(iii) は三角形の面積の公式を用いるとよい（2 辺の長さが a，b であり，その間の角が θ のとき，三角形の面積 S は，$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$）．

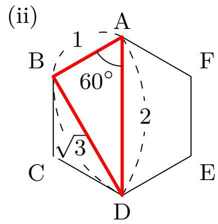
解答

3 つの頂点の選び方の総数は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ (通り)
三角形の形は次の (i)〜(iii) の 3 種類がある．

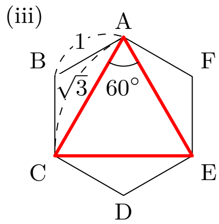
(i) 正六角形と 2 辺を共有するとき
3 辺が 1，1，$\sqrt{3}$ の二等辺三角形となり，その面積は，$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$
このような三角形は，正六角形の各頂点に対して 1 つずつできるから，6 通り



(ii) 正六角形と 1 辺だけを共有するとき
3 辺が 1，$\sqrt{3}$，2 の直角三角形となり，その面積は，$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
このような三角形は，AD，BE，CF を斜辺としたときに，それぞれ 4 通りずつできるから，$3\times 4=12$ (通り)



(iii) 正六角形と辺を共有しないとき
1 辺が $\sqrt{3}$ の正三角形となり，その面積は，$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}$
このような三角形は，△ACE，△BDF の 2 通り



よって，(i)〜(iii) より，求める期待値は，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{6}{20}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{12}{20}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{20}=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{20}}$$

問題 A2.2.17 ★★★★ 解答 p.222

▶ 章末 A2.1

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の頂点から異なる 3 点を選び，それらの 3 点を頂点とする三角形をつくる．このとき，三角形の周の長さの期待値を求めよ．

節末問題 2.2 いろいろな確率

数学 A
2.2

節末 A2.2.1 ★★ 解答（節末）p.223

▶ 例題 A2.2.4

X，Y の 2 人が繰り返しあるゲームで対戦し，先に 4 ゲーム勝った方が優勝者とする．各ゲームにおいて X が勝つ確率は $\frac{3}{4}$ で，引き分けはないものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 4 ゲーム目で優勝が決まる確率を求めよ．

(2) 5 ゲーム目で X が優勝する確率を求めよ．

節末 A2.2.2 ★★★ 解答（節末）p.223

▶ 例題 A2.2.5

1 個のさいころを 4 回投げるとき，1 の目と 6 の目が同じ回数だけ出る確率を求めよ．

節末 A2.2.3 ★★★★ 解答（節末）p.224

▶ 例題 A2.2.9

12 本のくじの中に 3 本の当たりくじがある．当たりくじを 2 回引くまで繰り返しくじを引くとき，n 回目で終わる確率 p_n を最大にする n の値を求めよ．ただし，引いたくじは毎回もとに戻すものとする．

節末 A2.2.4 ★★ 解答（節末）p.224

▶ 例題 A2.2.13

あるコンテストで，a が優勝する確率は 70% である．4 回に 1 回の割合でうそをつく b が a の結果を知ったうえで「a が優勝した」と発言した．このとき，a が本当に優勝した確率を求めよ．

節末 A2.2.5 ★★★★ 解答（節末）p.225

▶ 例題 A2.2.6 ▶ 例題 A2.2.16

原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．P は，1 枚の硬貨を投げて表が出た場合には +5，裏が出た場合は +3 移動する．硬貨を続けて投げていき，点 P の座標が初めて 18 以上になるまでの投げた回数を X とする．

(1) $X = 4$ となる確率を求めよ．　　(2) X の期待値を求めよ．

章末問題 2 確率

2.3 章末問題 2

章末 A2.1 ★★★ 解答（章末）p.226

▶ 例題 A2.2.17

正六角形の頂点を反時計回りに 1 から 6 までの番号を付ける．1 個のさいころを 3 回投げて，出た目の番号に対応する頂点を線分で結び図形を作るとき，次の確率を求めよ．

(1) 三角形ができる確率

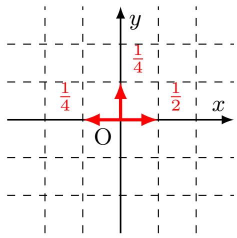
(2) 正三角形ができる確率

(3) 直角三角形ができる確率

章末 A2.2 ★★★ 解答（章末）p.226

▶ 例題 A2.2.6

座標平面上の原点 O から出発して，毎回確率 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ でそれぞれ左，上，右へ 1 ずつ移動する点 Q がある．8 回の移動後に点 (2, 4) にいる確率を求めよ．



章末 A2.3 ★★★★ 解答（章末）p.227

▶ 例題 A2.2.8 ▶ 例題 A2.2.13

3 個のさいころ A，B，C を同時に振り，出た目の最小値が 3 であったとき，最大値が 5 である条件付き確率を求めよ．

章末 A2.4 ★★★ 解答（章末）p.227

▶ 例題 A2.2.16

箱の中に 4 個の白玉と n 個の赤玉が入っている．この箱から同時に 2 個の玉を取り出したとき，赤玉の数を X とする．X の期待値が 1.5 であるとき，n の値を求めよ．ただし，$n \geqq 2$ であるとする．

章末 A2.5 ★★★★ 解答（章末）p.228

▶ 例題 A2.2.4 ▶ 例題 A2.2.16

2 つのチーム A，B が繰り返し試合をして，先に 4 勝した方を優勝チームとする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{2}{3}$ で，引き分けはないとする．このとき，優勝チームが決まるまでの試合数の期待値を求めよ．

第 3 章　図形の性質

3 章：整数の性質（再生リスト）：

3　図形の性質

1 節 平面図形の基本（pp.88-103），2 節 円の性質と作図（pp.104-120），3 節 空間図形（pp.121-127）

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
A3.1.1	★★		
A3.1.2	★★		
A3.1.3	★★★		
A3.1.4	★		
A3.1.5	★★		
A3.1.6	★★★		
A3.1.7	★★		
A3.1.8	★		
A3.1.9	★★		
A3.1.10	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A3.2.1	★★		
A3.2.2	★★		
A3.2.3	★		
A3.2.4	★		
A3.2.5	★★		
A3.2.6	★★★		
A3.2.7	★★★		
A3.2.8	★★		
A3.2.9	★		
A3.2.10	★★★		
A3.2.11	★★		
A3.2.12	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A3.3.1	★★		
A3.3.2	★★★		
A3.3.3	★★★		
A3.3.4	★★★		

節末問題 3.1，節末問題 3.2，節末問題 3.3

番号	難易度	1 回目	2 回目
A3.1.1	★★		
A3.1.2	★★		
A3.1.3	★★		
A3.1.4	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A3.2.1	★★★		
A3.2.2	★★		
A3.2.3	★★		
A3.2.4	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A3.3.1	★★		
A3.3.2	★★		
A3.3.3	★★★		
A3.3.4	★★★		

章末問題 3

番号	難易度	1 回目	2 回目
A3.1	★★		
A3.2	★★		
A3.3	★★★★		
A3.4	★★★		

チェック例

○･･･ 考え方を理解し，解くことができた．　△･･･ 理解が不十分である．　×･･･ 解くことができなかった．

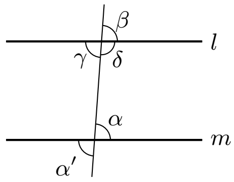
3.1　平面図形の基本

3.1.1　角

(1) 対頂角の性質

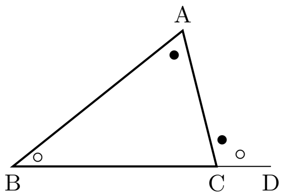
対頂角が等しい．$(\alpha = \alpha')$

(2) 平行線と同位角・錯角の性質



2 直線 l，m に直線 n が交わるとき，
$l /\!/ m \iff$ 同位角が等しい（$\alpha = \beta$）．
$l /\!/ m \iff$ 錯角が等しい（$\alpha = \gamma$）．
$l /\!/ m \iff$ 同じ側の内角の和が180° になる．（$\alpha + \delta = 180°$）

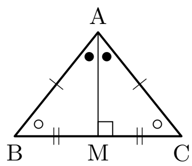
(3) 多角形の内角・外角の和



三角形の内角の和は，180° である．
三角形の外角はその隣にない 2 つの内角の和に等しい．
n 角形の内角の和は，$180° \times (n-2)$ である．
多角形の外角の和は，360° である．

◀ $\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = 180°$
◀ $\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{ACD}$

3.1.2　二等辺三角形の性質

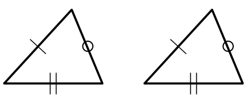


$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \iff \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$
二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分する．
2 つの角が等しい三角形は，二等辺三角形である．

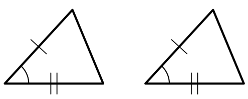
◀ M は BC の中点となる．

3.1.3　三角形の合同条件

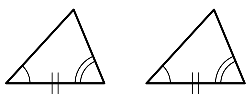
(i) 3 辺がそれぞれ等しい．



(ii) 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい．



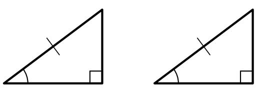
(iii) 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい．



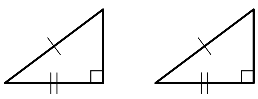
◀ (i)，(ii)，(iii) はそれぞれ，三辺相等または SSS（side-side-side），二辺夾角相等または SAS，二角夾辺相等または ASA ともいう．

とくに，直角三角形の合同条件は次のようになる．

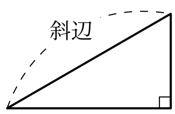
(i) 斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい．



(ii) 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい．



◀



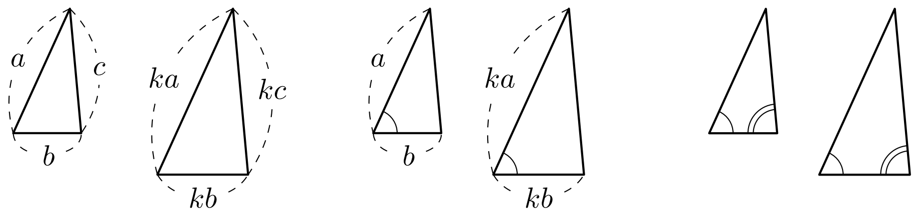
(i)，(ii) はそれぞれ，斜辺一鋭角相等または RHA，斜辺他一辺相等または RHS ともいう．

3.1.4 三角形の相似条件

(i) 3 組の辺の比がすべて等しい．

(ii) 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい．

(iii) 2 組の角がそれぞれ等しい．

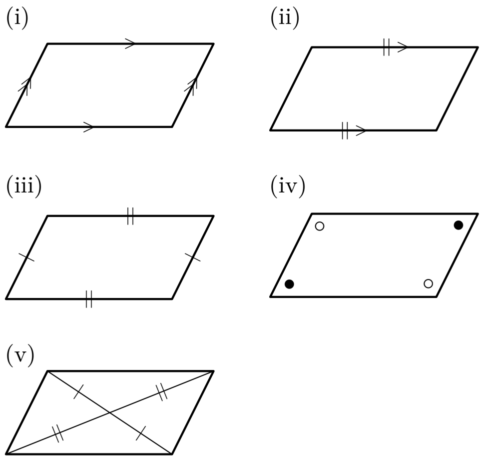


◀ (i)，(ii)，(iii) はそれぞれ，三辺比相等または SSS（side-side-side），二辺比夾角相等または SAS，二角相等または AA ともいう．また，本書では相似の記号を ∽ と表す（一般的な日本の高校数学の教科書における相似の記号よりも，両端が丸みを帯びていない）．

3.1.5 平行四辺形

平行四辺形は次の性質がある．逆に，四角形で次のいずれかの条件が成り立てば，その四角形は平行四辺形である．

(i) 2 組の対辺がそれぞれ平行である．
(ii) 1 組の対辺が等しくて平行である．
(iii) 2 組の対辺がそれぞれ等しい．
(iv) 2 組の対角がそれぞれ等しい．
(v) 対角線がそれぞれの中点で交わる．



◀ (i) は定義である．

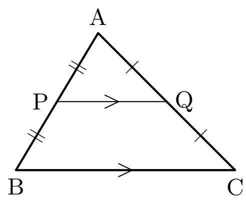
3.1.6 平行線と線分の比

(1) △ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ P，Q とすると，

$$\mathbf{PQ /\!/ BC,\quad PQ = \frac{1}{2}BC}$$

である（**中点連結定理**）．

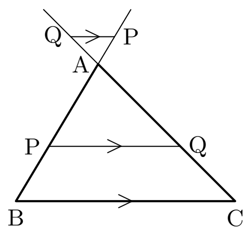
(1)



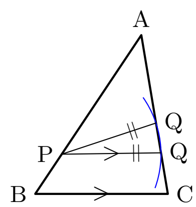
(2) △ABC の 2 辺 AB，AC またはその延長上に，それぞれ点 P，Q があるとき，

$$\mathrm{PQ /\!/ BC} \iff \mathrm{AP : AB = AQ : AC}$$
$$\mathrm{PQ /\!/ BC} \Longrightarrow \mathrm{AP : AB = PQ : BC} \cdots \text{(i)}$$
$$\mathrm{PQ /\!/ BC} \iff \mathrm{AP : PB = AQ : QC}$$

(2)



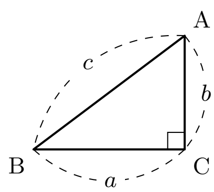
◀ (i) の逆 ⟸ が成り立たない例は，次のようになる．



3.1.7 三平方の定理とその逆

△ABC において，

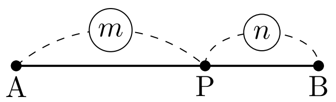
$$\angle \mathrm{C} = 90^\circ \iff a^2 + b^2 = c^2$$



◀ 三平方の定理は，ピタゴラスの定理，勾股弦の定理ともいう．

3.1.8　内分点と外分点

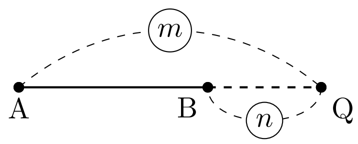
(1) 線分 AB 上に点 P があり，$\mathbf{AP} : \mathbf{PB} = \boldsymbol{m} : \boldsymbol{n}$ であるとき，点 P は AB を $m : n$ に**内分する**といい，点 P を**内分点**という．



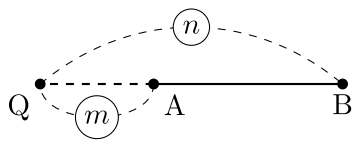
◀ 線分 AB の中点は，線分 AB を 1 : 1 に内分する点である．

(2) 線分 AB の延長上に点 Q があり，$\mathbf{AQ} : \mathbf{QB} = \boldsymbol{m} : \boldsymbol{n}$ であるとき，点 Q は AB を $m : n$ に**外分する**といい，点 Q を**外分点**という．

$m > n$



$m < n$

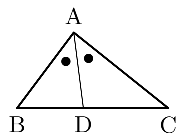


3.1.9　三角形の角の二等分線と辺の比

(1) △ABC の辺 BC を内分する点 D について，

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} \iff \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

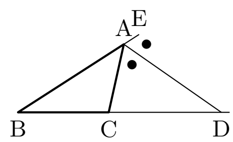
(1)



(2) △ABC の辺 BC を外分する点 D について，

$$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{EAD} \iff \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

(2)



◀ $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$

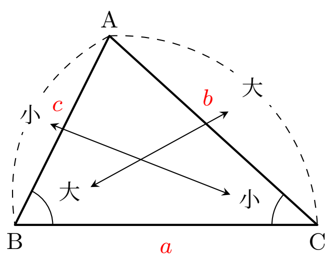
3.1.10　角と辺の大小関係

△ABC において，$\mathrm{AB} = c$，$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$ とする．このとき，角の大小と辺の大小は一致する．すなわち，

$$\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C} \iff b > c$$

$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C} \iff b = c$$

$$\angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{C} \iff b < c$$



◀ 大きい角に対する角は，小さい角に対する角よりも大きく，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺よりも大きい．

3.1.11 三角形の五心

(1) **外心**

三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．この交点 O を外心という．

◀ 外心は 3 つの頂点から等しい距離の点である．

(2) **内心**

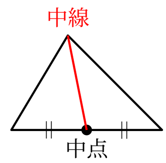
三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる．この交点 I を内心という．

◀ 内心は三角形内の，3 辺から等しい距離の点である．

(3) **重心**

三角形の 3 つの中線は 1 点で交わり，各中線はその交点でそれぞれ 2 : 1 に内分される．この交点 G を重心という．

◀ 頂点と対辺の中点を結んだ線分を中線という．



(4) **垂心**

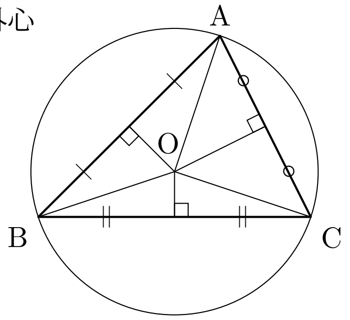
三角形の頂点から対辺に下ろした 3 つの垂線は 1 点で交わる．この交点 H を垂心という．

(5) **傍心**

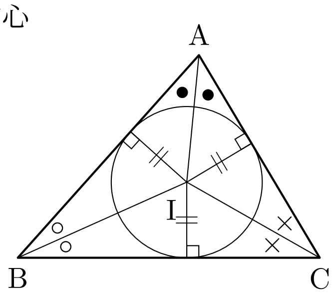
三角形の 1 つの内角と 2 つの外角の二等分線は 1 点で交わる．この交点 J_1，J_2，J_3 を傍心という．傍心は 1 つの三角形に対して 3 つある．

◀ 三角形の外心，内心，重心，垂心，傍心を合わせて三角形の五心ということもある（アジア圏でいわれることが多い）．なお，傍心は心ではないという考え方もある．

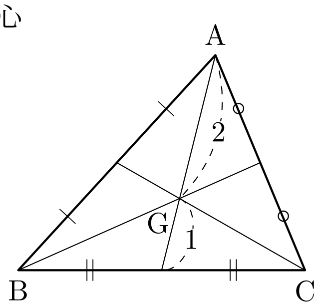
(1) 外心



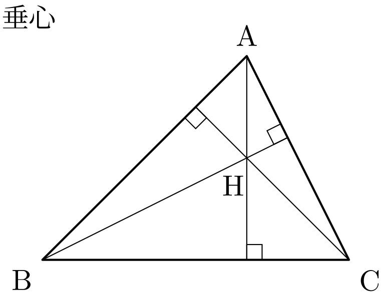
(2) 内心



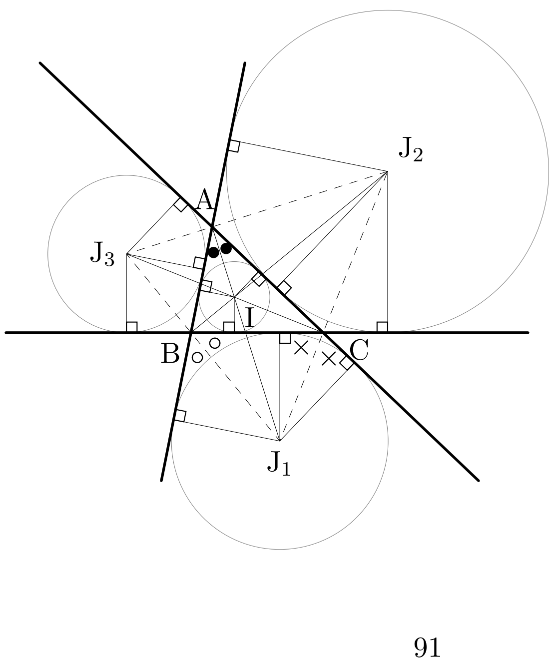
(3) 重心



(4) 垂心



(5) 傍心

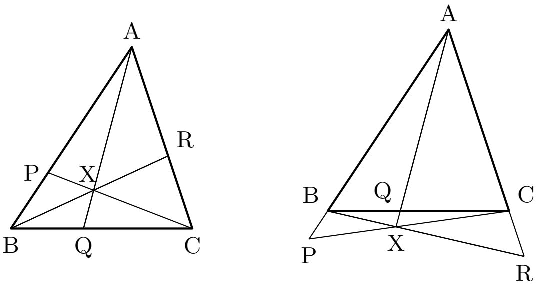


3.1.12　チェバの定理とメネラウスの定理

(1) チェバの定理
点 X と △ABC の 3 頂点 A，B，C を結んだ直線が，3 辺 AB, BC, CA またはその延長と，それぞれ，P，Q，R で交わるとき，次の式が成り立つ．

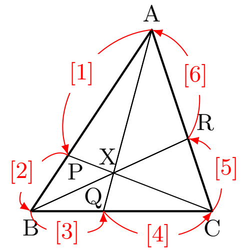
$$\mathbf{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1}$$

(1)



◀ チェーヴァの定理ともいう．

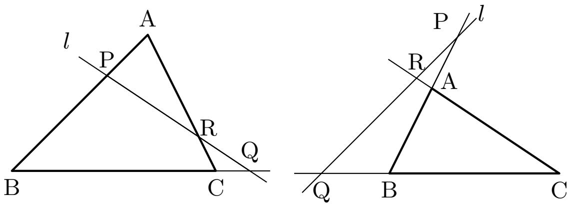
$$\frac{[1]}{[2]}\cdot\frac{[3]}{[4]}\cdot\frac{[5]}{[6]}=1$$



(2) メネラウスの定理
直線 l が △ABC の 3 辺 AB, BC, CA またはその延長と，それぞれ，P，Q，R で交わるとき，次の式が成り立つ．

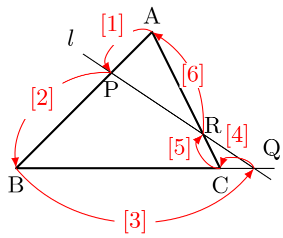
$$\mathbf{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1}$$

(2)



◀ メネラオスの定理ともいう．

$$\frac{[1]}{[2]}\cdot\frac{[3]}{[4]}\cdot\frac{[5]}{[6]}=1$$



3.1.13　チェバの定理とメネラウスの定理の逆

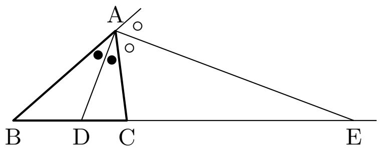
(1) チェバの定理の逆
△ABC の辺 AB，BC，CA またはその延長上に，それぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうちの 1 個または 3 個が辺上にあるとする．
このとき，AQ と BR が交わり，かつ $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$ が成り立つならば，**3 直線 AQ，BR，CP は 1 点で交わる．**

(2) メネラウスの定理の逆
△ABC の辺 AB，BC，CA またはその延長上に，それぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうちの 1 個または 3 個が辺の延長上にあるとする．
このとき，$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$ が成り立つならば，**P，Q，R は 1 つの直線上にある．**

◀ チェバの定理の逆を用いると，三角形の 3 つの中線は 1 点で交わること（重心）や，3 つの内角の二等分線が 1 点で交わること（内心）などは簡単にわかる．

例題 A3.1.1 角の二等分線と比 ★★

AB $=$ 6，BC $=$ 5，CA $=$ 4 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を，それぞれ D，E とする．このとき，線分 DE の長さを求めよ．



解説動画

考え方 線分 DC，EC の長さを求めることを考える．

解答

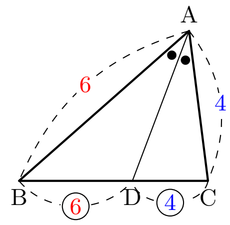
AD は ∠A の二等分線であるから，

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

したがって，$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 6 : 4 = 3 : 2$

ゆえに，$\mathrm{DC} : \mathrm{BC} = 2 : 5$ であるから，

$$\mathrm{DC} = \frac{2}{5}\mathrm{BC} = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$$



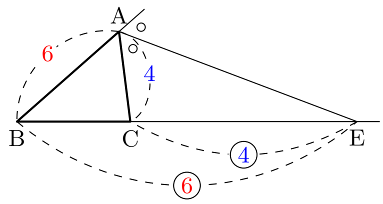
また，AE は ∠A の外角の二等分線であるから，

$$\mathrm{BE} : \mathrm{EC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

したがって，$\mathrm{BE} : \mathrm{EC} = 6 : 4 = 3 : 2$

ゆえに，$\mathrm{BC} : \mathrm{EC} = 1 : 2$ であるから，

$$\mathrm{EC} = 2\mathrm{BC} = 2 \cdot 5 = 10$$



よって，$\mathrm{DE} = \mathrm{DC} + \mathrm{EC} = 2 + 10 = \mathbf{12}$

◀ $\mathrm{BC} = \boxed{5}$ であることを用いて，$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$，すなわち，

$$(\boxed{5} - \mathrm{DC}) : \mathrm{DC} = 6 : 4$$

より，DC の長さを求めてもよい．

$$6\mathrm{DC} = 4(5 - \mathrm{DC})$$

であるから，$\mathrm{DC} = 2$ となる．

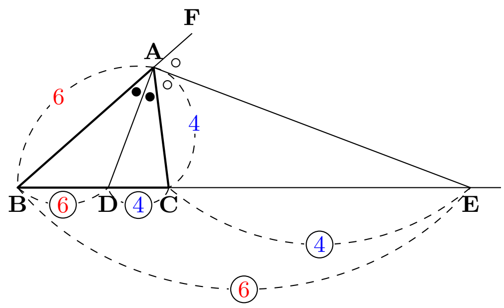
One Point

△ABC の辺 BC を内分する点 D について，

$$\angle\mathbf{BAD} = \angle\mathbf{CAD} \iff \mathbf{AB} : \mathbf{AC} = \mathbf{BD} : \mathbf{DC}$$

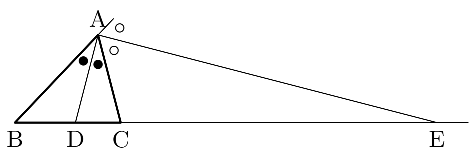
△ABC の辺 BC を外分する点 E について，

$$\angle\mathbf{CAE} = \angle\mathbf{FAE} \iff \mathbf{AB} : \mathbf{AC} = \mathbf{BE} : \mathbf{EC}$$



問題 A3.1.1 ★★ 解答 p.229

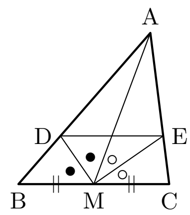
AB $=$ 8，BC $=$ 7，CA $=$ 6 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を，それぞれ D，E とする．このとき，線分 DE の長さを求めよ．



One math

例題 A3.1.2 三角形の性質 ★★

$\triangle$ABC において，辺 BC の中点を M とし，$\angle$AMB，$\angle$AMC の二等分線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D，E とする．このとき，DE$/\!/$BC であることを示せ．



解説動画

考え方 DE$/\!/$BC を示すことから，$\triangle$ABC において，次のような平行線と線分の比の性質を利用する．

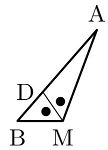
$$\mathrm{DE}/\!/\mathrm{BC} \Longleftrightarrow \mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{AE} : \mathrm{EC}$$

そこで，AD : DB = AE : EC を導くために，$\triangle$AMB，$\triangle$AMC のそれぞれに注目して考える．

解答

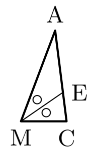
$\triangle$AMB に注目すると，MD は $\angle$AMB の二等分線であるから，

$$\mathrm{MA} : \mathrm{MB} = \mathrm{AD} : \mathrm{DB} \cdots \text{(i)}$$



同様に，$\triangle$AMC に注目すると，ME は $\angle$AMC の二等分線であるから，

$$\mathrm{MA} : \mathrm{MC} = \mathrm{AE} : \mathrm{EC} \cdots \text{(ii)}$$



AM は $\triangle$ABC の中線であるから，MB = MC

したがって，(i)，(ii) より，

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{MA} : \mathrm{MB} = \mathrm{AE} : \mathrm{EC}$$

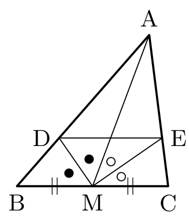
よって，AD : DB = AE : EC より，DE$/\!/$BC ■

One Point

平行線と線分の比の性質を用いて，平行であることを導く．

問題 A3.1.2 ★★ 解答 p.230

$\triangle$ABC において，辺 BC の中点を M とし，$\angle$AMB，$\angle$AMC の二等分線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D，E とする．このとき，DE $<$ BD $+$ CE であることを示せ．



例題 A3.1.3 角の二等分線 ★★★

$\triangle$ABC の辺 BC を AB : AC に内分する点 P をとる．このとき，AP は $\angle$A の二等分線であることを示せ．

解説動画

考え方 次のことを示せばよいと考えることができる．

$$\mathrm{BP : PC = AB : AC} \Longrightarrow \text{AP は } \angle\text{A の二等分線である．}$$

線分の比に関する条件から，角が等しいことを示すことで証明する．このとき，辺 BA の点 A 側の延長上に，AC = AD となるように点 D をとるなどして，平行線を上手く利用するとよい．

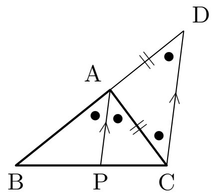
解答

$\triangle$ABC において，辺 BA の延長上に AC = AD となるように点 D をとる．

BP : PC = AB : AC のとき，BP : PC = BA : AD であるから，

$$\mathrm{AP /\!/ DC}$$

◀ 平行線と線分の比の性質を利用する．



したがって，

$$\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{ADC}, \quad \angle\mathrm{PAC} = \angle\mathrm{ACD}$$

◀ 平行線における同位角，錯角はそれぞれ等しい．

また，AC = AD より，

$$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ACD}$$

◀ $\triangle$ACD は二等辺三角形である．

ゆえに，$\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{PAC}$

よって，AP は $\angle$A の二等分線である．■

One Point

線分の比から，角度が等しいことを証明する．

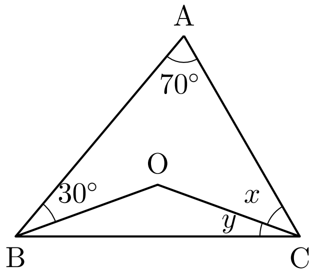
問題 A3.1.3 ★★★ 解答 p.230

$\triangle$ABC の 2 辺 AB，AC 上に DE$/\!/$BC となるような 2 点 D，E をとり，辺 BC の中点を M とする．このとき，MD が $\angle$AMB の二等分線であれば，ME は $\angle$AMC の二等分線であることを示せ．

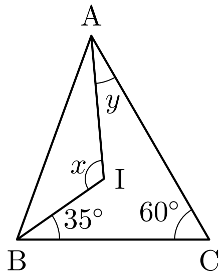
例題 A3.1.4　三角形の外心・内心の角の大きさ　★

次の図において，$\triangle$ABC の外心を O，内心を I とするとき，角 x，y を求めよ．

(1)



(2)



解説動画

考え方 外心は 3 つの頂点から等しい距離の点であり，内心は 3 つの内角の二等分線の交点であることを利用する．必要に応じて補助線をかき入れて，角 x，y を求める．

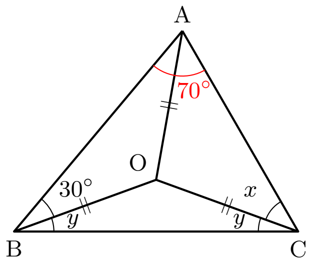
解答

(1) O は $\triangle$ABC の外心であるから，

$$\angle\mathrm{OAB} = \angle\mathrm{OBA} = 30^\circ$$

したがって，$\angle\mathrm{OAC} = 40^\circ$

よって，$x = \angle\mathrm{OAC} = \mathbf{40^\circ}$



また，OB = OC であるから，$\angle\mathrm{OBC} = \angle\mathrm{OCB} = y$

したがって，$30^\circ + 70^\circ + 40^\circ + 2y = 180^\circ$

よって，$y = \mathbf{20^\circ}$

◀ $\triangle$OAB は二等辺三角形である．

◀ $\angle\mathrm{OAC} = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$

◀ $\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{OCA}$

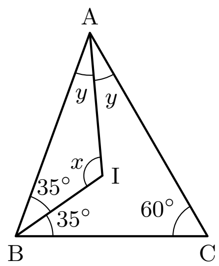
◀ $\triangle$OBC に注目すると，$\triangle$OBC は二等辺三角形であるから，OB = OC

(2) I は $\triangle$ABC の内心であるから，

$$\angle\mathrm{IBA} = \angle\mathrm{IBC} = 35^\circ,\quad \angle\mathrm{IAB} = \angle\mathrm{IAC} = y$$

$\triangle$ABC において，$2y + 2\times 35^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

よって，$y = \mathbf{25^\circ}$



また，$\triangle$IAB において，$x = 180^\circ - (\angle\mathrm{IAB} + \angle\mathrm{IBA}) = \mathbf{120^\circ}$

◀ 内心は 3 つの内角の二等分線の交点である．

◀ 三角形の内角の和は 180° である．

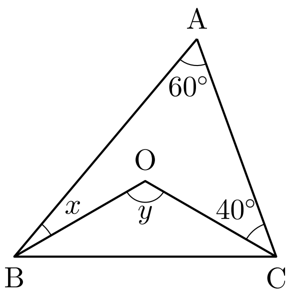
One Point

三角形の五心の性質を利用して，角度を求める．

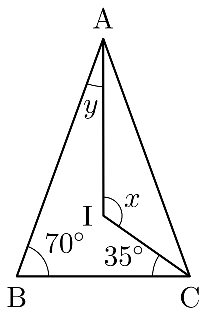
問題 A3.1.4 ★　解答 p.231

次の図において，$\triangle$ABC の外心を O，内心を I とするとき，角 x，y を求めよ．

(1)



(2)



例題 A3.1.5　三角形の傍心　★★

$\triangle$ABC の内心を I，$\angle$A に対する傍心を J とし，線分 IJ の中点を M とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle$IBJ の大きさを求めよ．　　(2) MB $=$ MC を示せ．

解説動画

考え方

(1) 頂点 B に注目して，角度について考える．I は内心であるから，BI は $\angle$B の二等分線である．また，J は $\angle$A に対する傍心であるから，BJ は $\angle$CBD の二等分線であることを利用する．

(2) (1) の結果を利用して，M は $\triangle$IBJ，$\triangle$ICJ の外心であることを利用する．

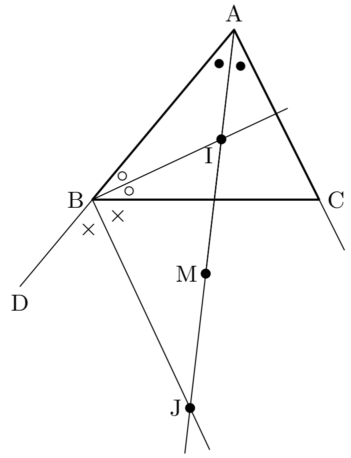
解答

(1) $\triangle$ABC において，辺 AB の B 側の延長上に点 D をとる．

I は内心であるから，

$$\angle \mathrm{CBI} = \angle \mathrm{ABI}$$

◀ 内心は 3 つの内角の二等分線の交点である．



J は傍心であるから，

$$\angle \mathrm{CBJ} = \angle \mathrm{DBJ}$$

◀ $\angle$A の二等分線と $\angle$CBD の二等分線の交点が傍心 J である．

よって，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{IBJ} &= \angle \mathrm{CBI} + \angle \mathrm{CBJ} \\ &= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{CBA} + \angle \mathrm{CBD}) \\ &= \mathbf{90^\circ}\end{aligned}$$

◀ $\angle \mathrm{CBA} + \angle \mathrm{CBD} = 180^\circ$

(2) $\angle \mathrm{IBJ} = 90^\circ$，MI $=$ MJ より，M は $\triangle$IBJ の外心である．

したがって，MB $=$ MI $\cdots$(i)

◀ $\triangle$IBJ は，$\angle \mathrm{B} = 90^\circ$ の直角三角形であり，IJ は直角三角形の外接円の直径になる．

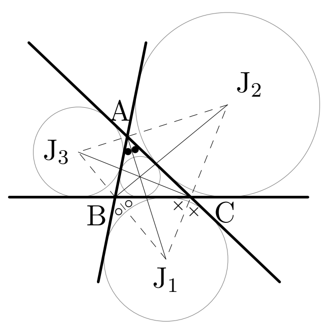
また，(1) と同様に考えると，$\angle \mathrm{ICJ} = 90^\circ$ となり，M は $\triangle$ICJ の外心である．

したがって，MC $=$ MI $\cdots$(ii)

よって，(i)，(ii) より，MB $=$ MC ■

三角形の傍心

三角形の 1 つの内角と 2 つの外角の二等分線は 1 点で交わる．この交点 $\mathrm{J_1}$，$\mathrm{J_2}$，$\mathrm{J_3}$ を傍心という．傍心は 1 つの三角形に対して 3 つある．
また，傍心を中心として，$\triangle$ABC の 1 辺と他の 2 辺の延長線に接する円をかくことができる．この円を，その三角形の傍接円という．



問題 A3.1.5 ★★　解答 p.232

$\triangle$ABC において，$\angle$A の二等分線と，$\angle$B と $\angle$C の外角の二等分線は，1 点で交わることを示せ．

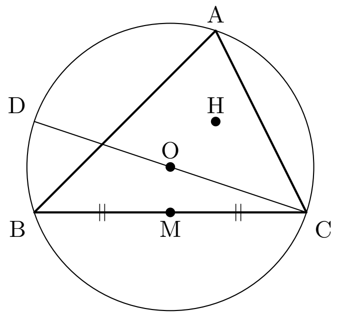
例題 A3.1.6 オイラー線 ★★★

正三角形ではない鋭角三角形の △ABC において，外心を O，垂心を H，CO の延長と △ABC の外接円の交点を D，BC の中点を M とする．このとき，次のことを示せ．

(1) 四角形 ADBH は平行四辺形である．

(2) AH = 2OM

(3) △ABC の重心を G とするとき，O，G，H は一直線上にあり，OG : GH = 1 : 2



解説動画

考え方

(2) (1) より，AH = DB であることがわかる．そこで，△CDB において中点連結定理を利用すればよい．

(3) 重心 G は AM 上にあるから，OH と AM の交点を考え，その交点を G′ としたときに G′ と G が一致することを示せばよい．

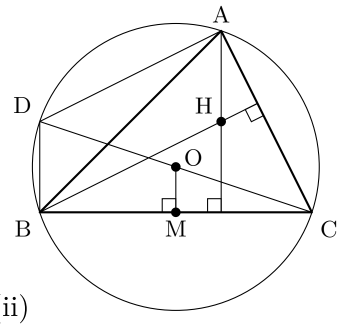
解答

(1) CD は △ABC の外接円の直径であるから，

$$\mathrm{DB} \perp \mathrm{BC}$$

H は △ABC の垂心であるから，

$$\mathrm{AH} \perp \mathrm{BC}$$



したがって，DB∥AH $\cdots$ (i)

同様に，DA ⊥ AC，BH ⊥ AC より，DA∥BH $\cdots$ (ii)

よって，(i)，(ii) より，四角形 ADBH は平行四辺形である．■

◀ 2 組の対辺がそれぞれ平行である．

(2) (1) より，四角形 ADBH は平行四辺形であるから，AH = DB $\cdots$ (iii)

OM ⊥ BC より，DB∥OM であり，O，M はそれぞれ CD，BC の中点であるから，DB = 2OM $\cdots$ (iv)

よって，(iii)，(iv) より，AH = 2OM ■

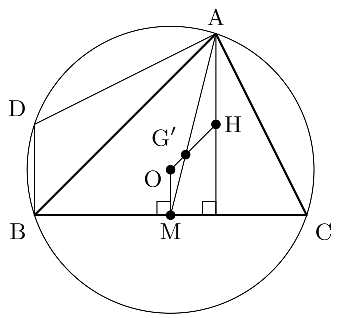
◀ 中点連結定理より，

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2}\mathrm{DB}$$

(3) OH と AM の交点を G′ とする．

(1)，(2) より，OM∥AH であるから，

$$\mathrm{AG'} : \mathrm{G'M} = \mathrm{AH} : \mathrm{OM} = 2 : 1$$



◀ △OMG′ ∽ △HAG′
なお，∽ は相似を表す記号である．

したがって，G′ は △ABC の重心 G と一致する．

よって，O，G，H は一直線上にあり，

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GH} = \mathrm{OM} : \mathrm{AH} = 1 : 2 \ ■$$

【余談】 △ABC の外心を O，重心を G，垂心を H とすると，点 O，G，H は一直線上に並び，G は線分 OH を 1 : 2 の比で内分する点となる．この直線 OGH を △ABC の**オイラー線**という．

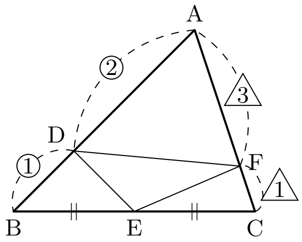
問題 A3.1.6 ★★★ 解答 p.232

▶ 節末 A3.1.1

△ABC の垂心を H とし，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とする．△DEF の垂心を O とするとき，AD と OH の交点 G が，△ABC の重心であることを示せ．

例題 A3.1.7 三角形の面積比 ★★

△ABC において，線分 AB を 2 : 1 に内分する点を D，線分 BC の中点を E，線分 CA を 1 : 3 に内分する点を F とする．このとき，△ABC と △DEF の面積比を求めよ．



解説動画

考え方 例えば，△ABC と △ADF の面積比は，∠A が共通であるから，

$$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}\cdot\sin A : \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A$$

より，$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ABC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF} : \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$ となることを利用する．

解答

$\triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} - (\triangle\mathrm{ADF} + \triangle\mathrm{BED} + \triangle\mathrm{CFE})\cdots$(i)

また，$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ABC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF} : \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$ より，

$$\triangle\mathrm{ADF} = \frac{2\cdot 3}{3\cdot 4}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$$

同様に，

$$\triangle\mathrm{BED} = \frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC},\quad \triangle\mathrm{CFE} = \frac{1\cdot 1}{4\cdot 2}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{8}\triangle\mathrm{ABC}$$

したがって，これらを (i) に代入すると，

$$\triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)\triangle\mathrm{ABC} = \frac{5}{24}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} : \frac{5}{24}\triangle\mathrm{ABC} = \mathbf{24 : 5}$$

◀ △ABC の面積から，△DEF のまわりの三角形の面積を引く．

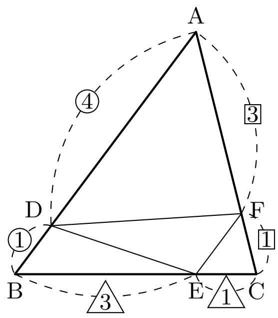
◀ 与えられた条件より，
AD : DB = 2 : 1,
BE : EC = 1 : 1,
CF : FA = 1 : 3
である．

◀ △DEF を △ABC で表す．

問題 A3.1.7 ★★ 解答 p.233

▶ 節末 A3.1.2 ▶ 章末 A3.1

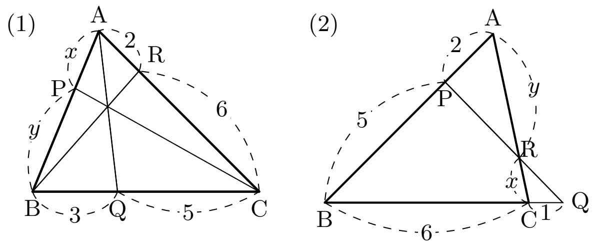
△ABC において，線分 AB を 4 : 1 に内分する点を D，線分 BC を 3 : 1 に内分する点を E，線分 CA を 1 : 3 に内分する点を F とする．このとき，△ABC と △DEF の面積比を求めよ．



One math

例題 A3.1.8　チェバの定理・メネラウスの定理　★

右の図のような △ABC において，$x:y$ を求めよ．



解説動画

数学 A 3.1

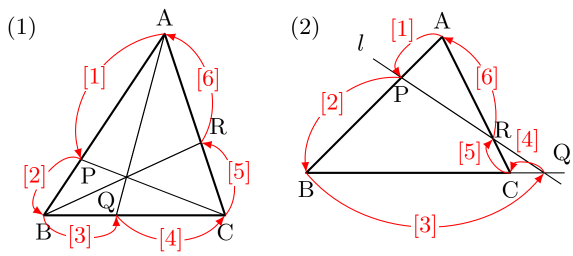
考え方

(1) 3 頂点からの直線が 1 点で交わるとき，チェバの定理を利用する．

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1$$

(2) 直線が 3 辺またはその延長と交わるとき，メネラウスの定理を利用する．

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1$$



解答

(1) △ABC において，チェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1$$

◀ $\frac{[1]}{[2]}\cdot\frac{[3]}{[4]}\cdot\frac{[5]}{[6]}=1$

したがって，

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{2}=1$$

ゆえに，$\frac{x}{y}=\frac{5}{9}$

よって，$x:y=\mathbf{5:9}$

(2) △ABC と直線 PQ について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1$$

◀ $\frac{[1]}{[2]}\cdot\frac{[3]}{[4]}\cdot\frac{[5]}{[6]}=1$

したがって，

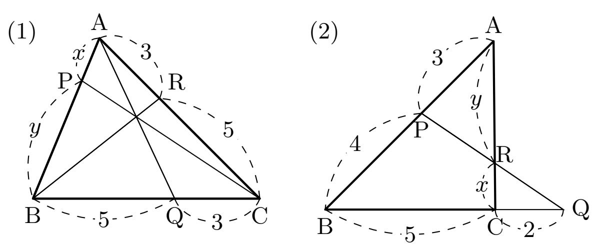
$$\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{x}{y}=1$$

ゆえに，$\frac{x}{y}=\frac{5}{14}$

よって，$x:y=\mathbf{5:14}$

問題 A3.1.8 ★　解答 p.233

右の図のような △ABC において，$x:y$ を求めよ．



例題 A3.1.9　チェバの定理・メネラウスの定理の逆　★★

△ABC において，次のことを示せ．

(1) BC の中点を P とし，辺 BC に平行な直線と 2 辺 AB，AC の交点をそれぞれ Q，R とする．このとき，3 直線 AP，BR，CQ は 1 点で交わる．

(2) 平行四辺形 ABCD の中に点 P をとる．点 P から AD および AB に平行な線を引き，AB，BC，CD，DA との交点をそれぞれ Q，R，S，T とする．QT と BD は平行ではないとし，QT と BD の交点を O とすると，3 点 R，S，O は一直線上にある．

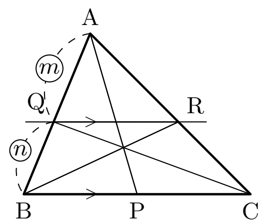
解説動画

考え方

(1) 平行線と線分の比の関係から，AR : RC を求め，チェバの定理の逆を適用することを考える．

(2) △ABD と直線 OQ について，メネラウスの定理を利用する．すると，平行四辺形の性質から，AQ，QB，DT，TA を他の辺におきかえることができ，メネラウスの定理の逆を適用することができる．

解答



(1) QR∥BC より，AQ : QB = AR : RC

したがって，AQ : QB = $m : n$ とおくと，

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RC} = m : n$$

ゆえに，

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}} \cdot \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}} = \frac{m}{n} \cdot 1 \cdot \frac{n}{m} = 1$$

◀ AQ : QB = $m : n$ より，

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}} = \frac{m}{n}$$

BP = PC より，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = 1$$

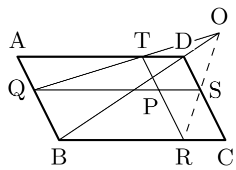
AR : RC = $m : n$ より，

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}} = \frac{n}{m}$$

よって，チェバの定理の逆より，3 直線 AP，BR，CQ は 1 点で交わる．■

(2) △ABD と直線 OQ について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OD}} \cdot \frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TA}} \cdot \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}} = 1$$



ここで，AQ = DS，QB = SC，DT = CR，TA = RB であるから，これらを代入すると，

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OD}} \cdot \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RB}} \cdot \frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SC}} = 1$$

すなわち，$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OD}} \cdot \frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SC}} \cdot \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RB}} = 1$

よって，メネラウスの定理の逆より，3 点 R，S，O は一直線上にある．■

◀ △BCD と 3 点 R，S，O に注目する．

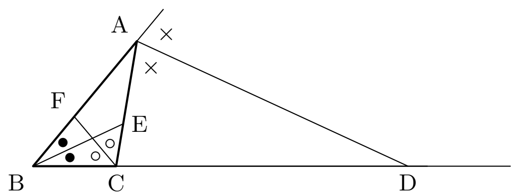
問題 A3.1.9 ★★　解答 p.234

▶ 節末 A3.1.3

△ABC において，次のことを示せ．

(1) △ABC の内接円が 3 辺 BC，CA，AB に接する点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．

(2) 右の図のような △ABC において，∠A の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わるとき，その交点を D とする．また，∠B，∠C の二等分線と辺 AC，AB の交点をそれぞれ E, F とする．このとき，3 点 D，E，F は一直線上にある．



例題 A3.1.10 メネラウスの定理と面積比 ★★★

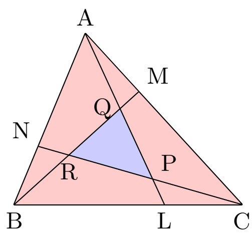
△ABC の辺 BC，CA，AB を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，AL と CN，AL と BM，BM と CN の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，次の三角形の面積を △ABC の面積 S を用いて表せ．

(1) △ABQ　　(2) △PQR

解説動画

考え方

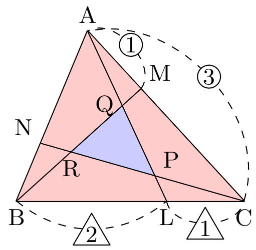
(1) メネラウスの定理を用いて，MQ : QB を求める．すると，MB : QB がわかるので，△ABQ，△ABM，△ABC の順に面積の比を考えるとよい．
(2) (1) と同様に考えると，△BCR ＝ △CAP ＝ $\frac{2}{7}S$ がわかる．△PQR の面積は，△ABC から，△ABQ, △BCR, △CAP を合わせたものを引くと考えるとよい．



解答

CM : AM ＝ 2 : 1 より，CA : AM ＝ 3 : 1
また，BL : LC ＝ 2 : 1 であるから，△BCM と直線 AL について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AM}}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=1$$



$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=1$ より，$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=\frac{1}{6}$
したがって，MQ : QB ＝ 1 : 6
ゆえに，MB : QB ＝ 7 : 6
よって，

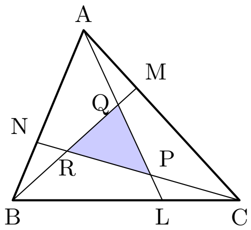
$$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{6}{7}\triangle\mathrm{ABM}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\boldsymbol{\frac{2}{7}S}$$

◀ MQ : QB が求まれば，MB : QB がわかる．そこで，MQ : QB を求められるように，メネラウスの定理を用いる．

◀ CA : AM ＝ 3 : 1 より，$\triangle\mathrm{ABM}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$

(2) (1) と同様に，△CAN と直線 BM，△ABL と直線 CN について，メネラウスの定理より，

$$\triangle\mathrm{BCR}=\triangle\mathrm{CAP}=\frac{2}{7}S$$



よって，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-(\triangle\mathrm{ABQ}+\triangle\mathrm{BCR}+\triangle\mathrm{CAP})$$
$$=S-3\cdot\frac{2}{7}S=\boldsymbol{\frac{1}{7}S}$$

問題 A3.1.10 ★★★ 解答 p.235

▶ 節末 A3.1.4

△ABC の辺 BC，CA，AB を 3 : 1 に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，AL と CN，AL と BM，BM と CN の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，次の三角形の面積を △ABC の面積 S を用いて表せ．

(1) △ABQ　　(2) △PQR

節末問題 3.1 平面図形の基本

節末 A3.1.1 ★★ 解答（節末）p.236

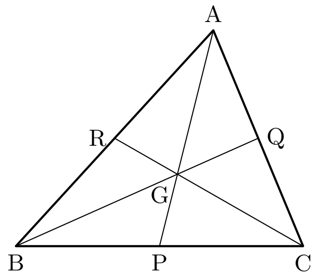
▶ 例題 A3.1.6

△ABC の辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D，E，F とすると，△ABC の外心 O は，△DEF の垂心であることを証明せよ．

節末 A3.1.2 ★★ 解答（節末）p.236

▶ 例題 A3.1.7

右の図において，△ABC の重心を G とするとき，△ABC の面積と四角形 ARGQ の面積比を求めよ．



節末 A3.1.3 ★★ 解答（節末）p.237

▶ 例題 A3.1.9

鋭角三角形である △ABC において，3 つの頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点で交わることを証明せよ．

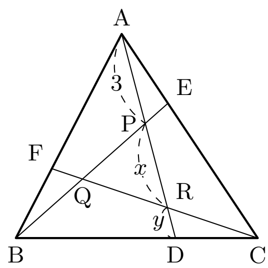
節末 A3.1.4 ★★★ 解答（節末）p.238

▶ 例題 A3.1.10

△ABC の辺 BC，CA，AB を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とし，AD と BE，BE と CF，CF と AD の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $AP : PR : RD = 3 : x : y$ とするとき，x，y の値を求めよ．

(2) △ABC と △PQR の面積比を求めよ．



3.2 円の性質と作図

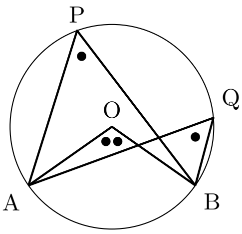
3.2.1 円周角の定理とその逆

(1) 円周角の定理

同じ弧に対する円周角の大きさは等しい．円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分である．

$$\angle\mathbf{APB} = \angle\mathbf{AQB} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\angle\mathbf{AOB}$$

(1)



◀ なお，半径の等しい円では，円周角の大きさは弧の長さに比例する．

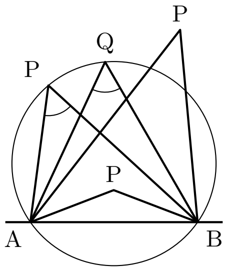
(2) 3 点 A，B，Q を通る円において，点 P が直線 AB について点 Q と同じ側にあるとき，次のことが成り立つ．

(i) 点 P が円の内部にある $\Longrightarrow \angle\mathrm{APB} > \angle\mathrm{AQB}$

(ii) 点 P が周上にある $\Longrightarrow \angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AQB}$

(iii) 点 P が円の外部にある $\Longrightarrow \angle\mathrm{APB} < \angle\mathrm{AQB}$

(2)

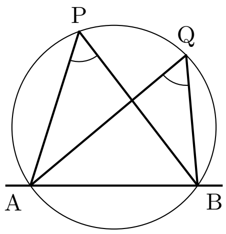


(3) 円周角の定理の逆

4 点 A，B，P，Q において，2 点 P，Q が直線 AB について同じ側にあるとき，

$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AQB} \Longrightarrow$ 4 点A，B，P，Q は同一円周上にある．

(3)



3.2.2 円に内接する四角形

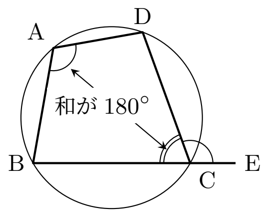
円に内接する四角形

(1) 向かい合う内角の和は 180° である．

四角形 ABCD が円に内接する $\Longleftrightarrow \angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD} = 180^\circ$

(2) 1 つの内角は，それに向かい合う内角の隣にある外角に等しい．

四角形 ABCD が円に内接する $\Longleftrightarrow \angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{DCE}$

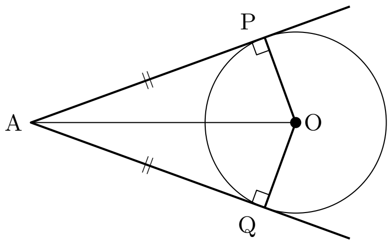


◀ なお，四角形において 1 つの角とそれに向かい合う角を，その角の対角という．

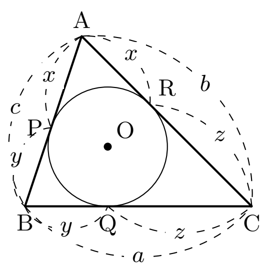
3.2.3 接線の長さ

円 O の外部の点 A から，その円 O に引いた 2 本の接線について，2 つの接線の長さは等しい．

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AQ}$$



◀ 下図のように各辺の長さが定められているときは，$x + y = c$，$y + z = a$，$z + x = b$ の関係から x，y，z の長さを求めることができる．

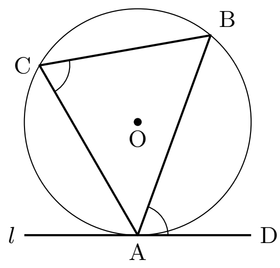


3.2.4　接線と弦のなす角（接弦定理）

接弦定理

円 O の弦 AB と点 A における接線とのなす角は，その角の内部に含まれる弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角に等しい．

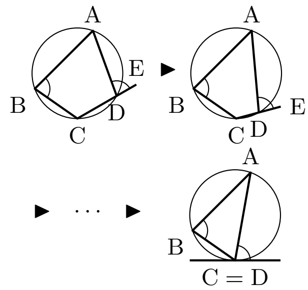
$$\angle \mathbf{ACB} = \angle \mathbf{BAD}$$



接弦定理の逆

円 O の弦 AB と点 A を通る直線 l とのなす角が，その角の内部に含まれる弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角に等しいとき，直線 l は点 A における円 O の接線である．

◀ 接弦定理は下の図のように，円に内接する四角形 ABCD において，点 D が限りなく点 C に近づき，最終的に点 C に一致した場合であると見ることができる．

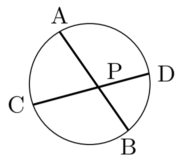


3.2.5　方べきの定理とその逆

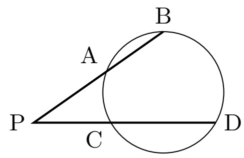
(1) 点 P を通る 2 つの直線が，円とそれぞれ 2 点 A，B および 2 点 C，D で交わるとき，

$$\mathbf{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

(1)



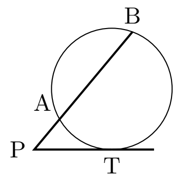
(1)′



(2) 点 P を通る 2 直線のうち，一方が円と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき，

$$\mathbf{PA \cdot PB = PT^2}$$

(2)



◀ (2) は (1)′ の図において，点 P が外部にあるとき，2 点 C，D が限りなく近づき，最終的に線分 PC（PD）が円の接線 PT になった場合であると見ることができる．

(3) 方べきの定理の逆

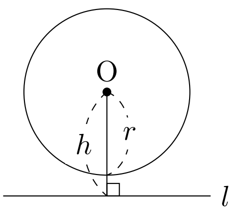
2 つの線分 AB および CD またはそれらの延長の交点を P とするとき，$\mathrm{PA \cdot PB} =$ $\mathrm{PC \cdot PD}$ が成り立つならば，4 点 A，B，C，D は同一円周上に存在する．

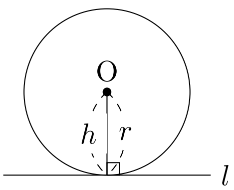
一直線上にない 3 点 A，B，T と線分 BA の延長上の 1 点を P とするとき，$\mathrm{PA \cdot PB = PT^2}$ が成り立つならば，PT は 3 点 A，B，T を通る円に接する．

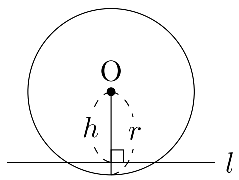
3.2.6　円と直線の位置関係

点 O を中心とする半径 r の円と直線 l について，点 O から l へ下ろした垂線の長さを h とすると，円と直線の位置関係は次のようになる．

(i) $h > r$（共有点はない）　(ii) $h = r$（1 点を共有）　(iii) $h < r$（2 点を共有）







◀ (ii) のとき，l は円 O の接線となる．

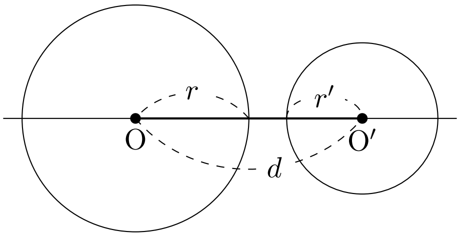
3.2.7 2 つの円の位置関係

2 つの円 O，O$'$ の半径をそれぞれ r，r' $(r > r')$，中心間の距離を d とするとき，2 つの円の位置関係は次のようになる．

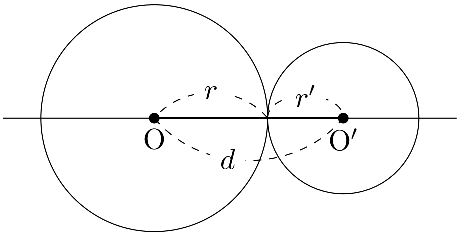
◀ 2 つの円の位置関係は $r < r'$ の場合も考えることができるが，その場合は $r - r'$ を $|r - r'|$ でおき換える必要がある．

数学 A 3.2

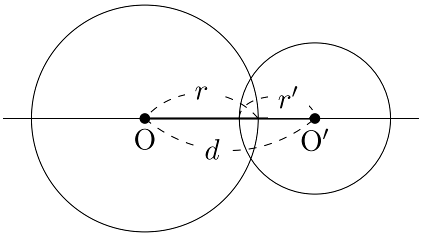
(i) $d > r + r'$（交わらない）



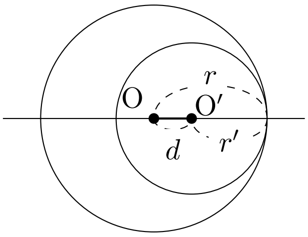
(ii) $d = r + r'$（外接する）



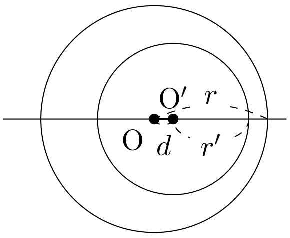
(iii) $r - r' < d < r + r'$（交わる）



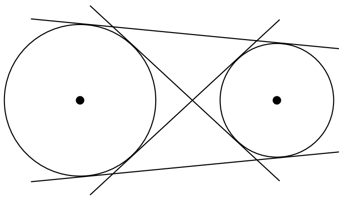
(iv) $d = r - r'$（内接する）



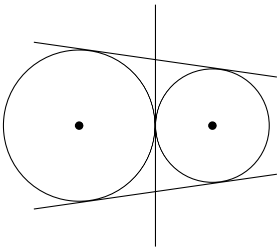
(v) $d < r - r'$
（一方が他方の内部にある）



2 つの円の共有点の個数
(i)，(v) $\cdots$ 0 個（共有点はない）
(ii)，(iv) $\cdots$ 1 個（1 点を共有する）
(iii) $\cdots$ 2 個（2 点を共有する）



2 つの円の共通接線の本数
(i) 4 本（交わらない）
(ii) 3 本（外接する）
(iii) 2 本（交わる）
(iv) 1 本（内接する）
(v) 0 本（一方が他方の内部にある）



◀ 2 つの円の両方に接する直線を，2 つの円の共通接線という．

3.2.8 作図

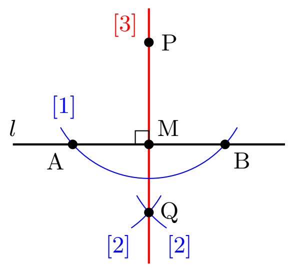
定規とコンパスだけを用いて与えられた条件を満たす図形をかくことを**作図**という．
定規 ··· 与えられた 2 点を通る直線を引く．また，線分を延長する．
コンパス ··· 与えられた 1 点を中心として，与えられた半径の円をかく．

◀ 定規の目盛りを用いて，線分の長さを測ることはできないものとする．

3.2.9 基本作図

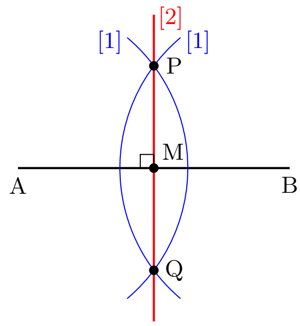
作図の手順
(i) 求める図形が作図できたとして，それらを決定するための条件を解析し，作図の方法を考える（**解析**）．
(ii) 求める図形の作図の手順を述べる（**作図**）．
(iii) 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する（**証明**）．

(1) **直線外の点を通る直線の垂線**
[1] 点 P を中心として，直線 l に交わる円をかき，直線 l との交点を A，B とする．
[2] 2 点 A，B をそれぞれ中心とする等しい半径の円をかき，交点の 1 つを Q とする．
[3] 直線 PQ を引く．

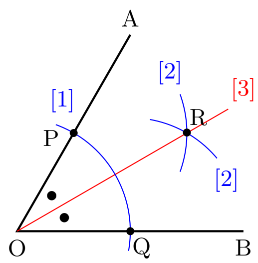


◀ M は線分 AB の中点である．

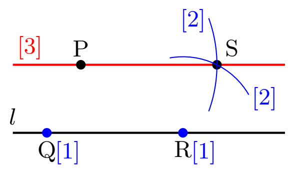
(2) **線分 AB の垂直二等分線**
[1] 線分 AB の両端の点 A，B をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく．
[2] [1] の 2 つの円の交点を P，Q として，直線 PQ を引く．これが線分 AB の垂直二等分線であり，その垂直二等分線と線分 AB との交点 M が線分 AB の中点となる．



(3) **角の二等分線**
[1] 点 O を中心とする円をかき，線分 OA，OB との交点をそれぞれ P，Q とする．
[2] 2 点 P，Q をそれぞれ中心とする等しい半径の円をかき，交点の 1 つを R とする．
[3] 直線 OR を引く．これが ∠AOB の二等分線となる．

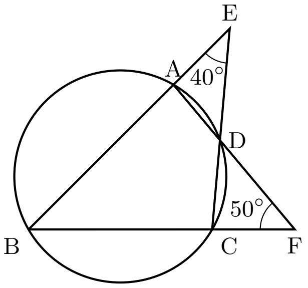


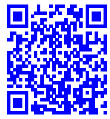
(4) **直線外の点を通る直線の平行線**
[1] 直線 l 上に 2 点 Q，R をとる．
[2] 点 R を中心とする半径 PQ の円をかき，点 P を中心とする半径 QR の円をかく．この 2 つの円の交点を S とする．
[3] 直線 PS を引く．



例題 A3.2.1 円に内接する四角形 ★★

右の図において，四角形 ABCD は円に内接している．$\angle\mathrm{BEC}=40^\circ$，$\angle\mathrm{AFB}=50^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{ABC}$ と $\angle\mathrm{BAF}$ の大きさを求めよ．





考え方 円に内接する四角形の向かい合う内角の和は 180° であることを利用する．$\angle\mathrm{ABC}=x$，$\angle\mathrm{BAF}=y$ とおいて，角度を求めるとよい．

解答

$\angle\mathrm{ABC}=x$，$\angle\mathrm{BAF}=y$ とおく．
四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$$

したがって，$\angle\mathrm{ECB}=180^\circ-\angle\mathrm{BAF}=180^\circ-y$
△BCE の内角の和は 180° であるから，

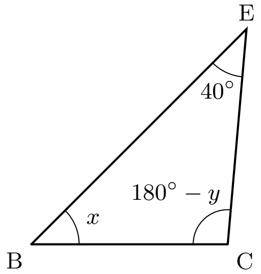
$$x+(180^\circ-y)+40^\circ=180^\circ$$

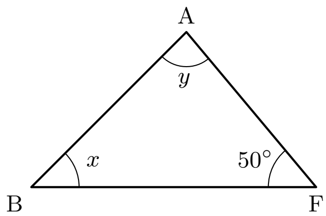
ゆえに，$y-x=40^\circ\cdots$(i)
△ABF の内角の和は 180° であるから，

$$x+y+50^\circ=180^\circ$$

したがって，$x+y=130^\circ\cdots$(ii)

(i)，(ii) より，$x=45^\circ$，$y=85^\circ$
よって，$\angle\mathrm{ABC}=\mathbf{45^\circ}$，$\angle\mathrm{BAF}=\mathbf{85^\circ}$



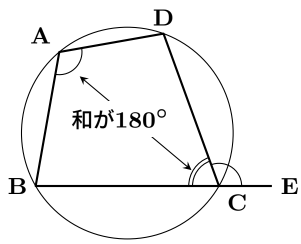


◀ $\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{ECB}$，
$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BAF}$

円に内接する四角形

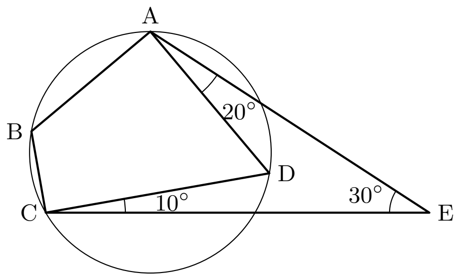
向かい合う内角の和は 180° である．

円に四角形 ABCD が内接する $\Longleftrightarrow$ $\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$



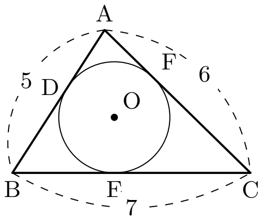
問題 A3.2.1 ★★ 解答 p.239

右の図において，四角形 ABCD は円に内接している．$\angle\mathrm{AEC}=30^\circ$，$\angle\mathrm{EAD}=20^\circ$，$\angle\mathrm{ECD}=10^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．



例題 A3.2.2 接線の長さ ★★

右の図のように，△ABC において，AB $= 5$，BC $= 7$，CA $= 6$ とする．また，△ABC の内接円と辺 AB，BC，CA の接点を，それぞれ点 D，E，F とするとき，AD の長さを求めよ．



解説動画

考え方 円の外部の点から円に引いた 2 本の接線の長さは等しいことを利用する．求める長さを x などとおいて，方程式を作るとよい．

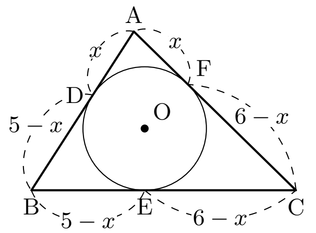
解答

AD $= x$ とすると，BD $=$ BE $= 5 - x \cdots$ (i)
また，AF $= x$ であるから，

$$\text{FC} = \text{EC} = 6 - x \cdots \text{(ii)}$$

(i)，(ii) より，

$$\text{BC} = \text{BE} + \text{EC} = (5 - x) + (6 - x) = 7$$



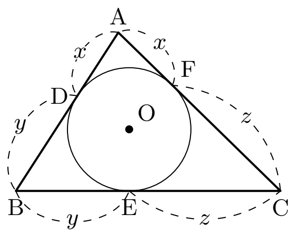
したがって，$x = 2$
よって，AD $=$ **2**

【別解】 AD $= x$，BE $= y$，CF $= z$ とすると，AD $=$ AF，BE $=$ BD，CF $=$ CE であるから，

$$x + y = 5,\quad y + z = 7,\quad z + x = 6$$

◀ AD $+$ DB $=$ AB，BE $+$ EC $=$ BC，CF $+$ FA $=$ CA

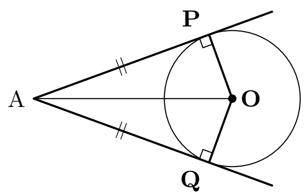
辺々を足し合わせると，$2(x + y + z) = 18$
したがって，$x + y + z = 9$
ゆえに，$y + z = 7$ より，$x = 2$
よって，AD $=$ **2**



接線の長さ

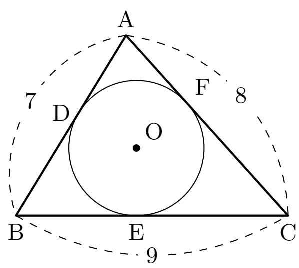
円 O の外部の点 A から，その円 O に引いた 2 本の接線について，2 つの接線の長さは等しい．

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AQ}$$



問題 A3.2.2 ★★ 解答 p.239

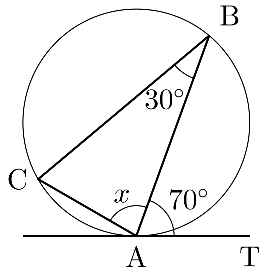
△ABC において，AB $= 7$，BC $= 9$，CA $= 8$ とする．また，△ABC の内接円と辺 BC，CA，AB の接点を，それぞれ点 D，E，F とするとき，AD の長さを求めよ．



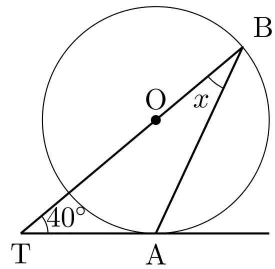
例題 A3.2.3 接弦定理 ★

次の図において，O は円の中心，AT は点 A における接線とするとき，角 x を求めよ．

(1)



(2)



解説動画

数学 A 3.2

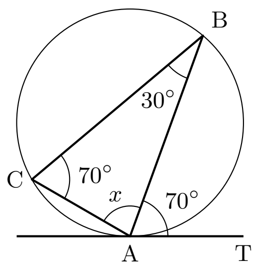
考え方 三角形の外接円と三角形の頂点の接線があることから，接弦定理の利用を考える．また，(2) は BT が円の中心を通ることから，BT と円 O の交点を C とすると，$\angle \mathrm{CAB} = 90^\circ$ であることを利用するとよい．

解答

(1) 接弦定理より，$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{ACB} = 70^\circ$

よって，$\triangle \mathrm{ABC}$ の内角の和は 180° であるから，

$$x = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = \mathbf{80^\circ}$$



◀ 接線 AT と弦 AB について，接弦定理を考える．

(2) BT と円 O の交点を C とする．

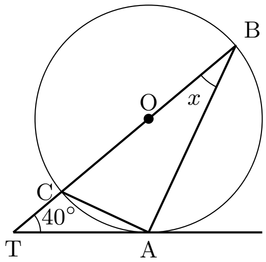
BC は直径であるから，$\angle \mathrm{CAB} = 90^\circ$

接弦定理より，$\angle \mathrm{TAC} = \angle \mathrm{ABC} = x$

$\triangle \mathrm{ABT}$ の内角の和は 180° であるから，

$$x + (x + 90^\circ) + 40^\circ = 180^\circ$$

よって，$x = \mathbf{25^\circ}$

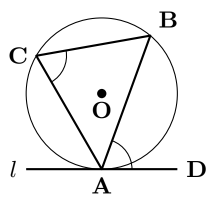


◀ 接線 AT と弦 AC について，接弦定理を考える．

接弦定理

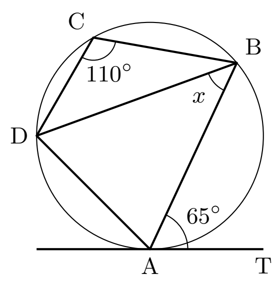
円 O の弦 AB と点 A における接線とのなす角は，その角の内部に含まれる弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角に等しい．

$$\angle \mathbf{ACB} = \angle \mathbf{BAD}$$



問題 A3.2.3 ★ 解答 p.240

右の図において，AT は点 A における接線とするとき，角 x を求めよ．

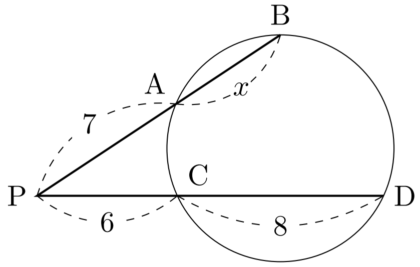


One math

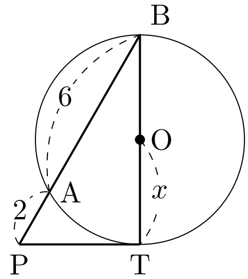
例題 A3.2.4 方べきの定理 ★

次の図において，O は円の中心，PT は点 T における接線とするとき，x の値を求めよ．

(1)



(2)



解説動画

考え方 方べきの定理を用いて，x の値を求める．

方べきの定理

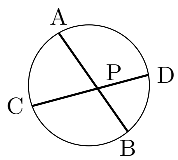
(1)，(1)′ の図において，

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

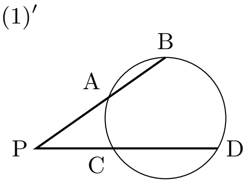
また，(2) の図において，

$$PA \cdot PB = PT^2$$

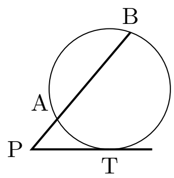
(1)



(1)′



(2)



解答

(1) $PB = 7+x$，$PD = 6+8 = 14$ であるから，方べきの定理より，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

したがって，

$$7 \cdot (7+x) = 6 \cdot 14$$

よって，$x = \mathbf{5}$

◀ $PB = PA + AB$，$PD = PC + CD$

(2) 方べきの定理より，$PA \cdot PB = PT^2$

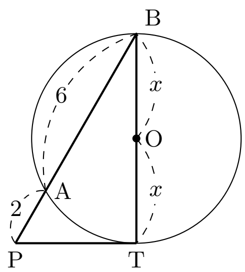
したがって，$2 \cdot 8 = PT^2$ より，$PT^2 = 16$

△PTB は直角三角形であるから，三平方の定理より，

$$PB^2 = PT^2 + BT^2$$

ゆえに，$8^2 = 16 + (2x)^2$ より，$x^2 = 12$

よって，$x > 0$ より，$x = \mathbf{2\sqrt{3}}$



◀ $PB = 2 + 6 = 8$

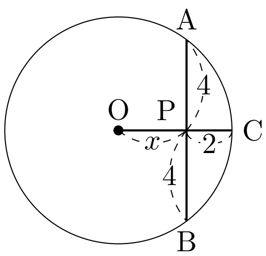
◀ △PTB は $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形であることを利用して，x の値を求めてもよい．

◀ $BT = 2OT = 2x$

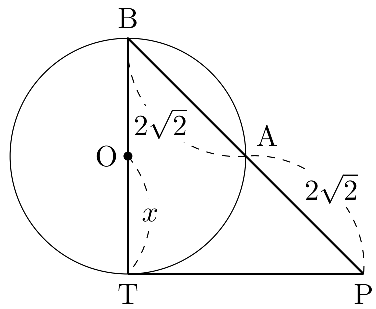
問題 A3.2.4 ★ 解答 p.240

次の図において，O は円の中心，PT は点 T における接線とするとき，x の値を求めよ．

(1)



(2)



例題 A3.2.5 方べきの定理の逆 ★★

鋭角三角形 ABC の頂点 A から辺 BC に垂線 AP を引き，P から辺 AB，AC に垂線を下ろし，それぞれの交点を Q，R とする．このとき，4 点 B，C，R，Q は同一円周上にあることを示せ．

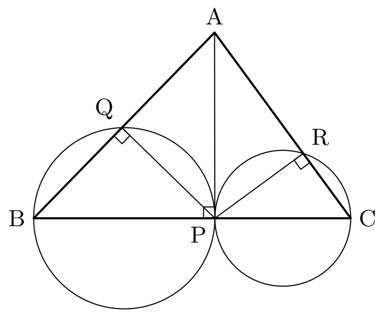
解説動画

考え方 3 点 B，P，Q は同一円周上にあり，また C，P，R は同一円周上にあることから，方べきの定理の利用を考える．

解答

$\angle\mathrm{BQP} = 90^\circ$ より，$\triangle\mathrm{BPQ}$ は BP を直径とする円に内接する．
また，$\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$ であるから，AP はこの円の接線である．
したがって，方べきの定理より，

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AB}\cdots\text{(i)}$$



同様に，$\angle\mathrm{CRP} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{APC} = 90^\circ$ であるから，

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AR}\cdot\mathrm{AC}\cdots\text{(ii)}$$

◀ 方べきの定理を利用する．

(i)，(ii) より，$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AB} = \mathrm{AR}\cdot\mathrm{AC}$
よって，方べきの定理の逆より，4 点 B，C，R，Q は同一円周上にある．■

【別解】 $\triangle\mathrm{APB}$ と $\triangle\mathrm{AQP}$ について，$\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{QAP}$，$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AQP} = 90^\circ$
したがって，$\triangle\mathrm{APB} \backsim \triangle\mathrm{AQP}$
ゆえに，$\mathrm{AP} : \mathrm{AQ} = \mathrm{AB} : \mathrm{AP}$ より，

◀ 2 組の角がそれぞれ等しいことから，相似である．

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AB}\cdots\text{(i)}$$

◀ $a : b = c : d$ のとき，
$ad = bc$

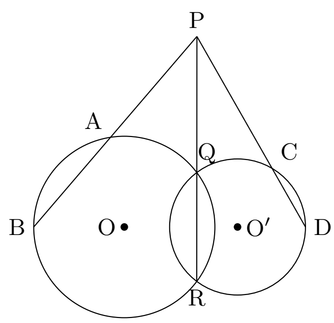
同様に，$\triangle\mathrm{APC}$ と $\triangle\mathrm{ARP}$ において，

$$\angle\mathrm{CAP} = \angle\mathrm{RAP},\quad \angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{ARP} = 90^\circ$$

したがって，$\triangle\mathrm{APC} \backsim \triangle\mathrm{ARP}$
ゆえに，$\mathrm{AP} : \mathrm{AR} = \mathrm{AC} : \mathrm{AP}$ より，$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AR}\cdot\mathrm{AC}\cdots\text{(ii)}$
(i)，(ii) より，$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AB} = \mathrm{AR}\cdot\mathrm{AC}$
よって，方べきの定理の逆より，4 点 B，C，R，Q は同一円周上にある．■

問題 A3.2.5 ★★ 解答 p.241

右の図のように，2 つの円 O，O′ が 2 点 Q，R で交わっており，QR の延長上の点 P から，円 O，O′ にそれぞれ A，B および C，D で交わる直線を引くとする．このとき，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることを示せ．

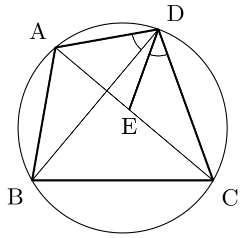


例題 A3.2.6 トレミーの定理 ★★★

円に内接する四角形 ABCD において，右の図のように対角線 AC 上に，点 E を $\angle ADB = \angle CDE$ となるようにとるとき，次のことを示せ．

(1) $AB \cdot CD = BD \cdot CE$

(2) $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ （トレミーの定理）



解説動画

考え方

(1) それぞれの線分を辺にもつように三角形に注目し，$\triangle ABD \backsim \triangle ECD$ となることから，$AB \cdot CD = BD \cdot CE$ を示す．

(2) $\triangle DAE \backsim \triangle DBC$ となることと，(1) の結果を用いて，$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ を示す．

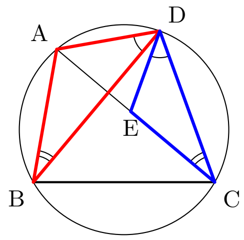
解答

(1) $\triangle ABD$ と $\triangle ECD$ について，与えられた条件より，

$$\angle ADB = \angle EDC$$

弧 AD に対する円周角は等しいから，

$$\angle ABD = \angle ECD$$



したがって，$\triangle ABD \backsim \triangle ECD$

ゆえに，$AB : EC = BD : CD$

よって，$AB \cdot CD = BD \cdot CE \cdots$ (i) ■

◀ 2 組の角がそれぞれ等しいことから，相似である．

◀ $a : b = c : d$ のとき，

$$ad = bc$$

(2) $\triangle DAE$ と $\triangle DBC$ について，$\angle ADB = \angle EDC$ であり，$\angle BDE$ は共通であるから，

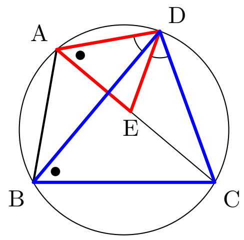
$$\angle ADE = \angle BDC$$

◀ $\angle ADE$，$\angle BDC$ はそれぞれ，次のように表せる．

$\angle ADE = \angle ADB + \angle BDE$，
$\angle BDC = \angle EDC + \angle BDE$

弧 CD に対する円周角は等しいから，

$$\angle DAE = \angle DBC$$



したがって，$\triangle DAE \backsim \triangle DBC$

ゆえに，$AD : BD = AE : BC$

したがって，$AD \cdot BC = AE \cdot BD \cdots$ (ii)

◀ 2 組の角がそれぞれ等しいことから，相似である．

◀ $a : b = c : d$ のとき，

$$ad = bc$$

(i)，(ii) の辺々を足し合わせると，

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= BD \cdot CE + AE \cdot BD \\ &= (AE + CE) \cdot BD = AC \cdot BD \end{aligned}$$

よって，$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ ■

◀ トレミーの定理という．

トレミーの定理

四角形 ABCD が円に内接する $\Longleftrightarrow$ $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

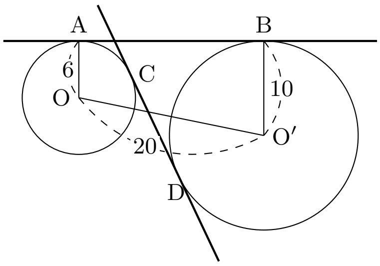
問題 A3.2.6 ★★★ 解答 p.241

三角形 $\triangle ABC$ において，$AB = 8$，$BC = 7$，$CA = 6$ とする．$\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D，三角形 $\triangle ABC$ の外接円と交わる点を E とする．このとき，AD，DE の長さをトレミーの定理を用いて求めよ．

One math

例題 A3.2.7 共通接線 ★★★

右の図のように，半径 6 の円 O と半径 10 の円 O′ があり，中心間の距離 $OO' = 20$ とする．2 つの円の共通接線を 2 本引き，これらの接点を A，B，C，D とするとき，線分 AB，CD の長さを求めよ．



解説動画

数学 A 3.2

考え方 補助線を引くと，直角三角形を見つけることができる．三平方の定理を用いて，線分の長さを求める．

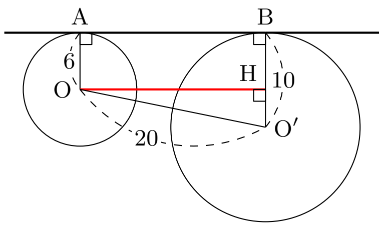
解答

O から O′B に垂線 OH を下ろすと，$\angle OAB = \angle O'BA = 90°$ であるから，

$$AB = OH, \quad BH = AO = 6$$

$\triangle OO'H$ において，$\angle OHO' = 90°$ であるから，

$$\begin{aligned} OH^2 &= OO'^2 - O'H^2 \\ &= 20^2 - (10-6)^2 \\ &= 20^2 - 4^2 \\ &= 384 \end{aligned}$$



◀ 三平方の定理を用いる．

$OH > 0$ より，$OH = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$

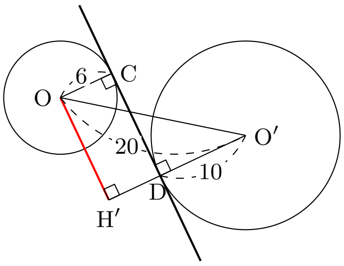
よって，$AB = OH = \mathbf{8\sqrt{6}}$

O から線分 O′D の延長に垂線 OH′ を下ろすと，$\angle OCD = \angle O'DC = 90°$

したがって，$CD = OH'$，$DH' = CO = 6$

$\triangle OO'H'$ において，$\angle OH'O' = 90°$ であるから，

$$\begin{aligned} OH'^2 &= OO'^2 - O'H'^2 \\ &= 20^2 - (10+6)^2 \\ &= 20^2 - 16^2 \\ &= 144 \end{aligned}$$



◀ 三平方の定理を用いる．

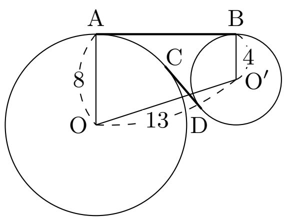
$OH' > 0$ より，$OH' = \sqrt{144} = 12$

よって，$CD = OH' = \mathbf{12}$

問題 A3.2.7 ★★★ 解答 p.242

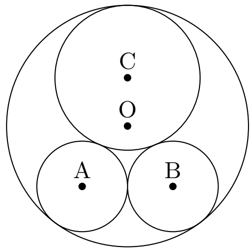
▶ 節末 A3.2.2

右の図のように，半径 8 の円 O と半径 4 の円 O′ があり，中心間の距離 $OO' = 13$ とする．2 つの円の共通接線を 2 本引き，これらの接点を A，B，C，D とするとき，線分 AB，CD の長さを求めよ．



例題 A3.2.8 互いに接する円 ★★

半径 6 の 2 つの円 A，B が外接しており，それぞれが半径 16 の円 O に内接している．このとき，右の図のように，円 A，B の両方に外接し，さらに円 O に内接する円 C の半径 r を求めよ．



解説動画

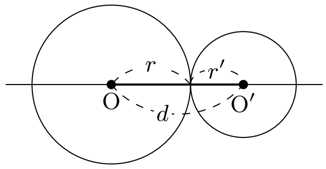
数学 A 3.2

考え方 2 つの円が接するときは，それぞれの円の中心間の距離を 2 つの円の半径を用いて表すとよい．

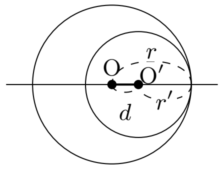
2 つの円の位置関係

2 つの円 O，O′ の半径をそれぞれ r，r' $(r > r')$，中心間の距離を d とするとき，2 つの円の位置関係は右の図のようになる．

$d = r + r'$（外接する）



$d = r - r'$（内接する）



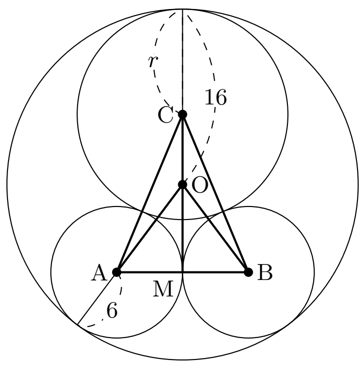
解答

△CABは $\mathrm{CA} = \mathrm{CB} = r+6$ の二等辺三角形，△OAB は $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 16-6 = 10$ の二等辺三角形である．

◀ CA は円 C の半径と円 A の半径を足し合わせ，OA は円 O の半径から円 A の半径を引くことで求められる．

したがって，AB の中点を M とすると，2 つの円 A，B は M で接し，$\mathrm{CM} \perp \mathrm{AB}, \mathrm{OM} \perp \mathrm{AB}$ であるから，C，O，M は一直線上にある．

◀ 二等辺三角形の頂点から引いた中線と底辺は垂直である．



△OAM において，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OM} &= \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AM}^2} \\
&= \sqrt{10^2 - 6^2} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

◀ 三平方の定理を用いる．

また，$\mathrm{CO} = 16 - r$ であり，△CAM において，$\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{CM}^2$ が成り立つから，

$$(r+6)^2 = 6^2 + \{(16-r)+8\}^2$$

◀ CO は円 O の半径から円 C の半径を引くことで求められる．

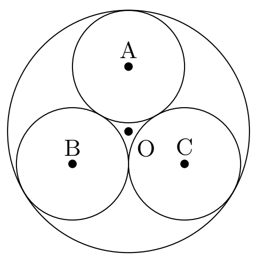
◀ 三平方の定理を用いる．また，$\mathrm{CM} = \mathrm{CO} + \mathrm{OM}$

よって，これを解いて，$r = \boldsymbol{\dfrac{48}{5}}$

問題 A3.2.8 ★★ 解答 p.243

▶ 節末 A3.2.2

右の図のように，半径 1 の円 O に，半径が同じ 3 つの円が内接している．このとき，円 A の面積 S を求めよ．



例題 A3.2.9 基本的な作図 ★

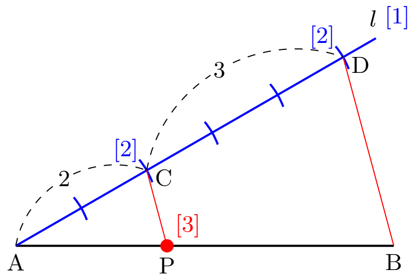
与えられた線分 AB について，線分 AB を $2:3$ に内分する点 P を作図せよ．

解説動画

考え方 作図の問題は，求める図形が作図できたとして，どのような図形になるかをイメージすると考えやすい．コンパスで等しい長さをとり，平行線と線分の比の性質を利用して，内分する点を作図する．

解答

[1] 点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 l を引く．
[2] 半直線 l 上に，$\mathrm{AC}:\mathrm{CD}=2:3$となるように点 C，D をとる．
[3] 点 C を通り，直線 BD に平行な直線を引き，線分 AB との交点を P とする．このとき，点 P が求める点である．



◀ 点 C，D を作図するときにコンパスでとる等しい長さは，適当でよい．

BD∥PC より，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{AC}:\mathrm{CD}$$

よって，点 P は線分 AB を $2:3$ に内分する点である．

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

One Point

求める図形が作図できたとして，どのような図形になるかをイメージする．

問題 A3.2.9 ★ 解答 p.243

与えられた線分 AB について，線分 AB を $5:1$ に外分する点 P を作図せよ．

例題 A3.2.10 長さが与えられた線分の作図 ★★★

長さ 1，a，b の線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{\frac{b}{a}}$ の線分を作図せよ．

解説動画

考え方 長さ $\frac{b}{a}$ の作図は，平行線と線分の比の性質を利用することを考える．また，長さ m の線分に対して，長さ $\sqrt{m}$ の線分の作図は，方べきの定理を利用するとよい．

解答

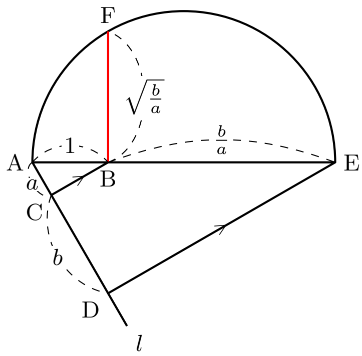
長さ 1 の線分 AB をとる．

[1] 点 A を通り，直線 AB と異なる直線 l を引き，l 上に $\mathrm{AC} = a$，$\mathrm{CD} = b$ となるように点 C，D をとる．ただし，C は線分 AD 上にとる．

[2] 点 D を通り，直線 BC に平行な直線を引き，直線 AB との交点を E とする．

[3] 線分 AE を直径とする半円をかく．

[4] 点 B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，[3] の半円との交点を F とする．このとき，線分 BF が求める線分である．



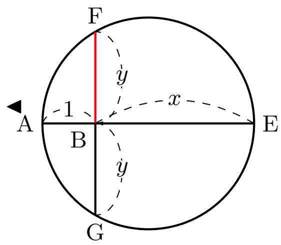
$\mathrm{BE} = x$，$\mathrm{BF} = y$ とすると，$\mathrm{BC} /\!/ \mathrm{ED}$ であるから，$a : b = 1 : x$ より，$x = \frac{b}{a}$

また，FB の延長と線分 AE を直径とする円との交点を G とする．

方べきの定理より，$y^2 = 1 \cdot x$

したがって，$y = \sqrt{x} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

よって，線分 BF は長さ $\sqrt{\frac{b}{a}}$ の線分である．



One Point

長さ $\sqrt{m}$ の線分の作図は，方べきの定理を利用する．

問題 A3.2.10 ★★★ 解答 p.244

長さ 1，a の線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{a}$ の線分を作図せよ．

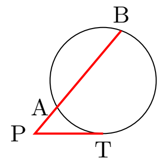
例題 A3.2.11　2 次方程式の解と作図　★★

長さ a, b の線分が与えられたとき，2 次方程式 $x^2 \pm ax - b^2 = 0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ．

解説動画

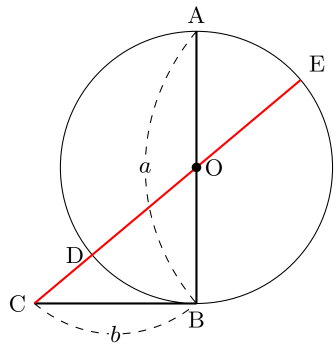
数学 A 3.2

考え方 2 次方程式 $x^2 \pm ax - b^2 = 0$ を変形すると，$x(x \pm a) = b^2$ となる．そこで，方べきの定理 $\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$ を利用することを考える．



解答

[1] 長さ a の線分 AB を直径とする円 O をかく．
[2] 円 O 上の点 B を通る線分 AB の垂線を引き，この直線上で $\mathrm{BC} = b$ となる点 C をとる．
[3] 点 C と線分 AB の中点である O を結ぶ直線と円 O との交点を，右の図のように D，E とすると，線分 CD，CE が求める線分である．



$x^2 + ax - b^2 = 0$ より，$x(x+a) = b^2$ であり，$x^2 - ax - b^2 = 0$ より，$x(x-a) = b^2$ である．
また，CB は円に接するから，方べきの定理より，$\mathrm{CD} \cdot \mathrm{CE} = \mathrm{CB}^2 = b^2$
$\mathrm{CD} = x$ とすると，$\mathrm{CE} = x + a$ より，$x(x+a) = b^2$
$\mathrm{CE} = x$ とすると，$\mathrm{CD} = x - a$ より，$x(x-a) = b^2$
よって，線分 CD，CE は 2 次方程式 $x^2 \pm ax - b^2 = 0$ の正の解を長さとする線分である．

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

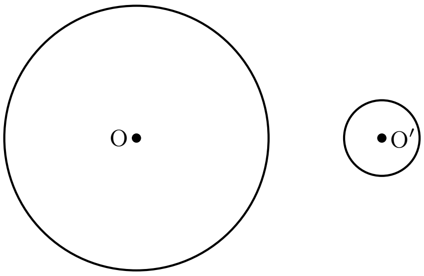
問題 A3.2.11 ★★　解答 p.244

▶ 節末 A3.2.4

長さ 1 の線分が与えられたとき，2 次方程式 $x^2 + 4x - 1 = 0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ．

例題 A3.2.12　2 つの円の共通接線の作図　★★★

右の図のように，半径がそれぞれ r, r' $(r > r')$ である 2 つの円 O，O$'$ がある．この 2 つの円の共通外接線を作図せよ．



解説動画

考え方 2 つの円が，共通接線 l の同じ側にあるとき，この l を 2 つの円の**共通外接線**という．一方，2 つの円が共通接線 l の両側にあるとき，この l を 2 つの円の**共通内接線**という．なお，ここでは 2 つの円は離れているから，共通外接線は 2 本あることに注意すること．

解答

[1] 線分 OO$'$ を直径とする円をかく．

[2] O を中心とする半径 $r - r'$ の円をかく．

[3] [1] の円と [2] の円の交点を P，Q とする．

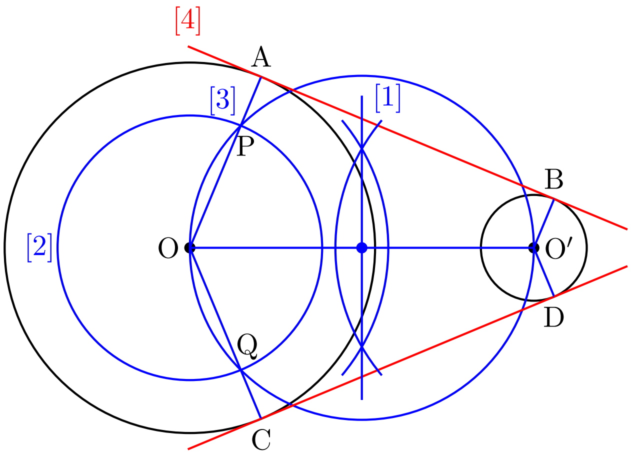
[4] 半直線 OP，OQ と円 O の交点を，それぞれ A，C とする．また，点 O$'$ を通り，線分 OA，OC に平行な直線と円 O$'$ との交点を，それぞれ B，D とする．このとき，直線 AB と直線 CD を引くと，この 2 直線が 2 つの円 O，O$'$ の共通外接線である．

$\angle\mathrm{OPO'} = 90^\circ$，$\mathrm{AP} = \mathrm{OA} - \mathrm{OP} = r - (r - r') = r'$ であり，$\mathrm{OA} /\!/ \mathrm{O'B}$ であるから，四角形 APO$'$B は長方形となる．

したがって，$\angle\mathrm{OAB} = \angle\mathrm{O'BA} = 90^\circ$

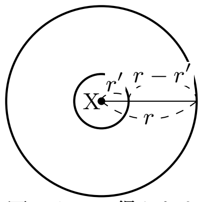
よって，直線 AB は 2 つの円 O，O$'$ の共通外接線である．

直線 CD についても同様に示される．



◀ 垂直二等分線を引く．

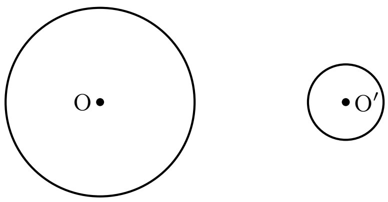
◀ 点 X を中心とする半径 r, r' の円をかいたとき，交点の間の距離が $r - r'$ となる．



◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

問題 A3.2.12 ★★★　解答 p.245

右の図のように，半径がそれぞれ r, r' $(r > r')$ である 2 つの円 O，O$'$ がある．この 2 つの円の共通内接線を作図せよ．



節末問題 3.2 円の性質と作図

節末 A3.2.1 ★★★ 解答（節末）p.246

△ABC の内心を I，△BCI の外心を O とする．4 点 A，B，C，O は同一円周上にあることを示せ．

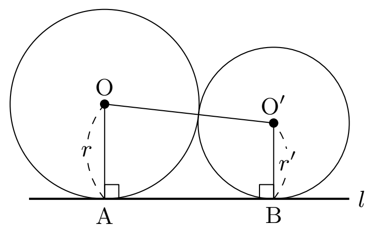
節末 A3.2.2 ★★ 解答（節末）p.247

▶ 例題 A3.2.7 ▶ 例題 A3.2.8

右の図のように，半径 r，r' $(r > r')$ の円 O と O$'$ が外接しており，さらに直線 l にそれぞれ A, B で接しているとする．このとき，次の問いに答えよ．

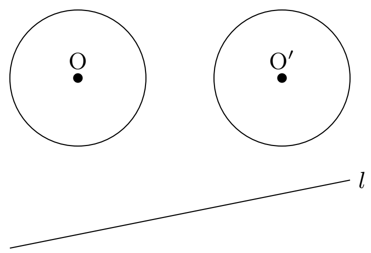
(1) 線分 AB の長さを r，r' で表せ．

(2) 2 つの円 O，O$'$ に外接し，さらに線分 AB に接する円 O$''$ の半径 x を求めよ．



節末 A3.2.3 ★★ 解答（節末）p.248

右の図のように,半径が等しい 2 つの円 O，O$'$ と直線 l がある．直線 l 上に中心があり，この 2 つの円 O，O$'$ に外接する円を作図せよ．



節末 A3.2.4 ★★ 解答（節末）p.248

▶ 例題 A3.2.11

長さ 3 の線分が与えられたとき，連立方程式 $x + y = 3$，$xy = 1$ の解を長さとする線分を作図せよ．

数学 A
3.3

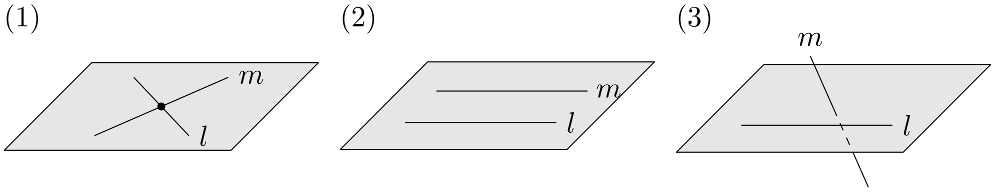
3.3 空間図形

3.3.1 2 直線間の位置関係

(1) 1 点で交わる
同じ平面上にあり，ただ 1 つの共有点をもつ．
(2) 平行
同じ平面上にあり，共有点はない．このとき，$l /\!/ m$ と表す．
(3) ねじれの位置
同じ平面上にない．l と m は共有点をもたず，平行でもない．

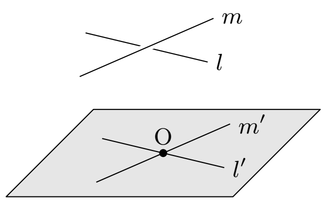
◀ (3) は，1 つの平面上にある (1)，(2) とは違い，空間内のみで成り立つ概念であるので注意すること．

(1) (2) (3)



3.3.2 2 直線のなす角

空間内の 2 直線がねじれの位置にあるとき，空間内に 1 点 O をとり，O を通り l，m に平行な直線をそれぞれ l'，m' とする．このとき，l' と m' のなす角は点 O のとり方によらず一定であり，そのなす角を **2 直線 l と m のなす角**という．

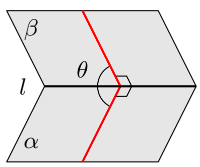


◀ 2 直線がねじれの位置にある場合でも，2 直線のなす角を考えることができる．

3.3.3 直線と平面の平行

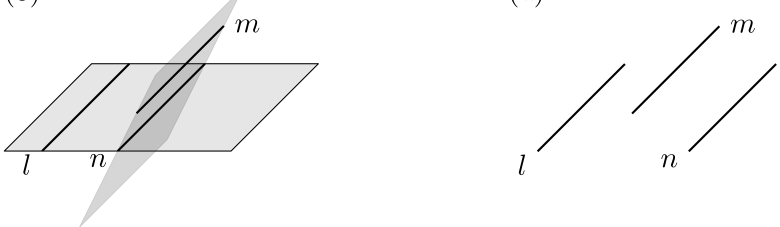
(1) 2 直線 l，m が平行のとき，m を含み，l を含まない平面 α は l に平行である．
(2) 直線 l と平面 α が平行のとき，l を含む平面と α との交線 m は l に平行である．
(3) 2 直線 l，m が平行のとき，1 つの直線を含み，もう 1 つの直線を含まない 2 平面の交線を n とすれば，l と n，m と n は平行である．
(4) 3 直線 l，m，n について，$l /\!/ m$，$m /\!/ n$ ならば，$l /\!/ n$ である．

◀ なお，交わる 2 平面の交線上の点から，それぞれの平面上に，交線に対して垂直に引いた 2 直線のなす角を 2 平面 α，β のなす角という．



(1) (2)

(3) (4)

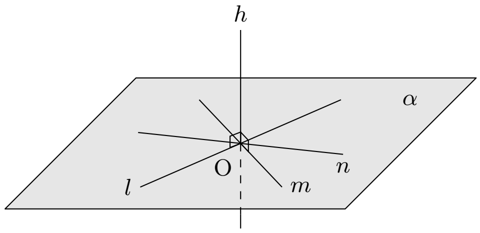


One math

3.3.4 直線と平面の垂直

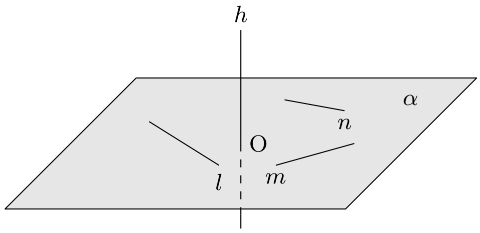
(1)

(1) 直線 h と平面 α の交点を O とするとき，O を通り α 上に引いた 2 直線 l，m に h が垂直のとき，h は O を通る α 上の任意の直線 n に垂直である．

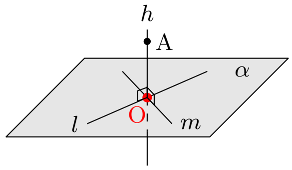


(2)

(2) 直線 h と平面 α があり，h が α 上の平行ではない 2 直線 l，m に垂直のとき，h は α 上の任意の直線 n に垂直である．



◀ なお，平面 α 上にない点 A を通る α の垂線が，平面 α と点 O で交わるとき，その交点を点 A から平面 α 上に下ろした垂線の足という．



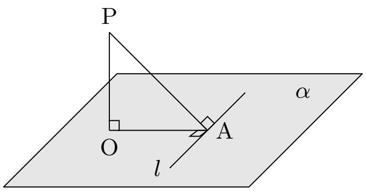
3.3.5 三垂線の定理

平面 α 上の直線 l，直線 l 上の点 A，l 上にないα 上の点 O，平面 α 上にない点 P があるとき，

(1) $\mathrm{PO} \perp \alpha$，$\mathrm{OA} \perp l \Longrightarrow \mathrm{PA} \perp l$

(2) $\mathrm{PO} \perp \alpha$，$\mathrm{PA} \perp l \Longrightarrow \mathrm{OA} \perp l$

(3) $\mathrm{PA} \perp l$，$\mathrm{OA} \perp l$，$\mathrm{PO} \perp \mathrm{OA} \Longrightarrow \mathrm{PO} \perp \alpha$



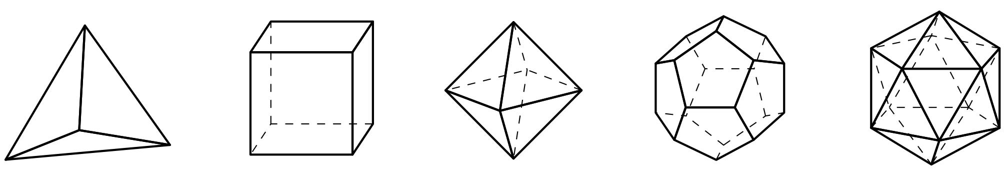
◀ 三垂線の定理は実用的な定理ではないといわれることもある．

3.3.6 多面体・オイラーの定理

(1) 三角柱，四角錐などのように，いくつかの多角形で囲まれた空間図形を**多面体**という．

(2) 多面体のうち，どの 2 つの頂点を結んだ線分も多面体内に含まれるものを**凸多面体**という．

凸多面体のうち，各面が合同な正多角形で，各頂点に集まる面，辺の数が等しいものを**正多面体**という．正多面体は，次の 5 種類しかないことが知られている．



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

◀ これらの 5 種類の正多面体をプラトン立体ということもある．また，正多面体の各面の形は，正三角形，正方形，正五角形のいずれかである．

(3) 凸多面体で，頂点，辺，面の数をそれぞれ v，e，f とすると，

$$\boldsymbol{v - e + f = 2}$$

が成り立つ．これを**オイラーの定理**という．

◀ オイラーの（多面体）定理ともいう．

例題 A3.3.1 直線と平面の垂直 ★★

正四面体 ABCD について，次のことを示せ．
(1) 辺 AB の中点を M とするとき，辺 AB は平面 CDM に垂直である．
(2) 辺 BC，AC，AD，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S とするとき，四角形 PQRS は正方形である．

解説動画

考え方

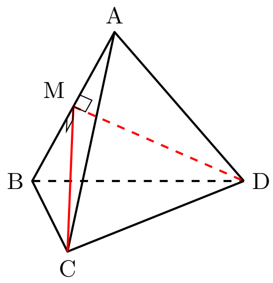
(1) 「直線 h が平面 α 上の交わる 2 直線に垂直 $\Longrightarrow$ 直線 $h \perp$ 平面 α」が成り立つことを利用する．
(2) PQ = QR = RS = SP であることと，1 つの内角が 90° であることを示す．示すためには，平行な 2 直線の一方に垂直な直線は，他方にも垂直であることを利用するとよい．(1) より，AB ⊥ CD がわかるから，これと AB∥PQ，CD∥QR より PQ ⊥ QR を導くことができる．

解答

(1) CM，DM はそれぞれ，正三角形である △ABC と △ABD の中線であるから，

$$CM \perp AB, \quad DM \perp AB$$

よって，辺 AB は平面 CDM に垂直である． ■



◀ 正三角形の中線は，底辺の垂直二等分線と一致する．

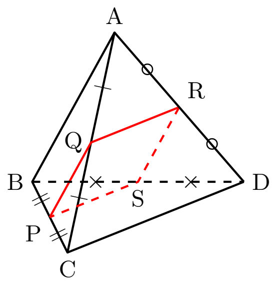
(2) 正四面体の各面の正三角形において，中点連結定理より，

$$PQ = QR = RS = SP$$

また，AB∥PQ，AB∥RS であるから，

$$PQ /\!/ RS$$

したがって，4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある．
さらに，CD∥QR であり，(1) より，AB ⊥ CD
ゆえに，PQ ⊥ QR，すなわち，∠PQR = 90°
よって，各辺の長さが等しく，1 つの内角が 90° であるから，四角形 PQRS は正方形である． ■



◀ 平行な 2 直線から，平面が定まる．

◀ AB∥PQ，AB ⊥ CD
$\Longrightarrow$ PQ ⊥ CD
よって，
CD∥QR，PQ ⊥ CD
$\Longrightarrow$ PQ ⊥ QR

問題 A3.3.1 ★★ 解答 p.249

▶ 節末 A3.3.1 ▶ 節末 A3.3.3

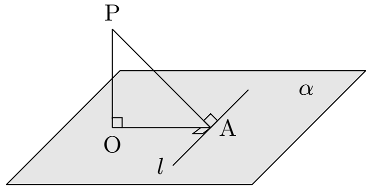
四面体 ABCD において，AB ⊥ CD，AC ⊥ BD であるとする．このとき，A から平面 BCD に垂線 AH を下ろすとき，点 H は △BCD の垂心であることを示せ．

例題 A3.3.2 三垂線の定理 ★★★

l を平面 α 上の直線，P を平面 α 上にない点，A を直線 l 上の点，O を l 上にない平面 α 上の点とするとき，

$$\mathrm{PA} \perp l,\ \mathrm{OA} \perp l,\ \mathrm{PO} \perp \mathrm{OA} \text{ ならば，} \mathrm{PO} \perp \alpha$$

が成り立つことを示せ．



解説動画

考え方 この例題と下の問題は，三垂線の定理といわれる定理を証明している．PO $\perp \alpha$ を示すためには，直線 PO が平面 α 上の交わる 2 直線に垂直であることを示せばよい．そこで，直線 l に注目し，PO $\perp \ell$ を示すことから考えるとよい．

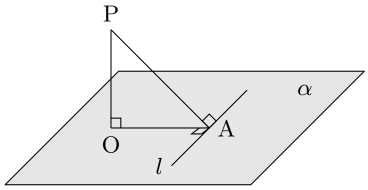
解答

PA $\perp l$，OA $\perp l$ より，l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PA，OA に垂直であるから，$l \perp$ 平面 AOP

◀ 直線 PA，OA は点 A で交わる．

PO は平面 AOP 上にあるから，

$$\mathrm{PO} \perp l \cdots \text{(i)}$$



また，仮定より，PO $\perp$ OA $\cdots$ (ii)

よって，(i)，(ii) より，直線 PO は平面 α 上の交わる 2 直線 l，OA と垂直であるから，PO $\perp \alpha$ ■

◀ 直線 l, OA は点 A で交わる．

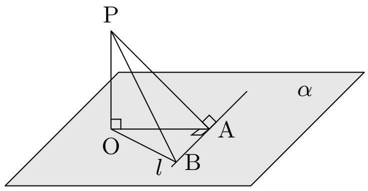
【別解】

直線 l 上に，A と異なる点 B をとる．

三平方の定理より，

$$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{PB}^2 \cdots \text{(i)},$$
$$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OB}^2 \cdots \text{(ii)},$$
$$\mathrm{PO}^2 + \mathrm{OA}^2 = \mathrm{PA}^2 \cdots \text{(iii)}$$

◀ △PAB，△OAB，△AOP は直角三角形である．



(i)〜(iii) より，

$$\mathrm{PO}^2 + \mathrm{OB}^2 = \mathrm{PB}^2$$

◀ (ii) より，

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OB}^2 - \mathrm{OA}^2$$

これと (iii) を (i) に代入すると，

$$\mathrm{PO}^2 + \mathrm{OB}^2 = \mathrm{PB}^2$$

が得られる．

三平方の定理の逆より，$\angle\mathrm{POB} = 90°$，すなわち，PO $\perp$ OB $\cdots$ (iv)

また，仮定より，PO $\perp$ OA $\cdots$ (v)

よって，(iv)，(v) より，直線 PO は平面 α 上の交わる 2 直線 OB，OA と垂直であるから，PO $\perp \alpha$ ■

◀ 三垂線の定理のうちの 1 つが示された．

問題 A3.3.2 ★★★ 解答 p.249

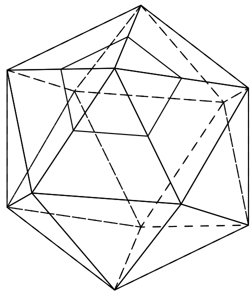
▶ 節末 A3.3.2

l を平面 α 上の直線，P を平面 α 上にない点，A を直線 l 上の点，O を l 上にない平面 α 上の点とするとき，次のことを示せ．

(1) PO $\perp \alpha$，PA $\perp l$ ならば OA $\perp l$　　(2) PO $\perp \alpha$，OA $\perp l$ ならば PA $\perp l$

例題 A3.3.3 多面体の面・辺・頂点の数 ★★★

正二十面体において，各辺の中点を通る平面ですべてのかどを切り取ったときにできる多面体の面の数 f，辺の数 e，頂点の数 v をそれぞれ求めよ．



解説動画

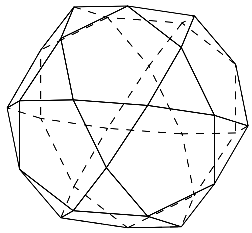
考え方 先に，正二十面体の辺の数と頂点の数を求め，次にすべてのかどを切り取ったときにできる多面体について考えるとよい．正多面体の辺の数は，

$$(1\ \text{つの面の辺の数}) \times (\text{面の数}) \div 2$$

で求まり，正多面体の頂点の数は，

$$(1\ \text{つの面の頂点の数}) \times (\text{面の数}) \div (1\ \text{つの頂点に集まる面の数})$$

で求めることができる．また，多面体の頂点の数 v，辺の数 e，面の数 f について，オイラーの（多面体）定理 $v-e+f=2$ を利用するとよい．なお，すべてのかどを切り取ったときにできる多面体は右の図のようになり，二十面十二面体ということがある．



解答

正二十面体は，各面が正三角形であり，1 つの頂点に集まる面の数は 5 個である．
したがって，正二十面体の辺の数は $3 \times 20 \div 2 = 30$
頂点の数は，$3 \times 20 \div 5 = 12 \cdots$ (i)
ここで，正二十面体の 1 つのかどを切り取ると，新しい面として正五角形の面が 1 つできる．
(i) より，新しく増える面として正五角形が 12 個できる．
ゆえに，面の数は，$f = 20 + 12 = \mathbf{32}$
辺の数は，正五角形が 12 個あるから，$e = 5 \times 12 = \mathbf{60}$
頂点の数は，オイラーの（多面体）定理から，$v = 60 - 32 + 2 = \mathbf{30}$

◀ 先に，正二十面体の辺の数と頂点の数を求める．

◀ 新しく増える面を足し合わせる．

オイラーの（多面体）定理

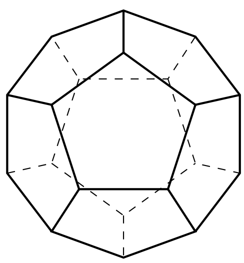
凸多面体で，頂点，辺，面の数をそれぞれ v，e，f とすると，

$$\boldsymbol{v - e + f = 2}$$

問題 A3.3.3 ★★★ 解答 p.250

▶ 節末 A3.3.3 ▶ 章末 A3.3

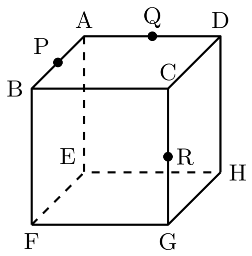
正二十面体において，各辺の中点を通る平面ですべてのかどを切り取ったときにできる多面体の面の数 f，辺の数 e，頂点の数 v をそれぞれ求めよ．



One math

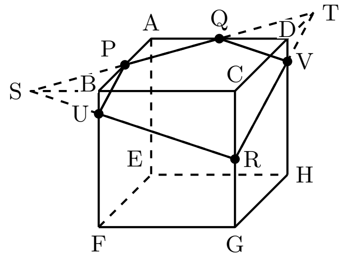
例題 A3.3.4　多面体の切断・体積　★★★

1 辺の長さが 4 の立方体 ABCD − EFGH において，辺 AB，AD，CG の中点をそれぞれ P，Q，R とする．この 3 点 P，Q，R を通る平面で立方体を切断したとき，点 C を含む部分の立体の体積を求めよ．



解説動画

考え方 切断する面と立体の面との共有点に注意すること．また，求める立体は，右の図のように交点をおくと，三角錐 RCST から三角錐 SPBU と三角錐 TDQV を除いたものであると考えるとよい．



解答

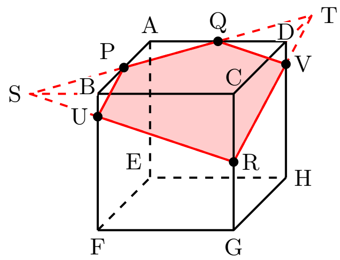
直線 PQ と直線 BC との交点を S，直線 PQ と直線 CD との交点を T とし，線分 RS と辺 BF の交点を U，線分 RT と辺 DH の交点を V とすると，切り口は五角形 PQVRU となる．
ここで，求める立体は，三角錐 RCST から三角錐 SPBU と三角錐 TDQV を除いたものである．
$\triangle APQ \equiv \triangle BPS \equiv \triangle DQT$ より，

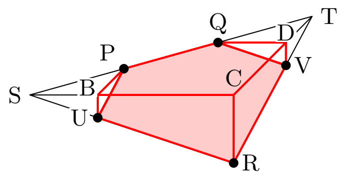
$$BP = BS = 2,\quad DQ = DT = 2$$

$\triangle CRS \backsim \triangle BUS$，$\triangle CRT \backsim \triangle DVT$ であり，相似比はともに $3:1$ であるから，

$$BU = \frac{2}{3},\quad DV = \frac{2}{3}$$

三角錐 RCST の体積は，$\frac{1}{3}\cdot\triangle CST\cdot CR = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\right)\cdot 2 = 12$
三角錐 SPBU の体積は，$\frac{1}{3}\cdot\triangle PBU\cdot BS = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 2 = \frac{4}{9}$
三角錐 TDQV の体積は，$\frac{1}{3}\cdot\triangle DQV\cdot DT = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 2 = \frac{4}{9}$
よって，求める体積は，$12 - \left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\right) = \boldsymbol{\frac{100}{9}}$





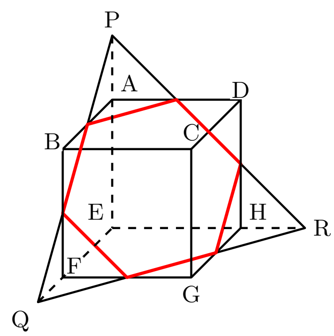
◀ 切断面を考えるとき，P と Q は立方体の同じ面上にあるから，P と Q は直接結ぶ．一方，P と R，Q と R は同じ平面上にないから，直接結ぶことができないので注意すること．

◀ $CR : BU = CS : BS$ より，$2 : BU = 6 : 2$ であるから，$BU = \frac{2}{3}$
同様にして，$DV = \frac{2}{3}$

問題 A3.3.4 ★★★　解答 p.250

▶ 節末 A3.3.4 ▶ 章末 A3.4

右の図のような三角錐 P − EQR と，1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD − EFGH における共通部分の立体の体積を求めよ．ただし，AP，FQ，HR の長さを 1 とする．

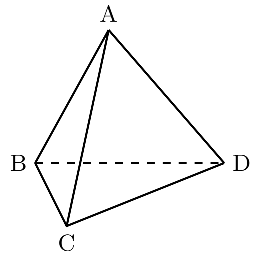


節末問題 3.3 空間図形

節末 A3.3.1 ★★ 解答（節末）p.251

▶ 例題 A3.3.1

正四面体 ABCD において，向かい合う 2 辺 AB と CD は垂直であることを示せ．



節末 A3.3.2 ★★ 解答（節末）p.251

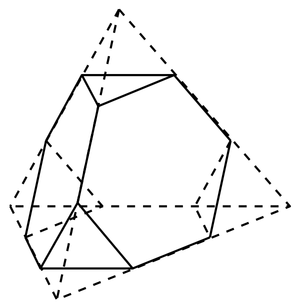
▶ 例題 A3.3.2

正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から線分 CM に下ろした垂線を OH とする．このとき，OH $\perp$ 平面 ABC であることを示せ．

節末 A3.3.3 ★★★ 解答（節末）p.252

▶ 例題 A3.3.3

1 辺の長さが 3 の正四面体がある．この正四面体を右の図のように，1 つの頂点に集まる 3 つの辺においてそれぞれ 3 等分した点のうち，頂点に近い方の点を結んでできる正三角形を含む平面で切り，頂点を含む正四面体を取り除く．すべての頂点において同様に正四面体を取り除いたとき，残った立体の体積 V を求めよ．



節末 A3.3.4 ★★★ 解答（節末）p.253

▶ 例題 A3.3.4

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD の 2 辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．2 直線 CM，DM のなす角を α，2 直線 MN，AC のなす角を β とするとき，$\cos\alpha$ と β を求めよ．

章末問題 3 図形の性質

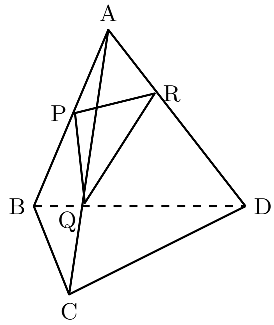
3.4 章末問題 3

章末 A3.1 ★★ 解答（章末）p.254

▶ 例題 A3.1.7

数学 A 3.4

右の図のような四面体 ABCD において，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=a_1:b_1$，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=a_2:b_2$，$\mathrm{AR}:\mathrm{RD}=a_3:b_3$ とする．このとき，四面体 APQR と四面体 ABCD の体積比を求めよ．



章末 A3.2 ★★ 解答（章末）p.254

1 辺の長さが 2 の立方体がある．この立方体の各面の正方形における，対角線の交点を頂点とする正八面体について，次の問いに答えよ．

(1) 正八面体の 1 辺の長さを求めよ．　　(2) 正八面体の体積を求めよ．

章末 A3.3 ★★★★ 解答（章末）p.255

▶ 例題 A3.3.3

各面が正三角形である正多面体は何種類あるか．すべて挙げよ．

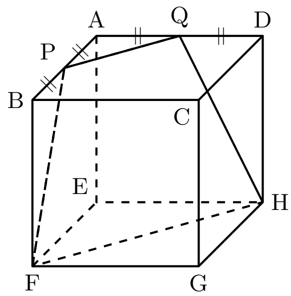
章末 A3.4 ★★★ 解答（章末）p.256

▶ 例題 A3.3.4

1 辺の長さが 8 の立方体 ABCD − EFGH において，辺 AB，AD の中点をそれぞれ P，Q とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 立体 PQA − EFH の体積を求めよ．

(2) 台形 PQHF の面積を求めよ．



第 4 章　数学と人間の活動

4 章：数学と人間の活動（再生リスト）

4　数学と人間の活動

1 節 約数と倍数（pp.130-146），2 節 ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法（pp.147-168）

数学 A
4.0

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.1.1	★★		
A4.1.2	★★		
A4.1.3	★★		
A4.1.4	★★		
A4.1.5	★		
A4.1.6	★★		
A4.1.7	★★		
A4.1.8	★★★		
A4.1.9	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.1.10	★		
A4.1.11	★★		
A4.1.12	★★★		
A4.1.13	★★★		
A4.1.14	★★★		
A4.2.1	★		
A4.2.2	★★★		
A4.2.3	★★		
A4.2.4	★★		
A4.2.5	★★★		
A4.2.6	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.2.7	★★★		
A4.2.8	★★★		
A4.2.9	★★★		
A4.2.10	★★★★		
A4.2.11	★★★★		
A4.2.12	★		
A4.2.13	★		
A4.2.14	★★★		
A4.2.15	★★		
A4.2.16	★★		
A4.2.17	★★		
A4.2.18	★★★		

節末問題 4.1，節末問題 4.2

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.1.1	★★		
A4.1.2	★★		
A4.1.3	★★		
A4.1.4	★★★		
A4.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.2.1	★★		
A4.2.2	★★★		
A4.2.3	★★		
A4.2.4	★★		
A4.2.5	★★		

章末問題 4

番号	難易度	1 回目	2 回目
A4.1	★★★		
A4.2	★★		
A4.3	★★★★		
A4.4	★★★		
A4.5	★★★★		

チェック例

○ · · · 考え方を理解し，解くことができた．　△ · · · 理解が不十分である．　× · · · 解くことができなかった．

One math

4.1 約数と倍数

4.1.1 約数と倍数，素数と合成数

(1) 2 つの整数 a, b について，ある整数 k を用いて $a=bk$ と表されるとき，b は a の**約数**といい，a は b の**倍数**という．

(2) 倍数の判定法

2 の倍数 $\cdots$ 一の位が偶数

3 の倍数 $\cdots$ 各位の数の和が 3 の倍数

4 の倍数 $\cdots$ 下 2 桁が 4 の倍数または 00

5 の倍数 $\cdots$ 一の位が 0 または 5

6 の倍数 $\cdots$ 2 の倍数かつ 3 の倍数

8 の倍数 $\cdots$ 下 3 桁が 8 の倍数または 000

9 の倍数 $\cdots$ 各位の数の和が 9 の倍数

10 の倍数 $\cdots$ 一の位が 0

(3) 2 以上の自然数において，1 とその数以外に約数をもたない数を**素数**といい，素数ではない数を**合成数**という．ただし，1 は素数でも合成数でもない．

整数がいくつかの整数の積で表されるとき，その積の 1 つ 1 つの整数をもとの整数の**因数**という．とくに，素数である因数を**素因数**といい，自然数を素数の積の形に表すことを**素因数分解**するという．

(4) 自然数 N が $N=p^aq^br^c\cdots$ と素因数分解されているとき，

(i) N の約数の個数は，

$$\boldsymbol{(a+1)(b+1)(c+1)\cdots}\ \textbf{(個)}$$

(ii) N の約数の総和は，

$$\boldsymbol{(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)(1+r+r^2+\cdots+r^c)\cdots}$$

◀ 00 を 4 の倍数と捉えることもできる（0 は 4 の倍数）.

◀ 000 を 8 の倍数と捉えることもできる（0 は 8 の倍数）.

◀ 素数は小さい順に，

2，3，5，7，11，13，...

と並んでおり，この列は限りなく続く（素数は無限に存在する）.

◀ 素因数分解の表し方は，素数の積の順序の違いを除けば，ただ 1 通りである（素因数分解の一意性）.

4.1.2 最大公約数と最小公倍数

(1) 2 つ以上の整数に共通する約数をそれらの整数の**公約数**といい，公約数のうち最大のものを**最大公約数**という．また，2 つ以上の整数に共通する倍数をそれらの整数の**公倍数**といい，公倍数のうち正で最小のものを**最小公倍数**という．

(2) 2 つの自然数 a, b の最大公約数が 1 であるとき，a, b は**互いに素**であるという．

(3) 2 つの自然数 a, b の最大公約数を g，最小公倍数を l とする．$a=ga'$, $b=gb'$（a', b' は互いに素な自然数）とすると，次のことが成り立つ．

$$l=a'b'g, \quad ab=gl$$

◀ 最大公約数（Greatest Common Divisor）は頭文字をとり，G.C.D と表されることがある．なお，Divisor を Measure，Factor に変えて，G.C.M や G.C.F と表されることもある．また，最小公倍数（Least Common Multiple）は頭文字をとり，L.C.M と表される．

4.1.3 整数の除法と余りによる分類

整数 a と正の整数 b について，

$$a = bq + r \quad (0 \leqq r < b)$$

を満たす整数 q，r をそれぞれ，a を b で割ったときの**商**，**余り**という．$r=0$ のとき，a は b で割り切れるという．また，$r \neq 0$ のとき，a は b で割り切れないという．

◀ 例：$13 = 6 \cdot 2 + 1$ から，13 を 6 で割ったときの商は 2，余りは 1 である．また，$-20 = 8 \cdot (-3) + 4$ から，-20 を 8 で割ったときの商は -3，余りは 4 である．

(2) 余りによる整数の分類
すべての整数 n は，正の整数 m が与えられているとき，次のいずれかの形で表される．

$$mk,\ mk+1,\ mk+2,\ \cdots,\ mk+(m-1) \quad (k \text{ は整数})$$

(3) 割り算の余りの性質
m を正の整数とし，2 つの整数 a，b を m で割ったときの余りをそれぞれ r，r' とすると，次のことが成り立つ．
(i) $a+b$ を m で割った余りは，$r+r'$ を m で割った余りに等しい．
(ii) $a-b$ を m で割った余りは，$r-r'$ を m で割った余りに等しい．
(iii) ab を m で割った余りは，rr' を m で割った余りに等しい．
(iv) a^n を m で割った余りは，r^n を m で割った余りに等しい（n は自然数）．

4.1.4 合同式

合同式は学習指導要領の範囲外の内容であるため，場合によっては省略してもよい（整数の問題を考えるときに便利なものであるため，興味がある人は取り組んで欲しい）．

以下，a，b，c，d を整数，m，n を自然数とする．
(1) a，b を m で割ったときの余りが等しいとき，a と b は **m を法として合同であるといい，$a \equiv b \pmod{m}$** と表す．また，このような式を**合同式**という．

◀ 合同という用語は図形においても用いられていたが，ここでは整数に関する合同を考えている．なお，mod は「法として」を意味するラテン語の modulo の略であり，mod. と表されることもある．

(2) 合同式の性質
反射律 $\cdots$ $\boldsymbol{a \equiv a \pmod{m}}$
対称律 $\cdots$ **$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$ のとき，$\boldsymbol{b \equiv a \pmod{m}}$**
推移律 $\cdots$ **$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$，$\boldsymbol{b \equiv c \pmod{m}}$ のとき，$\boldsymbol{a \equiv c \pmod{m}}$**
(3) $a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$ のとき，次のことが成り立つ．

(i) $a+c \equiv b+d \pmod{m}$　　(ii) $a-c \equiv b-d \pmod{m}$

(iii) $ac \equiv bd \pmod{m}$　　(iv) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

例題 A4.1.1 倍数の判定法 ★★

(1) 一の位の数字がわからない 5 桁の自然数 5197□ が 5 の倍数であり，3 の倍数でもあるとき，□ に入る一の位の数を求めよ．
(2) 5 桁の自然数 $abcde$ について，$a-b+c-d+e$ が 11 の倍数であるならば，自然数 $abcde$ も 11 の倍数であることを証明せよ．

解説動画

考え方

(1) 3 の倍数は各位の数の和が 3 の倍数であり，5 の倍数は一の位が 0 または 5 であることを利用する．
(2) $11(909a+91b+9c+d)+(a-b+c-d+e)$ の形を作り，11 の倍数となることを示す．なお，ここでは 5 桁の場合に限定したが，他の桁数においても 11 の倍数について，同じことがいえる（「偶数桁目の和」と「奇数桁目の数の和」の差が 11 の倍数であるならば，もとの自然数も 11 の倍数である）．

解答

(1) □ に入る数を a (a は整数，$0 \leqq a \leqq 9$) とする．
5197□ が 5 の倍数であるから，$a=0,\ 5 \cdots$ (i)
各桁の数字の和は，$5+1+9+7+a=22+a$ である．これが 3 の倍数となるとき，5197□ は 3 の倍数となる．
$22+a$ が 3 の倍数となり，(i) を満たすのは，$a=5$ のときである．
よって，求める一の位の数は **5** である．

◀ 一の位が 0 または 5 のとき，5 の倍数となる．

◀ 各位の数の和が 3 の倍数のとき，もとの数も 3 の倍数となる．ここでは，$a=5$ のとき，$22+a=22+5=27$ と 3 の倍数になるから，もとの数も 3 の倍数となる（$0 \leqq a \leqq 9$ より，$22 \leqq a+22 \leqq 31$）．

(2) 5 桁の自然数 $abcde$ を N とおくと，$N=10000a+1000b+100c+10d+e$
$a-b+c-d+e$ が 11 の倍数であるとき，$a-b+c-d+e=11m$（m は整数）とおけるから，

$$\begin{aligned} N &= (9999a+1001b+99c+11d)+(a-b+c-d+e) \\ &= 11(909a+91b+9c+d)+11m \\ &= 11(909a+91b+9c+d+m) \end{aligned}$$

よって，$909a+91b+9c+d+m$ は整数であるから，N は 11 の倍数である． ■

◀ $a-b+c-d+e$ に合わせて，N を式変形する．すると，9999，1001，99，11 はすべて 11 の倍数であるから，11 でくくり出すことができる．

【余談】覚えるようなものではないが，7 の倍数にもいくつかの判定法があり，そのうちの 1 つを示す．

7 の倍数の判定法

1 の位から左に向かって 3 桁ごとに区切り，左から数えて奇数番目の区画の和から偶数番目の区画の和を引いた数が 7 の倍数であれば，その数は 7 の倍数となる．

例えば，543210878 は，右のように 3 桁ごとに区切り，(i) + (iii) − (ii) を計算すると，

$$(543+878)-210=1211=7\times 173$$

これより，543210878 は 7 の倍数である．

543210878 を 3 桁ごとに区切る

$\underbrace{543}_{\text{(i)}} \mid \underbrace{210}_{\text{(ii)}} \mid \underbrace{878}_{\text{(iii)}}$

問題 A4.1.1 ★★ 解答 p.257

一の位と十の位の数字がわからない 5 桁の自然数 317□□ に，それぞれ数を入れると，9 の倍数となる．このとき，5 桁の自然数が最小となるものを求めよ．

例題 A4.1.2 自然数となる条件 ★★

(1) n を自然数とする．$\sqrt{\frac{360}{n}}$ が自然数となるような n をすべて求めよ．

(2) $\frac{n}{4}$，$\frac{n^2}{36}$，$\frac{n^3}{540}$ がすべて自然数となるような最小の自然数 n を求めよ．

解説動画

考え方

(1) $\sqrt{A^m}$ (mは偶数) の形になれば，根号を外すことができるから，根号の中を素因数分解して，素因数の指数が偶数となるときを考える．

(2) 分数が整数となるのは，分子が分母の倍数となるときであることを利用する．$n = 4k$ とおいて，$\frac{n^2}{36}$，$\frac{n^3}{540}$ が自然数となる条件を順番に考える．

解答

(1) $\sqrt{\frac{360}{n}}$ が自然数となるのは，$\frac{360}{n}$ がある自然数の 2 乗になるとき，つまり，$\frac{360}{n}$ を素因数分解したときの素因数の指数がすべて偶数となるときである．

360 を素因数分解すると，$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

◀
$$\begin{array}{r|l} 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

したがって，求める自然数 n は，$n = 2 \cdot 5$，$2^3 \cdot 5$，$2 \cdot 3^2 \cdot 5$，$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

よって，$n =$ **10，40，90，360**

(2) $\frac{n}{4}$ が自然数となるのは，n が 4 の倍数のときである．

したがって，$n = 4k$（k は自然数）とおくと，$n = 2^2 \cdot k$

◀ 分母が 4 であることから，$n = 4k$ とおく．

このとき，

$$\frac{n^2}{36} = \frac{(2^2 \cdot k)^2}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{2^2 \cdot k^2}{3^2}$$

これが自然数となるのは，k が 3 の倍数のときである．

ゆえに，$k = 3l$（l は自然数）とおくと，$n = 2^2 \cdot 3 \cdot l$

◀ 分母が 3^2 であることから，$k = 3l$ とおく．

このとき，

$$\frac{n^3}{540} = \frac{(2^2 \cdot 3 \cdot l)^3}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5} = \frac{2^4 \cdot l^3}{5}$$

これが自然数となるのは，l が 5 の倍数のときである．

したがって，$l = 5m$（m は自然数）とおくと，

◀ 分母が 5 であることから，$l = 5m$ とおく．

$$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m$$

よって，これが自然数となるもので最小のものは，$m = 1$ のときであるから，

◀ m が最小のとき，n も最小となる．

$$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{60}$$

問題 A4.1.2 ★★ 解答 p.257

(1) n を自然数とする．$\sqrt{27000n}$ が自然数となるような最小の n を求めよ．

(2) $\frac{n}{6}$，$\frac{n^2}{196}$，$\frac{n^3}{1323}$ がすべて自然数となるような最小の自然数 n を求めよ．

例題 A4.1.3 約数の個数と自然数 ★★

(1) 240 の正の約数の個数と，正の約数の総和を求めよ．
(2) 45 の倍数のうち，正の約数の個数が 15 個である自然数 n をすべて求めよ．
(3) 100 以下の自然数のうち，正の約数が 6 個である自然数の個数を求めよ．

解説動画

考え方 約数の個数，総和は次のようになることを利用する．

正の約数の個数と総和

自然数 N が $N = p^a q^b r^c \cdots$ と素因数分解されているとき，
N の約数の個数は，$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots$ (個)
N の約数の総和は，$(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)(1+r+r^2+\cdots+r^c)\cdots$

解答

(1) $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ であるから，正の約数の個数は，

$$(4+1)(1+1)(1+1) = 5 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{20}\ \textbf{(個)}$$

また，正の約数の総和は，

$$\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)(1+3)(1+5) = 31 \cdot 4 \cdot 6 = \mathbf{744}$$

(2) 15 を素因数分解すると，$15 = 3 \cdot 5$
したがって，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を素因数分解すると，p^{14}，p^2q^4 (p，q は異なる素数) のいずれかの形で表される．
n は 45 の倍数であり，$45 = 3^2 \cdot 5$ であるから，n は p^2q^4 の形で表される．
ゆえに，求める自然数 n は，$n = 5^2 \cdot 3^4$，$3^2 \cdot 5^4$
よって，$n = \mathbf{2025}$，$\mathbf{5625}$

◀ $15 = 15 \cdot 1 = 3 \cdot 5$ より，$p^{15-1}q^{1-1}$ または $p^{3-1}q^{5-1}$

◀ p^{14} の場合は起こらない．

(3) 6 を素因数分解すると，$6 = 2 \cdot 3$
したがって，正の約数の個数が 6 個である自然数 n を素因数分解すると，p^5，p^2q (p，q は異なる素数）のいずれかの形で表される．

(i) 自然数 n が p^5 の形で表されるとき
$2^5 = 32$ が条件を満たすから，1 個
(ii) 自然数 n が p^2q の形で表されるとき

$$2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 7,\ 2^2\cdot 11,\ 2^2\cdot 13,\ 2^2\cdot 17,\ 2^2\cdot 19,\ 2^2\cdot 23,$$
$$3^2\cdot 2,\ 3^2\cdot 5,\ 3^2\cdot 7,\ 3^2\cdot 11,\ 5^2\cdot 2,\ 5^2\cdot 3,\ 7^2\cdot 2$$

が条件を満たすから，15 個

よって，(i)，(ii) より，$1 + 15 = \mathbf{16}$ **(個)**

◀ p^5 の正の約数の個数は，$(5+1) = 6$ (個) であり，p^2q の正の約数の個数は，$(2+1)(1+1) = 6$ (個) である．
◀ 3^5 は $3^5 = 243$ であるから，条件を満たさない．

問題 A4.1.3 ★★ 解答 p.258　▶ 節末 A4.1.1

(1) 360 の正の約数の個数と，正の約数の総和を求めよ．
(2) 18 の倍数のうち，正の約数の個数が 9 個である自然数 n をすべて求めよ．
(3) 400 以下の自然数のうち，正の約数が 15 個である自然数の個数をすべて求めよ．

例題 A4.1.4 素因数の個数 ★★

(1) 13! が 2^k で割り切れるとき，自然数 k の最大値を求めよ．

(2) 60! は，末尾には 0 が何個連続して並ぶ整数であるか答えよ．

解説動画

考え方

(1) $13! \div 2^k = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{2^k}$ であるから，2^k で割り切れるとき，自然数 k の最大値は 13! が 2 を因数として何個含むかを考えればよい．

(2) 一の位から連続して並ぶ 0 の個数は，60! に含まれる因数 10 の個数に等しい．$10 = 2\cdot5$ であり，60! には因数 2 の方が因数 5 より多く含まれることを利用する（末尾に並ぶ 0 の個数は，素因数 5 の個数と一致する）．

解答

(1) 1 から 13 までの自然数について，

$$2 \text{ の倍数は } 6 \text{ 個，} 2^2 \text{ の倍数は } 3 \text{ 個，} 2^3 \text{ の倍数は } 1 \text{ 個}$$

◀ 2，4，8 の倍数の個数をそれぞれ求める．

$13 = 2\times6+1$，

$13 = 4\times3+1$，

$13 = 8\times1+5$

一般に，1 から n までの整数のうち，k の倍数の個数は，n を k で割った商に等しい．

したがって，13! に含まれる因数 2 の個数は，

$$6+3+1 = 10 \text{ (個)}$$

よって，求める自然数 k の最大値は，$k = \mathbf{10}$

(2) 求める 0 の個数は 60! に含まれる因数 10 の個数に等しい．また，$10 = 2\cdot5$ であり，60! に含まれる因数 5 の個数が因数 2 の個数より少ないので，因数 10 の個数は因数 5 の個数に等しい．

◀ 1 から 60 までの自然数について，2 の倍数は 30 個，5 の倍数は 12 個である．

1 から 60 までの自然数について，

$$5 \text{ の倍数は } 12 \text{ 個，} 5^2 \text{ の倍数は } 2 \text{ 個}$$

◀ 5，25 の倍数の個数をそれぞれ求める．

$60 = 5\times12$，

$60 = 25\times2+10$

したがって，60! に含まれる因数 5 の個数は，

$$12+2 = 14 \text{ (個)}$$

よって，求める 0 の個数は，**14 個**

【余談】 $n!$ に含まれる素因数 p の個数は，n 以下の自然数のうち p，p^2，p^3，... の倍数となる数の個数の和を考えることで求めることができる．なお，(1) において，13! に含まれる素因数 2 の個数は，次のような表を用いると，因数 2 の個数が 10 個となることがわかりやすく理解できる．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2 の倍数		○		○		○		○		○		○	
2^2 の倍数				○				○				○	
2^3 の倍数								○					

問題 A4.1.4 ★★ 解答 p.259

▶ 節末 A4.1.2 ▶ 章末 A4.1

(1) 15! が 2^k で割り切れるとき，自然数 k の最大値を求めよ．

(2) 50! は，末尾には 0 が何個連続して並ぶ整数であるか答えよ．

例題 A4.1.5 最大公約数・最小公倍数 1 ★

(1) 次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めよ．

(i) 198，276　　(ii) 450，630，840

(2) n を正の整数とする．n と 18 の最小公倍数が 72 となるような n をすべて求めよ．

解説動画

数学 A 4.1

考え方 最大公約数と最小公倍数を求めるときは，素因数分解を利用するとよい．

(1) 与えられた数をそれぞれ素因数分解し，次のように考えればよい．

最大公約数 ･･･ 共通する素因数を選び，それらの指数のうち 最小のもの を掛け合わせる．

最小公倍数 ･･･ すべての素因数を選び，それらの指数のうち 最大のもの を掛け合わせる．

例えば (i) は，$198 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$，$276 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 23 = 2^2 \cdot 3 \cdot 23$

これより，最大公約数は $2 \cdot 3 = 6$ となり，最小公倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 = 9108$ となる．

解答

(1) (i) 与えられた 2 つの数を素因数分解すると，

$$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11, \quad 276 = 2^2 \cdot 3 \cdot 23$$

最大公約数は，$2 \cdot 3 = \mathbf{6}$

最小公倍数は，$2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 = \mathbf{9108}$

(ii) 与えられた 3 つの数を素因数分解すると，

$$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2, \quad 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \quad 840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

最大公約数は，$2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{30}$

最小公倍数は，$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = \mathbf{12600}$

(2) 18，72 をそれぞれ素因数分解すると，

$$18 = 2 \cdot 3^2, \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

したがって，18 との最小公倍数が 72 である正の整数は，$2^3 \cdot 3^a$ $(a = 0,\ 1,\ 2)$

ゆえに，求める正の整数 n は，

$$n = 2^3 \cdot 3^0, \quad 2^3 \cdot 3^1, \quad 2^3 \cdot 3^2$$

よって，$n = \mathbf{8,\ 24,\ 72}$

◀
$$\begin{array}{r|l} 2 & 198 \\ 3 & 99 \\ 3 & 33 \\ & 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 276 \\ 2 & 138 \\ 3 & 69 \\ & 23 \end{array}$$

◀ 共通する素因数は，2，3，5 であり，すべての素因数は，2，3，5，7 であると考える．それらの指数のうち，それぞれ最小のもの，最大のものを掛け合わせる．

◀ n は複数の値が考えられるので注意すること．

問題 A4.1.5 ★ 解答 p.259

▶ 節末 A4.1.3

(1) 次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めよ．

(i) 144，192　　(ii) 210，360，540

(2) n を正の整数とする．n と 20 の最小公倍数が 80 となるような n をすべて求めよ．

例題 A4.1.6 最大公約数・最小公倍数 2 ★★

次の条件を満たす 2 つの自然数 a, b の組をすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

(1) 和が 150，最大公約数が 10　　(2) 積が 180，最小公倍数が 60

解説動画

考え方 2 つの自然数 a, b の最大公約数 g と最小公倍数 l を，$a=ga'$，$b=gb'$（a', b' は互いに素な自然数）とおき，$l=a'b'g$，$ab=gl$ が成り立つことを利用する．また，a', b' は互いに素であることから，a', b' の値を定める．

解答

(1) 最大公約数が 10 であるから，2 つの自然数 a, b は $a=10a'$，$b=10b'$ とおける．ただし，a', b' は互いに素な自然数であり，$a<b$ より，$a'<b'$

◀ $a=ga'$，$b=gb'$

和が 150 であるから，$10a'+10b'=150$

したがって，$a'+b'=15$

これを満たす，互いに素な自然数 a', b' の組は，

$$(a',\ b')=(1,\ 14),\ (2,\ 13),\ (4,\ 11),\ (7,\ 8)$$

◀「a, b が互いに素 $\Longleftrightarrow$ a, b の最大公約数が 1」が成り立つ．これより，例えば，$(a',\ b')=(3,\ 12)$ は，a' と b' が互いに素ではないので不適である（最大公約数が 1 ではない）．

よって，

$$(a,\ b)=\mathbf{(10,\ 140),\ (20,\ 130),\ (40,\ 110),\ (70,\ 80)}$$

(2) 最大公約数を g とすると，積が 180，最小公倍数が 60 であるから，$180=g\cdot 60$

したがって，$g=3$ であるから，$a=3a'$，$b=3b'$ とおける．ただし，a', b' は互いに素な自然数であり，$a<b$ より，$a'<b'$

◀ $a=ga'$，$b=gb'$

$60=3a'b'$ が成り立つから，$a'b'=20$

◀ $l=a'b'g$

これを満たす，互いに素な自然数 a', b' の組は，

$$(a',\ b')=(1,\ 20),\ (4,\ 5)$$

よって，

$$(a,\ b)=\mathbf{(3,\ 60),\ (12,\ 15)}$$

One Point

a，b の最大公約数が g のとき，$a=a'g$，$b=b'g$（a' と b' は互いに素な自然数）とおく．

問題 A4.1.6 ★★ 解答 p.260

次の条件を満たす 2 つの自然数 a, b の組をすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

(1) 和が 180，最大公約数が 15　　(2) 積が 400，最小公倍数が 80

例題 A4.1.7 互いに素に関する証明 1 ★★

n を自然数とする．$n+2$ が 5 の倍数であり，$n+3$ が 7 の倍数であるとき，$n+17$ が 35 の倍数であることを証明せよ．

解説動画

考え方 n のみを用いて証明するのが難しい場合，別の文字を用いて表すことを考えるとよい．$n+2=5k$，$n+3=7l$ (k，l は自然数) とおき，$n+17$ が 35 の倍数であることを証明する．ここで，35 の倍数であることを証明するには，$n+17=35m$ (m は自然数) と表せることを示せばよい．

解答

$n+2$，$n+3$ は，それぞれ $n+2=5k$，$n+3=7l$ (k，l は自然数) とおける．
$n+17$ を k，l を用いて表すと，

$$n+17=(n+2)+15=5k+15=5(k+3)\cdots\text{(i)},$$

$$n+17=(n+3)+14=7l+14=7(l+2)$$

したがって，

$$5(k+3)=7(l+2)$$

5 と 7 は互いに素であるから，$k+3$ は 7 の倍数である．
ゆえに，$k+3=7m$ (m は自然数) と表せる．
(i) より，$n+17=5(k+3)=5\cdot 7m=35m$
よって，$n+17$ は 35 の倍数である． ■

◀ a，b は互いに素で，ak が b の倍数であるならば，k は b の倍数である (a，b，k は整数).

◀ m は自然数であるから，$35m$ は 35 の倍数である．

One Point

a，b は互いに素で，ak が b の倍数であるならば，k は b の倍数である（a，b，k は整数）．

問題 A4.1.7 ★★ 解答 p.260

▶ 章末 A4.2

n を自然数とする．$n+3$ が 6 の倍数であり，$n+1$ が 8 の倍数であるとき，$n+9$ が 24 の倍数であることを証明せよ．

例題 A4.1.8 互いに素に関する証明 2 ★★★

a, b を自然数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) $a+b$ と a が互いに素であるとき，a と b も互いに素であることを証明せよ．
(2) a と b が互いに素であるとき，$a+b$ と ab も互いに素であることを証明せよ．

解説動画

考え方

(1) 2 つの自然数 a, b が互いに素であるとき，a, b の最大公約数は 1 となることを利用する．a と b の最大公約数を g とすると，$a=mg$, $b=ng$ とおける．2 つの式から $a+b$ を導き，a と b が互いに素であることを示す．
(2) (1) と同様に考えようとすると，a, b を最大公約数 g で表して，$g=1$ を導くのにやや手間が掛かる．そこで，背理法を用いた証明を考えるとよい．「$a+b$ と ab が互いに素である」の否定「$a+b$ と ab が互いに素ではない」を仮定して，矛盾を導く．

解答

(1) a と b の最大公約数を g とすると，

◀ g は自然数である．

$$a=mg\cdots(\text{i}),\quad b=ng\cdots(\text{ii})$$

とおける．
ただし，m と n は互いに素な自然数とする．
(i)，(ii) の辺々を足し合わせると，$a+b=mg+ng=(m+n)g$

◀ $a+b$ を g で表すことを考える．

$m+n$ は自然数であるから，g は $a+b$ の約数である．
また，(i) より，g は a の約数である．
したがって，g は $a+b$ と a の公約数であり，$a+b$ と a は互いに素であるため，$g=1$ となる．
よって，最大公約数が 1 であるから，a と b は互いに素である．■

(2) $a+b$ と ab が互いに素ではないと仮定すると，$a+b$ と ab は共通の素数 p を約数にもち，

◀ 背理法を用いる．m と n が互いに素ではない ⇔ m と n が素数を公約数にもつ

$$a+b=pm\cdots(\text{i}),\quad ab=pn\cdots(\text{ii})$$

とおける．ただし，m, n は整数である．
このとき，(ii) より，p は a または b の約数である．
p が a の約数であるとき，$a=pk$ （k は整数）とおくと，(i) より，$b=(m-k)p$
$m-k$ は整数であるから，p は b の約数である．
p が b の約数であるときも，同様にして p は a の約数である．

◀ $b=pk'$ （k' は整数）とおくと，$a=(m-k')p$ より，p は a の約数である．

したがって，p は a と b の公約数となり，これは a と b が互いに素であることに矛盾する．
よって，$a+b$ と ab は互いに素である．■

問題 A4.1.8 ★★★ 解答 p.261

▶ 節末 A4.1.4 ▶ 章末 A4.3

a, b を自然数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) $a+b$ と ab が互いに素であるとき，a と b も互いに素であることを証明せよ．
(2) a と b が互いに素であるとき，a^2 と b^2 も互いに素であることを証明せよ．

例題 A4.1.9 互いに素な自然数の個数 ★★★

n 以下の自然数で，n と互いに素である自然数の個数を $f(n)$ とするとき，次の値を求めよ．ただし，p, q は異なる素数とする．

(1) $f(72)$　　　(2) $f(pq)$　　　(3) $f\left(p^n\right)$

解説動画

考え方 補集合を用いるとよい．n と互いに素であることから，n と 1 以外に公約数をもたない個数を求める．

数学 A 4.1

解答

(1) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ であるから，72 と互いに素ではない自然数は，2 または 3 の倍数である．
72 以下の自然数について，

$$2 \text{ の倍数は } 36 \text{ 個，} 3 \text{ の倍数は } 24 \text{ 個，} 6 \text{ の倍数は } 12 \text{ 個}$$

◀ 2, 3, 6 の倍数の個数をそれぞれ求める．$72 = 2 \cdot 36$，$72 = 3 \cdot 24$，$72 = 6 \cdot 12$

したがって，72 以下の自然数のうち 2 または 3 の倍数は，

$$36 + 24 - 12 = 48 \text{ (個)}$$

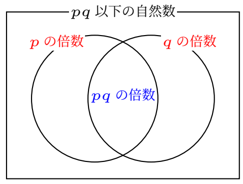
◀ $n(A \cup B)$
$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

よって，$f(72) = 72 - 48 = \mathbf{24}$

(2) p, q はともに素数であるから，pq と互いに素ではない自然数は，p または q の倍数である．
pq 以下の自然数について，

$$p \text{ の倍数は，} 1 \cdot p,\ 2 \cdot p,\ \ldots,\ (q-1)p,\ pq \text{ の } q \text{ 個，}$$
$$q \text{ の倍数は，} 1 \cdot q,\ 2 \cdot q,\ \ldots,\ (p-1)q,\ pq \text{ の } p \text{ 個，}$$
$$p \text{ の倍数かつ } q \text{ の倍数は，} pq \text{ の } 1 \text{ 個}$$

◀ $p \cdot q$ より，q 個，$q \cdot p$ より，p 個と考えてもよい．

◀


したがって，pq 以下の自然数のうち p または q の倍数は，$p + q - 1$ 個
よって，$f(pq) = pq - (p + q - 1) = \boldsymbol{pq - p - q + 1}$

(3) p^n 以下の自然数について，p の倍数は，$p^n = p \cdot p^{n-1}$ より，p^{n-1} 個
よって，$f\left(p^n\right) = \boldsymbol{p^n - p^{n-1}}$

◀ $1 \cdot p,\ 2 \cdot p,\ \ldots,\ p^{n-1} \cdot p$ の p^{n-1} 個

【余談】 自然数 N が $N = p^l q^m r^n \cdots$ (p, q, r, $\ldots$ は素数) と素因数分解されているとき，1 から N までの自然数の中で N と互いに素である整数の個数は次のようになることが知られている．

$$\phi(N) = N\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\cdots \text{ (個)}$$

この関数 $\phi(N)$ を**オイラー関数**という．なお，オイラー関数は解答に用いるのではなく，検算で用いるとよい．例えば，(1) のような $N = 72$ のとき，$72 = 2^3 \cdot 3^2$ は，$\phi(72) = 72\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24$ のように計算できる．

問題 A4.1.9 ★★★　解答 p.261

▶ 節末 A4.1.5 ▶ 章末 A4.3

n 以下の自然数で，n と互いに素である自然数の個数を $f(n)$ とするとき，次の値を求めよ．ただし，p, q, r は異なる素数とする．

(1) $f(75)$　　　(2) $f(p^2q)$　　　(3) $f\left(2^m\right)$

例題 A4.1.10 整数の除法と余り ★

a, b を整数とする．a を 5 で割ると 2 余り，b を 5 で割ると 3 余る．このとき，次の数を 5 で割った余りを求めよ．

(1) $a-3b$　　(2) ab　　(3) a^4

解説動画

考え方 $a=5k+2$, $b=5l+3$ と表して，余りを考える．なお，5 で割ることから，余り r は，$0 \leqq r<5$ であることに注意すること．

(3) $(5k+2)^4$ をそのまま展開してもよいが，計算に手間が掛かる．そこで，$a^4=(a^2)^2$ であることに注目し，a^2 を 5 で割った余りを考えるとよい．

解答

$a=5k+2$, $b=5l+3$ (k, l は整数) と表される．

(1)

$$\begin{aligned} a-3b &= 5k+2-3(5l+3) \\ &= 5k+2-15l-9 \\ &= 5(k-3l-2)+3 \end{aligned}$$

よって，求める余りは，**3**

◀ $5(k-3l-1)-2$ より，余りを -2 としてしまわないように注意すること（余り r は，$0 \leqq r<5$ であるから，不適である）．

(2)

$$\begin{aligned} ab &= (5k+2)(5l+3) \\ &= 25kl+15k+10l+6 \\ &= 5(5kl+3k+2l+1)+1 \end{aligned}$$

よって，求める余りは，**1**

(3)

$$a^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$$

◀ a^2 を 5 で割った余りから考えるとよい．

したがって，$a^2=5m+4$ (m は整数) と表されるから，

$$a^4=(a^2)^2=(5m+4)^2=25m^2+40m+16=5(5m^2+8m+3)+1$$

よって，求める余りは，**1**

One Point

整数 a と正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とするとき，$a=bq+r$ $(0 \leqq r<b)$

問題 A4.1.10 ★ 解答 p.262

a, b を整数とする．a を 7 で割ると 4 余り，b を 7 で割ると 5 余る．このとき，次の数を 7 で割った余りを求めよ．

(1) $a+2b$　　(2) ab　　(3) a^4

例題 A4.1.11 余りによる場合分け 1 ★★

n を整数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) n^2+3n+2 は偶数であることを証明せよ．
(2) n^2-2 は 3 の倍数ではないことを証明せよ．

解説動画

考え方

(1) n^2+3n+2 は偶数であることを示すので，2 で割ったときの余りで分類して考える．整数を $n=2k$，$2k+1$ (k は整数) のときに分けて，それぞれ偶数であることを示す．
(2) n^2-2 は 3 の倍数ではないことを示すので，3 で割ったときの余りで分類して考える．整数を $3k$，$3k+1$，$3k+2$ (k は整数) のときに分けて，それぞれ 3 の倍数ではないことを示す．

解答

(1) すべての整数 n は，$n=2k$，$n=2k+1$ (k は整数) のいずれかの形で表される．

(i) $n=2k$ のとき

$$n^2+3n+2=(2k)^2+3\cdot 2k+2=4k^2+6k+2=2(2k^2+3k+1)$$

◀ 偶数である（2 で割り切れる）．

(ii) $n=2k+1$ のとき

$$n^2+3n+2=(2k+1)^2+3(2k+1)+2=4k^2+10k+6=2(2k^2+5k+3)$$

◀ 偶数である（2 で割り切れる）．

よって，(i)，(ii) より，n^2+3n+2 は偶数である． ■

【別解】 $n^2+3n+2=n(n+1)+2(n+1)$
連続する 2 つの整数の積 $n(n+1)$ は偶数であり，$2(n+1)$ も偶数であるから，n^2+3n+2 は偶数である． ■

◀ 連続する 2 つの整数の積 $n(n+1)$ を作るように，式変形する．

(2) すべての整数 n は，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ （k は整数）のいずれかの形で表される．

◀ $3k\pm1$，$3k$ などと表してもよい（場合分けが楽になる）．なお，$3k\pm1$ と表した場合，
n^2-2
$=(3k\pm1)^2-2$
$=3(3k^2\pm2k)-1$ (複合同順)

(i) $n=3k$ のとき
$n^2-2=(3k)^2-2=9k^2-2=3\cdot3k^2-2$
(ii) $n=3k+1$ のとき
$n^2-2=(3k+1)^2-2=9k^2+6k-1=3\left(3k^2+2k\right)-1$
(iii) $n=3k+2$ のとき
$n^2-2=(3k+2)^2-2=9k^2+12k+2=3\left(3k^2+4k\right)+2$

よって，(i)〜(iii) より，n^2-2 は 3 の倍数ではない． ■

◀ 3 で割った余りが 0 ではない．

One Point

すべての整数は，正の整数 m を用いて，次のいずれかの形で表される．

$$mk,\ mk+1,\ mk+2,\ \cdots,\ mk+(m-1)\quad (k\ \text{は整数})$$

問題 A4.1.11 ★★ 解答 p.263

n を整数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) n^2-5n+4 は偶数であることを証明せよ．
(2) n^3+2n+1 を 3 で割った余りが 1 であることを証明せよ．

例題 A4.1.12 余りによる場合分け 2 ★★★

(1) n を整数とする．このとき，n^2 を 4 で割った余りが 0 または 1 であることを証明せよ．
(2) a, b, c を整数とする．$a^2+b^2=c^2$ のとき，a, b の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ．

解説動画

考え方

(1) 4 で割った余りで分類して考えてもよいが，場合分けに手間が掛かる．そこで，$n=2k$, $2k+1$ (k は整数) のときに分けて場合分けをするとよい．
(2)「a, b の少なくとも一方は偶数である」を直接考えようとすると，場合分けに手間が掛かる．そこで，背理法を用いた証明を考えるとよい．「a, b の少なくとも一方は偶数である」の否定「a, b はともに奇数である」と，(1) を利用して証明する．なお，$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をピタゴラス数（ピュタゴラース数）という．

数学 A 4.1

解答

(1) すべての整数 n は，$n=2k$, $n=2k+1$ (k は整数) のいずれかの形で表される．

(i) $n=2k$ のとき

$$n^2=(2k)^2=4k^2$$

となるから，n^2 を 4 で割った余りは 0 である．

◀ $n=2k$, $2k+1$ のときに分けるとよい．

(ii) $n=2k+1$ のとき

$$n^2=(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$$

となるから，n^2 を 4 で割った余りは 1 である．

よって，(i)，(ii) より，n^2 を 4 で割った余りは，0 または 1 である．■

(2) a と b がともに奇数であると仮定すると，(ii) より，a^2 と b^2 を 4 で割った余りはそれぞれ 1 である．

◀ 背理法を用いる．

したがって，a^2+b^2 を 4 で割った余りは 2 である．
一方，(1) より，c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であり，$a^2+b^2=c^2$ の両辺を 4 で割った余りと一致しないので，矛盾する．
よって，a, b の少なくとも一方は偶数である．■

◀ m, n を整数とすると，$a^2=4m+1$, $b^2=4n+1$ より，

$$a^2+b^2=4(m+n)+2$$

問題 A4.1.12 ★★★ 解答 p.264

(1) n を整数とする．このとき，n^2 を 3 で割った余りが 0 または 1 であることを証明せよ．
(2) a, b, c を整数とする．$a^2+b^2=c^2$ のとき，a, b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを証明せよ．

例題 A4.1.13 合同式の利用 1 ★★★

(1) 3^{80} を 5 で割ったときの余りを求めよ．
(2) 200^{200} を 12 で割ったときの余りを求めよ．
(3) 123^{123} の一の位の数を求めよ．

解説動画

考え方 $a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$ のとき，$a^n \equiv b^n \pmod{m}$ が成り立つことを利用する（合同式の性質）．また，合同式を用いた余りに関する問題は，周期性を上手く考えると計算が楽になることが多い．
(1) $3^n \pmod{5}$ を考えると，$3^n \equiv 1 \pmod{5}$ となる n が見つかるので，それを利用する．
(2) a^n の a を指数の底という．先に，合同式を利用して指数の底を扱いやすい数（小さい数）にしてから，余りの周期性を考えると計算が楽になる．
(3) ある自然数 N の一の位の数は，N を 10 で割った余りと等しいので，$\pmod{10}$ を考える．

解答

(1) $3^1 \equiv 3 \pmod{5}$，$3^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5}$，$3^4 \equiv 4^2 \equiv 1 \pmod{5}$ より，

$$3^{80} \equiv \left(3^4\right)^{20} \equiv 1^{20} \equiv 1 \pmod{5}$$

よって，3^{80} を 5 で割ったときの余りは，**1**

◀ $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$ より，$(3^4)^n \equiv 1 \pmod{5}$
◀ $80 = 4 \cdot 20$

(2) $200 \equiv 8 \pmod{12}$ より，$200^{200} \equiv 8^{200} \pmod{12}$
ここで，$8^2 \equiv 64 \equiv 4 \pmod{12}$，$8^3 \equiv 4 \cdot 8 \equiv 8 \pmod{12}$，$8^4 \equiv 8^2 \equiv 4 \pmod{12}$ より，k を自然数とすると，

$$8^{2k} \equiv 4 \pmod{12}$$

したがって，$200^{200} \equiv 8^{200} \equiv 4 \pmod{12}$
よって，200^{200} を 12 で割ったときの余りは，**4**

◀ $8^5 \equiv 8 \pmod{12}$，$8^6 \equiv 4 \pmod{12}, \ldots$ と余りは 4 と 8 が繰り返される．
◀ 8^{2k} において，$k = 100$ のとき，$8^{2\cdot 100} = 8^{200}$

(3)

$$123 \equiv 3 \pmod{10},\ 123^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{10},$$
$$123^3 \equiv 3^3 \equiv 7 \pmod{10},\ 123^4 \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

であるから，

$$123^{123} \equiv \left(123^4\right)^{30} \cdot 123^3 \equiv 1^{30} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{10}$$

よって，123^{123} の一の位の数は，**7**

◀ 一の位の数は，10 で割ったときの余りと等しいことから，$\pmod{10}$ を考える．
◀ $123 = 4 \cdot 30 + 3$

問題 A4.1.13 ★★★ 解答 p.265

(1) 2^{50} を 7 で割ったときの余りを求めよ．
(2) 1000^{100} を 14 で割ったときの余りを求めよ．
(3) 456^{456} の一の位の数を求めよ．

例題 A4.1.14 合同式の利用 2 ★★★

(1) n を整数とする．合同式を用いて，n^2+1 は 3 の倍数ではないことを証明せよ．
(2) n を自然数とする．合同式を用いて，$19^n+2^4\cdot(-32)^n$ は 17 の倍数であることを証明せよ．

解説動画

考え方

(1) 整数を $3k$，$3k+1$，$3k+2$ (kは整数) と分けることでも証明できるが，問題文に「合同式を用いて」とあるので，ここでは合同式を利用した証明を考える．
(2) 17 で割ることを考え，合同式を用いて指数の底を 2^n の形に合わせる．

解答

(1) すべての整数 n について，

$$n\equiv 0 \pmod 3,\quad n\equiv 1 \pmod 3,\quad n\equiv 2 \pmod 3$$

のいずれかである．

(i) $n\equiv 0 \pmod 3$ のとき，$n^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1 \pmod 3$
(ii) $n\equiv 1 \pmod 3$ のとき，$n^2+1\equiv 1^2+1\equiv 2 \pmod 3$
(iii) $n\equiv 2 \pmod 3$ のとき，$n^2+1\equiv 2^2+1\equiv 5\equiv 2 \pmod 3$

よって，(i)〜(iii) より，n^2+1 は 3 の倍数ではない． ■

◀ (i)〜(iii) のいずれの場合も，$n^2+1\equiv 0 \pmod 3$ とはならない．

(2) $19=17+2$ より，$19\equiv 2 \pmod{17}$ であるから，

$$19^n\equiv 2^n \pmod{17}$$

◀ $a\equiv b \pmod m$ のとき，
$$a^n\equiv b^n \pmod m$$

$-32=-2\cdot 17+2$ より，$-32\equiv 2 \pmod{17}$ であるから，

$$(-32)^n\equiv 2^n \pmod{17}$$

◀ 指数の底を 2^n に合わせる．

したがって，

$$19^n+2^4\cdot(-32)^n\equiv 2^n+16\cdot 2^n=17\cdot 2^n\equiv 0 \pmod{17}$$

◀ $a\equiv b \pmod m$，$c\equiv d \pmod m$ のとき，
$$a+c\equiv b+d \pmod m$$

よって，$19^n+2^4\cdot(-32)^n$ は 17 の倍数である． ■

問題 A4.1.14 ★★★ 解答 p.266

(1) n を整数とする．n^2 を 7 で割った余りをすべて求めよ．
(2) n を自然数とする．合同式を用いて，$7^n+2\cdot 5^{2n}$ は 3 の倍数であることを証明せよ．

節末問題 4.1 約数と倍数

節末 A4.1.1 ★★ 解答（節末）p.267

▶ 例題 A4.1.3

正の約数の個数が 12 個である自然数のうち，最も小さい数を求めよ．

数学 A 4.1

節末 A4.1.2 ★★ 解答（節末）p.267

▶ 例題 A4.1.4

$n!$ について，下 4 桁に 0 が 4 個連続して並ぶような最小の自然数 n を求めよ．

節末 A4.1.3 ★★ 解答（節末）p.267

▶ 例題 A4.1.5

分数 $\frac{144}{35}$，$\frac{234}{55}$ のいずれに掛けても積が自然数となるような分数のうち，最小のものを求めよ．

節末 A4.1.4 ★★★ 解答（節末）p.268

▶ 例題 A4.1.8

すべての自然数 n について，n と $n+1$ は互いに素であることを証明せよ．

節末 A4.1.5 ★★★ 解答（節末）p.268

▶ 例題 A4.1.9

$\frac{n}{196}$ が 1 より小さい既約分数となるような正の整数 n は全部で何個あるか．

4.2 ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法

4.2.1 ユークリッドの互除法

次の操作を余りが 0 となるまで繰り返して，2 つの自然数 a, b の最大公約数を求める方法を**ユークリッドの互除法**または単に**互除法**という．

[1] a を b で割ったときの余りを r とする．

[2] $r=0$ のとき，このときの b が最大公約数である．$r>0$ のとき，b を a に，r を b とおいて [1] に戻る．

◀ 割る数が次々と変わっていくことから，互除法といわれている．

4.2.2 1 次不定方程式と整数の性質

a, b, c を整数とし，$a \neq 0$, $b \neq 0$ とする．このとき，1 次方程式 $ax+by=c$ を **1 次不定方程式** といい，1 次不定方程式を満たす整数 x, y の組を，この方程式の**整数解**という．また，この方程式のすべての整数解を求めることを，**1 次不定方程式を解く**という．

◀ 不定方程式は，ディオファントス方程式ともいわれる．また，不定方程式は必ずしも整数解をもつとは限らない．例えば，$6x+2y=3$ は左辺は偶数であるが，右辺は奇数であるからこの方程式を満たす整数 x, y は存在しない．

(1) **方程式 $ax+by=0$ (a, b は互いに素) の整数解**

方程式を変形すると，$ax=-by$

a, b は互いに素であるから，x は b の倍数である．

よって，k を整数として，$x=bk$ と表される．

ここで，$x=bk$ を $ax=-by$ に代入することにより，$y=-ak$

(2) **方程式 $ax+by=c$ (a, b は互いに素) の整数解**

(1) のような右辺が 0 のときに帰着させるために，1 組の整数解を見つける．

方程式 $ax+by=c\cdots$(i) の 1 組の解を $x=p$, $y=q$ とすると，$ap+bq=c\cdots$(ii)

(i)$-$(ii) より $a(x-p)+b(y-q)=0$

すなわち，$a(x-p)=-b(y-q)\cdots$(iii)

a, b は互いに素であるから，$x-p$ は b の倍数である．

よって，k を整数として，$x-p=bk$ と表される．

(iii) に代入して，$y-q=-ak$

したがって，解は $x=bk+p$, $y=-ak+q$　(k は整数)

4.2.3 記数法

n は 1 より大きい整数であるとする．このとき，0 から $n-1$ までの n 個の数字を用いて，n で位が 1 つ繰り上がるように数を表す方法を **n 進法**という．

10 進法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$	16
2 進法	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	$\cdots$	10000

n 進数では，その数の右下に (n) と記す．

◀ 一般に，10 進法では右下の (n) を省略する．

例：**2 進法の $1010_{(2)}$ を 10 進法で表す．**

$$1010_{(2)}=1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+0=10$$

例：**10 進法の 30 を 2 進法で表す．**

30 を右のように 2 で割ると，

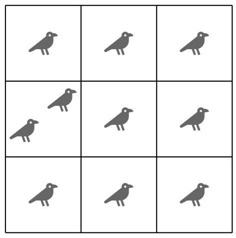
$$\begin{array}{r|rl} 2 & 30 & \text{余り} \\ 2 & 15 & \cdots 0 \\ 2 & 7 & \cdots 1 \\ 2 & 3 & \cdots 1 \\ & 1 & \cdots 1 \end{array}$$

順に並べると，11110

$$30=1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2+0=11110_{(2)}$$

4.2.4　部屋割り論法

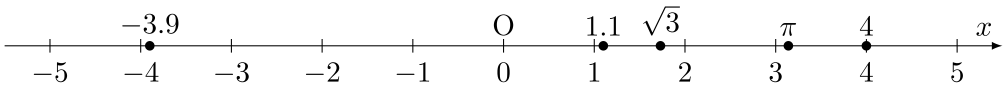
「n 個の部屋に $n+1$ 人を入れるとき，2 人以上入っている部屋が少なくとも 1 つは存在する」
このような考え方を**部屋割り論法**または鳩の巣原理という．
部屋割り論法は，次の形でも使われる．
「n 個の部屋に n 人を入れるとき，相部屋がない場合，どの部屋にも 1 人ずつ人が入っている」



◀ 例：10 匹の鳩を 9 個のマスに入れるとき，少なくとも 1 つのマスに 2 匹の鳩が入る．なお，「鳩の巣原理」は誤訳であるといわれることもある．

4.2.5　ガウス記号

x，y を実数，n を整数とする．このとき，x について，x 以下の最大の整数を $[x]$ と表す（[ ] を**ガウス記号**という）．また，次の性質が成り立つ．
(i) $[x] \leqq x < [x]+1$ より，$\boldsymbol{x-1 < [x] \leqq x}$
(ii) $\boldsymbol{[x]+[y] \leqq [x+y]}$
(iii) $\boldsymbol{[x+n] = [x]+n}$
例：$[1.1]=1$，$[4]=4$，$[-3.9]=-4$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$



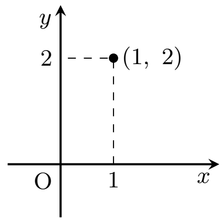
◀ 国際的には $\lfloor x \rfloor$ を用いる方が一般的である（床を意味する floor という）．なお，実数 x について，n を整数とするとき，

$$n \leqq x < n+1 \iff [x] = n$$

が成り立つ．

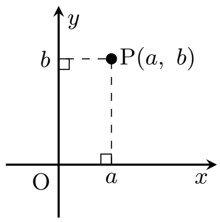
4.2.6　格子点

xy 平面において，x 座標，y 座標がともに整数である点を**格子点**という．
例：$(1,\ 2)$ や $(-3,\ 2)$ などは格子点であり，$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ は格子点ではない．



◀ なお，x 座標，y 座標がともに有理数である点を有理点という．

4.2.7　平面上の点の位置



平面上に点 O をとり，O で互いに直交する 2 本の数直線を，右の図のように定める．これらの直線をそれぞれ $\boldsymbol{x}$ **軸**および $\boldsymbol{y}$ **軸**といい，まとめて**座標軸**という．

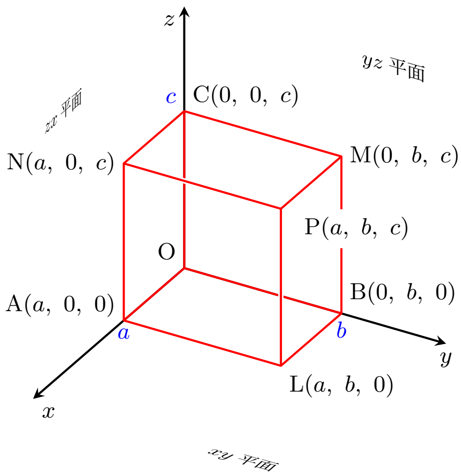
◀ x 軸と y 軸は，原点 O（origin）を通って直交する．なお，進んだ数学（主に大学以降）では直交しない座標軸を考えることもある．

平面上に座標軸を定めると，その平面上の点 P の位置は，右上の図のように 2 つの実数の組 $(a,\ b)$ で示される．この組 $(a,\ b)$ を点 P の**座標**といい，この点 P を $\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ と記す．座標が定められた平面を**座標平面**という．また，点 O は座標平面の **原点**といい，原点 O の座標は $(0,\ 0)$ である．

数学 A
4.2

4.2.8　空間の点の位置

空間上に点 O をとり，O で互いに直交する 3 本の数直線を，右の図のように定める．これらの直線をそれぞれ $\boldsymbol{x}$ **軸**，$\boldsymbol{y}$ **軸**，$\boldsymbol{z}$ **軸**という．
空間上に座標軸を定めると，その空間上の点 P の位置は，右の図のように 3 つの実数の組 $(a,\ b,\ c)$ で示される．この組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の**座標**といい，座標が $(a,\ b,\ c)$ である点 P を $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と記す．座標の定められた空間を**座標空間**という．また，点 O は座標空間の **原点**といい，原点 O の座標は $(0,\ 0,\ 0)$ である．



◀ x 軸と y 軸が定める平面を xy 平面，y 軸と z 軸が定める平面を yz 平面，z 軸と x 軸が定める平面を zx 平面という．

4.2.9　2 点間の距離

(1) 座標平面において，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，および原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ があるとする．このとき，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

◀ 三平方の定理からわかる．

とくに，$\mathrm{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$ である．
(2) 座標空間において，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$，および原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ があるとする．このとき，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

◀ 座標平面と同様に，三平方の定理からわかる．

とくに，$\mathrm{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}$ である．

例題 A4.2.1 ユークリッドの互除法 ★

(1) ユークリッドの互除法を用いて，357 と 544 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．
(2) ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{638}{899}$ を既約分数にせよ．

解説動画

考え方 次のようなユークリッドの互除法を用いて，最大公約数を求める．

ユークリッドの互除法

次の操作を余りが 0 となるまで繰り返して，2 つの自然数 a，b の最大公約数を求める方法をユークリッドの互除法または単に互除法という．
[1] a を b で割ったときの余りを r とする．
[2] $r=0$ のとき，このときの b が最大公約数である．$r>0$ のとき，b を a に，r を b とおいて [1] に戻る．

解答

(1)

$$\begin{aligned} 544 &= 357 \times 1 + 187 \\ 357 &= 187 \times 1 + 170 \\ 187 &= 170 \times 1 + 17 \\ 170 &= 17 \times 10 \end{aligned}$$

◀ 余りが 0 となり，このときの 17 が最大公約数である．

170 と 17 の最大公約数は 17 であるから，357 と 544 の最大公約数は，**17**
したがって，$357 = 21 \times 17$，$544 = 32 \times 17$
よって，357 と 544 の最小公倍数は，

$$21 \times 32 \times 17 = \mathbf{11424}$$

◀ a と b の最大公約数を g，最小公倍数を l とするとき，$ab = gl$ が成り立つことを用いてもよい．

(2)

$$\begin{aligned} 899 &= 638 \times 1 + 261 \\ 638 &= 261 \times 2 + 116 \\ 261 &= 116 \times 2 + 29 \\ 116 &= 29 \times 4 \end{aligned}$$

◀ 余りが 0 となり，このときの 29 が最大公約数である．

116 と 29 の最大公約数は 29 であるから，638 と 899 の最大公約数は，29
よって，$\frac{638}{899} = \frac{29 \times 22}{29 \times 31} = \mathbf{\frac{22}{31}}$

◀ 最大公約数で約分できる．

問題 A4.2.1 ★ 解答 p.269

▶ 節末 A4.2.1

(1) ユークリッドの互除法を用いて，462 と 700 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．
(2) ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{871}{1209}$ を既約分数にせよ．

例題 A4.2.2 文字式におけるユークリッドの互除法 ★★★

(1) $5n+1$ と $4n+3$ の最大公約数が 11 になるような 60 以下の自然数 n をすべて求めよ．
(2) $8n-1$ と $7n$ が互いに素になるような 100 以下の自然数 n は全部でいくつあるか．

解説動画

考え方 ユークリッドの互除法を，文字式について利用することを考える．また，等式 $a=bq+r$ を満たす整数 a, b, q, r について，a と b の最大公約数は b と r の最大公約数に等しい ことを利用する．

解答

(1)

$$5n+1=(4n+3)\times 1+n-2$$
$$4n+3=(n-2)\times 4+11$$

◀ 余りが 11 となり，定数項になる．

ここで，$5n+1$ と $4n+3$ の最大公約数は，$n-2$ と 11 の最大公約数に等しい．
$n-2$ と 11 の最大公約数が 11 となるのは，$n-2$ が 11 の倍数のときである．
n は 60 以下の自然数より，$1 \leqq n \leqq 60$
したがって，$-1 \leqq n-2 \leqq 58$
この範囲において，$n-2$ が 11 の倍数となるのは，0, 11, 22, 33, 44, 55
よって，$n-2=0$, 11, 22, 33, 44, 55 より，$n=$ **2, 13, 24, 35, 46, 57**

◀ n は 60 以下の自然数であることから，$n-2$ の値の範囲を定める．

(2)

$$8n-1=7n\times 1+n-1$$
$$7n=(n-1)\times 7+7$$

◀ 余りが 7 となり，定数項になる．

$8n-1$ と $7n$ が互いに素であるとき，$n-1$ と 7 も互いに素であるから，求める個数は，$n-1$ と 7 が互いに素であるような 100 以下の自然数 n の個数に等しい．
n は 100 以下の自然数より，$1 \leqq n \leqq 100$
したがって，$0 \leqq n-1 \leqq 99$
この範囲において，$n-1$ が 7 の倍数となるのは，

$$n-1=7\times 0,\ 7\times 1,\ 7\times 2,\ \ldots,\ 7\times 13,\ 7\times 14$$

◀ 7 の倍数となるとき（互いに素ではないとき）の個数を求め，全体の 100 個から引くことを考える．

より，15 個
よって，求める個数は，$100-15=$ **85 (個)**

問題 A4.2.2 ★★★ 解答 p.270

(1) $6n+1$ と $5n+3$ の最大公約数が 13 になるような 70 以下の自然数 n をすべて求めよ．
(2) $7n+4$ と $3n+1$ が互いに素になるような 120 以下の自然数 n は全部でいくつあるか．

例題 A4.2.3 方程式の整数解 1 ★★

次の不定方程式の整数解を求めよ．

(1) $5x-4y=28$　　(2) $45x+464y=14$

解説動画

考え方

(1) $5x-4y=28$ を $5x=4(y+7)$ と式変形してまとめ，5 と 4 は互いに素であることを利用する．
(2) x と y の係数に注目すると，$464=45\times 10+14$ という関係がある．式変形してまとめ，45 と 14 は互いに素であることを利用する．

解答

(1) $5x-4y=28$ より，$5x=4(y+7)\cdots$(i)
5 と 4 は互いに素であるから，x は 4 の倍数となる．
したがって，k を整数として，$x=4k$ とおける．
これを (i) に代入すると，$5\times 4k=4(y+7)$
$5k=y+7$ より，$y=5k-7$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=4k,\ y=5k-7}$ **(k は整数)**

◀ 4 と 28 は 1 より大きい公約数 4 をもつ．

【別解】 $5x-4y=28$ より，$y=\frac{5}{4}x-7$
y は整数より，x は 4 の倍数となる．
したがって，$x=4k$ (k は整数) とおけ，$y=5k-7$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=4k,\ y=5k-7}$ **(k は整数)**

◀ x が 4 の倍数ではないとき，y は整数ではない．

(2) $464=45\times 10+14$ より，

$$45x+(45\times 10+14)y=14$$

◀ x と y の係数のうち，大きい数の 464 を小さい数の 45 で割ることを考える．

したがって，$45(x+10y)=14(1-y)\cdots$(i)
45 と 14 は互いに素であるから，$x+10y$ は 14 の倍数となる．
したがって，k を整数として，$x+10y=14k$，すなわち，$x=14k-10y\cdots$(ii) とおける．
(ii) を (i) に代入すると，$45\times 14k=14(1-y)$
$45k=1-y$ より，$y=-45k+1$
これを (ii) に代入すると，$x=464k-10$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=464k-10,\ y=-45k+1}$ **(k は整数)**

One Point

不定方程式 $ax+by=c$ （a と b は互いに素）において，a または b が c と 1 より大きい公約数をもつときは，式変形してまとめ，互いに素であることを利用する．

問題 A4.2.3 ★★ 解答 p.271

次の不定方程式の整数解を求めよ．

(1) $7x-3y=18$　　(2) $39x+56y=17$

例題 A4.2.4 方程式の整数解 2 ★★

不定方程式 $9x-5y=1$ の整数解をすべて求めよ．

解説動画

考え方 方程式の x, y に値を代入していき，方程式を満たす 1 組の解（**特殊解**という）を求める．例えば，係数の大きい x に $x=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ や $x=-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$ を代入し，y の値を探すとよい．なお，不定方程式のすべての解のことを**一般解**という

解答

$9\times(-1)-5\times(-2)=1$であるから，$x=-1$, $y=-2$ は $9x-5y=1$ を満たす整数解の 1 つである．
したがって，

$$9x-5y=1\cdots\text{(i)},\quad 9\times(-1)-5\times(-2)=1\cdots\text{(ii)}$$

とすると，(i) − (ii) より，$9(x+1)-5(y+2)=0$
したがって，$9(x+1)=5(y+2)\cdots\text{(iii)}$
ここで，9 と 5 は互いに素であるから，$x+1$ は 5 の倍数となり，k を整数とすると，$x+1=5k$，すなわち，$x=5k-1$
これを (iii) に代入すると，$9\times5k=5(y+2)$
$9k=y+2$ より，$y=9k-2$
よって，一般解は，$\boldsymbol{x=5k-1,\ y=9k-2}$ **(k は整数)**

◀ 特殊解を 1 つ見つける．$x=4$, $y=7$ なども特殊解である．

◀ a, b が互いに素で，an が b の倍数ならば，n は b の倍数であることを利用する．

One Point

方程式に値を代入していき，方程式を満たす 1 組の解（特殊解）を求める．

【注意】特殊解は 1 つだけではなく，$x=4$, $y=7$ など複数存在する．特殊解を $x=4$, $y=7$ としたとき，求める一般解は $x=5k+4$, $y=9k+7$ となる（これも正答となる）．このように，特殊解によって求める一般解の表し方も複数存在する．

問題 A4.2.4 ★★ 解答 p.271

不定方程式 $4x+7y=1$ の整数解をすべて求めよ．

One math

例題 A4.2.5 方程式の整数解 3 ★★★

不定方程式 $61x+23y=1$ の整数解をすべて求めよ．

解説動画

考え方 特殊解を求めたいが，係数が大きいので x，y に値を代入して探すと手間が掛かる．そこで，方程式の係数である 61 と 23 について，ユークリッドの互除法を用いて，特殊解を見つけるとよい．

解答

不定方程式 $61x+23y=1\cdots$(i) の係数である 61 と 23 について，ユークリッドの互除法を用いる．

$$\begin{aligned} &61=23\times2+15 \text{ より，} && 61-23\times2=15\cdots\text{(ii)}\\ &23=15\times1+8 \text{ より，} && 23-15\times1=8\cdots\text{(iii)}\\ &15=8\times1+7 \text{ より，} && 15-8\times1=7\cdots\text{(iv)}\\ &8=7\times1+1 \text{ より，} && 8-7\times1=1\cdots\text{(v)} \end{aligned}$$

(v) に (iv) を代入すると，$8-(15-8\times1)\times1=1$ より，

◀ $7=15-8\times1$

$$8\times2-15\times1=1$$

これに (iii) を代入すると，$(23-15\times1)\times2-15\times1=1$ より，

◀ $8=23-15\times1$

$$23\times2-15\times3=1$$

これに (ii) を代入すると，$23\times2-(61-23\times2)\times3=1$ より，

◀ $15=61-23\times2$

$$61\times(-3)+23\times8=1\cdots\text{(vi)}$$

したがって，$x=-3$，$y=8$ は不定方程式 $61x+23y=1$ を満たす整数解の 1 つである．

◀ $x=-3$，$y=8$ が特殊解の 1 つである．

(i) − (vi) より，$61(x+3)+23(y-8)=0$

ゆえに，

$$61(x+3)=23(8-y)\cdots\text{(vii)}$$

61 と 23 は互いに素であるから，$x+3$ は 23 の倍数となり，k を整数とすると，

$x+3=23k$，すなわち，$x=23k-3$

これを (vii) に代入すると，$61\times23k=23(8-y)$

$61k=8-y$ より，$y=-61k+8$

よって，求める一般解は，$\boldsymbol{x=23k-3}$，$\boldsymbol{y=-61k+8}$ **(k は整数)**

問題 A4.2.5 ★★★ 解答 p.272

▶ 節末 A4.2.2

不定方程式 $47x+19y=1$ の整数解をすべて求めよ．

例題 A4.2.6 方程式の整数解 4 ★★★

不定方程式 $x+2y+3z=10$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

解説動画

考え方 $x,\ y,\ z$ は自然数であるから，$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$ である．文字の値の範囲から，$x,\ y,\ z$ の値を定めるとよい．例えば，係数の大きい $3z$ に注目して，$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ であることを利用すると，$3z = 10-x-2y \leqq 10-1-2\times 1 = 7$ となる．つまり，$z \leqq \frac{7}{3}$ より，z は自然数であるから，$z=1,\ 2$ となる．このように，不等式を上手く利用して，文字の値を定めていく．

【余談】 係数の大きい $3z$ に注目せずに，他の文字について整理しても求めることができるが，場合分けに手間が掛かる．例えば，$y \geqq 1,\ z \geqq 1$ であることを利用すると，$x = 10-2y-3z \leqq 10-2-3 = 5$ となる．つまり，$x \leqq 5$ より，x は自然数であるから，$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ となり，5 つの場合分けをしなければならなくなる．

解答

与えられた不定方程式 $x+2y+3z=10$ を z について整理すると，

$$3z = 10-x-2y$$

◀ 係数の大きい $3z$ について注目して整理する．

$x,\ y$ は自然数であるから，$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ より，

$$3z = 10-x-2y \leqq 10-1-2\times 1 = 7$$

したがって，$z \leqq \frac{7}{3}$ より，$z=1,\ 2$ となる．

◀ $1 \leqq z \leqq \frac{7}{3}$ を満たす自然数 z の値は，$z=1,\ 2$ である．

（ア）$z=1$ のとき

$x+2y+3\times 1 = 10$ より，$x+2y=7 \cdots$(i)

$x \geqq 1$ より，$2y = 7-x \leqq 7-1 = 6$

◀ $3z$ のときと同様に，不等式を利用して，係数の大きい $2y$ について注目して整理する．

したがって，$y \leqq 3$ より，$y=1,\ 2,\ 3$

(i) より，$(x,\ y) = (5,\ 1),\ (3,\ 2),\ (1,\ 3)$

（イ）$z=2$ のとき

$x+2y+3\times 2 = 10$ より，$x+2y=4 \cdots$(ii)

$x \geqq 1$ より，$2y = 4-x \leqq 4-1 = 3$

したがって，$y \leqq \frac{3}{2}$ より，$y=1$

(ii) より，$(x,\ y) = (2,\ 1)$

よって，（ア），（イ）より，求める自然数の組は，

$$(x,\ y,\ z) = \mathbf{(5,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ 1),\ (1,\ 3,\ 1),\ (2,\ 1,\ 2)}$$

One Point

係数の大きい文字に注目して，不等式を利用することで文字の値を定める．

問題 A4.2.6 ★★★ 解答 p.272

不定方程式 $x+3y+4z=15$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

例題 A4.2.7 方程式の整数解 5 ★★★

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，$x \leqq y \leqq z$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

解説動画

考え方 $0<x \leqq y \leqq z$ より，$\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x}$ である．文字の値の範囲から，x，y，z の値を定めるとよい．$x \leqq y \leqq z$ より，x か z に注目することを考える．
例えば，z に注目して，$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqq \frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=\frac{3}{z}$ より，$z \geqq 3$ としても，上手く文字の値を定めることができない．ここでは，x に注目して，$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$ より，$x \leqq 3$ とすると，上手く文字の値を定めることができる．

解答

$0<x \leqq y \leqq z$ より，$\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x}$ である．
これより，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$
したがって，$1 \leqq \frac{3}{x}$ より，$x \leqq 3$　◀ 両辺に $x\ (>0)$ を掛ける．
◀ $x=1,\ 2,\ 3$
(i) $x=1$ のとき
$\frac{1}{1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$　◀ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ に $x=1$ を代入する．
これは，y，z は正の整数であるので不適である．
(ii) $x=2$ のとき
$\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$
ここで，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}$ より，$\frac{1}{2} \leqq \frac{2}{y}$
したがって，$y \leqq 4$　◀ 両辺に $y\ (>0)$ を掛ける．
ゆえに，$x \leqq y$ より，$y=2,\ 3,\ 4$
$y=2$ のとき，$\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$
これは，z は正の整数であるので不適である．
$y=3$ のとき，$\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より，$z=6$
$y=4$ のとき，$\frac{1}{4}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より，$z=4$
(iii) $x=3$ のとき，$\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$
ここで，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}$ より，$\frac{2}{3} \leqq \frac{2}{y}$
したがって，$y \leqq 3$　◀ 両辺に $y\ (>0)$ を掛ける．
ゆえに，$x \leqq y$ より，$y=3$
このとき，$\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$ より，$z=3$
よって，(i)〜(iii) より，$(x,\ y,\ z)=\mathbf{(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)}$

問題 A4.2.7 ★★★ 解答 p.273

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$，$x \leqq y \leqq z$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

例題 A4.2.8 方程式の整数解 6 ★★★

(1) $x^2-y^2=99$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．
(2) $\sqrt{n^2-35}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ．

解説動画

考え方 $A,\ B$ が整数のとき，例えば，$AB=3$ であれば，$(A,\ B)=(3,\ 1),\ (1,\ 3),\ (-1,\ -3),\ (-3,\ -1)$ と 3 の約数を考えることで $A,\ B$ の値を定めることができる．
このことを利用するために，$AB=$ (整数) の形に式変形することを考える．(2) は，$\sqrt{n^2-35}=m$ （m は自然数）とおき，両辺を 2 乗して，$n^2-m^2=35$ と式変形すればよい．

解答

(1) $x^2-y^2=99$ より，$(x-y)(x+y)=99$
ここで，$x,\ y$ は自然数であり，$x^2-y^2>0$ より，$x>y$ であるから，$x-y,\ x+y$ も自然数であり，

$$x-y<x+y$$

◀ $y>0$ より，$x-y$ と $x+y$ の大小が定まる．

よって，$(x-y,\ x+y)=(1,\ 99),\ (3,\ 33),\ (9,\ 11)$

◀ $x-y,\ x+y$ はともに $99=3^2\cdot 11$ の正の約数である．

(i) $x-y=1,\ x+y=99$ のとき，$(x,\ y)=(50,\ 49)$
(ii) $x-y=3,\ x+y=33$ のとき，$(x,\ y)=(18,\ 15)$
(iii) $x-y=9,\ x+y=11$ のとき，$(x,\ y)=(10,\ 1)$

◀ 連立方程式を解くことで，$(x,\ y)$ を求めることができる．

(i)〜(iii) より，求める自然数の組は，

$$(x,\ y)=\mathbf{(50,\ 49),\ (18,\ 15),\ (10,\ 1)}$$

(2) $\sqrt{n^2-35}=m$ （m は自然数）とおく．

◀ $m\leqq 0$ となる自然数 n は存在しない．

両辺を 2 乗すると，$n^2-35=m^2$
したがって，$n^2-m^2=35$ より，$(n-m)(n+m)=35$
ここで，$n,\ m$ は自然数であり，$n^2-m^2>0$ より，$n>m$ であるから，$n-m,\ n+m$ も自然数であり，

$$n-m<n+m$$

ゆえに，$(n-m,\ n+m)=(1,\ 35),\ (5,\ 7)$

◀ $x-y,\ x+y$ はともに $35=5\cdot 7$ の正の約数である．

(i) $n-m=1,\ n+m=35$ のとき，$(n,\ m)=(18,\ 17)$
(ii) $n-m=5,\ n+m=7$ のとき，$(n,\ m)=(6,\ 1)$

よって，(i)，(ii) より，$n=\mathbf{6,\ 18}$

問題 A4.2.8 ★★★ 解答 p.274

▶ 節末 A4.2.3

(1) $x^2-y^2=45$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．
(2) $\sqrt{n^2-63}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ．

例題 A4.2.9 方程式の整数解 7 ★★★

次の方程式を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(1) $xy-2x+3y=0$　　(2) $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$

解説動画

考え方

(1) $xy+ax+by=(x+b)(y+a)-ab$ であることから，$xy+ax+by=c$ $(a,\ b,\ c$ は定数$)$ の形の式は，$(x+b)(y+a)=c+ab$ と式変形できることを利用する．そこで，$xy+ax+by$ の係数 $a,\ b$ から，$(x+b)(y+a)$ を作ることを考える．

(2) 両辺に xy を掛けて，(1) と同様に考えるとよい．このとき，$x\neq 0,\ y\neq 0$ より，$x-2\neq -2,\ y-1\neq -1$ であることに注意すること．

解答

(1) $xy-2x+3y=0$ より，$(x+3)(y-2)=-6$

$x,\ y$ は整数であるから，$x+3,\ y-2$ も整数である．

したがって，

$$(x+3, y-2)=(1,-6),(6,-1),(2,-3),(3,-2),(-1,6),(-6,1),(-2,3),(-3,2)$$

よって，

$$(x,y)=\boldsymbol{(-2,-4),(3,1),(-1,-1),(0,0),(-4,8),(-9,3),(-5,5),(-6,4)}$$

◀ 与えられた式の左辺の係数から，$(x+3)(y-2)$ を作る．

◀ 掛けて -6 になる整数の組を求める．

(2) $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$ より，$xy=2y+x$

したがって，$xy-x-2y=0$ であるから，$(x-2)(y-1)=2$

$x,\ y$ は整数であるから，$x-2,\ y-1$ も整数である．

ここで，$x\neq 0,\ y\neq 0$ より，$x-2\neq -2,\ y-1\neq -1$ であるから，

$$(x-2,\ y-1)=(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-1,\ -2)$$

よって，

$$(x,\ y)=\boldsymbol{(4,\ 2),\ (3,\ 3),\ (1,\ -1)}$$

◀ 両辺に xy を掛ける．

◀ $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$ の分母は 0 ではない．

◀ $x-2\neq -2,\ y-1\neq -1$ より，$(x-2,\ y-1)=(-2,\ -1)$ は不適であることに注意すること．

One Point

$\boldsymbol{xy+ax+by=(x+b)(y+a)-ab}$ **を利用する．**

問題 A4.2.9 ★★★ 解答 p.275

次の方程式を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(1) $xy+x+2y=0$　　(2) $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=1$

例題 A4.2.10 方程式の整数解 8 ★★★★

$3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-20=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ．

解説動画

考え方 2 次の項に注目すると，$3x^2+4xy-4y^2=(3x-2y)(x+2y)$ とたすき掛けを用いて因数分解することができる．$(3x-2y+p)(x+2y+q)$ を展開することを考え，2 つの整数の積の形を作る．

解答

$$3x^2+4xy-4y^2=(3x-2y)(x+2y)$$

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -2 & \longrightarrow & -2 \\ 1 & & 2 & \longrightarrow & 6 \\ \hline & & & & 4 \end{array}$$

と因数分解できるので，定数 p，q を用いて $(3x-2y+p)(x+2y+q)$ を展開し，与えられた式の左辺と比較する．

$$\begin{aligned}(3x-2y+p)(x+2y+q)&=(3x-2y)(x+2y)+q(3x-2y)+p(x+2y)+pq\\&=3x^2+4xy-4y^2+(p+3q)x+(2p-2q)y+pq\end{aligned}$$

◀ $(3x-2y)$，$(x+2y)$ をまとめて扱って展開するとよい．

◀ 定数項を除いて，係数と一致させることを考える（恒等式の考え方を用いており，詳しくは数学 II で学習する）．

したがって，与えられた式と x，y の項の係数を比較すると，

$$\begin{cases}p+3q=4\\2p-2q=-16\end{cases}$$

これを解くと，$p=-5$，$q=3$

ゆえに，

$$(3x-2y-5)(x+2y+3)=3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-15$$

したがって，与えられた式は，

$$3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-15-5=0$$

整理すると，

$$(3x-2y-5)(x+2y+3)=5$$

ゆえに，

$$(3x-2y-5,\ x+2y+3)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$$

◀ なお，連立方程式をそれぞれ解いて，x，y の値を求めてもよいが計算に手間が掛かる．

$$\begin{cases}3x-2y-5=A\\x+2y+3=B\end{cases}$$

を解くと考え，

$$\begin{cases}x=\frac{A+B+2}{4}\\y=\frac{3B-A-14}{8}\end{cases}$$

を用いると計算が楽になる．

これを解いて，

$$(x,\ y)=(2,\ 0),\ (2,\ -2),\ \left(-1,\ -\frac{7}{2}\right),\ \left(-1,\ -\frac{3}{2}\right)$$

よって，x，y は整数より，$(x,\ y)=\mathbf{(2,\ 0),\ (2,\ -2)}$

問題 A4.2.10 ★★★★ 解答 p.276

$2x^2-7xy+3y^2+8x-9y-5=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ．

例題 A4.2.11　方程式の整数解 9　★★★★

方程式 $x^2+2xy+5y^2+4x-12y+11=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

解説動画

考え方　2 次の項に注目しても，上手く因数分解することができない．このようなときは，1 つの文字に注目し，降べきの順に整理するとよい．2 次方程式が実数解をもつことから，$D \geqq 0$ を利用し，$x,\ y$ の値を定める．

解答

$x^2+2xy+5y^2+4x-12y+11=0$ を x について整理すると，

$$x^2+2\left(y+2\right)x+\left(5y^2-12y+11\right)=0\cdots\text{(i)}$$

◀ x に注目して，x の 2 次方程式と考える．なお，y について整理して解いてもよい．

2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(y+2)^2-1\cdot\left(5y^2-12y+11\right)\\&=y^2+4y+4-\left(5y^2-12y+11\right)\\&=-4y^2+16y-7\end{aligned}$$

(i) の解が実数となるから，$D \geqq 0$

◀ 解は実数（整数）である．

したがって，$-4y^2+16y-7 \geqq 0$ より，$(2y-1)(2y-7) \leqq 0$

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc}2 & \times & -1 & \longrightarrow & -2\\2 & & -7 & \longrightarrow & -14\\\hline & & & & -16\end{array}$$

ゆえに，$\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{7}{2}$

y は整数であるから，$y=1,\ 2,\ 3$

（ア）$y=1$ のとき，(i) より，$x^2+6x+4=0$

これを解くと，$x=-3\pm\sqrt{5}$ となり，不適である．

◀ x が整数ではないので不適である．

（イ）$y=2$ のとき，(i) より，$x^2+8x+7=0$

これを解くと，$x=-7,\ -1$

（ウ）$y=3$ のとき，(i) より，$x^2+10x+20=0$

これを解くと，$x=-5\pm\sqrt{5}$ となり，不適である．

◀ x が整数ではないので不適である．

よって，（ア）〜（ウ）より，$(x,\ y)=\boldsymbol{(-7,\ 2),\ (-1,\ 2)}$

問題 A4.2.11 ★★★★　解答 p.277　▶ 章末 A4.4

方程式 $x^2-2xy+2y^2-2x-2y+4=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

例題 A4.2.12 記数法 ★

(1) $10110_{(2)}$，$543_{(6)}$ をそれぞれ 10 進法で表せ．
(2) 10 進法で表された数 58 を，2 進法，3 進法，6 進法でそれぞれ表せ．
(3) $3.24_{(5)}$ を 10 進法で表せ．
(4) 10 進法で表された小数 0.375 を 2 進法で表せ．

解説動画

考え方 n 進法で $a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ と表されるとき，10 進法では $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ と表されることを利用する．

(2) 解答では，例えば 58 を 2 進法で表すには，58 を 2^5 で割り，その余りを 2^4 で割り，… という操作を繰り返すことによって求めている．なお，10 進法を n 進法で表すには，右のように筆算を用いて，商が割る数より小さくなるまで n で割る操作を繰り返し，その余りを順に並べることでも求めることができる．

		余り
2)	58	
2)	29	… 0
2)	14	… 1
2)	7	… 0
2)	3	… 1
	1	… 1

順に並べると，111010

		余り
3)	58	
3)	19	… 1
3)	6	… 1
	2	… 0

順に並べると，2011

		余り
6)	58	
6)	9	… 4
	1	… 3

順に並べると，134

(4) 別解のように，0.375 に 2 を掛けて，整数部分を取り出し，残った小数部分に 2 を掛けて，整数部分を取り出し，… という操作を繰り返して，取り出した整数部分を順に並べることでも求めることができる．

解答

(1)
$$10110_{(2)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$
$$= 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = \mathbf{22},$$
$$543_{(6)} = 5 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 3 \times 6^0 = 180 + 24 + 3 = \mathbf{207}$$

(2) $58 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = \mathbf{111010_{(2)}}$，
$58 = 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = \mathbf{2011_{(3)}}$，
$58 = 1 \times 6^2 + 3 \times 6^1 + 4 \times 6^0 = \mathbf{134_{(6)}}$

◀ 58 を 2^5 で割り，その余りを 2^4 で割り，… という操作を繰り返す．

(3) $3.24_{(5)} = 3 + 2 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5^2} = 3 + 0.4 + 0.16 = \mathbf{3.56}$
(4) $0.375 = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 1 \times \frac{1}{2^3} = \mathbf{0.011_{(2)}}$

【別解】 $0.375 = 0.abc\ldots_{(2)}$ とおくと，
$$0.375 = a \times \frac{1}{2} + b \times \frac{1}{4} + c \times \frac{1}{8} + \cdots$$
両辺に 2 を掛けると，$0.75 = a + b \times \frac{1}{2} + c \times \frac{1}{4} + \cdots$ より，$a = 0$
これを代入して，両辺に 2 を掛けると，$1.5 = b + c \times \frac{1}{2} + d \times \frac{1}{4} + \cdots$ より，$b = 1$
これを代入して，両辺に 2 を掛けると，$1 = c + d \times \frac{1}{2} + e \times \frac{1}{4} + \cdots$ より，$c = 1$
よって，$0.375 = \mathbf{0.011_{(2)}}$

◀ 2 を掛ける操作を繰り返し，整数部分を取り出してその数字を各位の数にする．

$$\begin{array}{r} 0.375 \\ \times \quad 2 \\ \hline 0.750 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1.50 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1.0 \end{array}$$

問題 A4.2.12 ★ 解答 p.277

(1) $11001_{(2)}$，$354_{(6)}$ をそれぞれ 10 進法で表せ．
(2) 10 進法で表された数 42 を，2 進法，3 進法，6 進法でそれぞれ表せ．
(3) $2.13_{(5)}$ を 10 進法で表せ．
(4) 10 進法で表された小数 0.625 を 2 進法で表せ．

例題 A4.2.13 n 進法の四則計算 ★

次の計算をせよ．

(1) $11011_{(2)}+1101_{(2)}$　　(2) $102_{(3)}\times 21_{(3)}$　　(3) $432_{(6)}-231_{(6)}$

解説動画

考え方 n 進法で表された数は，10 進法で表して計算し，n 進法で表し直すとよい．なお，筆算を用いて計算することもできるが，n で繰り上がることに注意すること．

解答

(1) $11011_{(2)}$，$1101_{(2)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$11011_{(2)}=1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1=27,$$
$$1101_{(2)}=1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1=13$$

よって，

$$\begin{aligned}11011_{(2)}+1101_{(2)}&=27+13=40\\&=1\times 2^5+0\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+0\\&=\mathbf{101000_{(2)}}\end{aligned}$$

◀ 筆算を用いてもよいが，$1+1=2=10_{(2)}$ のように，2 で繰り上がることに注意すること．

$$\begin{array}{r}11011_{(2)}\\ +\quad 1101_{(2)}\\ \hline 101000_{(2)}\end{array}$$

(2) $102_{(3)}$，$21_{(3)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$102_{(3)}=1\times 3^2+0\times 3^1+2=9+2=11,$$
$$21_{(3)}=2\times 3^1+1=6+1=7$$

よって，

$$\begin{aligned}102_{(3)}\times 21_{(3)}&=11\times 7=77\\&=2\times 3^3+2\times 3^2+1\times 3^1+2\\&=\mathbf{2212_{(3)}}\end{aligned}$$

◀ 筆算を用いてもよいが，3 で繰り上がることに注意すること．

$$\begin{array}{r}102_{(3)}\\ \times 21_{(3)}\\ \hline 102\\ 211\ \ \\ \hline 2212_{(3)}\end{array}$$

(3) $432_{(6)}$，$231_{(6)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$432_{(6)}=4\times 6^2+3\times 6^1+2=144+18+2=164,$$
$$231_{(6)}=2\times 6^2+3\times 6^1+1=72+18+1=91$$

よって，

$$432_{(6)}-231_{(6)}=164-91=73=2\times 6^2+0\times 6+1=\mathbf{201_{(6)}}$$

問題 A4.2.13 ★ 解答 p.278

次の計算をせよ．

(1) $10101_{(2)}+1110_{(2)}$　　(2) $210_{(3)}\times 12_{(3)}$　　(3) $543_{(6)}-312_{(6)}$

例題 A4.2.14 n 進法の位の数 ★★★

自然数 N を 6 進法と 9 進法で表すと，それぞれ 3 桁の数 $abc_{(6)}$ と $cab_{(9)}$ になるとする．このとき a，b，c の値を求めよ．また，N を 10 進法で表せ．

解説動画

考え方 n 進法で表された数は，10 進法で表すと扱いやすくなることがある．ここでは，6 進法と 9 進法で表されているそれぞれの数を，10 進法で表すことを考える．n 進数の各位の数は，最高位以外は 0 以上 $n-1$ 以下の整数となることを利用して，a，b，c の値を定める．

解答

自然数 N を 6 進法，9 進法で表すと，それぞれ $abc_{(6)}$ と $cab_{(9)}$ であるから，

$$1 \leqq a \leqq 5, \quad 0 \leqq b \leqq 5, \quad 1 \leqq c \leqq 5$$

◀ a，b，c は 6 進法の数 $abc_{(6)}$ の各位の数字であるから，a，b，c はそれぞれ 0，1，2，3，4，5 のいずれかの整数である．また，$abc_{(6)}$ と $cab_{(9)}$ はどちらも 3 桁の数であるから，最高位になる a，c は，$a \neq 0$，$c \neq 0$ であることに注意すること．

$abc_{(6)}$，$cab_{(9)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$abc_{(6)} = a \cdot 6^2 + b \cdot 6^1 + c \cdot 6^0 = 36a + 6b + c \cdots \text{(i)},$$
$$cab_{(9)} = c \cdot 9^2 + a \cdot 9^1 + b \cdot 9^0 = 81c + 9a + b$$

これらが等しいから，$36a + 6b + c = 81c + 9a + b$

したがって，$27a = 80c - 5b$，すなわち，$27a = 5(16c - b) \cdots \text{(ii)}$

これより，5 と 27 は互いに素であるから，a は 5 の倍数である．

ゆえに，$1 \leqq a \leqq 5$ より，$a = 5$

◀ a の値を定める．

これを (ii) に代入して整理すると，$16c = b + 27 \cdots \text{(iii)}$

◀ $27 \cdot 5 = 5(16c - b)$ を整理すると，(iii) が得られる．

これより，$b + 27$ は 16 の倍数である．

したがって，$0 \leqq b \leqq 5$ より，$27 \leqq b + 27 \leqq 32$ であるから，$b + 27 = 32$

ゆえに，$b = 5$ であり，(iii) より，$1 \leqq c \leqq 5$ を満たす整数 c は，$c = 2$

よって，$a = \mathbf{5}$，$b = \mathbf{5}$，$c = \mathbf{2}$

また，この値を (i) に代入すると，$N = 36 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 2 = \mathbf{212}$

◀ $cab_{(9)}$ の式に代入して計算してもよい．

One Point

n 進数の各位の数は，0 以上 $n-1$ 以下の整数となる．

問題 A4.2.14 ★★★ 解答 p.278

▶ 節末 A4.2.4 ▶ 節末 A4.2.5

自然数 N を 4 進法と 7 進法で表すと，それぞれ 2 桁の数 $ab_{(4)}$ と $ba_{(7)}$ になるとする．このとき a，b の値を求めよ．また，N を 10 進法で表せ．

One math

例題 A4.2.15 n 進数の利用 ★★

0，1，2，3 の 4 種類の数字のみを用いて表される自然数を，小さい方から順に並べると，

$$1,\ 2,\ 3,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 100,\ \ldots$$

となる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 3121 は小さい方から何番目の数であるかを求めよ．

(2) 小さい方から 123 番目の数を求めよ．

解説動画

考え方 0，1，2，3 の 4 種類の数字のみを用いて表されていることから，4 進法の利用を考えるとよい．数字の各位に $_{(4)}$ をつけて 4 進法で表すと，

$$1_{(4)},\ 2_{(4)},\ 3_{(4)},\ 10_{(4)},\ 11_{(4)},\ 12_{(4)},\ 13_{(4)},\ 20_{(4)},\ 21_{(4)},\ 22_{(4)},\ 23_{(4)},\ 30_{(4)},\ 31_{(4)},\ 32_{(4)},\ 33_{(4)},\ 100_{(4)},\ldots$$

この列を 10 進法にすると，

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ \ldots$$

となることから，4 進法から 10 進法にすることにより，もとの数が何番目の数であるかがわかる．そこで，(1) は $3121_{(4)}$ を 10 進法で表すことを考え，(2) は 123 を 4 進法で表すことを考えればよい．

解答

0，1，2，3 の 4 種類の数で表されているので，この数の列は，4 進法で表されている．

(1) $3121_{(4)}$ を 10 進法で表すと，

$$3121_{(4)} = 3 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1 = 217$$

よって，3121 は，**217 番目**の数である．

(2) 123 を 4 進法で表すと，

$$123 = 1323_{(4)}$$

よって，123 番目の数は，**1323** である．

$$\begin{array}{r|l l}
4 & 123 & \text{余り} \\
4 & 30 & \cdots\ 3 \\
4 & 7 & \cdots\ 2 \\
4 & 1 & \cdots\ 3
\end{array}$$

順に並べると，1323

One Point

0 から $n-1$ の n 種類の数字で表される数の列は，n 進法の利用を考えるとよい．

問題 A4.2.15 ★★ 解答 p.279

0，1，2 の 3 種類の数字のみを用いて表される自然数を，小さい方から順に並べると，

$$1,\ 2,\ 10,\ 11,\ 12,\ 20,\ 21,\ 22,\ 100,\ \ldots$$

となる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 2102 は小さい方から何番目の数であるかを求めよ．

(2) 小さい方から 87 番目の数を求めよ．

例題 A4.2.16 部屋割り論法 ★★

(1) クラスで行うあるプロジェクトのチームのメンバーは，13 名で構成されている．このとき，メンバーの誕生日は，少なくとも 2 人が同じ月に誕生日を迎えることを示せ．
(2) 異なる $n+1$ 個の整数から，適当な 2 個を選ぶと，その差が n の倍数になることを示せ．

解説動画

考え方 部屋割り論法「$n+1$ 個のものを n 組に分けるとき，2 個以上入っている組が少なくとも 1 つ存在する」を利用する．
(1) チームのメンバーは 13 名であり，誕生日の月は 1 月から 12 月までの 12 通りであることに注目する．
(2) 2 つの数が n の倍数どうしであるとき，その差も n の倍数になる．n の倍数ではない 2 つの数の差が n の倍数になるためには，その 2 つの数をそれぞれ n で割った余りが等しければよい．そこで，n で割ったときの余りを分類して考える．

解答

(1) 誕生日の月は 1 月から 12 月までの 12 通りである．したがって，12 名以下の場合であれば，誕生日の月がすべて異なる場合もあるが，13 名の場合は，どの月かが 2 人同じ誕生日でなければならない．
◀ 部屋割り論法の考え方を用いる．
よって，少なくとも 2 人が同じ月に誕生日を迎えるといえる．■

(2) $n+1$ 個の数を a_1，a_2，...，a_n，a_{n+1} とする．
これらの数を n で割った余りを，それぞれ r_1，r_2，...，r_{n+1} とする．
このとき，それぞれの余り r_i は，すべて 0 以上 $n-1$ 以下の n 個の整数のいずれかである．
◀ n で割ったときの余り r は，$0 \leqq r < n$
したがって，$n+1$ 個の余り r_1，r_2，...，r_{n+1} の中には，少なくとも同じ値が 2 つ存在する．
◀ $n+1$ 個の余りと n 個の整数に，部屋割り論法の考え方を用いる．
ここで，その 2 つの余りを r_i，r_j とすると，a_i と a_j は次のように表される．

$$a_i = nk_i + r_i, \quad a_j = nk_j + r_j \quad (k_i,\ k_j \text{ は整数})$$

ゆえに，

$$a_i - a_j = (nk_i + r_i) - (nk_j + r_j) = n(k_i - k_j)$$

◀ $r_i = r_j$

よって，$k_i - k_j$ は整数であるから，$a_i - a_j$ は n の倍数である．■
◀ k_i，k_j は整数であるから，$k_i - k_j$ も整数である．

部屋割り論法

$n+1$ 個のものを n 組に分けるとき，2 個以上入っている組が少なくとも 1 つ存在する．

問題 A4.2.16 ★★ 解答 p.279

赤玉が 6 個，白玉が 4 個，青玉が 3 個入っている箱がある．この箱から玉を取り出すとき，いずれかの色の玉が必ず 3 個以上になるためには，最低何個取り出せばよいか．

例題 A4.2.17 ガウス記号を含むグラフ ★★

$[x]$ を x 以下の最大の整数とするとき，次の問いに答えよ．

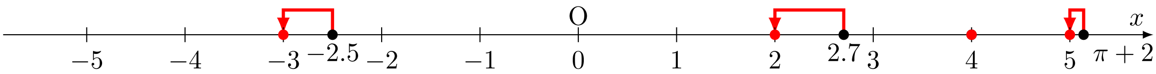
(1) $[2.7]$，$[-2.5]$，$[4]$，$[\pi+2]$ の値を求めよ．

(2) $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=[x]$ のグラフをかけ．

(3) $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=x-[x]$ のグラフをかけ．

解説動画

考え方 実数 x について，x 以下の最大の整数を$[x]$ と表す（[ ] をガウス記号という）．また，n を整数とするとき，$n \leqq x < n+1$ ならば $[x]=n$ が成り立つことを利用して，場合分けをする．



数学 A 4.2

解答

(1) $2 \leqq 2.7 < 3$ であるから，$[2.7]=\mathbf{2}$

$-3 \leqq -2.5 < -2$ であるから，$[-2.5]=\mathbf{-3}$

$4 \leqq 4 < 5$ であるから，$[4]=\mathbf{4}$

$5 \leqq \pi+2 < 6$ であるから，$[\pi+2]=\mathbf{5}$

◀ $[-2.5]=-2$ ではないので注意すること．

◀ $\pi \fallingdotseq 3.14$ より，$3 \leqq \pi < 4$ であるから，$5 \leqq \pi+2 < 6$

(2) $-3 \leqq x < -2$ のとき，$y=[x]=-3$

$-2 \leqq x < -1$ のとき，$y=[x]=-2$

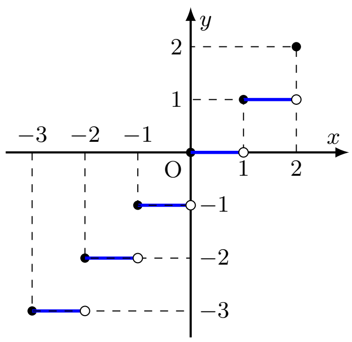
$-1 \leqq x < 0$ のとき，$y=[x]=-1$

$0 \leqq x < 1$ のとき，$y=[x]=0$

$1 \leqq x < 2$ のとき，$y=[x]=1$

$x=2$ のとき，$y=[x]=2$

よって，グラフは右の図のようになる．



(3) $-3 \leqq x < -2$ のとき，$y=x-[x]=x-(-3)=x+3$

$-2 \leqq x < -1$ のとき，$y=x-[x]=x-(-2)=x+2$

$-1 \leqq x < 0$ のとき，$y=x-[x]=x-(-1)=x+1$

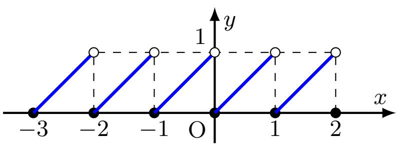
$0 \leqq x < 1$ のとき，$y=x-[x]=x$

$1 \leqq x < 2$ のとき，$y=x-[x]=x-1$

$x=2$ のとき，$y=x-[x]=2-2=0$

◀ $-3 \leqq x < -2$ のとき，$[x]=-3$

よって，グラフは右の図のようになる．



One Point

実数 x について，n を整数とするとき，$n \leqq x < n+1 \Longleftrightarrow [x]=n$

問題 A4.2.17 ★★ 解答 p.280

$[x]$ を x 以下の最大の整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $[3.2]$，$[-0.7]$，$[2]$，$[\sqrt{7}+1]$ の値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=2[x]$ のグラフをかけ．

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=-[2x]$ のグラフをかけ．

例題 A4.2.18 座標空間における点 ★★★

座標空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(0, 2, −2)，B(2, 2, 0) からの距離がともに $2\sqrt{2}$ である点 C の座標を求めよ．

解説動画

考え方 座標空間において，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ があるとする．このとき，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

が成り立つことを利用する．ここでは，OC = AC や OC = BC のままでは扱いにくいから，これと同値な条件である 2 乗した $\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2$ や $\mathrm{OC}^2=\mathrm{BC}^2$ の形を考える．

解答

点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする．

与えられた条件から，$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$

したがって，$\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2=8$

◀ 2 乗した形を考えると扱いやすい．

$\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2$ より，$x^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+(z+2)^2$

整理すると，$y^2+z^2=(y-2)^2+(z+2)^2$

ゆえに，$y-z=2\cdots$(i)

◀ y^2，z^2 の項がなくなる．

$\mathrm{OC}^2=\mathrm{BC}^2$ より，$x^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2$

整理すると，$x^2+y^2=(x-2)^2+(y-2)^2$

ゆえに，$x+y=2\cdots$(ii)

◀ y^2，z^2 の項がなくなる．

さらに，$\mathrm{OC}^2=8$ より，$x^2+y^2+z^2=8\cdots$(iii)

(i)，(ii) より，$x=2-y$，$z=y-2\cdots$(iv)

これを (iii) に代入すると，$(2-y)^2+y^2+(y-2)^2=8$

整理すると，$3y^2-8y=0$

これを解くと，$y=0$，$y=\frac{8}{3}$

よって，(iv) より，求める点 C の座標は，$\mathbf{(2,\ 0,\ -2)}$，$\left(-\frac{2}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

One Point

座標空間において，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ の距離 AB は，

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

問題 A4.2.18 ★★★ 解答 p.280

座標空間において，A(3, 2, 4) B(4, 3, 0) C(5, 4, 5) を頂点とする三角形は，直角三角形であることを示せ．

節末問題 4.2 ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法

節末 A4.2.1 ★★ 解答（節末）p.281

▶ 例題 A4.2.1

120 と 168 の最大公約数 g を求め，$g=120m+168n$ となる整数 m，n の組を 1 つ求めよ．

数学 A 4.2

節末 A4.2.2 ★★★ 解答（節末）p.281

▶ 例題 A4.2.5

方程式 $19x+53y=7$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の中で，$|x-y|$ が最小となるものを求めよ．

節末 A4.2.3 ★★ 解答（節末）p.282

▶ 例題 A4.2.8

ある自然数から 35 を引いた数と，36 を加えた数がともに平方数となった．このとき，その自然数を求めよ．

節末 A4.2.4 ★★ 解答（節末）p.282

▶ 例題 A4.2.14

n を 5 以上の整数とする．

(1) 十進法で表された数 $(n+1)^2$ を n 進法で表せ．

(2) 十進法で表された数 $(2n-1)^2$ を n 進法で表したとき，n の位の数を求めよ．

節末 A4.2.5 ★★ 解答（節末）p.282

▶ 例題 A4.2.14

十進法の 1440 を n 進法で表すと $10400_{(n)}$ になった．n の値を求めよ．

章末問題 4 数学と人間の活動

4.3 章末問題 4

章末 A4.1 ★★★ 解答（章末）p.283 ▶ 例題 A4.1.4

${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ が 2^n で割り切れるとき，自然数 n の最大値を求めよ．

数学 A 4.3

章末 A4.2 ★★ 解答（章末）p.283 ▶ 例題 A4.1.7

n を自然数とする．$n+4$ は 5 の倍数であり，$n+9$ は 11 の倍数である．このような自然数 n で 300 より小さいものは何個あるか．

章末 A4.3 ★★★★ 解答（章末）p.284 ▶ 例題 A4.1.8 ▶ 例題 A4.1.9

(1) 2 つの自然数 a と b $(a > b)$ が互いに素であるとき，a と $a-b$ も互いに素であることを証明せよ．
(2) 504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数はいくつあるか答えよ．
(3) 504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数の総和を求めよ．

章末 A4.4 ★★★ 解答（章末）p.285 ▶ 例題 A4.2.11

x についての 2 次方程式 $x^2+2ax+2a-8=0$ が異なる 2 つの整数解をもつような整数 a の値を求めよ．

章末 A4.5 ★★★★ 解答（章末）p.286

6 の約数 1，2，3，6 の和は 6 の 2 倍になっている．このように，正の約数の和がその数の 2 倍に等しいとき，その数を完全数という．p，q を異なる素数として，次の問いに答えよ．

(1) pq の形の完全数をすべて求めよ． (2) p^2q の形の完全数をすべて求めよ．

5 略解

5.1 問題，節末・章末問題の略解

図やグラフ，表，証明などは省略しています．問題，節末・章末問題の略解を載せています．

問題 1.1

A1.1.1 (1) 3　(2) 35　(3) 18　(4) 66

A1.1.2 (1) 170　(2) 100

A1.1.3 26

A1.1.4 (1) 90　(2) 10

A1.1.5 27

A1.1.6 (1) 7　(2) 8

A1.1.7 約数の個数：16　約数の総和：360

A1.1.8 (1) 23　(2) 79

A1.1.9 91

節末 1.1

A1.1.1 (1) 120　(2) 36

A1.1.2 20

A1.1.3 (1) 32　(2) 18　(3) 25　(4) 5

A1.1.4 約数の個数：30　奇数の約数の個数：6

A1.1.5 11

問題 1.2

A1.2.1 (1) 48　(2) 18　(3) 20

A1.2.2 (1) 1440　(2) 3600

A1.2.3 (1) 40320　(2) 8640　(3) 31680

A1.2.4 (1) 57　(2) 41253

A1.2.5 (1) 120　(2) 90　(3) 48　(4) 60

A1.2.6 (1) 720　(2) 144

A1.2.7 (1) 16　(2) 100

A1.2.8 (1) 243　(2) 150

A1.2.9 120

A1.2.10 2

A1.2.11 (1) 35　(2) 4　(3) 18　(4) 288

A1.2.12 (1) 280　(2) 60　(3) 220

A1.2.13 (1) 54　(2) 52

A1.2.14 (1) 280　(2) 70　(3) 35　(4) 210

A1.2.15 (1) 60　(2) 84

A1.2.16 (1) 6720　(2) 10080

A1.2.17 (1) 1716　(2) 360　(3) 400

A1.2.18 (1) 192　(2) 102

A1.2.19 71

A1.2.20 (1) 252　(2) 28　(3) 16

A1.2.21 84

A1.2.22 (1) 45　(2) 21　(3) 165

A1.2.23 (1) 252　(2) 2002　(3) 462

A1.2.24 9

節末 1.2

A1.2.1 (1) 52　(2) 70　(3) 310

A1.2.2 (1) 2880　(2) 144

A1.2.3 210

A1.2.4 (1) 420　(2) 60　(3) 300　(4) 96

A1.2.5 (1) 13　(2) 152

章末 1

A1.1 80

A1.2 8

A1.3 (1) $n = 6$　(2) $n = 13$

A1.4 (1) 1680　(2) 84

A1.5 70

問題 2.1

A2.1.1 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{4}$

A2.1.2 (1) $\frac{3}{28}$ (2) $\frac{2}{7}$

A2.1.3 (1) $\frac{6}{65}$ (2) $\frac{24}{65}$

A2.1.4 (1) $\frac{5}{14}$ (2) $\frac{5}{8}$

A2.1.5 $\frac{19}{36}$

A2.1.6 (1) $\frac{53}{66}$ (2) $\frac{2}{33}$

A2.1.7 $\frac{7}{24}$

A2.1.8 (1) $\frac{26}{33}$ (2) $\frac{91}{99}$

A2.1.9 (1) $\frac{5}{81}$ (2) $\frac{10}{81}$ (3) $\frac{17}{27}$

節末 2.1

A2.1.1 (1) $\frac{27}{100}$ (2) $\frac{3}{25}$

A2.1.2 (1) $\frac{2}{11}$ (2) $\frac{3}{55}$

A2.1.3 (1) $\frac{3}{44}$ (2) $\frac{3}{11}$ (3) $\frac{41}{55}$

A2.1.4 (1) $\frac{151}{165}$ (2) $\frac{37}{55}$

A2.1.5 (1) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8\cdot 3^n}$ (2) $\frac{3^n-3\cdot 2^n+6}{3^n}$

問題 2.2

A2.2.1 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{59}{60}$

A2.2.2 (1) $\frac{18}{55}$ (2) $\frac{27}{55}$

A2.2.3 (1) $\frac{5}{324}$ (2) $\frac{375}{432}$

A2.2.4 $\frac{992}{3125}$

A2.2.5 (1) $\frac{96}{625}$ (2) $\frac{72}{625}$

A2.2.6 (1) $\frac{20}{243}$ (2) $\frac{13}{81}$

A2.2.7 $\frac{5}{16}$

A2.2.8 (1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{65}{1296}$

A2.2.9 3

A2.2.10 (1) $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{3}{11}$

A2.2.11 (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{4}{13}$

A2.2.12 $\frac{41}{110}$

A2.2.13 (1) $\frac{37}{1000}$ (2) $\frac{28}{37}$

A2.2.14 $\frac{2}{9}$

A2.2.15 7

A2.2.16 (ii)

A2.2.17 $\frac{12+6\sqrt{3}}{5}$

節末 2.2

A2.2.1 (1) $\frac{41}{128}$ (2) $\frac{81}{256}$

A2.2.2 $\frac{227}{648}$

A2.2.3 $n=4,\ 5$

A2.2.4 $\frac{7}{8}$

A2.2.5 (1) $\frac{5}{16}$ (2) $\frac{39}{8}$

章末 2

A2.1 (1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{1}{18}$ (3) $\frac{1}{3}$

A2.2 $\frac{35}{512}$

A2.3 $\frac{12}{37}$

A2.4 $n=12$

A2.5 $\frac{4012}{729}$

問題 3.1

A3.1.1 24

A3.1.2 略

A3.1.3 略

A3.1.4 (1) $x = 20°$, $y = 120°$ (2) $x = 125°$, $y = 20°$

A3.1.5 略

A3.1.6 略

A3.1.7 16 : 3

A3.1.8 (1) 9 : 25 (2) 8 : 21

A3.1.9 (1) 略 (2) 略

A3.1.10 (1) $\frac{3}{13}S$ (2) $\frac{4}{13}S$

節末 3.1

A3.1.1 略

A3.1.2 3 : 1

A3.1.3 略

A3.1.4 (1) $x = 3$, $y = 1$ (2) 7 : 1

問題 3.2

A3.2.1 120°

A3.2.2 3

A3.2.3 45°

A3.2.4 (1) $x = 3$ (2) $x = 2$

A3.2.5 略

A3.2.6 AD $= 6$, DE $= 2$

A3.2.7 AB $= 3\sqrt{17}$, CD $= 5$

A3.2.8 $(21 - 12\sqrt{3})\pi$

A3.2.9 略

A3.2.10 略

A3.2.11 略

A3.2.12 略

節末 3.2

A3.2.1 略

A3.2.2 (1) $2\sqrt{rr'}$ (2) $\frac{rr'}{(\sqrt{r}+\sqrt{r'})^2}$

A3.2.3 略

A3.2.4 略

問題 3.3

A3.3.1 略

A3.3.2 (1) 略 (2) 略

A3.3.3 $f = 32$, $e = 60$, $v = 30$

A3.3.4 4

節末 3.3

A3.3.1 略

A3.3.2 略

A3.3.3 $V = \frac{23\sqrt{2}}{12}$

A3.3.4 (1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (2) $\beta = 45°$

章末 3

A3.1 $a_1a_2a_3 : (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$

A3.2 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{4}{3}$

A3.3 正四面体，正八面体，正二十面体の 3 種類

A3.4 (1) $\frac{448}{3}$ (2) 72

問題 4.1

A4.1.1 31707

A4.1.2 (1) 30　(2) 42

A4.1.3 (1) 24，1170　(2) 36　(3) 3

A4.1.4 (1) 11　(2) 12

A4.1.5 (1) (i) 48，576　(ii) 30，7560　(2) 16，80

A4.1.6 (1) (15，165)，(75，105)　(2) (5，80)

A4.1.7 略

A4.1.8 (1) 略　(2) 略

A4.1.9 (1) 40　(2) p^2q-p^2-pq+p　(3) 2^m-2^{m-1}

A4.1.10 (1) 0　(2) 6　(3) 4

A4.1.11 (1) 略　(2) 略

A4.1.12 (1) 略　(2) 略

A4.1.13 (1) 4　(2) 8　(3) 6

A4.1.14 (1) 0，1，2，4　(2) 略

節末 4.1

A4.1.1 60

A4.1.2 20

A4.1.3 $\frac{385}{18}$

A4.1.4 略

A4.1.5 84

問題 4.2

A4.2.1 (1) 最大公約数は 14，最小公倍数は 23100
(2) $\frac{67}{93}$

A4.2.2 (1) $n=2,\ 15,\ 28,\ 41,\ 54,\ 67$　(2) 96

A4.2.3 (1) $x=3k,\ y=7k-6$ (k は整数)
(2) $x=56k-1,\ y=-39k+1$ (k は整数)

A4.2.4 $x=7k+2,\ y=-4k-1$ (k は整数)

A4.2.5 $x=19k-2,\ y=-47k+5$ (k は整数)

A4.2.6 (8，1，1)，(5，2，1)，(2，3，1)，(4，1，2)，(1，2，2)

A4.2.7 (1，3，6)，(1，4，4)，(2，2，2)

A4.2.8 (1) (23，22)，(9，6)，(7，2)
(2) $n=8,\ 12,\ 32$

A4.2.9 (1) $(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(-3,\ -3)$，$(-4,\ -2)$
(2) $(6,\ 2)$，$(4,\ 4)$，$(2,\ -2)$

A4.2.10 $(1,\ 5)$，$(-7,\ -1)$

A4.2.11 (2，1)，(4，2)，(2，2)，(4，3)

A4.2.12 (1) $11001_{(2)}=25$，$354_{(6)}=142$
(2) $101010_{(2)}$，$1120_{(3)}$，$110_{(6)}$
(3) 2.32　(4) $0.101_{(2)}$

A4.2.13 (1) $100011_{(2)}$　(2) $10220_{(3)}$　(3) $231_{(6)}$

A4.2.14 $a=2,\ b=1,\ N=9$

A4.2.15 (1) 65　(2) 10020

A4.2.16 7

A4.2.17 (1) $[3.2]=3,\ [-0.7=]-1,\ [2]=2,\ [\sqrt{7}+1]=3$
(2) 略　(3) 略

A4.2.18 略

節末 4.2

A4.2.1 $g=24$　$(m,\ n)=(3,\ -2)$

A4.2.2 $(-8,\ 3)$

A4.2.3 1260

A4.2.4 (1) $121_{(n)}$　(2) $n-4$

A4.2.5 $n=6$

章末 4

A4.1 $n=2$

A4.2 5 個

A4.3 (1) 略　(2) 144　(3) 36288

A4.4 $a=4,\ -2$

A4.5 (1) 6　(2) 28

第 II 部

解答

目次（解答）

場合の数（解答）

数え上げの原則（解答）

解答 A1.1.1 ★ 問題 p.17

問題文

100 から 200 までの整数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 5 でも 6 でも割り切れる数　(2) 5 または 6 で割り切れる数

(3) 5 で割り切れるが 6 で割り切れない数　(4) 5 でも 6 でも割り切れない数

100 以上 200 以下の整数全体の集合を U とし，そのうち，5 で割り切れる数，6 で割り切れる数全体の集合をそれぞれ $A,\ B$ とする．
このとき，$n(U)=200-100+1=101$
$A=\{5\cdot 20,\ 5\cdot 21,\ \cdots,\ 5\cdot 40\}$, $B=\{6\cdot 17,\ 6\cdot 18,\ \cdots,\ 6\cdot 33\}$ であるから，

$$n(A)=40-20+1=21,\quad n(B)=33-17+1=17$$

◀ $5\times 20=100,\ 5\times 40=200$ より，$n(A)=40-20+1$
また，$6\times 17=102,\ 6\times 33=198$ より，$n(B)=33-17+1$

(1) 5 でも 6 でも割り切れる数，すなわち，30 で割り切れる数全体の集合は $A\cap B$ であるから，

$$A\cap B=\{30\cdot 4,\ 30\cdot 5,\ \cdots,\ 30\cdot 6\}$$

◀ 5 と 6 の最小公倍数は 30 である．

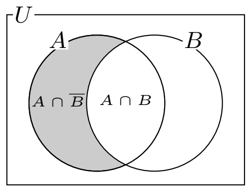
よって，$n(A\cap B)=6-4+1=\mathbf{3}$ **(個)**

(2) 5 または 6 で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ であるから，

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=21+17-3=\mathbf{35}\ \textbf{(個)}$$

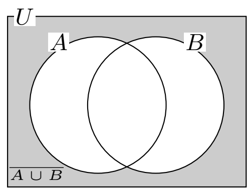
(3) 5 で割り切れるが 6 で割り切れない数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ であるから，

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=21-3=\mathbf{18}\ \textbf{(個)}$$

◀ 

(4) 5 でも 6 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ であるから，

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=101-35=\mathbf{66}\ \textbf{(個)}$$

◀ 

解答 1.1

One math

解答 A1.1.2 ★ 問題 p.18

問題文

200 人の学生を対象に数学の講座と理科の講座の参加状況を調査したところ，数学の講座に参加している学生は 120 人，両方の講座に参加している学生は 50 人，どちらの講座にも参加していない学生は 30 人であった．このとき，次の学生の人数を求めよ．

(1) 少なくとも 1 つの講座に参加している学生

(2) 理科の講座に参加している学生

200 人の学生全体の集合を U，数学の講座に参加している学生の集合を A，理科の講座に参加している学生の集合を B とすると，

$$n(U)=200,\quad n(A)=120,\quad n(A\cap B)=50,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B})=30$$

◀ どちらの講座にも参加していない学生の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ である．

(1) 少なくとも 1 つの講座に参加している学生の集合は $A\cup B$ であるから，その人数は，

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(U)-n(\overline{A\cup B})\\ &=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})\\ &=200-30=\mathbf{170}\ \textbf{(人)} \end{aligned}$$

◀ ド・モルガンの法則

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より，理科の講座に参加している学生の人数 $n(B)$ は，

$$n(B)=n(A\cup B)-n(A)+n(A\cap B)=170-120+50=\mathbf{100}\ \textbf{(人)}$$

◀ (1) より，$n(A\cup B)=170$

解答 1.1

One math

解答 A1.1.3 ★★★ 問題 p.19

問題文

1 から 100 までの整数のうち，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の個数を求めよ．

1 から 100 までの整数の集合を全体集合 U とし，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ，A，B，C とすると，

$$\begin{aligned}
&A=\{2\times1,\ 2\times2,\ \ldots,\ 2\times50\},\\
&B=\{3\times1,\ 3\times2,\ \ldots,\ 3\times33\},\\
&C=\{5\times1,\ 5\times2,\ \ldots,\ 5\times20\},\\
&A\cap B=\{6\times1,\ 6\times2,\ \ldots,\ 6\times16\},\\
&B\cap C=\{15\times1,\ 15\times2,\ \ldots,\ 15\times6\},\\
&C\cap A=\{10\times1,\ 10\times2,\ \ldots,\ 10\times10\},\\
&A\cap B\cap C=\{30\times1,\ 30\times2,\ \ldots,\ 30\times3\}
\end{aligned}$$

したがって，

$$n(A)=50,\quad n(B)=33,\quad n(C)=20,$$

$$n(A\cap B)=16,\quad n(B\cap C)=6,\quad n(C\cap A)=10,\quad n(A\cap B\cap C)=3$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C)=&n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\
&+n(A\cap B\cap C)\\
=&50+33+20-16-6-10+3=74
\end{aligned}$$

よって，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の集合は，$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$ であるから，求める個数は，

◀ ド・モルガンの法則 $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

$$n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)=100-74=\mathbf{26}\ \textbf{(個)}$$

解答 A1.1.4 ★★★ 問題 p.20

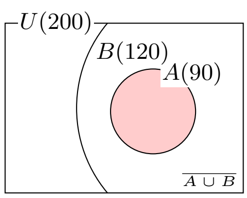
問題文

集合 U とその部分集合 A，B に対して，$n(U)=200$，$n(A)=90$，$n(B)=120$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A\cap B)$ の最大値　　(2) $n(A\cap B)$ の最小値

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=90+120-n(A\cup B)=210-n(A\cup B)$$

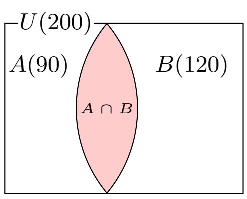
(1) $n(B)>n(A)$ であるから，$n(A\cup B)$ が最小となるのは $B\supset A$ のときである．
したがって，右の図より，$n(A\cup B)=n(B)=120$
よって，$n(A\cap B)$ の**最大値は，**$210-120=\mathbf{90}$



◀ このとき，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ の要素の個数が最大である．

◀ $n(A\cap B)=210-n(A\cup B)$

(2) $n(A)+n(B)>n(U)$ であるから，$n(A\cup B)$ が最大となるのは $A\cup B=U$ のときである．
したがって，右の図より，$n(A\cup B)=n(U)=200$
よって，$n(A\cap B)$ の**最小値は，** $210-200=\mathbf{10}$



◀ $A\cup B=U$，すなわち，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$

◀ $n(A\cap B)=210-n(A\cup B)$

解答 A1.1.5 ★　問題 p.21

問題文

大中小の 3 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 10 になる数の組は何通りあるか．

左から順に，大，中，小のさいころとし，樹形図をかく．

◀ 重複や漏れのないように注意すること．

4 通り

1 — 3 — 6
1 — 4 — 5
1 — 5 — 4
1 — 6 — 3

5 通り

2 — 2 — 6
2 — 3 — 5
2 — 4 — 4
2 — 5 — 3
2 — 6 — 2

6 通り

3 — 1 — 6
3 — 2 — 5
3 — 3 — 4
3 — 4 — 3
3 — 5 — 2
3 — 6 — 1

5 通り

4 — 1 — 5
4 — 2 — 4
4 — 3 — 3
4 — 4 — 2
4 — 5 — 1

4 通り

5 — 1 — 4
5 — 2 — 3
5 — 3 — 2
5 — 4 — 1

3 通り

6 — 1 — 3
6 — 2 — 2
6 — 3 — 1

樹形図より，$4+5+6+5+4+3=\mathbf{27}$ **(通り)**

解答 A1.1.6 ★　問題 p.22

問題文

(1) 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 5 の倍数となる場合は何通りあるか．

(2) 英語の参考書 a, b, c, d の 4 冊から 1 冊と，理科の参考書 x, y の 2 冊から 1 冊，合計 2 冊の参考書を選ぶ方法は何通りあるか．

(1) 大小 2 個のさいころの目がそれぞれ x, y であることを $(x,\ y)$ で表す．目の和が 5 の倍数となるのは，目の和 $x+y$ が次の 2 つの場合である．

(i) $x+y=5$ のとき

$(x,\ y)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$ より，4 通り

(ii) $x+y=10$ のとき

$(x,\ y)=(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)$ より，3 通り

よって，(i)，(ii) は同時に起こらないから，和の法則より，$4+3=\mathbf{7}$ **(通り)**

(2) a, b, c, d の 4 冊から 1 冊を選ぶ方法は 4 通りあり，それぞれの場合について，x, y の 2 冊から 1 冊を選ぶ方法は 2 通りずつある．

よって，合計 2 冊の参考書を選ぶ方法は，積の法則より，$4\times 2=\mathbf{8}$ **(通り)**

◀「大小 2 個」という区別があるから，例えば，$(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$ は異なる目の出方であると考える．

$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

解答 A1.1.7 ★★ 問題 p.23

問題文

120 の正の約数の個数とその総和を求めよ.

120 を素因数分解すると，$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

$$(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 16$$

◀ 積の法則を用いる.

より，約数の個数は，**16 個**

また，約数の総和は，

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5) = 15 \times 4 \times 6 = \mathbf{360}$$

解答 A1.1.8 ★★ 問題 p.24

問題文

硬貨の枚数が次のようなとき，硬貨の一部または全部を使って，ちょうど支払える金額の種類は何通りあるか.

(1) 500 円硬貨が 1 枚，100 円硬貨が 2 枚，10 円硬貨が 3 枚

(2) 500 円硬貨が 2 枚，100 円硬貨が 5 枚，10 円硬貨が 4 枚

(1) 500 円硬貨 1 枚の使い方は，0，1 枚の 2 通り

100 円硬貨 2 枚の使い方は，$0 \sim 2$ 枚の 3 通り

10 円硬貨 3 枚の使い方は，$0 \sim 3$ 枚の 4 通り

したがって，$2 \times 3 \times 4 = 24$ (通り)

よって，求める総数は，$24 - 1 =$ **23 (通り)**

◀ 「支払える金額」であるから，0 円の場合を引く.

(2) 100 円硬貨 5 枚は 500 円硬貨 1 枚と同じ金額を表すので，500 円硬貨 2 枚を 100 円硬貨 10 枚として考え，100 円硬貨 15 枚と 10 円硬貨 4 枚で支払える金額を求める.

◀ もとの 100 円硬貨 5 枚と，500 円硬貨を 100 円硬貨として考えた 10 枚とを合わせた，合計 15 枚と考える.

100 円硬貨 15 枚の使い方は，$0 \sim 15$ 枚の 16 通り

10 円硬貨 4 枚の使い方は，$0 \sim 4$ 枚の 5 通り

したがって，$16 \times 5 = 80$ (通り)

よって，求める総数は，$80 - 1 =$ **79 (通り)**

◀ 0 円の場合を引く.

解答 A1.1.9 ★★ 問題 p.25

問題文

大，中，小 3 個のさいころを投げるとき，目の積が 5 の倍数となる場合は何通りあるか.

さいころの出る目の総数は，$6 \times 6 \times 6 = 216$ (通り)

さいころの目の積が 5 の倍数となるのは，3 個のさいころのうち少なくとも 1 つが 5 である場合である.

3 個のさいころの目がすべて 5 以外である場合の数は，

◀ 3 個とも 1，2，3，4，6 の目が出る場合の数を考える.

$$5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ (通り)}$$

よって，求める場合の数は，$216 - 125 =$ **91 (通り)**

解答 1.1

解答（節末）A1.1.1 ★★ 節末 p.26

問題文

ある町の住民の一部にアンケートを実施したところ，スポーツが好きと答えた住民は全体の 65% ，読書が好きと答えた住民は全体の 55% ，両方とも好きではないと答えた住民は全体の 15% ，さらに両方とも好きと答えた住民は 42 人であった．アンケートに答えた住民の総数を求めよ．また，スポーツだけが好きと答えた住民の人数を求めよ．

アンケートに答えた住民全体の集合を U，スポーツが好きと答えた住民の集合を A，読書が好きと答えた住民の集合を B とする．
$n(U)=x$ とおくと，

$$n(A)=0.65x,\quad n(B)=0.55x,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B})=0.15x,\quad n(A\cap B)=42$$

◀ 両方とも好きではないと答えた住民の集合は，$\overline{A}\cap\overline{B}$

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$ であるから，

$$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})=x-0.15x=0.85x\cdots\text{(i)}$$

また，

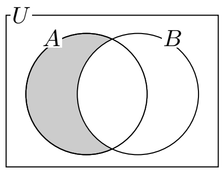
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=0.65x+0.55x-42=1.2x-42\cdots\text{(ii)}$$

(i)，(ii) より，$0.85x=1.2x-42$
したがって，$x=120$

◀ $0.35x=42$

よって，アンケートに答えた住民は **120 人**
また，スポーツだけが好きと答えた住民の人数は $n(A)-n(A\cap B)$ であるから，

◀



$$n(A)-n(A\cap B)=0.65x-42=0.65\times 120-42=\mathbf{36}\ \text{(人)}$$

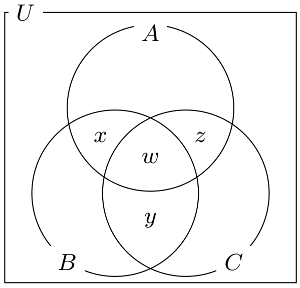
解答 1.1

解答（節末）A1.1.2 ★★★ 節末 p.26

問題文

ある企業の社員 140 人を対象にアンケートを実施したところ，英語が得意な社員は 110 人，中国語が得意な社員は 100 人，スペイン語が得意な社員は 90 人であった．このとき，3 言語すべてが得意な社員の人数は，少なくとも何人であるか．

140 人の社員全体の集合を U，英語，中国語，スペイン語が得意な社員の集合をそれぞれ A，B，C とする．
また，英語と中国語のみ，中国語とスペイン語のみ，スペイン語と英語のみに得意な社員をそれぞれ x 人，y 人，z 人，3 言語すべてが得意な社員を w 人とする．



社員全体について，

$$110+100+90-(x+w)-(y+w)-(z+w)+w \leqq 140$$

◀ $n(A \cup B \cup C) \leqq 140$

すなわち，

$$160-(x+y+z)-2w \leqq 0 \cdots \text{(i)}$$

集合 A，B，C のそれぞれについて，

$$110 \geqq x+z+w \cdots \text{(ii)}, \quad 100 \geqq x+y+w \cdots \text{(iii)}, \quad 90 \geqq y+z+w \cdots \text{(iv)}$$

(ii)〜(iv) の辺々を足し合わせると，

$$300 \geqq 2(x+y+z)+3w$$

すなわち，$2(x+y+z)+3w-300 \leqq 0 \cdots \text{(v)}$
(v) と (i) $\times 2$ の辺々を足し合わせると，$20-w \leqq 0$
したがって，$w \geqq 20$
また，$w=20$ のとき，(i)〜(iv) の不等号を等号におき換えた連立方程式は，負ではない整数解 $(x,\ y,\ z)=(50,\ 30,\ 40)$ をもつ．

◀ 負の整数解をもつとき，$w=20$ は不適である．

よって，3 言語すべてが得意な社員の人数は，**少なくとも 20 人**

解答
1.1

解答（節末）A1.1.3 ★★★ 節末 p.26

問題文

50 人の社員に対し，異なる 3 種類の技術 A，B，C を習得しているか調査したところ，全員が A, B, C のうち少なくとも 1 つの技術を習得していた．また，A と B の両方，B と C の両方，A と C の両方を習得している社員の数はそれぞれ 10 人，8 人，12 人であった．さらに，A と B の少なくとも一方，B と C の少なくとも一方，A と C の少なくとも一方を習得している社員の数は，それぞれ 40 人，35 人，45 人であった．このとき，次の社員の人数を求めよ．
(1) 技術 A を習得している社員
(2) 技術 B を習得している社員
(3) 技術 C を習得している社員
(4) A，B，C のすべての技術を習得している社員

技術 A, B, C を習得している社員の集合をそれぞれ A，B，C とすると，

$$n(A\cup B\cup C)=50,\quad n(A\cap B)=10,\quad n(B\cap C)=8,\quad n(C\cap A)=12,$$
$$n(A\cup B)=40,\quad n(B\cup C)=35,\quad n(C\cup A)=45$$

◀ $\overline{A\cup B\cup C}=\varnothing$ より，U を全体集合とすると，
$n(A\cup B\cup C)=n(U)$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より，$n(A)+n(B)=50\cdots$(i)
$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$ より，$n(B)+n(C)=43\cdots$(ii)
$n(C\cup A)=n(C)+n(A)-n(C\cap A)$ より，$n(C)+n(A)=57\cdots$(iii)

◀ $n(A)+n(B)$
$=n(A\cup B)+n(A\cap B)$

(i)〜(iii) の辺々を足し合わせると，

$$n(A)+n(B)+n(C)=75\cdots(\text{iv})$$

(1) (iv) − (ii) より，$n(A)=$ **32 (人)**
(2) (iv) − (iii) より，$n(B)=$ **18 (人)**
(3) (iv) − (i) より，$n(C)=$ **25 (人)**
(4) すべての技術を習得している社員の数を求めると，

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)\\ -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

であるから，$n(A\cap B\cap C)=50-32-18-25+10+8+12=$ **5 (人)**

解答（節末）A1.1.4 ★★ 節末 p.26

問題文

720 の正の約数の個数は何個あるか．そのうち，奇数の約数は何個あるか．

720 を素因数分解すると，$720=2^4\times3^2\times5$

$$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$$

◀ 積の法則を用いる．

より，約数の個数は，**30 個**
奇数の約数は，$3^2\times5$ の約数であるから，

◀ 2 を因数にもたないとき，奇数の約数となる．

$$(2+1)\times(1+1)=6$$

◀ 積の法則を用いる．

より，奇数の約数の個数は，**6 個**

解答 1.1

解答（節末）A1.1.5 ★★★ 節末 p.26

問題文

赤玉 3 個，白玉 2 個，青玉 1 個，黄玉 1 個がある．この中から 4 個の玉を選ぶ方法は全部で何通りあるか．ただし，選ばれない色があってもよいものとする．

選んだ 4 個の玉に含まれる赤玉，白玉，青玉，黄玉の個数をそれぞれ a，b，c，d とし，$(a,\ b,\ c,\ d)$ で表す．

$0 \leqq a \leqq 3$ であるから，4 個の玉を選ぶ方法は次の 4 つの場合がある．

◀ 数の多い赤玉の個数で場合分けをするとよい．

(i) $a = 3$ のとき

赤玉を 3 個選び，残りの 1 個を他の色から選ぶので，

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (3,\ 1,\ 0,\ 0),\ (3,\ 0,\ 1,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0,\ 1)$$

の 3 通り

(ii) $a = 2$ のとき

赤玉を 2 個選び，残りの 2 個を他の色から選ぶので，

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (2,\ 2,\ 0,\ 0),\ (2,\ 1,\ 1,\ 0),\ (2,\ 1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 0,\ 1,\ 1)$$

◀ $0 \leqq b \leqq 2$，$0 \leqq c \leqq 1$，$0 \leqq d \leqq 1$ であることに注意すること．

の 4 通り

(iii) $a = 1$ のとき

赤玉を 1 個選び，残りの 3 個を他の色から選ぶので，

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 2,\ 1,\ 0),\ (1,\ 2,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

◀ $0 \leqq b \leqq 2$，$0 \leqq c \leqq 1$，$0 \leqq d \leqq 1$ であることに注意すること．

の 3 通り

(iv) $a = 0$ のとき

赤玉を選ばず，残りの 4 個を他の色から選ぶので，

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (0,\ 2,\ 1,\ 1)$$

の 1 通り

よって，(i)〜(iv) は同時に起こらないから，$3 + 4 + 3 + 1 = \mathbf{11}$ **(通り)**

◀ 和の法則を用いる．

順列・組合せ（解答）

解答 A1.2.1 ★★ 問題 p.28

問題文

0，1，2，3，4 の 5 個の数字の中から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次のような数の個数を求めよ．

(1) すべての整数　(2) 奇数　(3) 3 の倍数

(1) 百の位の数字は 0 以外の数であるから，4 通り
そのそれぞれについて，十，一の位に 0 を含めた残りの 4 個の数字から 2 個を選んで並べると，3 桁の整数となる．
よって，求める個数は，$4 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 4 \times (4 \times 3) = \mathbf{48}$ **(個)**

◀ 最高位は 0 にはならないので，百の位から考える．

(2) 3 桁の整数が奇数となるから，一の位は 1，3 であり，そのそれぞれについて，百の位は 0 以外で一の位の数字を除く数であるから，3 通り
十の位の数字の選び方は 3 通りあるから，

$$2 \times 3 \times 3 = \mathbf{18}\ \textbf{(個)}$$

(3) 3 の倍数となるのは，各位の数の和が 3 の倍数のときである．その 3 個の数の組は，$\{0,\ 1,\ 2\}$，$\{0,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{2,\ 3,\ 4\}$ の 4 つの場合がある．

◀ 各位の数の和が 3，6，9 になる場合を考える．

(i) 選んだ 3 個の数に 0 を含むとき
$\{0,\ 1,\ 2\}$，$\{0,\ 2,\ 4\}$ の 2 組があり，それぞれの組でできる 3 桁の整数は，百の位は 0 ではないから，$2 \times 2! = 4$ (個)
よって，$2 \times 4 = 8$ (個)

(ii) 選んだ 3 個の数に 0 を含まないとき
$\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{2,\ 3,\ 4\}$ の 2 組があり，この 3 個の数でできる 3 桁の整数は，$3! = 6$ (個)
よって，$2 \times 6 = 12$ (個)

よって，(i)，(ii) より，求める個数は，$8 + 12 = \mathbf{20}$ **(個)**

解答 A1.2.2 ★★ 問題 p.29

問題文

男子 5 人，女子 2 人の合計 7 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 女子 2 人が隣り合う　　(2) 女子 2 人ともが隣り合わない

(1) 女子 2 人をひとまとまりにして 1 人として考え，男子 5 人と合わせた 6 個の並び方は，

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{（通り）}$$

◀ 先にひとまとまりにして考え，次に，そのそれぞれについて女子の並び方を考える．

そのそれぞれについて，1 人として考えた女子 2 人の並び方は，$2! = 2$（通り）
よって，女子 2 人が隣り合う並び方は，

$$720 \times 2 = \mathbf{1440} \textbf{（通り）}$$

◀ 積の法則を用いる．

(2) 男子 5 人の並び方は，$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (通り)
男子 5 人の間と両端の 6 箇所のうち，2 箇所に女子 2 人が 1 人ずつ入ればよい．
したがって，6 箇所から 2 箇所選んで並べる順列であるから，

$${}_6\mathrm{P}_2 = 6 \cdot 5 = 30 \text{（通り）}$$

よって，女子 2 人とも隣り合わない並び方は，$120 \times 30 = \mathbf{3600}$ **（通り）**

◀ 積の法則を用いる．

解答 A1.2.3 ★★ 問題 p.30

問題文

男性 4 人，女性 4 人の合計 8 人が 1 列に並ぶ．このとき，次の条件を満たす並び方は何通りあるか．

(1) 並び方の総数　　(2) 両端が男性である

(3) 少なくとも一方の端が女性である

(1) 8 人が 1 列に並ぶ順列であるから，並び方の総数は，

$${}_8\mathrm{P}_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{40320} \textbf{ (通り)}$$

(2) 両端が男性である並び方は，${}_4\mathrm{P}_2 = 4 \cdot 3 = 12$ (通り)
残りの 6 人を並べる順列は，$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ (通り)
よって，両端が男性である並び方は，

$$12 \times 720 = \mathbf{8640} \textbf{ (通り)}$$

◀ 男性 4 人から 2 人が 1 列に並ぶ順列を考える（両端には右端と左端があるから，単に選ぶだけではなく，順序も考える）．

(3) 少なくとも一方の端が女性である並び方は，全体から両端が男性である並び方を引いたものである．
よって，(1)，(2) より，少なくとも一方の端が女性である並び方は，

$$40320 - 8640 = \mathbf{31680} \textbf{ (通り)}$$

◀ $n(A) = n(U) - n(\overline{A})$

解答 A1.2.4 ★★ 問題 p.31

問題文

1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの数字を並べた数列を，数値順に，1 番目を 12345，2 番目を 12354，$\cdots$，120 番目を 54321 と番号を付ける．

(1) 32415 は何番目にあるか．　(2) 74 番目の数列は何か．

(1) 1□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
2□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
31□□□ の形の数列は，$3! = 6$ (通り)
321□□ の形の数列は，$2! = 2$ (通り)
32415 の形の数列で 1 通り
よって，$24 + 24 + 6 + 2 + 1 =$ **57 (番目)**

◀ 求める 32415 を得ることができたので，ここまでの合計を求める．

(2) 1□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
2□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
3□□□□ の形の数列は，$4! = 24$ (通り)
ここまでの合計は，$24 + 24 + 24 = 72$ (通り)
73 番目が 41235 であるから，74 番目の数列は，**41253**

◀ 70 番目に近くなったので，書き出して求める．

解答 1.2

解答 A1.2.5 ★ 問題 p.32

問題文

A，B，C，D，E，F の文字が書かれた玉が 1 個ずつあるとき，次の問いに答えよ．
(1) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．
(2) これらの 6 個の玉から 4 個の玉を取り出して円形に並べる方法は何通りあるか．
(3) D，E が隣り合うように円形に並べる方法は何通りあるか．
(4) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

(1) 異なる 6 個の円順列であるから，

$$(6-1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120\ (通り)}$$

(2) 異なる 6 個から 4 個選んだ円順列であるから，

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_4}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4} = \mathbf{90\ (通り)}$$

◀ 4 つずつ重複するので，4 で割る．

(3) D，E をまとめて 1 つの玉と考えると，残りの 4 個と合わせた 5 個の円順列より，$(5-1)!$ 通り
そのそれぞれについて，D，E の並び方は，$2!$ 通り
よって，$(5-1)! \times 2! =$ **48 (通り)**

◀ D，E と E，D の 2 通りがある．

(4) 6 つの円順列において，$(6-1)!$ 通りあるが，首飾りは裏返すことができる．
裏返すと同じものが 2 つずつできるから，

$$\frac{(6-1)!}{2} = \frac{120}{2} = \mathbf{60\ (通り)}$$

◀ 異なる n 個の数珠順列は，$\frac{(n-1)!}{2}$ (通り)

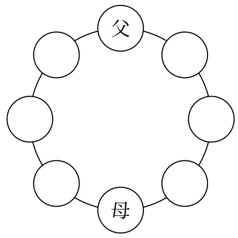
解答 A1.2.6 ★★ 問題 p.33

問題文

両親と息子 3 人，娘 3 人の合計 8 人が円卓に座るとき，次の問いに答えよ．
(1) 両親が正面に向かい合う座り方は何通りあるか．
(2) 男性と女性が交互になる座り方は何通りあるか．

(1) 父の席を固定すると，母の席は正面に 1 通りとなる．残りの 6 人の座り方は，6 箇所に並べる順列であるから，$6!$ 通り
よって，両親が正面に向かい合う座り方は，

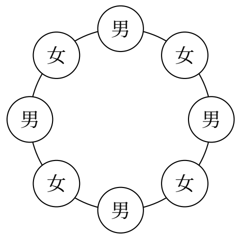
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720}\ \textbf{(通り)}$$



◀ 残りの 6 人の座り方を円順列として考えるのは誤りであるので注意すること．

(2) 男性 4 人が円形に座る座り方は，$(4-1)!$ 通り
そのそれぞれについて，間に入る残りの 4 人の女性の座り方は，4 箇所に並べる順列であるから，$4!$ 通り
よって，男性と女性が交互になる座り方は，

$$(4-1)! \times 4! = \mathbf{144}\ \textbf{(通り)}$$



◀ 間に入る女性 4 人の座り方を円順列として考えるのは誤りであるので注意すること．

解答 A1.2.7 ★★ 問題 p.34

問題文

(1) 集合 $A = \{x,\ y,\ z,\ w\}$ の部分集合は全部で何個あるか．
(2) 0，1，2，3，4 の 5 個の数字の中から，重複を許して 3 個取って 1 列に並べるとき，3 桁の整数は何個できるか．

(1) 集合 A の部分集合の個数は，A の 4 つの要素 x，y，z，w のそれぞれが，部分集合に属しているか否かの決め方の数だけある．
よって，集合 A の部分集合の個数は，

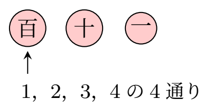
$$2^4 = \mathbf{16}\ \textbf{(個)}$$

◀ 部分集合は，A 自身である $A = \{x,\ y,\ z,\ w\}$ と空集合 $\varnothing$ を含むことに注意すること．

(2) 百の位に並べる数は，1，2，3，4 の 4 通り
そのそれぞれについて，十の位と一の位に並べる数は，0，1，2，3，4 のいずれでもよいから，その個数は，5^2 通り
よって，求める 3 桁の整数の個数は，

$$4 \times 5^2 = \mathbf{100}\ \textbf{(個)}$$

◀ 百の位は 0 ではないことに注意すること．



解答 A1.2.8 ★★★ 問題 p.35

問題文

5 人が X，Y，Z の 3 つの部屋に入るとき，次の場合のような入り方は何通りあるか．

(1) 空き部屋があってもよい場合　　(2) 空き部屋がないようにする場合

(1) 5 人それぞれが部屋に入る入り方は，X，Y，Z の 3 通りずつあるから，

◀ 異なる 5 個のものから 3 個取り出して並べる重複順列である．

$$3^5 = \mathbf{243}\ \textbf{(通り)}$$

(2) (1) で求めた総数から，空き部屋の数が 2 つまたは 1 つとなる場合を除けばよい．

◀ 空き部屋が 3 つとなることはない．

(i) 空き部屋が 2 つのとき
空き部屋が 2 つとなるのは，X か Y か Z の 1 つの部屋に 5 人全員が入るときであるから，3 通り

(ii) 空き部屋が 1 つのとき
空き部屋が 1 つとなるとき，空き部屋となる部屋の選び方は，3 通り

◀ 空き部屋は X か Y か Z の 3 通りとなる．

そのそれぞれについて，5 人の 2 つの部屋への入り方は，2^5 通り
このうち，1 つの部屋に全員が入るときが 2 通りあるから，1 つの部屋だけが空き部屋になる分け方は

$$3 \times (2^5 - 2) = 90\ (\text{通り})$$

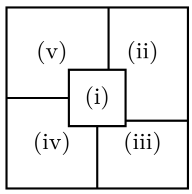
よって，(1) と (i)，(ii) より，求める入り方は，

$$243 - (3 + 90) = \mathbf{150}\ \textbf{(通り)}$$

解答 A1.2.9 ★ 問題 p.36

問題文

右の図において，分けられた領域を異なる 5 色をすべて用いて塗り分ける方法は何通りあるか．



領域は 5 箇所あるから，5 色すべてを用いて塗る場合の数は，

◀ 異なる色を用いて塗り分ける．

$${}_5\mathrm{P}_5 = 5! = \mathbf{120}\ (\text{通り})$$

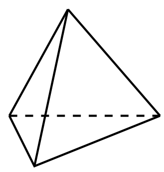
解答 A1.2.10 ★★ 問題 p.37

問題文

正四面体の各面を，互いに異なる 4 色すべてを用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，正四面体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

ある面を 1 色で塗り，その面を底面として固定する．
このとき，残りの側面には残りの 3 色を用いた円順列と考えられるから，

◀ 正四面体はどこから見ても同じ形である．



$$(3-1)! = 2! = 2\ (\text{通り})$$

よって，求める塗り分ける方法は，**2 (通り)**

解答 A1.2.11 ★　問題 p.38

問題文

男子 4 人, 女子 3 人の合計 7 人のグループから 4 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか.

(1) 4 人の選び方

(2) 4 人のうち，男子の特定の 2 人 a, b と女子の 1 人 c を含む選び方

(3) 男子から 2 人，女子から 2 人選ぶ選び方

(4) 男子 3 人，女子 1 人を選んで 1 列に並べる方法

(1) 7 人から 4 人を選ぶ組合せであるから，求める選び方は,

$$ {}_7\mathrm{C}_4 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{35\ (通り)} $$

◀ ${}_7\mathrm{C}_4 = \frac{{}_7\mathrm{P}_4}{4!}$

(2) 4 人のうち，男子の 2 人 a, b と女子の 1 人 c が選ばれているので，残りの 4 人から 1 人を選べばよい.

◀ 特定の 3 人がすでに選ばれていると考える．7 人のうち，a, b, c を除いた 4 人から，1 人を選ぶ.

よって，求める選び方は，${}_4\mathrm{C}_1 = \mathbf{4}$ **(通り)**

(3) 男子 4 人から 2 人を選ぶ組合せは，${}_4\mathrm{C}_2$ 通り

女子 3 人から 2 人を選ぶ組合せは，${}_3\mathrm{C}_2$ 通り

よって，求める選び方は，${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} \times \frac{3\cdot2}{2\cdot1} = \mathbf{18}$ **(通り)**

(4) 男子 4 人から 3 人を選ぶ選び方は ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り

そのおのおのに対し，女子 3 人から 1 人選ぶ選び方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り

したがって，男子 3 人，女子 1 人の選び方は，${}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1$ (通り)

選んだ 4 人を 1 列に並べる並べ方は ${}_4\mathrm{P}_4$ 通り

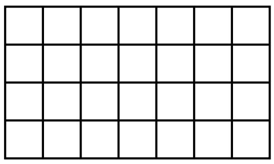
よって，求める並び方は，$({}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1) \times {}_4\mathrm{P}_4 = \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} \times 3 \times 4\cdot3\cdot2\cdot1 = \mathbf{288}$ **(通り)**

◀ 積の法則を用いる.

解答 A1.2.12 ★★　問題 p.39

問題文

縦の長さが 4，横の長さが 7 の長方形を，右の図のように縦を 4 等分，横を 7 等分に区切るとする．このとき，この図形に含まれる線分を辺とする次の図形の個数を求めよ.



(1) 長方形の個数　　(2) 正方形の個数

(3) 長方形であって正方形ではないもの

(1) 8 本の縦線から 2 本を選び，5 本の横線から 2 本を選ぶと 1 個の長方形が定まる.

よって，長方形の個数は，${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 28 \times 10 = \mathbf{280}$ **(個)**

◀ 積の法則を用いる.

(2) この図形には，1 辺が 1，2，3，4 の 4 種類の正方形が含まれている.

1 辺が 1 の正方形は，縦線，横線から幅が 1 の 2 本を選ぶと，1 個の正方形が定まる.

◀ 隣り合う 2 本を考える.

したがって，縦線 7 通り，横線 4 通りより，$7 \times 4 = 28$ (個)

◀ 積の法則を用いる.

同様に，1 辺が 2 の正方形は，縦線 6 通り，横線 3 通りより，$6 \times 3 = 18$ (個)

1 辺が 3 の正方形は，縦線 5 通り，横線 2 通りより，$5 \times 2 = 10$ (個)

1 辺が 4 の正方形は，縦線 4 通り，横線 1 通りより，$4 \times 1 = 4$ (個)

よって，正方形の個数は，$28 + 18 + 10 + 4 = \mathbf{60}$ **(個)**

◀ 和の法則を用いる.

(3) (1)，(2) より，長方形の個数は 280 個，正方形の個数は 60 個である.

よって，長方形であって正方形ではないものの個数は，$280 - 60 = \mathbf{220}$ **(個)**

解答 A1.2.13 ★★ 問題 p.40

問題文

正十二角形について，次のものを求めよ．

(1) 対角線の本数

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，二等辺三角形となるものの個数

(1) 正十二角形の 12 個の頂点から 2 個の頂点を選び，その 2 点を結ぶと線分が 1 本できる．2 個の頂点の選び方は，${}_{12}\mathrm{C}_2$ 通り

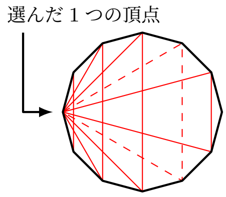
このうち，正十二角形の辺であるものは 12 本あるから，これらを除いたものが対角線の本数である．よって，求める対角線の本数は，${}_{12}\mathrm{C}_2 - 12 = \mathbf{54}$ **(本)**

(2) (i) 正三角形ではない二等辺三角形の個数

1 個の頂点を選び，向かい合う頂点を結んだ線分を対称軸として，対称である 2 個の頂点と選んだ 1 個の頂点を結ぶと 2 等辺三角形が 1 個できる．

1 個の頂点に対して 5 組の対称な点の組み合わせがあり，正三角形となる組み合わせが 1 組あるから，その個数は，$4 \times 12 = 48$ (個)

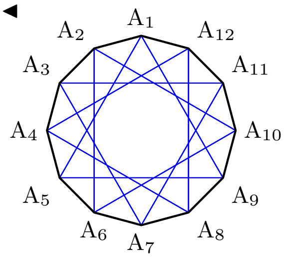
◀



(ii) 正三角形の個数

正十二角形の頂点を順に A_1，A_2，...，A_{12} とすると，3 個の頂点を結んでできる正三角形は，$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_5\mathrm{A}_9$，$\triangle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_6\mathrm{A}_{10}$，$\triangle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_7\mathrm{A}_{11}$，$\triangle \mathrm{A}_4\mathrm{A}_8\mathrm{A}_{12}$ の 4 個である．

◀



よって，(i)，(ii) より，求める二等辺三角形の総数は $48 + 4 = \mathbf{52}$ **(個)**

解答
1.2

解答 A1.2.14 ★★ 問題 p.41

問題文

8 人を次のようなグループに分ける方法は何通りあるか．

(1) 4 人，3 人，1 人のグループ　　(2) 4 人ずつ A，B のグループ

(3) 4 人ずつ 2 つのグループ　　(4) 4 人，2 人，2 人のグループ

(1) 8 人から 4 人を選び，残りの 4 人から 3 人を選ぶと，残りの 1 人は 1 つのグループになる．

よって，求める分け方の総数は，${}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times 1 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} \times 1 = \mathbf{280}$ **(通り)**

◀ ${}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_1\mathrm{C}_1$ としてもよい．

(2) 8 人から A グループに入る 4 人を選び，残りの 4 人を B グループとすればよい．

よって，求める分け方の総数は，${}_8\mathrm{C}_4 \times 1 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times 1 = \mathbf{70}$ **(通り)**

◀ 積の法則を用いる．

(3) (2) において，A，B グループの区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできる．

よって，求める分け方の総数は，${}_8\mathrm{C}_4 \div 2! = 70 \div 2 = \mathbf{35}$ **(通り)**

◀ 区別しないグループの数の階乗で割る．

(4) 8 人を A，B，C グループの 3 グループに分けるとき，4 人，2 人，2 人と分ける方法は，${}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 1$ (通り)

B，C グループの区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできる．

よって，求める分け方の総数は，$({}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 1) \div 2! = 420 \div 2 = \mathbf{210}$ **(通り)**

◀ B，C は人数が同じであることから，区別をしないときは同じものとして考える．A は人数が違うことから，常に区別される．

解答 A1.2.15 ★ 問題 p.42

問題文

次の問いに答えよ．

(1) x，x，x，y，y，z の 6 文字を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

(2) 青玉 6 個と緑玉 3 個の合計 9 個を 1 列に並べる順列は何通りあるか．

(1) 3 個の x，2 個の y，1 個の z を含む 6 個の順列であるから，

$$\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1} = \mathbf{60}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 1! は省略してもよい．

(2) 6 個の青玉と 3 個の緑玉を含む 9 個の順列であるから，

$$\frac{9!}{6!3!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{84}\ \textbf{(通り)}$$

【別解】 (1) ${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 = \mathbf{60}$ **(通り)**

(2) ${}_9\mathrm{C}_6 = \mathbf{84}$ **(通り)**

解答 A1.2.16 ★★ 問題 p.43

問題文

sunlight のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．

(1) s，u，n がこの順で現れる並び方は何通りあるか．

(2) s が t より左に，g が h より右に現れる並び方は何通りあるか．

(1) s，u，n をすべて X とおき，X，X，X，l，g，h，i，t の 8 文字を 1 列に並べる順列の総数を求めればよい．

よって，求める総数は，

◀ X ○ X X ○○○○
s u n

$$\frac{8!}{3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{6720}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 3 個の同じものを含む 8 個の順列である．3 つの X の場所に，左から順に s，u，n を順番に入れると，求める順列になる．

【別解】 8 文字が入る 8 つの場所を考えて，s，u，n が入る場所を X とし，l，i，g，h，t が入る場所を Y とする．

X，X，X，Y，Y，Y，Y，Y の並び方の総数は，$\frac{8!}{3!5!} = 56$ (通り)

X には s，u，n が順番に入るから，1 通りであり，Y には l，i，g，h，t が入るから，その順列は $5! = 120$ (通り)

よって，求める総数は，$56 \times 1 \times 120 = \mathbf{6720}$ **(通り)**

◀ Y には l，i，g，h，t が並び順を考えて入るので，5! 通り

X Y X Y Y Y X Y
s u n

(2) s，t を X とおき，g，h を Y とおく．X，X，Y，Y，u，n，l，i の 8 文字を 1 列に並べる順列の総数を求めればよい．

よって，求める総数は，

◀ X，Y とおくとよい．

X ○ Y X ○○ Y ○
s h t g

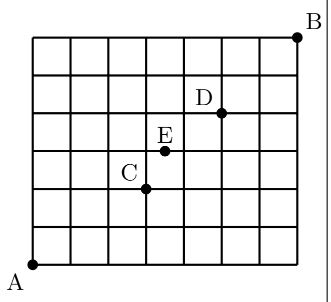
$$\frac{8!}{2!2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1} = \mathbf{10080}\ \textbf{(通り)}$$

解答 1.2

解答 A1.2.17 ★★ 問題 p.44

問題文

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．
(1) A 地点から B 地点へ行く道順
(2) 途中で C，D 地点を通る道順
(3) 途中で E 地点を通る道順



A 地点から B 地点へは，右へ 7 区画，上へ 6 区画進む必要がある．右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ と表すと，A 地点から B 地点へは 7 個の → と 6 個の ↑ の順列で表される．

(1) A 地点から B 地点へは，7 個の → と 6 個の ↑ の順列であるから，

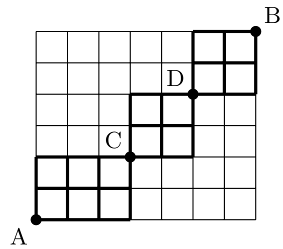
$$\frac{13!}{7!6!} = \mathbf{1716}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 同じものを含む順列を考える．

(2) A 地点から C 地点へは，右へ 3 区画，上へ 2 区画進めばよい．
つまり，3 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{5!}{3!2!} = 10$ (通り)
C 地点から D 地点へは右へ 2 区画，上へ 2 区画進めばよい．
つまり，2 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)
D 地点から B 地点へは右へ 2 区画，上へ 2 区画進めばよい．
つまり，2 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)
よって，A 地点から C，D を経由して B 地点まで行く道順は，

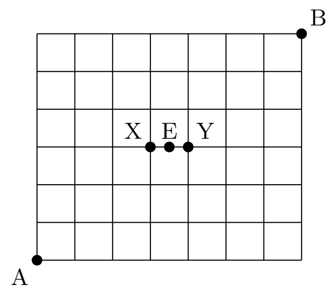
$$10 \times 6 \times 6 = \mathbf{360}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 下の図のように，A から C まで，C から D まで，D から B までの道順を考える．



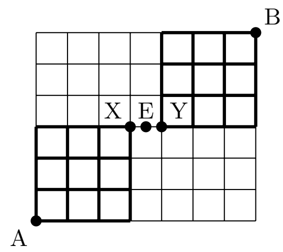
◀ 積の法則を用いる．

(3) 右の図のように，E 地点の左隣りの地点を X 地点，右隣りの地点を Y 地点とする．
A 地点から X 地点へは，右へ 3 区画，上へ 3 区画進めばよい．
つまり，3 個の → と 3 個の ↑ の順列であるから，$\frac{6!}{3!3!} = 20$ (通り)
X 地点から Y 地点まで行く道順は，1 通り
Y 地点から B 地点へは，右へ 3 区画，上へ 3 区画進めばよい．
つまり，3 個の → と 3 個の ↑ の順列であるから，$\frac{6!}{3!3!} = 20$ (通り)
よって，A 地点から E 地点を経由して B 地点まで行く道順は，



$$20 \times 1 \times 20 = \mathbf{400}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 下の図のように，A から X まで，Y から B までの道順を考える．



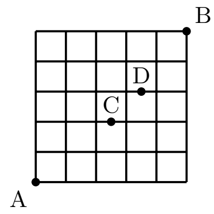
【別解】 (1) ${}_{13}C_6 = \mathbf{1716}$ **(通り)**
(2) ${}_5C_2 \times {}_4C_2 \times {}_4C_2 = 10 \times 6 \times 6 = \mathbf{360}$ **(通り)**
(3) ${}_6C_3 \times 1 \times {}_6C_3 = 20 \times 1 \times 20 = \mathbf{400}$ **(通り)**

◀ 13 個の場所から，↑ が入る 6 個の場所を選ぶ．

解答 A1.2.18 ★★★ 問題 p.45

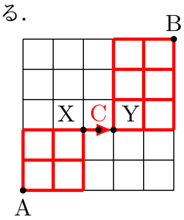
問題文

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，次のような道順は何通りあるか．
(1) C 地点を通らない道順
(2) C 地点または D 地点を通る道順



(1) A 地点から B 地点へのすべての道順は，$\frac{10!}{5!5!} = 252$ (通り)
C 地点を通る道順は，$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{2!3!} = 60$ (通り)
よって，C 地点を通らない道順は，$252 - 60 =$ **192 (通り)**

◀ C 地点を通る道順は，下の図のように，A から X への道順 $\frac{4!}{2!2!}$ 通り，X から Y への道順 1 通り，Y から B への道順 $\frac{5!}{2!3!}$ 通りを掛け合わせたものである．



(2) D 地点を通る道順は，$\frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{1!2!} = 60$ (通り)
C 地点かつ D 地点を通る道順は，

$$\frac{4!}{2!2!} \times 1 \times \frac{3!}{1!2!} = 18 \text{ (通り)}$$

よって，(1) より，C 地点を通る道順は 60 通りであるから，求める道順は，

$$60 + 60 - 18 = \mathbf{102\ (通り)}$$

解答 A1.2.19 ★★★ 問題 p.46

問題文

9 個の数字 5，5，5，5，6，6，6，7，7 のうち 4 個を用いてできる 4 桁の整数の個数を求めよ．

5，6，7 のいずれかを A，B，C で表す．ただし，A，B，C はすべて異なる数字であるとする．
(i) 4 個の数がすべて同じ $\{A,\ A,\ A,\ A\}$ のとき
A に入る数は 5 のみであるから，1 通り

◀ 5555 の 1 通りのみである．

(ii) 4 個のうち 3 個の数が同じ $\{A,\ A,\ A,\ B\}$ のとき
A に入る数は 5 か 6 であるから，2 通り
B に入る数は A 以外の 2 通り
選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{3!}$ 通り
したがって，$2 \times 2 \times \frac{4!}{3!} = 16$ (通り)

◀ 4 個の数の順序を考える (同じものを含む順列)．

(iii) 4 個のうち 2 個ずつ数が同じ $\{A,\ A,\ B,\ B\}$ のとき
A，B に入る数は，${}_3C_2$ 通り
選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{2!2!}$ 通り
したがって，${}_3C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 18$ (通り)

◀ 5566，5577，6677

◀ 5，6，7 から A，B に入らない数を 1 つ選ぶと考えて，${}_3C_1$ 通りとしてもよい．

(iv) 4 個のうち 2 個の数が同じで，残りの数は異なる $\{A,\ A,\ B,\ C\}$ のとき
A に入る数は，${}_3C_1$ 通り
選んだ 4 個の数の並び方は，$\frac{4!}{2!}$ 通り
したがって，${}_3C_1 \times \frac{4!}{2!} = 36$ (通り)

◀ B, C に入る数は残りの ${}_2C_2$ 通り

よって，(i)〜(iv) より，$1 + 16 + 18 + 36 =$ **71 (個)**

◀ 和の法則を用いる．

解答 A1.2.20 ★★★ 問題 p.47

問題文

青玉 6 個，赤玉 2 個，白玉 1 個の合計 9 個の玉がある．このとき，次の問いに答えよ．
(1) これらの玉を 1 列に並べる方法は何通りあるか．
(2) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか．
(3) これらの玉にひもを通し，首飾りを作る方法は何通りあるか．

(1) $\frac{9!}{6!2!}=$ **252 (通り)**

(2) 9 個の玉を円形に並べる総数は，1 個の白玉を固定すると，青玉 6 個，赤玉 2 個を 1 列に並べる順列の総数と一致するから，

$$\frac{8!}{6!2!}=\mathbf{28}\ \textbf{(通り)}$$

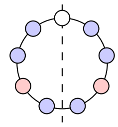
◀ 1 個しかない白玉に注目して固定すると，回転して同じものが含まれなくなる．

◀ 同じものを含む順列を考える．

(3) (2) の順列のうち，左右対称であるものは，白玉を中心として片側に青玉 3 個，赤玉 1 個を 1 列に並べる順列の総数と一致するから，

$$\frac{4!}{3!}=4\ \text{(通り)}$$

◀ 左右対称であるものは，白玉を通る対称軸を中心として，片側である左半分（右半分）の並び方を考えればよい．



したがって，左右対称ではないものは，$28-4=24$ (通り)
このうち，首飾りを作ったとき，左右対称ではないものは裏返すと同じものが 2 つずつできるから，$\frac{24}{2}=12$ (通り)
よって，求める首飾りの総数は，$4+12=$ **16 (通り)**

◀ 2 で割る．

解答 A1.2.21 ★★★ 問題 p.48

問題文

x，y，z，w の 4 個の文字の中から，重複を許して 6 個取り出す組合せは何通りあるか．

取り出す 6 個の文字を ◯ で表し，4 種類の文字の区切りを 3 本の | で表すとする．
6 個の ◯ と 3 本の | を 1 列に並べて，

◀ 4 種類の文字を表すには，$4-1=3$（本）の | を用いる．

1 本目の | より左側にある ◯ はすべて x，
1 本目と 2 本目の | の間にある ◯ はすべて y，
2 本目と 3 本目の | の間にある ◯ はすべて z，
3 本目の | より右側にある ◯ はすべて w

を表すとする．
このとき，x，y，z，w から重複を許して 6 個取り出す組合せは，6 個の ◯ と 3 本の | を並べる順列に一致する．
よって，求める組合せの総数は，

$$\frac{9!}{6!3!}=\mathbf{84}\ \textbf{(通り)}$$

◀ 4 種類から 6 個取り出す重複組合せ ${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6$

【別解】 ◯ と | の個数を合わせた $6+3=9$（個）の場所から，◯ が入る 6 個の場所を選ぶと考えられるから，

$${}_9C_6={}_9C_3=\mathbf{84}\ \textbf{(通り)}$$

解答 1.2

One math

解答 A1.2.22 ★★★★ 問題 p.49

問題文

次の式を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何通りあるか．

(1) $x+y+z=8,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$　(2) $x+y+z=8,\ x\geqq 1,\ y\geqq 1,\ z\geqq 1$

(3) $x+y+z\leqq 8,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$

(1) 求める組の総数は，8 個の ◯ と 2 本の | の並び方を考えると，

$$_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=\mathbf{45\ (通り)}$$

◀ 10 個の場所から，◯ が入る 8 個の場所を選ぶ．

◀ $\frac{10!}{8!2!}$

(2) 8 個の ◯ のうち，先に 3 個の ◯ を 1 個ずつ $x,\ y,\ z$ に割り振ると考え，残りの 5 個の ◯ を $x,\ y,\ z$ で割り振ればよい．つまり，求める組の総数は，5 個の ◯ と 2 本の | の並び方を考えると，$_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\mathbf{21\ (通り)}$

◀ ◯|◯|◯◯◯ のとき，$x=1+1,\ y=1+1,\ z=3+1$

(3) 求める組の総数は，8 個の ◯ と 3 本の | を 1 列に並べて，

1 本目の | より左側にある ◯ の個数は x の値，
1 本目と 2 本目の | の間にある ◯ の個数は y の値，
2 本目と 3 本目の | 間にある ◯ の個数は z の値

を表すとすると，求める組の総数は，$_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=\mathbf{165\ (通り)}$

解答 A1.2.23 ★★★ 問題 p.50

問題文

a から e を 0 から 9 までの整数とするとき，次の条件を満たす $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ の組は何通りあるか．

(1) $a<b<c<d<e$　(2) $a\leqq b\leqq c\leqq d\leqq e$　(3) $a<b\leqq c<d<e$

(1) 0 から 9 までの 10 個の数から異なる 5 個を選び，小さい数から順に $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ とすればよいから，

$$_{10}\mathrm{C}_5=\mathbf{252\ (通り)}$$

◀ 例えば 1，3，5，6，9 を選ぶとき，$a=1,\ b=3,\ c=5,\ d=6,\ e=9$ と対応させる．

(2) 0 から 9 までの 10 個の数から重複を許して 5 個を選び，小さい数から順に $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ とすればよい．
よって，求める組の総数は 5 個の ◯ と 9 本の | を並べる順列に一致するから，

$$_{14}\mathrm{C}_5=\mathbf{2002\ (通り)}$$

◀ 10 種類の数から 5 個を取る重複組合せの数であるから，

$$_{10}\mathrm{H}_5={}_{10+5-1}\mathrm{C}_5={}_{14}\mathrm{C}_5$$

また，同じものを含む順列として，$\frac{14!}{5!9!}$ でも求められる．

(3)　(i) $a<b=c<d<e$ のとき
0 から 9 までの 10 個の数から異なる 4 個を選び，小さい数から順に $a,\ b$ と $c,\ d,\ e$ とすればよいから，

$$_{10}\mathrm{C}_4=210\ (通り)$$

◀ $b=c$ となるから，異なる 4 個の数を選べばよい．

(ii) $a<b<c<d<e$ のとき
(1) より，$_{10}\mathrm{C}_5=252$ (通り)

よって，(i)，(ii) より，$210+252=\mathbf{462\ (通り)}$

解答 1.2

解答 A1.2.24 ★★★ 問題 p.51

問題文

4 人の生徒が異なるおもちゃを持ち寄り，それらを 1 つずつ分配する．このとき，すべての生徒が自分の持ち寄ったおもちゃとは違うおもちゃを受け取る場合は何通りあるか．

生徒を A, B, C, D とし，おもちゃをそれぞれ a, b, c, d とする．このとき，求める場合の数は，4 人の生徒を 1 列に並べた順列のうち，生徒が自分の持ち寄ったおもちゃ k $(k = a,\ b,\ c,\ d)$ を受け取らないものの個数に等しい．

条件を満たす順列は次のように，**9 通り**

◀ 与えられた条件より，生徒 A は a のおもちゃは受け取らない．

A	B	C	D
b	a	d	c
	c	d	a
	d	a	c

A	B	C	D
c	a	d	b
	d	a	b
		b	a

A	B	C	D
d	a	b	c
	c	a	b
		b	a

よって，求める場合の数は，**9 通り**

解答 1.2

解答（節末）A1.2.1 ★★★ 節末 p.52

問題文

6 個の数字 0，1，2，3，4，5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 偶数の個数を求めよ．
(2) 234 以上の整数の個数を求めよ．
(3) これらを小さい順に並べたとき，第 45 番目にある整数を求めよ．

(1)　(i) 一の位が 0
百，十の位に残りの 5 個の数字から 2 個選んで並べればよいので，その個数は，${}_5\mathrm{P}_2 = 5 \cdot 4 = 20$ (個)
(ii) 一の位が 2 または 4 のとき
一の位は 2，4 の 2 通りあり，そのそれぞれについて，百の位は 0 以外で一の位の数を除く 4 通りある．十の位は百の位と一の位の数以外の 4 通りあるから，その個数は，$4 \times 4 \times 2 = 32$ (個)

◀ 一の位が 0 のとき，最高位は 0 にはならない．

◀ 最高位は 0 にはならないので注意すること．

よって，(i)，(ii) より，求める個数は，$20 + 32 =$ **52 (個)**

(2)　(i) 百の位が 2，十の位が 3 のとき
一の位は 4，5 の 2 通り
(ii) 百の位が 2，十の位が 4，5 のとき
一の位は 4 通りずつあるから，$2 \times 4 = 8$ (個)
(iii) 百の位が 3，4，5 のとき
残りの位は ${}_5\mathrm{P}_2$ 通りずつあるから，

$$3 \times {}_5\mathrm{P}_2 = 3 \times 5 \cdot 4 = 60 \text{ (個)}$$

◀ 23□

◀ 24□，25□

◀ 3□□，4□□，5□□

よって，(i)〜(iii) より，求める個数は，$2 + 8 + 60 =$ **70 (個)**

(3) 百の位が 1 である整数は，${}_5\mathrm{P}_2 = 5 \cdot 4 = 20$ (個)
百の位が 2 である整数も同様に，20 (個)
したがって，第 45 番目にある整数は，百の位が 3 である整数のうち，小さいものから 5 番目の整数である．
百の位が 3，十の位が 0 のものが 4 個あるので，310 が第 45 番目となる．
よって，求める整数は，**310**

◀ 1□□

◀ 2□□

◀ 301，302，304，305 の 4 個ある．

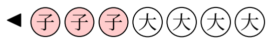
解答 1.2

解答（節末）A1.2.2 ★★★ 節末 p.52

問題文

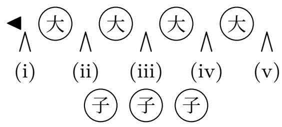
大人 4 人，子供 3 人がいるとするとき，次の並び方は何通りあるか．
(1) 子供のうち 2 人だけが隣り合うように 7 人を 1 列に並べる．
(2) 子供の両隣りが必ず大人になるように 7 人を円形に並べる．

(1) すべての場合から，「子供 3 人が隣り合う場合」と「子供が隣り合わない場合」を引けばよい．
7 人の並び方は，$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ (通り)
子供 3 人が隣り合うような並び方は，



$$5! \times 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ (通り)}$$

子供が隣り合わない並び方は，大人 4 人の間と両端の 5 箇所のうち，3 箇所に子供 3 人が 1 人ずつ入ればよい．

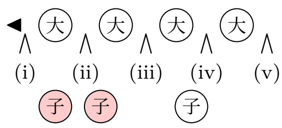


大人の並び方は，$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (通り)
子供 3 人の並び方は，5 箇所から 3 箇所選んで並べる順列であるから，

$$_5\mathrm{P}_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ (通り)}$$

したがって，$24 \times 60 = 1440$ (通り)
よって，求める並び方は，$5040 - (720 + 1440) =$ **2880 (通り)**

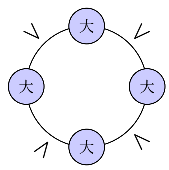
【別解】
大人 4 人の間と両端の5 箇所のうち，2 箇所に子供 2 人の組と残りの子供 1 人が入ればよい．



大人の並び方は，$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (通り)
子供 2 人の組と子供 1 人が入る場所の選び方は，5 箇所から 2 箇所選んで並べる順列であるから，

$$_5\mathrm{P}_2 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (通り)}$$

子供の並び方は，$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (通り)
よって，求める並び方は，$24 \times 20 \times 6 =$ **2880 (通り)**
(2) 円周上に大人 4 人が並ぶ並び方は，$(4-1)! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (通り)
大人と大人の間の 4 箇所に子供 3 人が 1 人ずつ入ればよいから，



$$_4\mathrm{P}_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ (通り)}$$

よって，求める並び方は，$6 \times 24 =$ **144 (通り)**

解答 1.2

解答（節末）A1.2.3 ★★ 節末 p.52

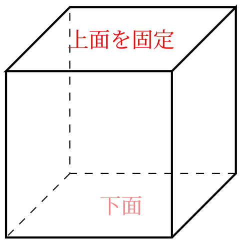
問題文

立方体の各面を，互いに異なる 7 色からすべて違う色を用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか．ただし，立方体を回転させて面の色の配置が一致する場合は，同じ塗り方と見なすものとする．

色の選び方は，使用する 6 色を 7 色の中から選ぶので，7 通り

◀ 使わない 1 色を考えると，7 通りであることがわかる．

ある面を 1 色で塗り，その面を上面として固定する．
このとき，下面には残りの 5 色のうち 1 色を塗るため，塗り方は，5 通り
さらに，側面 4 面は異なる色を用いた円順列と考えられるから，



$(4-1)! = 3! = 6$ (通り)

よって，求める塗り分ける方法は，$7 \times 5 \times 6 = \mathbf{210}$ **(通り)**

解答（節末）A1.2.4 ★★★ 節末 p.52

問題文

SUCCESS のすべての文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ．
(1) 全部で何通りの並び方があるか．
(2) S が 3 つ連続する並び方は何通りあるか．
(3) S が 2 つ以上連続する並び方は何通りあるか．
(4) S が 2 つ以上連続し，かつ，C も 2 つ連続する並び方は何通りあるか．

(1) 3 個の S と 2 個の C と，U，E をそれぞれ 1 個ずつ含む 7 個の順列であるから，

◀ 同じものを含む順列を考える．

$$\frac{7!}{3!2!} = \mathbf{420}\ \textbf{(通り)}$$

(2) SSS をひとまとまりにして 1 つの文字として考えて，$\frac{5!}{2!} = \mathbf{60}$ **(通り)**

◀ SSS の並び方は 1 通りである．

(3) S が連続しない並び方を考える．C，C，U，E を並べると，$\frac{4!}{2!} = 12$ (通り)

◀ 補集合を用いるとよい．

これらの 4 文字の間と両端の 5 箇所のうち，3 箇所に S を並べる並び方は，${}_5C_3$ 通り

◀ $\wedge$ C $\wedge$ C $\wedge$ U $\wedge$ E $\wedge$
(i) (ii) (iii) (iv) (v)
S S S

したがって，S が続かない並び方は，$12 \times {}_5C_3 = 12 \times 10 = 120$ (通り)
よって，求める並び方は，$420 - 120 = \mathbf{300}$ **(通り)**

(4) CC が連続する場合の並び方は，CC をひとまとまりにして 1 つの文字として考えて，

$$\frac{6!}{3!} = 120\ (\text{通り})$$

そのうち，S が連続しないものは，CC，U，E を並べ，これらの間と両端の 4 箇所のうち，3 箇所に S を並べるから，

$$3! \times {}_4C_3 = 24\ (\text{通り})$$

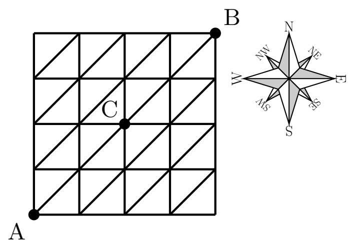
よって，求める並び方は，$120 - 24 = \mathbf{96}$ **(通り)**

◀ 補集合を用いるとよい．

解答（節末）A1.2.5 ★★★★ 節末 p.52

問題文

右の図のような格子状の道路がある．次のような場合に，道順は何通りあるか．ただし，東方向，北方向，北東方向にしか進めないものとする．
(1) A 地点から C 地点へ行く道順
(2) A 地点から C 地点を通らないで B 地点へ行く道順



東へ 1 区画進むことを →，北へ 1 区画進むことを ↑，北東へ 1 区画進むことを ↗ と表す．

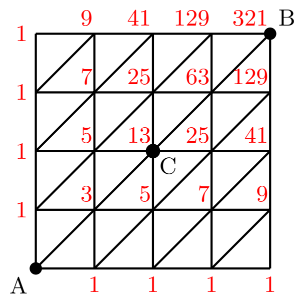
(1) (i) → に 2 回，↑ に 2 回進むとき，2 個の → と 2 個の ↑ の順列であるから，$\frac{4!}{2!2!}=6$ (通り)
(ii) ↗ に 1 回，→ に 1 回，↑ に 1 回進むとき，→，↗，→ の順列であるから，$3!=6$ (通り)
(iii) ↗ に 2 回進むとき，1 通り

◀ 同じものを含む順列を考える．

よって，(i)〜(iii) より，求める道順は，$6+6+1=$ **13 (通り)**

(2)全体から，C を通るものを引くことを考える．A 地点から B 地点へのすべての道順は，

◀ 具体的に道順の総数を書き込むことによっても求めることができる．



(i)→ に 4 回，↑ に 4 回進むとき，4 個の → と 4 個の ↑ の順列であるから，$\frac{8!}{4!4!}=70$ (通り)
(ii) → に 1 回，↑ に 3 回，↗ に 3 回進むとき，1 個の → と 3 個の ↑ と 3 個の ↗ の順列であるから，$\frac{7!}{1!3!3!}=140$ (通り)
(iii) → に 2 回，↑ に 2 回，↗ に 2 回進むとき，2 個の → と 2 個の ↑ と 2 個の ↗ の順列であるから，$\frac{6!}{2!2!2!}=90$ (通り)
(iv) → に 3 回，↑ に 1 回，↗ に 1 回進むとき，3 個の → と 1 個の ↑ と 1 個の ↗ の順列であるから，$\frac{5!}{3!1!1!}=20$ (通り)
(v) ↗ に 4 回進むとき，1 通り

したがって，(i)〜(v) より，$70+140+90+20+1=321$ (通り)
C 地点から B 地点への道順は，(1) と同様に考えると，13 通り
これと (1) より，A 地点から C 地点を通り B 地点へ行く道順は，

$$13\times13=169\ (\text{通り})$$

よって，求める道順は，$321-169=$ **152 (通り)**

◀ 補集合を用いるとよい．

章末問題 1（解答）

解答（章末）A1.1 ★★ 章末 p.53

問題文

分母が 200 であり，分子が 1 から 200 までの 200 個の分数のうち，約分できないものの個数を求めよ．

分母の 200 を素因数分解すると，$200 = 2^3 \cdot 5^2$

したがって，1 から 200 までの整数のうち，2 または 5 で割り切れないものの個数を求めればよい．

◀ 分子が 2 または 5 を素因数にもつときは，約分することができるので不適である．

1 から 200 までの整数全体の集合を U とすると，$n(U) = 200$

U の部分集合のうち，2 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると，

$200 = 2 \cdot 100,\ 200 = 5 \cdot 40$ であるから，

◀ $A = \{2 \cdot 1,\ 2 \cdot 2,\ \ldots,\ 2 \cdot 100\}$ であり，$B = \{5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ \ldots,\ 5 \cdot 40\}$ である．

$$n(A) = 100, \quad n(B) = 40$$

また，$A \cap B$ は 10 の倍数全体の集合で，$200 = 10 \cdot 20$ であるから，$n(A \cap B) = 20$

したがって，$A \cup B$ の個数は，

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 100 + 40 - 20 = 120$$

よって，求める個数は，$n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 200 - 120 = \mathbf{80}$

解答（章末）A1.2 ★★★ 章末 p.53

問題文

区別のつかない 7 個のボールを区別のつかない 3 つの箱に入れる．1 個も入らない箱があってもよい場合，ボールの入れ方は全部で何通りあるか．

3 つの箱に入れるボールの個数を x，y，z $(x \leqq y \leqq z)$ とする．

ボールの入れ方は次の 4 つの場合があり，$x + y + z = 7$ を満たす 0 以上の整数 x，y，z の組の総数を求める．

(i) $x = 0$ のとき

$y + z = 7$ $(0 \leqq y \leqq z)$ より，$(y,\ z) = (0,\ 7),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$ の 4 組

(ii) $x = 1$ のとき

$y + z = 6$ $(1 \leqq y \leqq z)$ より，$(y,\ z) = (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3)$ の 3 組

(iii) $x = 2$ のとき

$y + z = 5$ $(2 \leqq y \leqq z)$ より，$(y,\ z) = (2,\ 3)$ の 1 組

(iv) $x \geqq 3$ のとき

$x + y + z = 7$ $(3 \leqq x \leqq y \leqq z)$ より，このような x，y，z の組は存在しない．

◀ $3 \leqq x \leqq y \leqq z$ より，

$$x + y + z \geqq 3x \geqq 9$$

となり，x，y，z の組は存在しない．

したがって，(i)〜(iv) より，x，y，z の組は，$4 + 3 + 1 = 8$ (組)

よって，ボールの入れ方は全部で，**8 通り**

解答（章末）A1.3 ★★★ 章末 p.53

問題文

次の等式を満たす自然数 n の値を求めよ．

(1) ${}_n\mathrm{P}_3 = 2{}_n\mathrm{P}_2 + 10{}_n\mathrm{P}_1$　　(2) $2{}_n\mathrm{C}_4 = 5{}_n\mathrm{C}_3$

(1) ${}_n\mathrm{P}_3 = n(n-1)(n-2)$，${}_n\mathrm{P}_2 = n(n-1)$，${}_n\mathrm{P}_1 = n$ であるから，

$$n(n-1)(n-2) = 2n(n-1) + 10n$$

これを整理すると，$n(n-6)(n+1) = 0$

よって，$n \geqq 3$ であるから，$n = \mathbf{6}$

(2) ${}_n\mathrm{C}_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$，${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$ であるから，

$$2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}$$

したがって，$n(n-1)(n-2)(n-3) = 10n(n-1)(n-2)$

これを整理すると，$n(n-1)(n-2)(n-13) = 0$

$n \geqq 4$ であるから，$n = \mathbf{13}$

◀ ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

◀ ${}_n\mathrm{P}_3$ より，$n \geqq 3$ である．

◀ ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

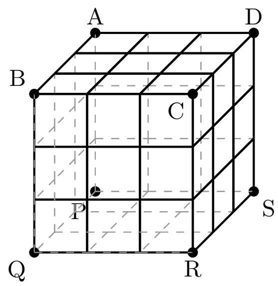
◀ 移項して，$n(n-1)(n-2)$ をくくり出す．

解答（章末）A1.4 ★★★ 章末 p.53

問題文

1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD − PQRS がある．ただし，2 つの正方形 ABCD，PQRS は立方体の向かい合った面であり，AP，BQ，CR，DS はそれぞれ立方体の辺である．

この立方体を 1 辺の長さ 1 の小立方体に区切ったとき，頂点 A から頂点 R へ小立方体の辺を通って行く最短経路について考える．



(1) 最短経路は何通りあるか．

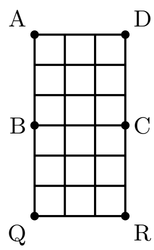
(2) 辺 BC 上の点を通過する最短経路は何通りあるか．

(1) AB 方向に長さ 1 進むことを a，AD 方向に長さ 1 進むことを b，AP 方向に長さ 1 進むことを c で表すと，A から R への最短経路は，3 個の a と 3 個の b，3 個の c の合計 9 個の順列と対応する．

よって，求める最短経路は，$\frac{9!}{3!3!3!} = \mathbf{1680}$ **(通り)**

◀ 同じものを含む順列を考える．

(2) 辺 BC 上の点を通る最短経路は，立方体の面 ABCD と面 BCRQ を取り出した長方形 ABQRCD における，A から R への最短経路と等しい．



ここで，AQ 方向に長さ 1 進むことを d，AD 方向に長さ 1 進むことを e で表すと，求める最短経路は，6 個の d と 3 個の e の合計 9 個の順列と対応する．

よって，求める最短経路は，$\frac{9!}{6!3!} = \mathbf{84}$ **(通り)**

◀ 面 ABCD と面 BCRQ を取り出して，1 つの面として考える．

◀ 同じものを含む順列を考える．

解答 1.3

解答（章末）A1.5 ★★★★ 章末 p.53

問題文

サイコロを 4 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする．このとき，$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4$ となる目の出方は何通りあるか．

$$\text{(i) } a_1 < a_2 < a_3 < a_4, \quad \text{(ii) } a_1 = a_2 < a_3 < a_4,$$
$$\text{(iii) } a_1 < a_2 < a_3 = a_4, \quad \text{(iv) } a_1 = a_2 < a_3 = a_4$$

の 4 つの場合に分けて考える．

(i) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ となるとき

6 個のサイコロの目から異なる 4 個を選ぶ場合の数は，

$$_6\mathrm{C}_4 = 15 \text{ (通り)}$$

(ii) $a_1 = a_2 < a_3 < a_4$ となるとき

6 個のサイコロの目から異なる 3 個を選ぶ場合の数は，

$$_6\mathrm{C}_3 = 20 \text{ (通り)}$$

(iii) $a_1 < a_2 < a_3 = a_4$ となるとき

(ii) と同様に考えると，20 (通り)

(iv) $a_1 = a_2 < a_3 = a_4$ となるとき

6 個のサイコロの目から異なる 2 個を選ぶ場合の数は，

$$_6\mathrm{C}_2 = 15 \text{ (通り)}$$

よって，(i)〜(iv) より，求める出方の総数は，

$$15 + 20 + 20 + 15 = \mathbf{70} \textbf{ (通り)}$$

◀ 4 つの場合に分けて考える必要があり手間が掛かるので，別解のように，おき換えを用いて考えてもよい．

【別解】

$b_1 = a_1$，$b_2 = a_2 + 1$，$b_3 = a_3 + 1$，$b_4 = a_4 + 2$ とおくと，

$$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4,\ 1 \leqq a_i \leqq 6\ (i = 1, \ldots, 4) \text{ を満たす } (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

と，

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4,\ 1 \leqq b_i \leqq 8\ (i = 1, \ldots, 4) \text{ を満たす } (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

とは 1 対 1 に対応する．

よって，これを満たす (b_1, b_2, b_3, b_4) の個数は，$_8\mathrm{C}_4 = \mathbf{70}$ **(通り)**

◀ 例えば，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 4$，$a_4 = 5$ のとき，$b_1 = 1$，$b_2 = 3$，$b_3 = 5$，$b_4 = 7$ となる．

◀ 一般に，a，b が整数のとき，

$$a \leqq b \Longleftrightarrow a < b + 1$$

であることを利用している．

解答 1.3

One math

確率（解答）

確率の基本性質（解答）

解答 A2.1.1 ★ 問題 p.57

問題文

次の確率を求めよ．
(1) 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 7 となる確率を求めよ．
(2) 4 枚の硬貨を投げて，表 3 枚，裏 1 枚が出る確率を求めよ．

(1) 目の出方は，$6 \times 6 = 36$ (通り)
目の和が 8 となるのは，(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)，(6，1) より，6 通り
よって，求める確率は，$\frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

◀ 表を作るとよい．

和	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(2) 4 枚の硬貨を投げた場合に起こりうるすべての組み合わせは，$2^4 = 16$ (通り)
このうち, 表 3 枚, 裏 1 枚が出る組み合わせは, (表，表，表，裏), (表，表，裏，表), (表，裏，表，表)，(裏，表，表，表) より，4 通り
よって，求める確率は，$\frac{4}{16} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

解答 A2.1.2 ★★ 問題 p.58

問題文

A グループ 5 人と B グループ 3 人の生徒が次のように並ぶとき，次の場合の確率を求めよ．
(1) 1 列に並ぶとき，両端が B グループの人である確率
(2) 円形に並ぶとき，特定の 2 人 a，b が隣り合う確率

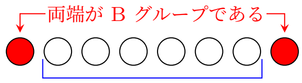
(1) すべての場合の数は，8 人を 1 列に並べる順列であるから，${}_8\mathrm{P}_8 = 8!$ (通り)
両端が B グループの生徒である並び方は，${}_3\mathrm{P}_2$ 通り
残りの 6 人の並び方は，

$${}_6\mathrm{P}_6 = 6! \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_3\mathrm{P}_2 \times 6!}{8!} = \frac{3 \cdot 2 \times 6!}{8!} = \frac{6}{56} = \mathbf{\frac{3}{28}}$$

◀ 先に両端に B グループの生徒を並べ，次に間に入る 6 人を考える．



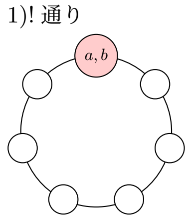
◀ 6! と 8! は約分できる ($6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ などと計算し，具体的に値を求めなくてよい)．

(2) すべての場合の数は，8 人の円順列であるから，

$$(8-1)! = 7! \text{ (通り)}$$

隣り合う特定の 2 人 a，b をまとめて 1 組と考えると，残りの 6 人と合わせた 7 個の円順列より，$(7-1)!$ 通り
そのそれぞれについて，特定の 2 人 a，b の並び方は，2! 通り
よって，求める確率は，$\frac{6! \times 2!}{7!} = \mathbf{\frac{2}{7}}$

◀ 異なる n 個の円順列は，$(n-1)!$ 通り



解答 A2.1.3 ★ 問題 p.59

問題文

赤玉 9 個と白玉 6 個の合計 15 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 4 個とも赤玉である確率　　(2) 赤玉が 3 個，白玉が 1 個である確率

15 個の玉から 4 個の玉を取り出す場合の数は，${}_{15}\mathrm{C}_4$ 通り

◀ 合計 15 個の玉を 赤$_1$，赤$_2$，…，赤$_9$，白$_1$，白$_2$，…，白$_6$ のように，同じ玉を区別して考えている．

(1) 赤玉 9 個から 4 個の玉を取り出す場合の数は，${}_9\mathrm{C}_4$ 通り

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_4}{{}_{15}\mathrm{C}_4}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{15\cdot14\cdot13\cdot12}=\mathbf{\frac{6}{65}}$$

(2) 赤玉 9 個から 3 個を取り出す場合の数は，${}_9\mathrm{C}_3$ 通り

そのそれぞれについて，白玉 6 個から 1 個を取り出す場合の数は，${}_6\mathrm{C}_1$ 通り

◀ 赤玉 9 個，白玉 6 個から，赤玉 3 個，白玉 1 個を取り出す場合の数を考える．

したがって，赤玉 3 個，白玉 1 個を取り出す場合の数は，${}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1$ (通り)

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_4}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times6\times\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{15\cdot14\cdot13\cdot12}=\mathbf{\frac{24}{65}}$$

解答 A2.1.4 ★★★ 問題 p.60

問題文

E，M，P，L，O，Y，E，E の 8 文字からいくつかの文字を取り出して，横に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 8 文字を横 1 列に並べるとき，どの 2 つの E も隣り合わない確率

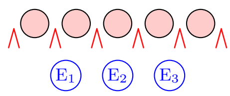
(2) 8 文字の中から 5 文字を取り出して 1 列に並べるとき，どの 2 つの E も隣り合わない確率

(1) E$_1$，M，P，L，O，Y，E$_2$，E$_3$ の 8 文字を 1 列に並べる並び方は，8! 通り

E を除いた 5 文字 M，P，L，O，Y を並べ，さらに 5 文字の間と両端の 6 箇所のうち，3 箇所に E$_1$，E$_2$，E$_3$ が入ればよい．

したがって，どの 2 つの E も隣り合わない並び方は，$5!\times{}_6\mathrm{P}_3$ (通り)

◀ $5!\times{}_6\mathrm{P}_3$

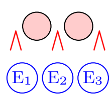


よって，求める確率は，$\frac{5!\times{}_6\mathrm{P}_3}{8!}=\frac{5!\times6\cdot5\cdot4}{8!}=\mathbf{\frac{5}{14}}$

(2) 8 文字の中から 5 文字を取り出して 1 列に並べる場合の数は，${}_8\mathrm{P}_5$ (通り)

(i) 5 文字のうち E が 3 つのとき，${}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3$ (通り)

◀ ${}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3$



(ii) 5 文字のうち E が 2 つのとき，${}_5\mathrm{P}_3\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{P}_2$ (通り)

(iii) 5 文字のうち E が 1 つのとき，${}_5\mathrm{P}_4\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{P}_1$ (通り)

◀ 4 文字の間と両端の 5 箇所から，E が入る 1 箇所を決める順列を考えて，${}_5\mathrm{P}_1$ 通り

(iv) 5 文字のうち E を含まないとき，${}_5\mathrm{P}_5$ 通り

よって，(i) 〜(iv) より，求める確率は，

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3+{}_5\mathrm{P}_3\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{P}_2+{}_5\mathrm{P}_4\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{P}_1+{}_5\mathrm{P}_5}{{}_8\mathrm{P}_5}=\mathbf{\frac{5}{8}}$$

解答 A2.1.5 ★★★ 問題 p.61

問題文

大小 2 個のさいころを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ a，b とするとき，x についての 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつ確率を求めよ．

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の判別式を D とすると，$D=a^2-4b$

2 次方程式が実数解をもつから，$D \geqq 0$ より，$a^2-4b \geqq 0$

したがって，$b \leqq \frac{1}{4}a^2$ であるから，b と $\frac{1}{4}a^2$ の大小を比較する．

a，b はそれぞれ 1 から 6 までの整数の値をとるから，

(i) $a=1$ のとき

$b \leqq \frac{1}{4}$ より，条件を満たす b はない．

(ii) $a=2$ のとき

$b \leqq 1$ より，$b=1$ の 1 通り

◀ $a=2$，$b=1$ のとき，$x^2+ax+b=0$ は重解をもつ．

(iii) $a=3$ のとき

$b \leqq \frac{9}{4}$ より，$b=1$，2 の 2 通り

(iv) $a=4$ のとき

$b \leqq 4$ より，$b=1$，2，3，4 の 4 通り

◀ $a=4$，$b=4$ のとき，$x^2+ax+b=0$ は重解をもつ．

(v) $a=5$ のとき $b \leqq \frac{25}{4}$ より，$b=1$，2，3，4，5，6 の 6 通り

(vi) $a=6$ のとき

$b \leqq 9$ より，$b=1$，2，3，4，5，6 の 6 通り

よって，(i)〜(vi) より，求める確率は，$\frac{1+2+4+6+6}{6^2}=\mathbf{\frac{19}{36}}$

解答 A2.1.6 ★ 問題 p.62

問題文

赤玉 6 個と白玉 5 個の合計 11 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 赤玉が 2 個以上取り出される確率　　(2) 4 個の玉がすべて同じ色である確率

11 個の玉から 4 個の玉を取り出す方法の総数は，${}_{11}\mathrm{C}_4=330$ (通り)

(1) 赤玉 6 個から 2 個，白玉 5 個から 2 個を取り出す場合の数は，

◀ 白玉が 3 個以上取り出す場合と白玉が 4 個以上取り出す場合を考えて，余事象を用いて求めてもよい．

$${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2=15 \times 10=150 \text{ (通り)}$$

赤玉 6 個から 3 個，白玉 5 個から 1 個を取り出す場合の数は，

$${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_1=20 \times 5=100 \text{ (通り)}$$

赤玉 6 個から 4 個を取り出す場合の数は，${}_6\mathrm{C}_4=15$ (通り) よって，求める確率は，

$$\frac{150}{330}+\frac{100}{330}+\frac{15}{330}=\frac{265}{330}=\mathbf{\frac{53}{66}}$$

◀ (赤玉が 2 個以上の確率)
=(赤玉 2 個と白玉 2 個の確率)
＋(赤玉 3 個と白玉 1 個の確率)
＋(赤玉 4 個の確率)

(2) 白玉 5 個から 4 個を取り出す場合の数は，${}_5\mathrm{C}_4=5$ (通り)

(1) より，赤玉 6 個から 4 個を取り出す場合の数は，15 通り

よって，求める確率は，

$$\frac{5}{330}+\frac{15}{330}=\frac{20}{330}=\mathbf{\frac{2}{33}}$$

◀「すべて白玉である」と「すべて赤玉である」は互いに排反である．

◀ $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

One math

解答 A2.1.7 ★★ 問題 p.63

問題文

1 から 120 までの番号をつけた 120 枚のカードがあり，この中から 1 枚のカードを取り出すとき，その番号が 6 の倍数または 7 の倍数である確率を求めよ．

1 枚のカードを取り出す場合の数は，120 通り

カードの番号が 6 の倍数である事象を A，7 の倍数である事象を B とすると，番号が 6 の倍数または 7 の倍数である事象は $A \cup B$ である．

$A = \{6 \cdot 1,\ 6 \cdot 2,\ \ldots,\ 6 \cdot 20\}$ より，$n(A) = 20$ ◀ $6 \times 20 = 120$

$B = \{7 \cdot 1,\ 7 \cdot 2,\ \ldots,\ 7 \cdot 17\}$ より，$n(B) = 17$ ◀ $7 \times 17 = 119$

したがって，事象 A，B が起こる確率はそれぞれ，

$$P(A) = \frac{20}{120},\quad P(B) = \frac{17}{120}$$

また，事象 $A \cap B$ は，カードの番号が 6 の倍数かつ 7 の倍数，すなわち，42 の倍数である事象である．

◀ $A \cap B$ を忘れないように注意すること．

$A \cap B = \{42,\ 84\}$ より，$n(A \cap B) = 2$

ゆえに，事象 $A \cap B$ が起こる確率は，$P(A \cap B) = \frac{2}{120}$

よって，求める確率は，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{20}{120} + \frac{17}{120} - \frac{2}{120} = \mathbf{\frac{7}{24}}$$

◀ 和事象の確率を考える．

解答 A2.1.8 ★★ 問題 p.64

問題文

(1) 11 個の部品の中に 3 個の不良品が含まれている．この中から同時に 4 個の部品を取り出すとき，少なくとも 1 個の不良品が含まれる確率を求めよ．

(2) 赤玉 7 個と白玉 5 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，4 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉，白玉がともに少なくとも 1 個取り出される確率を求めよ．

(1) 少なくとも 1 個の不良品が含まれる事象を A とすると，余事象 $\overline{A}$ は 4 個とも不良品ではない事象であるから，その確率は，

◀ 「少なくとも」が含まれる事象は，余事象を考えるとよい．

$$P(\overline{A}) = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4} = \frac{70}{330} = \frac{7}{33}$$

◀ $\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4} = \dfrac{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{11\cdot10\cdot9\cdot8} = \dfrac{7}{33}$

よって，求める確率は，$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{33} = \mathbf{\frac{26}{33}}$

(2) 玉の取り出し方の総数は，${}_{12}\mathrm{C}_4$ 通り

赤玉，白玉がともに少なくとも 1 個取り出される場合の余事象を考えると，次の 2 つの場合がある．

(i) 4 個すべてが赤玉であるとき，その確率は，$\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \frac{35}{495}$

(ii) 4 個すべてが白玉であるとき，その確率は，$\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \frac{5}{495}$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$1 - \left(\frac{35}{495} + \frac{5}{495}\right) = 1 - \frac{40}{495} = \mathbf{\frac{91}{99}}$$

◀ 余事象の確率を考える．

解答 A2.1.9 ★★★ 問題 p.65

問題文

5 人でじゃんけんを行うとき，次の確率を求めよ．
(1) 1 回のじゃんけんで，1 人だけが勝つ確率
(2) 1 回のじゃんけんで，3 人が勝ち，2 人が負ける確率
(3) 1 回のじゃんけんで，あいこになる確率

5 人のじゃんけんの手の出し方は，$3^5 = 243$ (通り)

◀ グー，チョキ，パーの 3 通りを 5 人が出す（重複順列）．

(1) 勝つ 1 人の選び方は，${}_5\mathrm{C}_1$ 通りであり，その勝つ 1 人の手の出し方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りであるから，その場合の数は，

◀ 勝つ 1 人の手の出し方が決まれば，負ける方の手の出し方も 1 通りに定まる．

$$ {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 15 \text{ (通り)} $$

よって，求める確率は，$\frac{15}{243} = \mathbf{\frac{5}{81}}$

(2) 勝つ 3 人の選び方は ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りであり，その勝つ 3 人の手の出し方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りであるから，その場合の数は，

$$ {}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30 \text{ (通り)} $$

よって，求める確率は，$\frac{30}{243} = \mathbf{\frac{10}{81}}$

(3) あいこになる事象は，勝敗が決まる事象の余事象である．勝敗が決まる事象は，以下の 4 つの場合に対応する．

(i) 1 人だけが勝つとき
(1) より，その確率は，$\frac{5}{81}$
(ii) ちょうど 2 人が勝つとき
(2) と同様に考えると，その確率は，$\frac{10}{81}$

◀ ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 15$ より，$\frac{15}{243} = \frac{5}{81}$

(iii) ちょうど 3 人が勝つとき
(2) より，その確率は，$\frac{10}{81}$
(iv) ちょうど 4 人が勝つとき
(1) と同様に考えると，その確率は，$\frac{5}{81}$

◀ ${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30$ より，$\frac{30}{243} = \frac{10}{81}$

(i)～(iv) より，求める確率は，

$$ 1 - \left(\frac{5}{81} + \frac{10}{81} + \frac{10}{81} + \frac{5}{81} \right) = 1 - \frac{30}{81} = \mathbf{\frac{17}{27}} $$

解答（節末）A2.1.1 ★★ 節末 p.66

問題文

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードから 1 枚取り出し，その数字を記録して元に戻す．この操作を 3 回繰り返し，記録した数を順に x, y, z とする．このとき，次の確率を求めよ．

(1) $\frac{y}{x}$ が整数になる確率　(2) $x < y < z$ になる確率

(1) x, y の取り出し方は $10^2 = 100$ (通り)

(i) $x = 1$ のとき，y は 1, 2, ..., 10 の 10 通り
(ii) $x = 2$ のとき，y は 2 の倍数であり，5 通り
(iii) $x = 3$ のとき，y は 3 の倍数であり，3 通り
(iv) $x = 4$ のとき，y は 4 の倍数であり，2 通り
(v) $x = 5$ のとき，y は 5 の倍数であり，2 通り
(vi) $x = 6$ のとき，y は 6 の 1 通り
(vii) $x = 7$, 8, 9, 10 のとき，y は $y = x$ の 1 通り

◀ 分母である x の値で場合分けをする．

◀ y は，3，6，9 の 3 通り

(i)〜(vii) より，$\frac{y}{x}$ が整数となる場合の数は, $10+5+3+2+2+1+4\times1 = 27$ (通り)

◀ 和の法則を用いる．

よって，求める確率は，$\boldsymbol{\frac{27}{100}}$

(2) x, y, z の取り出し方は $10^3 = 1000$ (通り)

$x < y < z$ となる場合の数は，1 から 10 までの 10 個の数字から異なる 3 個を選び，それらを小さい方から順に x, y, z と定めればよいから，

$${}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 120 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3}{10^3} = \frac{120}{1000} = \boldsymbol{\frac{3}{25}}$$

解答 2.1

One math

解答（節末）A2.1.2 ★★ 節末 p.66

問題文

12 人が円形に座るとき，次の確率を求めよ．

(1) 特定の 2 人 X，Y が 1 人おいて隣り合う確率

(2) 特定の 3 人 X，Y，Z が 1 人ずつおいて隣り合う確率

すべての場合の数は，12 人の円順列であるから，$(12-1)!=11!$ (通り)

(1) X，Y とその間に座る 1 人をまとめて 1 組と考えると，残りの 9 人と合わせた 10 個の円順列より，

$$(10-1)!=9! \text{ (通り)}$$

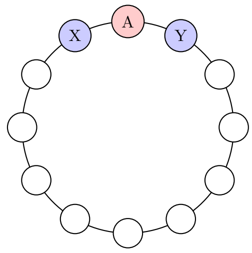
X，Y の 2 人の並び方は，$2!$ 通り

X と Y の間に座る 1 人は残りの 10 人から選ぶので，${}_{10}C_1$ 通り

したがって，X，Y が 1 人おいて隣り合う座り方の総数は，$9!\times 2!\times {}_{10}C_1$ (通り)

よって，求める確率は，$\frac{9!\times 2!\times {}_{10}C_1}{11!}=\boldsymbol{\frac{2}{11}}$

◀ 間に入る人を A とすると，下の図のようになる．



(2) X，Y，Zとその間に座る 2 人をまとめて 1 組と考えると，残りの 7 人と合わせた 8 個の円順列より，$(8-1)!=7!$ (通り)

X，Y，Z の 3 人の並び方は，$3!$ 通り

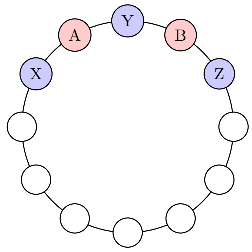
間に座る 2 人は残りの 9 人から選んで並べるので，その場合の数は，${}_9P_2$ 通り

したがって，X，Y，Z が 1 人ずつおいて隣り合う座り方の総数は，

$$7!\times 3!\times {}_9P_2 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，$\frac{7!\times 3!\times {}_9P_2}{11!}=\boldsymbol{\frac{3}{55}}$

◀ 間に入る人を A，B とすると，下の図のようになる．



解答（節末）A2.1.3 ★★★ 節末 p.66

問題文

赤玉 5 個，白玉 3 個，青玉 4 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から，3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 個の玉がすべて同じ色である確率

(2) 3 個とも色が異なる確率

(3) 少なくとも 1 個は青玉である確率

12 個の玉から 3 個の玉を取り出す方法の総数は，${}_{12}C_3=220$ (通り)

◀ ${}_{12}C_3=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220$

(1) 3 個とも赤玉のとき，赤玉 5 個から 3 個を取り出す場合の数は，${}_5C_3=10$ (通り)

3 個とも白玉のとき，白玉 3 個から 3 個を取り出す場合の数は，${}_3C_3=1$ (通り)

3 個とも青玉のとき，青玉 4 個から 3 個を取り出す場合の数は，${}_4C_3=4$ (通り)

よって，求める確率は，$\frac{10}{220}+\frac{1}{220}+\frac{4}{220}=\boldsymbol{\frac{3}{44}}$

(2) 赤玉，白玉，青玉をそれぞれ 1 個ずつ選ぶ場合の数は，

$${}_5C_1\times {}_3C_1\times {}_4C_1=5\times 3\times 4=60 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\frac{60}{220}=\boldsymbol{\frac{3}{11}}$

(3) 少なくとも 1 個は青玉である事象を A とすると，余事象 $\overline{A}$ は 3 個とも青玉ではない事象である．

青玉ではない玉の個数は，8 個あるから，$\overline{A}$ の場合の数は，${}_8C_3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ (通り)

よって，求める確率は，$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{56}{220}=\boldsymbol{\frac{41}{55}}$

◀ 赤玉 5 個と白玉 3 個を合わせた，合計 8 個の玉から 3 個の玉を取り出す．

解答（節末）A2.1.4 ★★ 節末 p.66

問題文

箱の中に赤玉 5 個，白玉 2 個，青玉 4 個が入っている．この箱から同時に 3 個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 玉の色が少なくとも 2 種類ある

(2) 取り出した玉の色がちょうど 2 種類になる

11 個の玉から 3 個の玉を取り出す場合の数は，${}_{11}\mathrm{C}_3$ 通り

(1) 取り出される 3 個の玉の色が少なくとも 2 種類ある事象を A とすると，余事象 $\overline{A}$ はすべて同じ色の玉が取り出される事象である．

事象 $\overline{A}$ が起こる場合の数は，${}_5\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_3$ (通り)

◀ すべてが赤玉，またはすべてが青玉のときである．

よって，求める確率は，

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{{}_5\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_3}{{}_{11}\mathrm{C}_3} = 1 - \frac{14}{165} = \mathbf{\frac{151}{165}}$$

◀ 余事象の確率を考える．

(2) 取り出される 3 個の玉の色がすべて異なる確率は，

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_{11}\mathrm{C}_3} = \frac{40}{165}$$

◀ 赤玉，白玉，青玉をそれぞれ 1 個ずつ取り出す．

玉の色が 2 種類である事象の余事象は，玉の色が 1 種類または 3 種類である事象であるから，玉の色がちょうど 2 種類になる確率は，

$$1 - \left(\frac{14}{165} + \frac{40}{165}\right) = \frac{111}{165} = \mathbf{\frac{37}{55}}$$

◀ 余事象の確率を考える．

解答（節末）A2.1.5 ★★★ 節末 p.66

問題文

n 人でじゃんけんを 1 回行うとき，次の確率を求めよ．ただし，$n \geqq 5$ とする．

(1) ちょうど 4 人が勝つ　　(2) あいこになる

n 人のじゃんけんの手の出し方は，3^n 通り

◀ グー，チョキ，パーの 3 通りを n 人が出す（重複順列）．

(1) 勝つ 4 人の選び方は，${}_n\mathrm{C}_4$ 通りであり，その勝つ 4 人の手の出し方は，${}_3\mathrm{C}_1$ 通りであるから，その場合の数は，

$${}_n\mathrm{C}_4 \times {}_3\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_4 \times 3 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_4 \times 3}{3^n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \times 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3^n} = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8 \cdot 3^n}}$$

(2) あいこになる事象は，勝敗が決まる事象の余事象である．勝敗が決まるのは，ちょうど 2 種類の手が出る場合である．

2 種類の手の選び方は，${}_3\mathrm{C}_2$ 通りであり，その手の出し方は，$(2^n - 2)$ 通り

◀ 2^n の手の出し方から，n 人すべてが同じ手を出す場合（あいこになる場合）の 2 通りを除く．

よって，求める確率は，

$$1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot (2^n - 2)}{3^n} = \boldsymbol{\frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 6}{3^n}}$$

いろいろな確率（解答）

解答 A2.2.1 ★ 問題 p.68

問題文

(1) さいころを 2 回投げる．このとき，1 回目は偶数の目，2 回目は 4 以下の目が出る確率を求めよ．
(2) X，Y，Z の 3 人がフリースローを投げるとき，成功する確率はそれぞれ $\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$ であるとする．この 3 人がそれぞれ 1 回ずつフリースローを投げたとき，少なくとも 1 人が成功する確率を求めよ．

(1) さいころを投げる 2 回の試行は，独立な試行である．
1 回目に偶数の目が出る確率は，$\frac{3}{6}$
2 回目に 4 以下の目が出る確率は，$\frac{4}{6}$
よって，求める確率は，

$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

◀ 1 回目は 2，4，6 の 3 通り，2 回目は 1，2，3，4 の 4 通りである．
◀ 独立な試行であることから，掛け合わせる．

(2) X，Y，Z の 3 人がフリースローを投げる試行は，独立な試行である．また，少なくとも 1 人が成功するという事象は，3 人とも失敗するという事象の余事象である．
X が失敗する確率は，$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$
Y が失敗する確率は，$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$
Z が失敗する確率は，$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
したがって，3 人とも失敗する確率は，

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$$

よって，少なくとも 1 人が成功する確率は，

$$1-\frac{1}{60}=\mathbf{\frac{59}{60}}$$

◀ 「少なくとも」が含まれる事象は，余事象を考えるとよい．
◀ (失敗する確率)
=1 − (成功する確率)
◀ 失敗する試行も独立な試行であり，掛け合わせる．
◀ 余事象の確率を考える．

解答 A2.2.2 ★ 問題 p.69

問題文

袋 A には赤玉 6 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている．それぞれの袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき，次の確率を求めよ．
(1) 袋 A から赤玉，袋 B から白玉が出る確率
(2) 2 個の玉の色が同じである確率

袋 A から玉を取り出す試行と，袋 B から玉を取り出す試行は，独立な試行である．
(1) 袋 A から取り出した玉が赤玉である確率は，$\frac{6}{11}$
袋 B から取り出した玉が白玉である確率は，$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$
よって，求める確率は，$\frac{6}{11}\times\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{18}{55}}$

(2) (i) 袋 A から赤玉，袋 B から赤玉が出るとき，その確率は，$\frac{6}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{12}{55}$
(ii) 袋 A から白玉，袋 B から白玉が出るとき，その確率は，$\frac{5}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{15}{55}$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，$\frac{12}{55}+\frac{15}{55}=\mathbf{\frac{27}{55}}$

◀ 袋 A から取り出した玉の色は，袋 B から取り出す玉の色に影響を与えないので，独立な試行である．
◀ 独立な試行であることから，掛け合わせる．
◀ 排反な事象であることから，足し合わせる．

解答 2.2

解答 A2.2.3 ★★ 問題 p.70

問題文

1 個のさいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 1 の目がちょうど 3 回出る確率

(2) 1 の目が出る回数が 1 回以下である確率

(1) 1 個のさいころを 1 回投げるとき，1 の目が出る確率は，$\frac{1}{6}$

1 の目が出ない確率は，$\frac{5}{6}$

よって，求める確率は，

$$ {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{4\times 1^3\times 5}{6^4}=\boldsymbol{\frac{5}{324}} $$

(2) (i) 1 の目が 0 回出るとき

$$ \left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296} $$

(ii) 1 の目が 1 回出るとき

$$ {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{4\times 1\times 125}{6^4}=\frac{500}{1296} $$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$ \frac{625}{1296}+\frac{500}{1296}=\boldsymbol{\frac{375}{432}} $$

◀ 独立な反復試行である．

◀ $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

◀ ${}_4\mathrm{C}_3\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^3}_{1\text{ が }3\text{ 回}}\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}}_{1\text{ 以外が }1\text{ 回}}$

◀ ${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^4$ としてもよい．${}_4\mathrm{C}_0=1$，$\left(\frac{1}{6}\right)^0=1$ である．

◀ 4 回のうち 1 の目が 1 回出る場合の数は，${}_4\mathrm{C}_1$ 通り

◀ 排反な事象であるから，足し合わせる．

解答 A2.2.4 ★★ 問題 p.71

問題文

A，B の 2 人が繰り返しカードゲームで対戦し，先に 3 勝した方が優勝者とする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{2}{5}$ で，引き分けはないものとする．このとき，A が優勝する確率を求めよ．

(i) A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は，$\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$

(ii) A が 3 勝 1 敗で優勝する確率は，3 試合目までに 2 勝 1 敗となり，4 試合目に勝つ確率であるから，

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}=\frac{72}{5^4}=\frac{72}{625} $$

(iii) A が 3 勝 2 敗で優勝する確率は，4 試合目までに 2 勝 2 敗となり，5 試合目に勝つ確率であるから，

$$ {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{432}{5^5}=\frac{432}{3125} $$

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は，

$$ \frac{8}{125}+\frac{72}{625}+\frac{432}{3125}=\boldsymbol{\frac{992}{3125}} $$

◀ A が勝つことを ○，A が負けることを × で表し，左から試合順に並べると，

$\bigcirc\bigcirc\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{A が勝つ}}$

◀ $\underbrace{\bigcirc\times\bigcirc}_{2\text{ 勝 }1\text{ 敗}}\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{A が勝つ}}$

◀ $\underbrace{\bigcirc\times\times\bigcirc}_{2\text{ 勝 }2\text{ 敗}}\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{A が勝つ}}$

解答 A2.2.5 ★★★ 問題 p.72

問題文

赤玉 1 個，白玉 2 個，青玉 2 個が入っている袋の中から，1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻すことを 5 回行うとき，次の確率を求めよ．
(1) 赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る確率
(2) 赤玉が出る回数が白玉が出る回数よりも 1 回だけ多くなる確率

この袋から玉を 1 個取り出すとき，赤玉，白玉，青玉が出る確率は，それぞれ $\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{5}$ である．

(1) 求める確率は，

$$\frac{5!}{1!2!2!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \mathbf{\frac{96}{625}}$$

◀ 5 回のうち赤玉が 1 回，白玉が 2 回，青玉が 2 回出る場合の数は，$\frac{5!}{1!2!2!}$ 通りである．

(2) 赤玉が出る回数が白玉が出る回数よりも 1 回だけ多くなるのは，以下の 3 つの場合がある．

(i) 赤玉が 1 回，白玉が 0 回，青玉が 4 回出るとき

$$\frac{5!}{1!4!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

◀ 5 回のうち赤玉が 1 回，白玉が 0 回，青玉が 4 回出る場合の数は，$\frac{5!}{1!0!4!}$ 通りである．

(ii) 赤玉が 2 回，白玉が 1 回，青玉が 2 回出るとき

$$\frac{5!}{2!1!2!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{48}{625}$$

(iii) 赤玉が 3 回，白玉が 2 回，青玉が 0 回出るとき

$$\frac{5!}{3!2!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{8}{625}$$

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は，

$$\frac{16}{625} + \frac{48}{625} + \frac{8}{625} = \mathbf{\frac{72}{625}}$$

解答 2.2

解答 A2.2.6 ★★★ 問題 p.73

問題文

(1) 数直線上の原点にある点 P が，毎回確率 $\frac{1}{3}$ で正の方向に 1 だけ移動し，確率 $\frac{2}{3}$ で負の方向に 2 だけ移動する．6 回の移動後に点 P が原点にある確率を求めよ．
(2) 数直線上の原点にある点 P が，1 個のさいころを投げて，1 か 2 の目が出たときは正の方向に 2 だけ移動し，3 か 4 の目が出たときは負の方向に 1 だけ移動し，5 か 6 の目が出たときは移動しないとする．さいころを 4 回投げたとき，点 P が原点にある確率を求めよ．

(1) x 回正の方向に 1，y 回負の方向に 2 だけ移動したとすると，

$$x+y=6\cdots\text{(i)}$$

◀ 6 回移動することから，$x+y=6$

移動後の位置は，$x-2y=0\cdots$(ii)
(i)，(ii) を解くと，$x=4$，$y=2$
よって，求める確率は，6 回の移動のうち 4 回正の方向に 1 だけ移動する確率であるので，

◀ 正の方向に 4 回，負の方向に 2 回移動する反復試行である．

$$_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{20}{243}}$$

(2) 1 個のさいころを投げるとき，1 か 2 の目が出る事象を A_1，3 か 4 の目が出る事象を A_2，5 か 6 の目が出る事象を A_3，とする．これらの確率は，それぞれ，

$$P(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(A_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(A_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

A_1 が x 回，A_2 が y 回，A_3 が z 回 $(x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$ 起こったとすると，

$$x+y+z=4\cdots\text{(i)}$$

移動後の位置は，$2x-y=0\cdots$(ii)

◀ $2x=y$

(i)，(ii) より，$x=0$，$y=0$，$z=4$ または $x=1$，$y=2$，$z=1$

◀ $x\geqq 0$ より，$x=0$ から順に考える．$x=y=0$ のとき，(i) より $z=4$ であり，$x=1$，$y=2$ のとき，(i) より $z=1$ である．

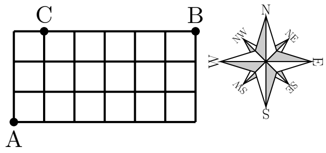
よって，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4+\frac{4!}{1!2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\boldsymbol{\frac{13}{81}}$$

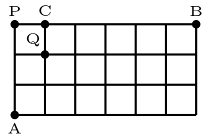
解答 A2.2.7 ★★★ 問題 p.74

問題文

右の図のような格子状の道路がある．A 地点から B 地点まで最短経路で行くとき，C 地点を通る確率を求めよ．ただし，各交差点において，東，北のいずれの進路も進む確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であり，一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進むものとする．



右の図のように，地点 P，Q をとる．C を通る道順は 2 つの場合があり，その確率はそれぞれ次のようになる．



◀ P 地点を通るか，Q 地点を通るかで場合分けをする．

(i) A から P を通り C に行くとき，$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{8}$

(ii) A から Q を通り C に行くとき

A 地点から Q 地点へは，東へ 1 区画，北へ 2 区画進む必要があるから，その確率は，

$${}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

したがって，A から Q を通り C に行く確率は，

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

解答 A2.2.8 ★★★ 問題 p.75

問題文

4 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出る目の最小値が 4 以上である確率　　(2) 出る目の最小値が 4 である確率

(1) 目の最小値が 4 以上であるためには，4 個のさいころの目がすべて 4，5，6 のいずれかであればよい．

よって，求める確率は，$\left(\frac{3}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{16}} \cdots$ (i)

(2) 目の最小値が 4 となるのは，目の最小値が 4 以上である場合から，目の最小値が 5 以上である場合を除いた場合である．

◀ 最小値が k となる確率は，最小値が k 以上の確率から $k+1$ 以上の確率を引く．

目の最小値が 5 以上である確率は，$\left(\frac{2}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \cdots$ (ii)

よって，(i)，(ii) より，求める確率は，$\frac{1}{16} - \frac{1}{81} = \boldsymbol{\frac{65}{1296}}$

解答 A2.2.9 ★★★★ 問題 p.76

問題文

1 個のさいころを 18 回投げるとき，2 の目が何回出る確率が最も大きくなるか.

さいころを 1 回投げたとき，2 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから，さいころを 18 回投げたときに 2 の目が n 回（$0 \leqq n \leqq 18$）出る確率 p_n は，

$$p_n = {}_{18}\mathrm{C}_n \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{18-n} = \frac{18!}{n!(18-n)!} \cdot \frac{5^{18-n}}{6^{18}}$$

◀ 反復試行の確率を考える．また，${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ を用いる．

$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 17$ において，p_{n+1} と p_n の比を求めると，

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \left\{\frac{18!}{(n+1)!(17-n)!} \cdot \frac{5^{17-n}}{6^{18}}\right\} \div \left\{\frac{18!}{n!(18-n)!} \cdot \frac{5^{18-n}}{6^{18}}\right\} \\ &= \frac{n!(18-n)!}{(n+1)!(17-n)!} \cdot \frac{5^{17-n}}{5^{18-n}} = \frac{18-n}{5(n+1)}\end{aligned}$$

◀ p_{n+1} は p_n の n に $n+1$ を代入して求められる．

◀ $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$，$(18-n)! = (18-n) \cdot (17-n)!$，$5^{18-n} = 5^{17-n} \cdot 5$ より，約分する．

(i) $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqq 1$ のとき

$\frac{18-n}{5(n+1)} \geqq 1$ より，$18 - n \geqq 5(n+1)$ であるから，$n \leqq \frac{13}{6}$

したがって，$n = 0,\ 1,\ 2$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ より，$p_n < p_{n+1}$

◀ $n = 0$ のとき，$p_0 < p_1$，$n = 1$ のとき，$p_1 < p_2$，$n = 2$ のとき，$p_2 < p_3$

(ii) $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ のとき

$\frac{18-n}{5(n+1)} < 1$ より，$18 - n < 5(n+1)$ であるから，$n > \frac{13}{6}$

したがって，$n = 3,\ 4,\ \ldots,\ 17$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ より，$p_n > p_{n+1}$

◀ $n = 3$ のとき，$p_3 > p_4$，$n = 4$ のとき，$p_4 > p_5$，$\cdots$，$n = 17$ のとき，$p_{17} > p_{18}$

(i)，(ii) より，$p_2 < p_3 > p_4 > p_5 > \cdots > p_{17} > p_{18}$

よって，2 の目が **3 回出る確率が最も大きい．**

解答 2.2

解答 A2.2.10 ★ 問題 p.77

問題文

ある町で行った調査によると，読書が好きな住民は全体の 70%，音楽鑑賞が好きな住民は 55%，どちらも好きな住民は 40% いることがわかった.

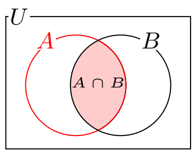
(1) 読書が好きな住民から無作為に 1 人を選んだとき，その住民が音楽鑑賞も好きである確率を求めよ.

(2) 音楽鑑賞が好きな住民から無作為に 1 人を選んだとき，その住民が読書が好きではない確率を求めよ.

この町の住民の中から 1 人を選ぶとき，読書が好きである事象を A，音楽鑑賞が好きである事象を B とすると，

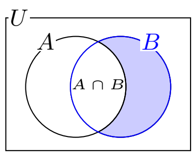
$$P(A) = \frac{70}{100},\quad P(B) = \frac{55}{100},\quad P(A \cap B) = \frac{40}{100}$$

(1) 求める確率は，条件付き確率 $P_A(B)$ である．

◀ 

よって，$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{40}{100} \div \frac{70}{100} = \boldsymbol{\frac{4}{7}}$

(2) 求める確率は，条件付き確率 $P_B(\overline{A})$ である．

◀ 

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{55}{100} - \frac{40}{100} = \frac{15}{100}$$

よって，$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{100} \div \frac{55}{100} = \boldsymbol{\frac{3}{11}}$

解答 A2.2.11 ★★ 問題 p.78

問題文

当たりくじが 4 本入っている 13 本のくじがある．a，b がこの順にくじを 1 本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) a，b がともに当たりくじを引く確率　(2) b が当たりくじを引く確率

a，b が当たりくじを引く事象をそれぞれ A，B とする．

(1) $P(A)=\frac{4}{13}$，$P_A(B)=\frac{3}{12}$ であるから，乗法定理より，求める確率 $P(A\cap B)$ は，

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{4}{13}\times\frac{3}{12}=\mathbf{\frac{1}{13}}$$

◀ $P_A(B)$ は，a が引いたくじが当たりであるとき，残るくじは 12 本あり，その中に当たりくじは 3 本含まれるので，

$$P_A(B)=\frac{4-1}{13-1}=\frac{3}{12}$$

(2) (i) a も b も当たりくじを引くとき

(1) より，$P(A\cap B)=\frac{1}{13}$

(ii) a がはずれくじを引き，b が当たりくじを引くとき

$P(\overline{A})=\frac{9}{13}$，$P_{\overline{A}}(B)=\frac{4}{12}$ であるから，乗法定理より，その確率は，

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\frac{9}{13}\times\frac{4}{12}=\frac{3}{13}$$

◀ $P_{\overline{A}}(B)$ は，a が引いたくじがはずれであるとき，残るくじは 12 本あり，その中に当たりくじは 4 本含まれるので，

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{4}{13-1}=\frac{4}{12}$$

よって，(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{13}+\frac{3}{13}=\mathbf{\frac{4}{13}}$$

◀ $P(A)=P(B)$ であることがわかる．

解答 A2.2.12 ★★ 問題 p.79

問題文

袋 A には赤玉 5 個と白玉 4 個，袋 B には赤玉 3 個と白玉 6 個が入っている．袋 A から 2 個の玉を同時に取り出して袋 B に入れた後，袋 B から 2 個の玉を同時に取り出すとき，2 個とも白玉である確率を求めよ．

袋 A から取り出す 2 個の玉の色に応じて，次の 3 つの場合がある．

(i) 袋 A から白玉を 2 個取り出すとき

袋 B には赤玉 3 個と白玉 8 個が入っているから，$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_8C_2}{{}_{11}C_2}=\frac{14}{165}$

◀ 袋 A から白玉を 2 個取り出す確率は，$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}$ である．このとき，袋 B には白玉 8 個と赤玉 3 個が入っているから，袋 B から白玉を 2 個取り出す確率は，$\frac{{}_8C_2}{{}_{11}C_2}$ である．

(ii) 袋 A から赤玉と白玉を 1 個ずつ取り出すとき

袋 B には赤玉 4 個と白玉 7 個が入っているから，$\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1}{{}_9C_2}\times\frac{{}_7C_2}{{}_{11}C_2}=\frac{7}{33}$

(iii) 袋 A から赤玉を 2 個取り出すとき

袋 B には赤玉 5 個と白玉 6 個が入っているから，$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}\times\frac{{}_6C_2}{{}_{11}C_2}=\frac{5}{66}$

よって，(i)〜(iii) は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{14}{165}+\frac{7}{33}+\frac{5}{66}=\mathbf{\frac{41}{110}}$$

解答 2.2

解答 A2.2.13 ★★★ 問題 p.80

問題文

ある地域に 2 つの病院 a，b があり，a 病院で実施される検査は全体の 70% である．また，a 病院で実施された検査では 4% の誤判定が含まれており，b 病院で実施された検査では 3% の誤判定が含まれている．2 つの病院で実施された多くの検査の中から，無作為に 1 件の検査を選んだとき，次の確率を求めよ．
(1) 選んだ検査で誤判定が発生している確率
(2) 選んだ検査で誤判定が発生していたとき，それが a 病院で実施されたものである確率

選んだ 1 件の検査が a 病院で実施されたものである事象を A，b 病院で実施されたものである事象を B，誤判定が発生している事象を E とすると，a 病院で実施される検査は全体の 70% であるので，

$$P(A) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}, \quad P(B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

a 病院と b 病院で実施される検査の誤判定率はそれぞれ 4%，3% であるから，

$$P_A(E) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}, \quad P_B(E) = \frac{3}{100}$$

◀ 検査が a 病院で実施されたものであったときに，誤判定が発生する確率 $P_A(E)$ と，検査が b 病院で実施されたものであったときに，誤判定が発生する確率 $P_B(E)$ がわかる．

(1)

$$P(A \cap E) = P(A) \times P_A(E) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{25} = \frac{7}{250},$$
$$P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{9}{1000}$$

よって，求める確率は，

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{7}{250} + \frac{9}{1000} = \mathbf{\frac{37}{1000}}$$

◀ $A \cap E$ と $B \cap E$ は互いに排反である．

(2) 誤判定が発生していたときに，それが a 病院で実施されたものである確率は $P_E(A)$ であるから，

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{7}{250} \div \frac{37}{1000} = \mathbf{\frac{28}{37}}$$

解答 2.2

One math

解答 A2.2.14 ★★★★ 問題 p.81

問題文

3 つの袋 A，B，C があり，袋 A には赤いボール 3 個と青いボール 5 個，袋 B には赤いボール 2 個と青いボール 6 個，袋 C には赤いボール 4 個と青いボール 4 個が入っている．3 つの袋のうち 1 つを無作為に選び，その袋から 1 個のボールを取り出したところ赤いボールであった．このとき，その赤いボールが袋 B から取り出されたものである確率を求めよ．

袋 A を選ぶ事象を A，袋 B を選ぶ事象を B，袋 C を選ぶ事象を C，赤いボールを取り出す事象を W とする．
袋 A，袋 B，袋 C を選ぶ確率 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ は，すべて $\frac{1}{3}$
それぞれの袋から赤いボールを取り出す条件付き確率は，

$$P_A(W)=\frac{3}{8},\quad P_B(W)=\frac{2}{8},\quad P_C(W)=\frac{4}{8}$$

したがって，赤いボールを取り出す確率は，

$$\begin{aligned}P(W)&=P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W)\\&=P(A)P_A(W)+P(B)P_B(W)+P(C)P_C(W)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{8}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

◀ 乗法定理を用いる．

よって，求める確率は，

$$P_W(B)=\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=\frac{P(B)P_B(W)}{P(W)}=\frac{1}{12}\div\frac{3}{8}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

解答 A2.2.15 ★ 問題 p.82

問題文

2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和の期待値を求めよ．

2 個のさいころ A，B の出た目の和を X とすると，出る和 X の値とその確率は，右の表のようになり，出方は，$6\times6=36$ (通り)
したがって，A，B の出た目の和を X とすると，X のとりうる値とそれぞれの値をとる確率は，下の表のようになる．

A\B	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

◀ 表にまとめることで場合の数を数えやすくする．

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

◀ 確率の総和（計）が 1 になることを確認する．

よって，求める期待値は，

$$\begin{aligned}&2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}\\&+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}\\=&\boldsymbol{7}\end{aligned}$$

解答 A2.2.16 ★★ 問題 p.83

問題文

10 本のうち，当たりくじが 3 本，はずれくじが 7 本ある．くじを 1 回引いてはもとに戻すことを 3 回行う．このとき，次の 2 つの場合のうち，どちらを選ぶ方が有利であるか．
(i) 当たりくじ 1 本につき 300 円をもらう．
(ii) 当たりくじを 2 本引いたときだけ 1500 円をもらう．

(i)，(ii) のそれぞれの場合について，もらえる金額の期待値を E_1 円，E_2 円とする．
(i) E_1 について
当たりくじが 0 本となる確率は，$\left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000}$
当たりくじが 1 本となる確率は，${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000}$
当たりくじが 2 本となる確率は，${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{189}{1000}$
当たりくじが 3 本となる確率は，$\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000}$
したがって，もらえる金額を X 円とすると，X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は，次の表のようになる．

◀ 反復試行の確率を考える．なお，くじを 3 回引いて k 回当たりが出る確率は，

$${}_3\mathrm{C}_k\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{3-k}$$

X	0	300	600	900	計
確率	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	1

ゆえに，

$$E_1 = 0 \times \frac{343}{1000} + 300 \times \frac{441}{1000} + 600 \times \frac{189}{1000} + 900 \times \frac{27}{1000} = 270 \text{ (円)}$$

(ii) E_2 について
当たりくじが 2 本となる確率は，${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{189}{1000}$
当たりくじが 0 本または 1 本または 3 本となる確率は，$1 - \frac{189}{1000} = \frac{811}{1000}$
したがって，もらえる金額を Y 円とすると，Y のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は，次の表のようになる．

Y	1500	0	計
確率	$\frac{189}{1000}$	$\frac{811}{1000}$	1

ゆえに $E_2 = 1500 \times \frac{189}{1000} + 0 \times \frac{811}{1000} \fallingdotseq 283.5$ (円)
よって，$E_1 < E_2$ であるから，**(ii) を選ぶ方が有利である．**

◀ $270 < 283.5$

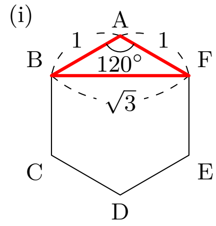
解答 A2.2.17 ★★★★ 問題 p.84

問題文

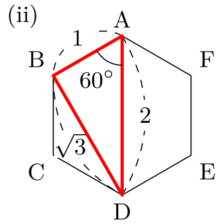
1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の頂点から異なる 3 点を選び，それらの 3 点を頂点とする三角形をつくる．このとき，三角形の周の長さの期待値を求めよ．

3 つの頂点の選び方の総数は ${}_6C_3 = 20$ (通り)
三角形の形は次の (i)〜(iii) の 3 種類がある．

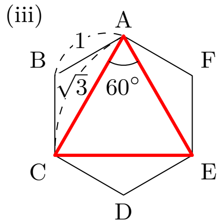
(i) 正六角形と 2 辺を共有するとき
3 辺が 1，1，$\sqrt{3}$ の二等辺三角形となり，その周の長さは，$1+1+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$
このような三角形は，正六角形の各頂点に対して 1 つずつできるから，6 通り



(ii) 正六角形と 1 辺だけを共有するとき
3 辺が 1，$\sqrt{3}$，2 の直角三角形となり，その周の長さは，$1+\sqrt{3}+2=3+\sqrt{3}$
このような三角形は，AD，BE，CF を斜辺としたときに，それぞれ 4 通りずつできるから，$3 \times 4 = 12$ (通り)



(iii) 正六角形と辺を共有しないとき
1 辺が $\sqrt{3}$ の正三角形となり，その周の長さは，$3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
このような三角形は，△ACE，△BDF の 2 通り



よって，(i)〜(iii) より，求める期待値は，

$$(2+\sqrt{3}) \times \frac{6}{20} + (3+\sqrt{3}) \times \frac{12}{20} + 3\sqrt{3} \times \frac{2}{20} = \boldsymbol{\frac{12+6\sqrt{3}}{5}}$$

解答 2.2

解答（節末）A2.2.1 ★★ 節末 p.85

問題文

X，Y の 2 人が繰り返しあるゲームで対戦し，先に 4 ゲーム勝った方が優勝者とする．各ゲームにおいて X が勝つ確率は $\frac{3}{4}$ で，引き分けはないものとする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 4 ゲーム目で優勝が決まる確率を求めよ．
(2) 5 ゲーム目で X が優勝する確率を求めよ．

(1) X が 4 連勝で勝つ確率は，$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$
1 回のゲームで Y が勝つ確率は，$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ であるから，Y が 4 連勝で勝つ確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

よって，求める確率は，$\frac{81}{256} + \frac{1}{256} = \frac{82}{256} = \mathbf{\frac{41}{128}}$
(2) X が 4 ゲーム目までに 3 勝 1 敗となり，5 ゲーム目に勝つ確率であるから，

◀ $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\times\bigcirc}_{3\text{勝}1\text{敗}}\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{X が勝つ}}$

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{81}{256}}$$

解答（節末）A2.2.2 ★★★ 節末 p.85

問題文

1 個のさいころを 4 回投げるとき，1 の目と 6 の目が同じ回数だけ出る確率を求めよ．

さいころを 1 回投げるとき，1 の目，6 の目が出る確率は，それぞれ $\frac{1}{6}$ であり，1，6 以外の目が出る確率は，$\frac{2}{3}$ である．
1 の目と 6 の目が出る回数が同じであるのは，1 の目と 6 の目の出る回数が 0 回，1 回，2 回の 3 つの場合がある．
(i) 1 の目と 6 の目が 1 回も出ないとき

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

◀ 4 回とも 1，6 以外の目が出る（1 の目 0 回，6 の目 0 回）．

(ii) 1 の目と 6 の目が 1 回ずつ出るとき

$$\frac{4!}{2!1!1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

(iii) 1 の目と 6 の目が 2 回ずつ出るとき

$$\frac{4!}{2!2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{216}$$

よって，(i)〜(iii) より，求める確率は，

$$\frac{16}{81} + \frac{4}{27} + \frac{1}{216} = \mathbf{\frac{227}{648}}$$

解答 2.2

解答（節末）A2.2.3 ★★★★　節末 p.85

問題文

12 本のくじの中に 3 本の当たりくじがある．当たりくじを 2 回引くまで繰り返しくじを引くとき，n 回目で終わる確率 p_n を最大にする n の値を求めよ．ただし，引いたくじは毎回もとに戻すものとする．

このくじから 1 本を引くとき，当たりくじを引く確率は $\frac{1}{4}$ であり，$n \geqq 2$ である．n 回目で終わるのは，$n-1$ 回目までに当たりくじを 1 回引き，n 回目で当たりくじを引くときであるから，

◀ 当たりくじが出ない確率は，$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \times \frac{1}{4} = \frac{3^{n-2}(n-1)}{4^n}$$

◀ 反復試行の確率を考える．また，${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1 \quad (n \geqq 2)$ を用いる．

$n \geqq 2$ において，p_{n+1} と p_n の比を求めると，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{3^{n-1}n}{4^{n+1}} \div \frac{3^{n-2}(n-1)}{4^n} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{3^{n-1} \cdot 4^n}{3^{n-2} \cdot 4^{n+1}} = \frac{3n}{4(n-1)}$$

◀ p_{n+1} は p_n の n に $n+1$ を代入して求められる．

(i) $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqq 1$ のとき

$\frac{3n}{4(n-1)} \geqq 1$ より，$3n \geqq 4(n-1)$ であるから，$n \leqq 4$

◀ $4(n-1) > 0$ である．

したがって，$n=2,\ 3$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ より，$p_n < p_{n+1}$

$n=4$ のとき，$p_4 = p_5$

(ii) $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ のとき

$\frac{3n}{4(n-1)} < 1$ より，$3n < 4(n-1)$ であるから，$n > 4$

したがって，$n=5,\ 6,\ 7,\ \ldots$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ より，$p_n > p_{n+1}$

◀ $n=2$ のとき，$p_2 < p_3$，$n=3$ のとき，$p_3 < p_4$，$n=4$ のとき，$p_4 = p_5$

(i)，(ii) より　$p_2 < p_3 < p_4$，$p_4 = p_5$，$p_5 > p_6 > \cdots > p_{11} > p_{12} > \cdots$

よって，p_n を最大にする n の値は，$n = \mathbf{4,\ 5}$

解答（節末）A2.2.4 ★★　節末 p.85

問題文

あるコンテストで，a が優勝する確率は 70% である．4 回に 1 回の割合でうそをつく b が a の結果を知ったうえで「a が優勝した」と発言した．このとき，a が本当に優勝した確率を求めよ．

このコンテストで，a が優勝する事象を E，b が「a が優勝した」と発言する事象を F とする．

◀ 求める確率は，

$$P_F(E) = \frac{P(F \cap E)}{P(F)} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$P(E \cap F) = P(E) \times P_E(F) = \frac{70}{100} \times \frac{3}{4} = \frac{21}{40},$$
$$P(\overline{E} \cap F) = P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(F) = \frac{30}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{40}$$

◀ a が優勝しなかったとき，b が「a は優勝した」とうそをつくときの確率は，$P_{\overline{E}}(F) = \frac{1}{4}$

したがって，

$$P(F) = P(E \cap F) + P(\overline{E} \cap F) = \frac{21}{40} + \frac{3}{40} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

◀ $E \cap F$ と $\overline{E} \cap F$ は互いに排反である．

よって，求める確率は，

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{21}{40} \div \frac{3}{5} = \mathbf{\frac{7}{8}}$$

解答（節末）A2.2.5 ★★★★ 節末 p.85

問題文

原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．P は，1 枚の硬貨を投げて表が出た場合には $+5$，裏が出た場合は $+3$ 移動する．硬貨を続けて投げていき，点 P の座標が初めて 18 以上になるまでの投げた回数を X とする．

(1) $X=4$ となる確率を求めよ．　　(2) X の期待値を求めよ．

(1) 4 回投げて P の座標が初めて 18 以上になるのは，4 回とも表が出る場合と，4 回のうち 3 回表，1 回裏が出る場合があるから，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

◀ 4 回とも表のとき，P の座標は 20 となり，3 回表，1 回裏のとき，P の座標は 18 となる．

(2) 硬貨を投げる回数が 3 回以下のとき，P の座標は 18 以上にならない．また，硬貨を 6 回投げるまでに必ず P の座標は 18 以上になる．つまり，X の値は 4，5，6 の 3 つの場合がある．

◀ 3 回とも表のとき，P の座標は 15，6 回とも裏のとき，P の座標は 18 である．

(i) $X=4$ のとき
(1) より，その確率は，$\frac{5}{16}$
(ii) $X=5$ のとき
2 回表，2 回裏で，5 回目に表が出る確率は，${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$
2 回表，3 回裏が出る確率は，${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$
したがって，$X=5$ になる確率は，

$$\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$$

(iii) $X=6$ のとき
6 回とも裏が出る確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$
1 回表，4 回裏で，6 回目に表が出る確率は，${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$
1 回表，5 回裏が出る確率は，${}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$
したがって，$X=6$ になる確率は，

$$\frac{1}{64}+\frac{5}{64}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

◀ $X=4$，5 のときの確率の和を，1 から引くことで求めてもよい．

(i)〜(iii) より，X のとりうる値と，それぞれの値をとる確率は，次の表のようになる．

X	4	5	6	計
確率	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	1

よって，求める期待値は，

$$4\times\frac{5}{16}+5\times\frac{1}{2}+6\times\frac{3}{16}=\boldsymbol{\frac{39}{8}}$$

解答 2.2

章末問題 2（解答）

解答（章末）A2.1 ★★★ 章末 p.86

問題文

正六角形の頂点を反時計回りに 1 から 6 までの番号を付ける．1 個のさいころを 3 回投げて，出た目の番号に対応する頂点を線分で結び図形を作るとき，次の確率を求めよ．

(1) 三角形ができる確率　　(2) 正三角形ができる確率

(3) 直角三角形ができる確率

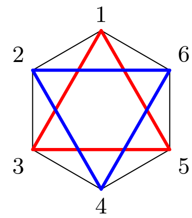
さいころを 3 回投げるとき，目の出方の総数は，$6^3 = 216$ (通り)

(1) 3 点がすべて異なる場合の数は，${}_6P_3 = 120$ (通り)

◀ 三角形ができるのは，3 点がすべて異なるときである．

よって，求める確率は，$\frac{120}{216} = \mathbf{\frac{5}{9}}$

(2) 正三角形ができるには，選ばれる 3 個の頂点が $\{1,\ 3,\ 5\}$ または $\{2,\ 4,\ 6\}$ のときであり，それぞれの目の出方は 3! 通りあるので，正三角形ができる目の出方は，

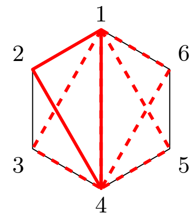
◀ 

$$2 \times 3! = 12 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，$\frac{12}{216} = \mathbf{\frac{1}{18}}$

(3) 向かい合う 2 個の頂点と残りの 4 個の頂点から 1 個の頂点を選ぶと，1 個の直角三角形ができる．向かい合う 2 個の頂点の選び方は 3 組あるので，直角三角形は全部で，

◀ 向かい合う 2 個の頂点を結ぶと，直径となる．



$$3 \times 4 = 12 \text{ (個)}$$

それぞれの 3 個の番号の目の出方は 3! 通り

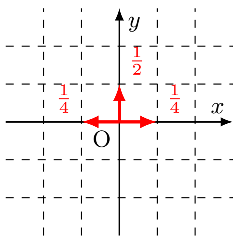
したがって，直角三角形ができる目の出方は，$12 \times 3! = 72$ (通り)

よって，求める確率は，$\frac{72}{216} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

解答（章末）A2.2 ★★★ 章末 p.86

問題文

座標平面上の原点 O から出発して，毎回確率 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ でそれぞれ左，上，右へ 1 ずつ移動する点 Q がある．8 回の移動後に点 (2，4) にいる確率を求めよ．



左へ x 回，上へ y 回，右へ z 回進むとすると，$x + y + z = 8 \cdots$ (i)

◀ 3 つの方向に移動するので，未知数を 3 つ設定する．

このとき，x 軸方向には $-x + z$，y 軸方向には y 動くので，移動後の座標は $(-x + z,\ y)$ であるから，$-x + z = 2$，　$y = 4 \cdots$ (ii)

(i)，(ii) より，$x = 1$，$y = 4$，$z = 3$

よって，求める確率は，

◀ 左の方向に 1 回，右の方向に 3 回，上の方向に 4 回移動する反復試行である．

$$\frac{8!}{1!3!4!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \mathbf{\frac{35}{512}}$$

解答（章末）A2.3 ★★★★　章末 p.86

問題文

3 個のさいころ A, B, C を同時に振り，出た目の最小値が 3 であったとき，最大値が 5 である条件付き確率を求めよ．

出た目の最小値が 3 であるという事象を A，最大値が 5 であるという事象を B とする．

A は，出た目がすべて 3 以上である場合から，出た目がすべて 4 以上である場合を除いた場合であるから，

◀ 最小値が k となる確率は，最小値が k 以上の確率から，$k+1$ 以上の確率を引く．

$$P(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{64-27}{216} = \frac{37}{216}$$

また，最小値が 3，最大値が 5 となる目の組合せは，$\{3,\ 3,\ 5\}$，$\{3,\ 4,\ 5\}$，$\{3,\ 5,\ 5\}$ したがって，それぞれの確率を考えると，

$$P(A\cap B) = \frac{2\times {}_3\mathrm{C}_1 + 3!}{6^3} = \frac{12}{216}$$

◀ $\{3,\ 3,\ 5\}$，$\{3,\ 5,\ 5\}$ のとき，${}_3\mathrm{C}_1$ 通りあり，$\{3,\ 4,\ 5\}$ のとき，$3!$ 通りある．

よって，求める確率は，

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{12}{216} \div \frac{37}{216} = \boldsymbol{\frac{12}{37}}$$

解答（章末）A2.4 ★★★　章末 p.86

解答 2.3

問題文

箱の中に 4 個の白玉と n 個の赤玉が入っている．この箱から同時に 2 個の玉を取り出したとき，赤玉の数を X とする．X の期待値が 1.5 であるとき，n の値を求めよ．ただし，$n \geqq 2$ であるとする．

$X=k$ である確率を $P(X=k)$ で表すとする．

玉の取り出し方の総数は，${}_{n+4}\mathrm{C}_2$ 通り

$X=1$ となるのは，白玉と赤玉を 1 個ずつ取り出す場合であり，その確率は，

$$P(X=1) = \frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2} = \frac{8n}{(n+4)(n+3)}$$

◀ ${}_{n+4}\mathrm{C}_2 = \frac{(n+4)(n+3)}{2\cdot 1}$

$X=2$ となるのは，赤玉を 2 個取り出す場合であり，その確率は，

$$P(X=2) = \frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+4}\mathrm{C}_2} = \frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)}$$

したがって，X の期待値は，

$$\begin{aligned} &1\times\frac{8n}{(n+4)(n+3)} + 2\times\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)} \\ &= \frac{8n+2n(n-1)}{(n+4)(n+3)} = \frac{2n(n+3)}{(n+4)(n+3)} = \frac{2n}{n+4} \end{aligned}$$

◀ $n+3 \neq 0$ で分母・分子を割る．

よって，$\frac{2n}{n+4} = 1.5$ であるとき，$n = \mathbf{12}$

解答（章末）A2.5 ★★★★ 章末 p.86

問題文

2 つのチーム A，B が繰り返し試合をして，先に 4 勝した方を優勝チームとする．各試合において A が勝つ確率は $\frac{2}{3}$ で，引き分けはないとする．このとき，優勝チームが決まるまでの試合数の期待値を求めよ．

(i) 4 試合目に A が優勝するとき

A が 4 勝 0 敗する場合であるから，その確率は，$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

◀ 試合数は 4，5，6，7 の 4 つの場合がある．

(ii) 4 試合目に B が優勝するとき

B が 4 勝 0 敗する場合であるから，その確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(iii) 5 試合目に A が優勝するとき

4 試合目までに A が 3 勝 1 敗となり，5 試合目に A が勝つ場合であるから，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{64}{243}$$

◀ 例えば，A が勝つことを ○，A が負けることを × で表し，左から試合順に並べると，

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\times\bigcirc}_{3\text{ 勝 }1\text{ 敗}}\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{A が勝つ}}$$

(iv) 5 試合目に B が優勝するとき

4 試合目までに B が 3 勝 1 敗となり，5 試合目に B が勝つ場合であるから，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{8}{243}$$

(v) 6 試合目に A が優勝するとき

5 試合目までに A が 3 勝 2 敗となり，6 試合目に A が勝つ場合であるから，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{160}{729}$$

(vi) 6 試合目に B が優勝するとき

5 試合目までに B が 3 勝 2 敗となり，6 試合目に B が勝つ場合であるから，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{40}{729}$$

(vii) 7 試合目に優勝チームが決まるとき

6 試合目までに A と B が 3 勝 3 敗となり，このとき，7 試合目はどちらのチームが勝っても優勝チームが決まるから，その確率は，

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 1=\frac{160}{729}$$

試合数	4	5	6	7	計
確率	$\frac{17}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{200}{729}$	$\frac{160}{729}$	1

◀ (i) と (ii)，(iii) と (iv)，(v) と (vi) は同じ試合数であるから，その確率をそれぞれ足し合わせて 1 つの枠にまとめている．

よって，(i)〜(vii) より，求める試合数の期待値は，

$$4\times\frac{17}{81}+5\times\frac{8}{27}+6\times\frac{200}{729}+7\times\frac{160}{729}=\boldsymbol{\frac{4012}{729}}$$

解答 2.3

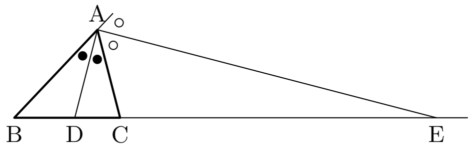
図形の性質（解答）

平面図形の基本（解答）

解答 A3.1.1 ★★ 問題 p.93

問題文

$AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 6$ である $\triangle ABC$ において，$\angle A$ およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を，それぞれ D, E とする．このとき，線分 DE の長さを求めよ．

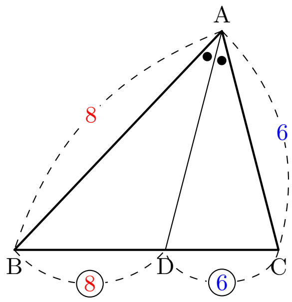


AD は $\angle A$ の二等分線であるから，

$$BD : DC = AB : AC$$

したがって，$BD : DC = 8 : 6 = 4 : 3$
ゆえに，$DC : BC = 3 : 7$ であるから，

$$DC = \frac{3}{7}BC = \frac{3}{7} \cdot 7 = 3$$



◀ $BC = 7$ であることを用いて，$BD : DC = AB : AC$，すなわち，

$$(7 - DC) : DC = 8 : 6$$

より，DC の長さを求めてもよい．

$$8DC = 6(7 - DC)$$

であるから，$DC = 3$ となる．

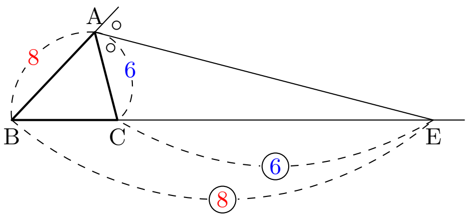
また，AE は $\angle A$ の外角の二等分線であるから，

$$BE : EC = AB : AC$$

したがって，$BE : EC = 8 : 6 = 4 : 3$
ゆえに，$BC : EC = 1 : 3$ であるから，

$$EC = 3BC = 3 \cdot 7 = 21$$

よって，$DE = DC + EC = 3 + 21 = \mathbf{24}$

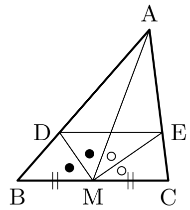


One math

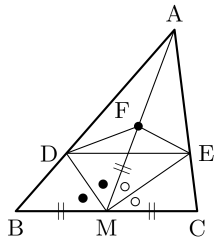
解答 A3.1.2 ★★ 問題 p.94

問題文

△ABC において，辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D，E とする．このとき，$DE < BD + CE$ であることを示せ．



右の図のように，線分 AM 上で，$BM = CM = FM$ となるように点 F をとる．
△BDM と △FDM において，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，$\triangle BDM \equiv \triangle FDM$
したがって，$BD = FD \cdots$ (i)，$\angle DBM = \angle DFM \cdots$ (ii)



◀ 2 つの線分の長さの和は，1 つの線分の長さより大きいことを示すことから，三角形の成立条件「三角形の 2 辺の長さの和は，残りの辺の長さより大きい」を用いることを考える．$BD = FD$，$CE = FE$ となる △FDE が存在することを示すために，線分 AM 上で，$BM = CM = FM$ となるように点 F をとる．

△CEM と △FEM においても同様に考えると，$\triangle CEM \equiv \triangle FEM$
ゆえに，$CE = FE \quad \cdots$ (iii)，$\angle ECM = \angle EFM \cdots$ (iv)
(ii)，(iv) より，

$$\begin{aligned}\angle DFM + \angle EFM &= \angle DBM + \angle ECM\\ &= \angle ABC + \angle ACB\\ &= 180^\circ - \angle BAC < 180^\circ\end{aligned}$$

したがって，3 点 D，F，E は同一直線上にない．
ゆえに，三角形の成立条件より，$DE < FD + FE \cdots$ (v)
よって，(i)，(iii)，(v) より，$DE < BD + CE$ ■

◀ 3 点が同一直線上にあるとき，$DE = BD + CE$ となり，△FDE が存在せず，三角形の成立条件を適用できない．

解答 A3.1.3 ★★★ 問題 p.95

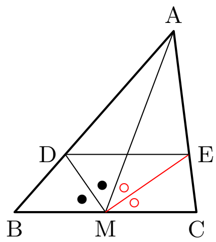
問題文

△ABC の 2 辺 AB，AC 上に DE∥BC となるような 2 点 D，E をとり，辺 BC の中点を M とする．このとき，MD が ∠AMB の二等分線であれば，ME は ∠AMC の二等分線であることを示せ．

△MAB において，MD は ∠AMB の二等分線であるから，$AD : DB = MA : MB \cdots$ (i)
△ABC において，DE∥BC であるから，

$$AD : DB = AE : EC \cdots \text{(ii)}$$

◀ 平行線と線分の比の定理を利用する．



(i)，(ii) より，$AE : EC = MA : MB$
M は BC の中点であるから，$MB = MC$ より，

$$AE : EC = MA : MC$$

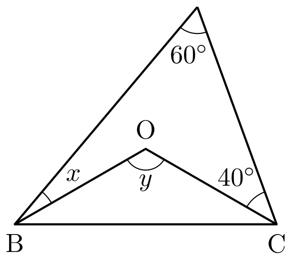
よって，ME は ∠AMC の二等分線である． ■

解答 A3.1.4 ★ 問題 p.96

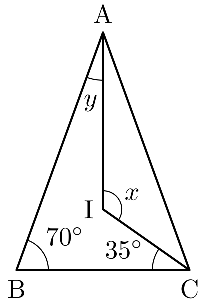
問題文

次の図において，△ABC の外心を O，内心を I とするとき，角 x，y を求めよ．

(1)



(2)

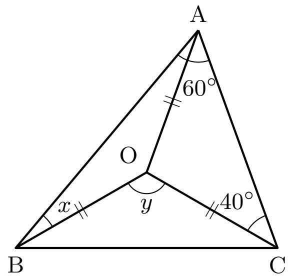


(1) O は △ABC の外心であるから，

$$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{OCA} = 40^\circ$$

したがって，$\angle \mathrm{OAB} = 20^\circ$

よって，$x = \angle \mathrm{OBA} = \mathbf{20^\circ}$



◀ △OAB は二等辺三角形である．

◀ $\angle \mathrm{OAB} = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$

◀ $\angle \mathrm{OBA} = \angle \mathrm{OAB}$

△ABC において，$60^\circ + (20^\circ + \angle \mathrm{OBC}) + (40^\circ + \angle \mathrm{OCB}) = 180^\circ$

したがって，$\angle \mathrm{OBC} + \angle \mathrm{OCB} = 60^\circ$

よって，$y = 180^\circ - (\angle \mathrm{OBC} + \angle \mathrm{OCB}) = \mathbf{120^\circ}$

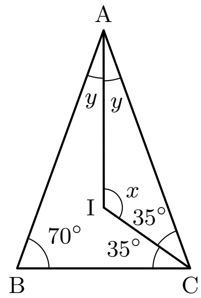
◀ 三角形の内角の和は 180° である．

(2) I は △ABC の内心であるから，

$$\angle \mathrm{ICA} = \angle \mathrm{ICB} = 35^\circ,\quad \angle \mathrm{IAB} = \angle \mathrm{IAC} = y$$

△ABC において，$2y + 2 \times 35^\circ + 70^\circ = 180^\circ$

よって，$y = \mathbf{20^\circ}$



◀ 内心は 3 つの内角の二等分線の交点である．

◀ 三角形の内角の和は 180° である．

また，△IAC において，$x = 180^\circ - (\angle \mathrm{IAC} + \angle \mathrm{ICA}) = \mathbf{125^\circ}$

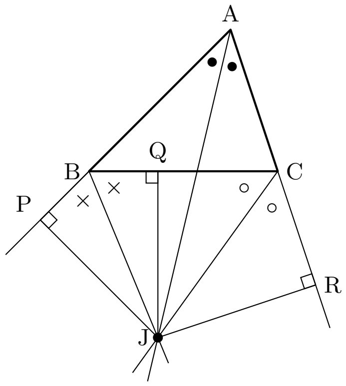
解答 A3.1.5 ★★ 問題 p.97

問題文

$\triangle$ABC において，$\angle$A の二等分線と，$\angle$B と $\angle$C の外角の二等分線は，1 点で交わることを示せ．

$\angle$B と $\angle$C の外角の二等分線の交点を J とする．
J から直線 AB，BC，CA に下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q，R とする．
P，R は垂線の足であるから，

$$\angle \mathrm{APJ} = \angle \mathrm{ARJ} = 90^\circ \cdots \text{(i)}$$



また，BJ は $\angle$CBP の二等分線であることから，

$$\mathrm{JP} = \mathrm{JQ}$$

CJ は $\angle$BCR の二等分線であることから，

$$\mathrm{JQ} = \mathrm{JR}$$

したがって，

$$\mathrm{JP} = \mathrm{JR} \quad \cdots \text{(ii)}$$

◀ 角の二等分線上の点から，角を作る直線までの距離は等しい．

ゆえに，(i)，(ii) より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから，

$$\triangle \mathrm{APJ} \equiv \triangle \mathrm{ARJ}$$

◀ AJ は共通の辺である．

したがって，$\angle \mathrm{JAP} = \angle \mathrm{JAR}$
ゆえに，AJ は $\angle$A の二等分線である．
よって，$\angle$A の二等分線と，$\angle$B と $\angle$C の外角の二等分線は，1 点で交わる．■

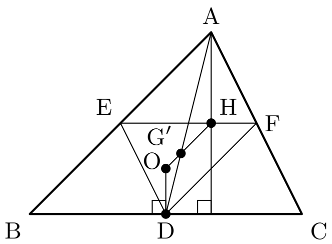
解答 A3.1.6 ★★★ 問題 p.98

問題文

$\triangle$ABC の垂心を H とし，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とする．$\triangle$DEF の垂心を O とするとき，AD と OH の交点 G が，$\triangle$ABC の重心であることを示せ．

O は $\triangle$DEF の垂心であるから，$\mathrm{OD} \perp \mathrm{EF}$
E，F はそれぞれ辺 CAAB の中点であるから，中点連結定理より，

$$\mathrm{EF} /\!/ \mathrm{BC}$$



したがって，$\mathrm{OD} \perp \mathrm{BC} \cdots \text{(i)}$
また，H は $\triangle$ABC の垂心であるから，$\mathrm{AH} \perp \mathrm{BC} \cdots \text{(ii)}$
(i)，(ii) より，$\mathrm{OD} /\!/ \mathrm{AH}$
$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{DEF}$ であるから，$\mathrm{AH} : \mathrm{OD} = 2 : 1$
$\mathrm{OD} /\!/ \mathrm{AH}$ より，$\mathrm{AG} : \mathrm{DG} = \mathrm{AH} : \mathrm{OD} = 2 : 1$
よって，G は $\triangle$ABC の中線 AD を $2 : 1$ に内分する点であるから，点 G は $\triangle$ABC の重心である．■

◀ 中点連結定理より，

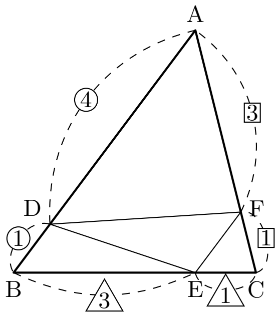
$$\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = 2 : 1, \quad \mathrm{BC} : \mathrm{EF} = 2 : 1, \quad \mathrm{CA} : \mathrm{FD} = 2 : 1$$

であるから，3 組の辺の比がすべて等しい．

解答 A3.1.7 ★★ 問題 p.99

問題文

△ABC において，線分 AB を 4 : 1 に内分する点を D，線分 BC を 3 : 1 に内分する点を E，線分 CA を 1 : 3 に内分する点を F とする．このとき，△ABC と △DEF の面積比を求めよ．



$\triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} - (\triangle\mathrm{ADF} + \triangle\mathrm{BED} + \triangle\mathrm{CFE}) \cdots \text{(i)}$

また，$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ABC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF} : \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$ より，

$$\triangle\mathrm{ADF} = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 4}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}$$

同様に，

$$\triangle\mathrm{BED} = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 5}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{3}{20}\triangle\mathrm{ABC}, \quad \triangle\mathrm{CFE} = \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{16}\triangle\mathrm{ABC}$$

したがって，これらを (i) に代入すると，

$$\triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{20} + \frac{1}{16}\right)\triangle\mathrm{ABC} = \frac{3}{16}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEF} = \triangle\mathrm{ABC} : \frac{3}{16}\triangle\mathrm{ABC} = \mathbf{16 : 3}$$

◀ △ABC の面積から，△DEF のまわりの三角形の面積を引く．

◀ 与えられた条件より，

AD : DB = 4 : 1,

BE : EC = 3 : 1,

CF : FA = 1 : 3

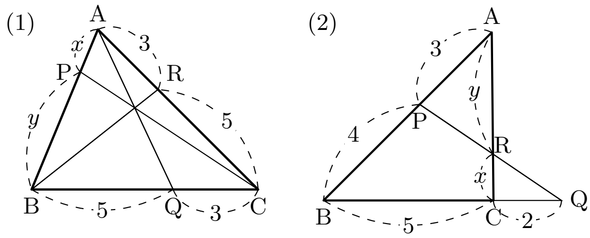
である．

◀ △DEF を △ABC で表す．

解答 A3.1.8 ★ 問題 p.100

問題文

右の図のような △ABC において，$x : y$ を求めよ．



(1) △ABC において，チェバの定理より，$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}} = 1$

したがって，$\frac{x}{y}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3} = 1$

ゆえに，$\frac{x}{y} = \frac{9}{25}$

よって，$x : y = \mathbf{9 : 25}$

(2) △ABC と直線 PQ について，メネラウスの定理より，$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}} = 1$

したがって，$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{x}{y} = 1$

ゆえに，$\frac{x}{y} = \frac{8}{21}$

よって，$x : y = \mathbf{8 : 21}$

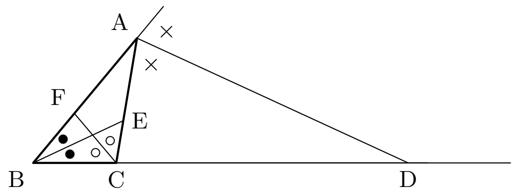
◀ $\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\cdot\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\cdot\frac{\boxed{5}}{\boxed{6}} = 1$

◀ $\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\cdot\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\cdot\frac{\boxed{5}}{\boxed{6}} = 1$

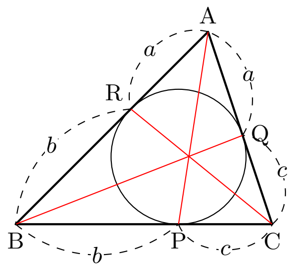
解答 A3.1.9 ★★ 問題 p.101

問題文

△ABC において，次のことを示せ．
(1) △ABC の内接円が 3 辺 BC，CA，AB に接する点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる．
(2) 右の △ABC において，∠A の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わるとき，その交点を D とする．また，∠B，∠C の二等分線と辺 AC，AB の交点をそれぞれ E，F とする．このとき，3 点 D，E，F は一直線上にある．



(1) △ABC の内接円が P，Q，R でそれぞれ 3 辺 BC，CA，AB と接するから，



$$\mathrm{AQ}=\mathrm{AR},\quad \mathrm{BR}=\mathrm{BP},\quad \mathrm{CP}=\mathrm{CQ}$$

◀ 円の外部の点から円に引いた 2 本の接線の長さは等しいことを利用する

したがって，AR = AQ = a，BR = BP = b，CP = CQ = c とおくと，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$$

よって，チェバの定理の逆より，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる． ■

(2) BE，CF はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線であるから，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdots(\mathrm{i}),\quad \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdots(\mathrm{ii})$$

◀ BC : BA = CE : EA，CA : CB = AF : FB

AD は ∠A の外角の二等分線であるから，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdots(\mathrm{iii})$$

◀ AB : AC = BD : DC

したがって，(i) ～(iii) の辺々を掛け合わせると，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdots(\mathrm{iv})$$

ゆえに，

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=1$$

すなわち，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

よって，メネラウスの定理の逆より，3 点 D，E，F は一直線上にある． ■

◀ △ABC と 3 点 D，E，F に注目する．

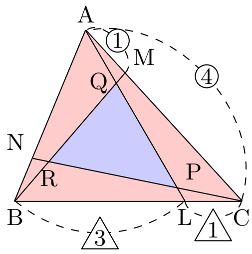
解答 3.1

解答 A3.1.10 ★★★ 問題 p.102

問題文

$\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB を $3:1$ に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，AL と CN，AL と BM，BM と CN の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，次の三角形の面積を $\triangle$ABC の面積 S を用いて表せ．

(1) $\triangle$ABQ　　(2) $\triangle$PQR



$\mathrm{CM}:\mathrm{AM}=3:1$ より，$\mathrm{CA}:\mathrm{AM}=4:1$

また，$\mathrm{BL}:\mathrm{LC}=3:1$ であるから，$\triangle$BCM と直線 AL について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AM}}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=1$$

$\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=1$ より，$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QB}}=\frac{1}{12}$

したがって，$\mathrm{MQ}:\mathrm{QB}=1:12$

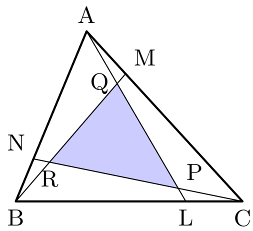
ゆえに，$\mathrm{MB}:\mathrm{QB}=13:12$

よって，

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{12}{13}\triangle\mathrm{ABM}=\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\boldsymbol{\frac{3}{13}S}$$

◀ $\mathrm{CA}:\mathrm{AM}=4:1$ より，

$\triangle\mathrm{ABM}=\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}$



(2) (1) と同様に，$\triangle$CAN と直線 BM，$\triangle$ABL と直線 CN について，メネラウスの定理より，

$$\triangle\mathrm{BCR}=\triangle\mathrm{CAP}=\frac{3}{13}S$$

よって，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-(\triangle\mathrm{ABQ}+\triangle\mathrm{BCR}+\triangle\mathrm{CAP})$$
$$=S-3\cdot\frac{3}{13}S=\boldsymbol{\frac{4}{13}S}$$

解答 3.1

解答（節末）A3.1.1 ★★ 節末 p.103

問題文

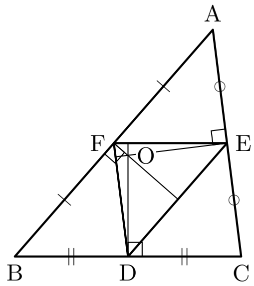
$\triangle$ABC の辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D，E，F とすると，$\triangle$ABC の外心 O は，$\triangle$DEF の垂心であることを証明せよ．

O は $\triangle$ABC の外心であり，D は BC の中点であるから，OD $\perp$ BC $\cdots$ (i)

◀ O は BC の垂直二等分線上にある．

また，中点連結定理より，

$$\text{FE} /\!/ \text{BC} \cdots \text{(ii)}$$



(i)，(ii) より，OD $\perp$ FE
同様にして，

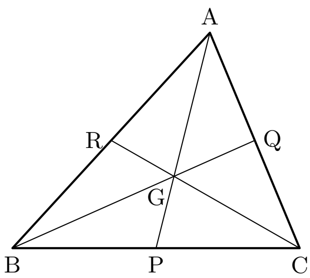
$$\text{OE} \perp \text{FD}, \quad \text{OF} \perp \text{DE}$$

よって，O は $\triangle$DEF の垂心である． ■

解答（節末）A3.1.2 ★★ 節末 p.103

問題文

右の図において，$\triangle$ABC の重心を G とするとき，$\triangle$ABC の面積と四角形 ARGQ の面積比を求めよ．



(四角形 ARGQ) $= \triangle$ABC $- \triangle$CBR $- \triangle$CGQ $\cdots$ (i)

◀ $\triangle$CBR，$\triangle$CGQ を $\triangle$ABC で表すことを考える．

また，G は重心より，R は辺 AB の中点であるから，

$$\triangle\text{CBR} = \frac{1}{2}\triangle\text{ABC} \cdots \text{(ii)}$$

◀ $\triangle\text{CBR} : \triangle\text{ABC}$
$= \text{BR} : \text{BA} = 1 : 2$

また，$\triangle\text{CGQ} : \triangle\text{CRA} = \text{CG} \cdot \text{CQ} : \text{CR} \cdot \text{CA}$
G は重心より，$\text{CG} : \text{CR} = 2 : 3$，$\text{CQ} : \text{CA} = 1 : 2$ であるから，

$$\triangle\text{CGQ} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}\triangle\text{CRA} = \frac{1}{3}\triangle\text{CRA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\triangle\text{ABC} = \frac{1}{6}\triangle\text{ABC} \cdots \text{(iii)}$$

◀ $\triangle\text{CRA} : \triangle\text{ABC}$
$= \text{AR} : \text{AB} = 1 : 2$

(ii)，(iii) を (i) に代入すると，

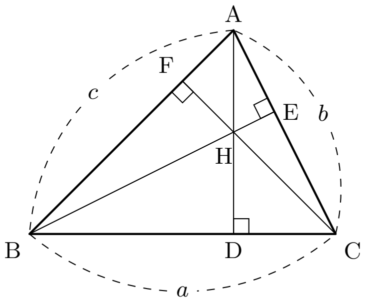
$$(\text{四角形 ARGQ}) = \triangle\text{ABC} - \frac{1}{2}\triangle\text{ABC} - \frac{1}{6}\triangle\text{ABC} = \frac{1}{3}\triangle\text{ABC}$$

よって，$\triangle$ABC の面積と四角形 ARGQ の面積比は，**3 : 1**

解答（節末）A3.1.3 ★★　節末 p.103

問題文

鋭角三角形である △ABC において，3 つの頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点で交わることを証明せよ．



3 辺 BC, CA, AB の長さを，それぞれ a, b, c とする．また，3 つの頂点 A, B, C から対辺へ下ろした垂線をそれぞれ AD, BE, CF とする．
△ABE と △ACF において，

$$\angle \mathrm{BEA} = \angle \mathrm{CFA} = 90^\circ$$

したがって，$\triangle \mathrm{ABE} \backsim \triangle \mathrm{ACF}$

◀ ∠A は共通の角であるから，2 組の角がそれぞれ等しい．

これより，$\mathrm{AE} : \mathrm{AF} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = c : b$
同様に考えると，$\triangle \mathrm{CBF} \backsim \triangle \mathrm{ABD}$ より，$\mathrm{BF} : \mathrm{BD} = \mathrm{CB} : \mathrm{AB} = a : c$
また，$\triangle \mathrm{ACD} \backsim \triangle \mathrm{BCE}$ より，$\mathrm{CD} : \mathrm{CE} = \mathrm{AC} : \mathrm{BC} = b : a$
ゆえに，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{EA}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 1$$

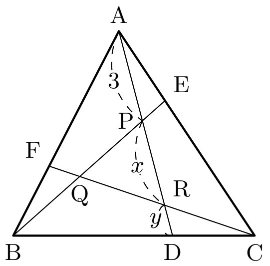
よって，チェバの定理の逆より，3 つの頂点から対辺へ下ろした垂線は 1 点で交わる． ■

解答 3.1

解答（節末）A3.1.4 ★★★ 節末 p.103

問題文

$\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とし，AD と BE，BE と CF，CF と AD の交点をそれぞれ P，Q，R とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) AP : PR : RD = 3 : x : y とするとき，x，y の値を求めよ．
(2) $\triangle$ABC と $\triangle$PQR の面積比を求めよ．



(1) $\triangle$ABD と直線 CF について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}=1$$

$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{y}{x+3}=1$ より，$x-6y=-3\cdots$(i)

◀ $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}=1$

また，$\triangle$ACD と直線 BE について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}=1$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{y+x}{3}=1$ より，$x+y=4\cdots$(ii)

◀ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}=1$

よって，(i)，(ii) より，$x=\mathbf{3}$，$y=\mathbf{1}$

◀ 連立方程式を解く．

(2) (1) と同様に，BQ : QP : PM = 3 : 3 : 1 より，$\triangle\mathrm{PBR}=\frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABD}$
$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{PBR}=\frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC}$$

また，$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{3}{6}\triangle\mathrm{PBR}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{3}{6}\triangle\mathrm{PBR}=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}:\frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\mathbf{7:1}$$

【別解】 $\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC}$
$\triangle$BCQ，$\triangle$CAR も同様に，

$$\triangle\mathrm{BCQ}=\triangle\mathrm{CAR}=\frac{2}{7}\triangle\mathrm{ABC}$$

したがって，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-(\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{BCQ}+\triangle\mathrm{CAR})=\frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC}$
よって，$\triangle$ABC と $\triangle$PQR の面積比は，

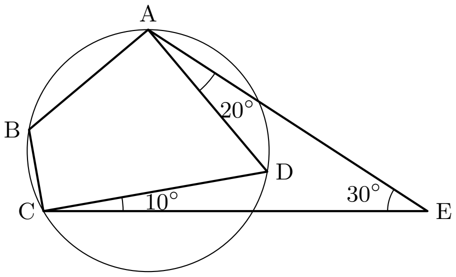
$$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}:\frac{1}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\mathbf{7:1}$$

円の性質と作図（解答）

解答 A3.2.1 ★★ 問題 p.108

問題文

右の図において，四角形 ABCD は円に内接している．$\angle\mathrm{AEC} = 30^\circ$，$\angle\mathrm{EAD} = 20^\circ$，$\angle\mathrm{ECD} = 10^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．



四角形 ABCD は円に内接するから，$\angle\mathrm{BAD} + \angle\mathrm{BCD} = 180^\circ$
四角形 ABCE の内角の和は 360° であるから，

$$\angle\mathrm{ABC} + 180^\circ + 20^\circ + 30^\circ + 10^\circ = 360^\circ$$

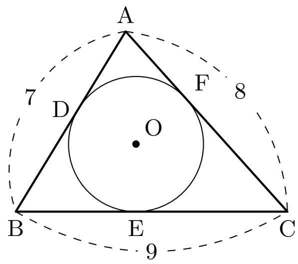
よって，$\angle\mathrm{ABC} = \mathbf{120^\circ}$

◀ 円に内接する四角形の対角の和は 180° であることを用いる．

解答 A3.2.2 ★★ 問題 p.109

問題文

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB} = 7$，$\mathrm{BC} = 9$，$\mathrm{CA} = 8$ とする．また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円と辺 BC，CA，AB の接点を，それぞれ点 D，E，F とするとき，AD の長さを求めよ．



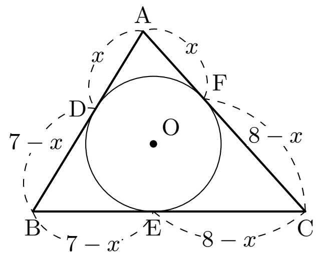
$\mathrm{AD} = x$ とすると，$\mathrm{BD} = \mathrm{BE} = 7 - x \cdots \text{(i)}$

また，$\mathrm{AF} = x$ であるから，$\mathrm{FC} = \mathrm{EC} = 8 - x \cdots \text{(ii)}$
(i)，(ii) より，

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BE} + \mathrm{EC} = (7 - x) + (8 - x) = 9$$

したがって，$x = 3$

よって，$\mathrm{AD} = \mathbf{3}$

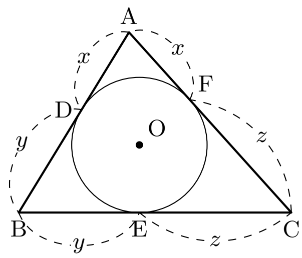


【別解】 $\mathrm{AD} = x$，$\mathrm{BE} = y$，$\mathrm{CF} = z$ とすると，$\mathrm{AD} = \mathrm{AF}$，$\mathrm{BE} = \mathrm{BD}$，$\mathrm{CF} = \mathrm{CE}$ であるから，

$$x + y = 7, \quad y + z = 9, \quad z + x = 8$$

◀ $\mathrm{AD} + \mathrm{DB} = \mathrm{AB}$，$\mathrm{BE} + \mathrm{EC} = \mathrm{BC}$，$\mathrm{CF} + \mathrm{FA} = \mathrm{CA}$

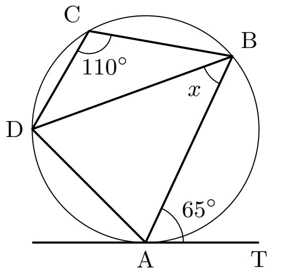
辺々を足し合わせると，$2(x + y + z) = 24$
したがって，$x + y + z = 12$
ゆえに，$y + z = 9$ より，$x = 3$
よって，$\mathrm{AD} = \mathbf{3}$



解答 A3.2.3 ★ 問題 p.110

問題文

右の図において，AT は点 A における接線とするとき，角 x を求めよ．

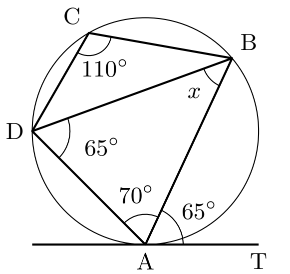


(1) 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{BCD} = 180^\circ$$

したがって，$\angle \mathrm{BAD} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$
接弦定理より，$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{ADB} = 65^\circ$
よって，$\triangle \mathrm{ABD}$ の内角の和は 180° であるから，

$$x = 180^\circ - (70^\circ + 65^\circ) = \mathbf{45^\circ}$$



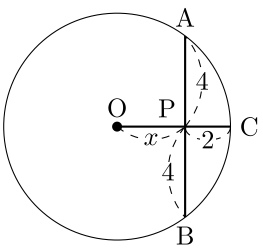
◀ 接線 AT と弦 AB について，接弦定理を考える．

解答 A3.2.4 ★ 問題 p.111

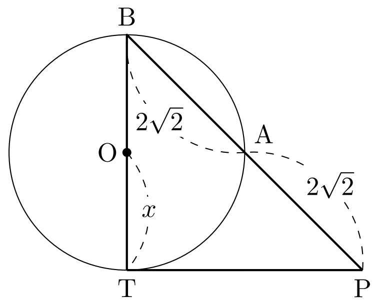
問題文

次の図において，O は円の中心，PT は点 T における接線とするとき，x の値を求めよ．

(1)



(2)



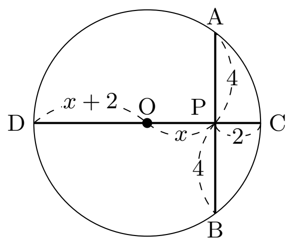
(1) CO の延長と円との交点を D とすると，

$$\mathrm{PD} = 2x + 2$$

方べきの定理より，$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$
したがって，

$$4 \cdot 4 = 2 \cdot (2x + 2)$$

よって，$x = \mathbf{3}$



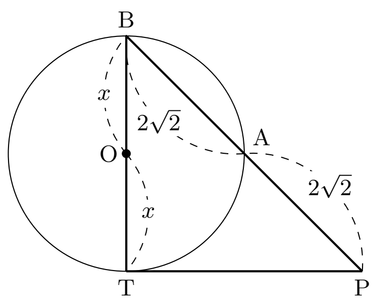
◀ 半径は，$\mathrm{OP} + \mathrm{PC} = x + 2$ であり，$\mathrm{PD} = \mathrm{PO} + \mathrm{OD}$ より，$\mathrm{PD} = 2x + 2$

(2) 方べきの定理より，$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$

したがって，$2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = \mathrm{PT}^2$ より，$\mathrm{PT}^2 = 16$
$\triangle \mathrm{PTB}$ は直角三角形であるから，三平方の定理より，

$$\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PT}^2 + \mathrm{BT}^2$$

ゆえに，$(4\sqrt{2})^2 = 16 + (2x)^2$ より，$x^2 = 4$
よって，$x > 0$ より，$x = \mathbf{2}$



◀ $\mathrm{PB} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

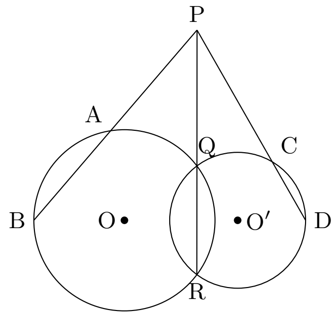
◀ $\triangle \mathrm{PTB}$ は $1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角三角形であることを利用して，x の値を求めてもよい．

◀ $\mathrm{BT} = 2\mathrm{OT} = 2x$

解答 A3.2.5 ★★ 問題 p.112

問題文

右の図のように，2 つの円 O，O′ が 2 点 Q，R で交わっており，QR の延長上の点 P から，円 O，O′ にそれぞれ A，B および C，D で交わる直線を引くとする．このとき，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることを示せ．



円 O において，方べきの定理より，$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PQ} \cdot \mathrm{PR}$
円 O′ において，方べきの定理より，$\mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD} = \mathrm{PQ} \cdot \mathrm{PR}$
したがって，$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$
よって，方べきの定理の逆より，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある．■

◀ 方べきの定理の逆を用いることができる．

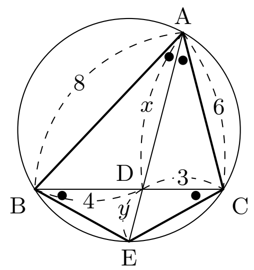
解答 A3.2.6 ★★★ 問題 p.113

問題文

三角形 △ABC において，AB = 8，BC = 7，CA = 6 とする．∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，三角形 △ABC の外接円と交わる点を E とする．このとき，AD，DE の長さをトレミーの定理を用いて求めよ．

$\mathrm{AD} = x$，$\mathrm{DE} = y$ とする．
AD は ∠A の二等分線であるから，

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 8 : 6 = 4 : 3$$



$\mathrm{BC} = 7$ より，$\mathrm{BD} = 4$，$\mathrm{DC} = 3$
四角形 ABEC において，方べきの定理より，

$$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DE} = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{DC}$$

すなわち，$xy = 12 \cdots (\mathrm{i})$
$\triangle \mathrm{ACD} \backsim \triangle \mathrm{BED}$ であるから，$\mathrm{AC} : \mathrm{BE} = \mathrm{CD} : \mathrm{ED}$ より，$6 \cdot y = \mathrm{BE} \cdot 3$
したがって，$\mathrm{BE} = 2y$
また，$\angle \mathrm{EBC} = \angle \mathrm{EAC}$，$\angle \mathrm{ECB} = \angle \mathrm{EAB}$，$\angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{EAB}$ より，△EBC は二等辺三角形であるから，$\mathrm{EC} = 2y$
ゆえに，四角形 ABEC において，トレミーの定理より，

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{EC} + \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BE} = \mathrm{BC} \cdot \mathrm{AE}$$

すなわち，$8 \cdot 2y + 6 \cdot 2y = 7 \cdot (x + y)$
したがって，$x = 3y$
これを (i) に代入すると，$3y^2 = 12$
$y > 0$ より，$y = 2$
このとき，$x = 3 \cdot 2 = 6$
よって，$\mathrm{AD} = \mathbf{6}$，$\mathrm{DE} = \mathbf{2}$

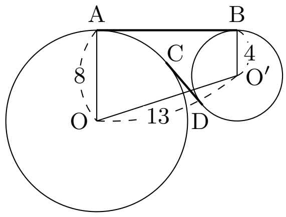
◀ 円周角の定理より，∠CAD = ∠EBD であり，対頂角は等しいから，∠ADC = ∠BDE となる．2 組の角がそれぞれ等しいから，△ACD ∽ △BED が成り立つ．

解答 3.2

解答 A3.2.7 ★★★ 問題 p.114

問題文

右の図のように，半径 8 の円 O と半径 4 の円 O′ があり，中心間の距離 OO′ = 13 とする．2 つの円の共通接線を 2 本引き，これらの接点を A，B，C，D とするとき，線分 AB，CD の長さを求めよ．



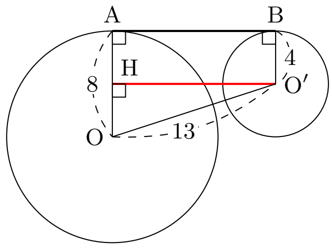
O′ から OA に垂線 OH を下ろすと，∠OAB = ∠O′BA = 90° であるから，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{O'H}, \quad \mathrm{AH} = \mathrm{BO'} = 4$$

△OO′H において，∠OHO′ = 90° であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{O'H}^2 &= \mathrm{OO'}^2 - \mathrm{OH}^2 \\ &= 13^2 - (8-4)^2 \\ &= 13^2 - 4^2 \\ &= 153 \end{aligned}$$

◀ 三平方の定理を用いる．



O′H > 0 より，$\mathrm{O'H} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$

よって，AB = O′H = $\mathbf{3\sqrt{17}}$

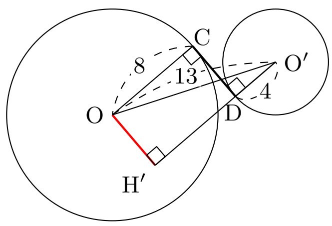
O から線分 O′D の延長に垂線 OH′ を下ろすと，∠OCD = ∠O′DC = 90°

したがって，CD = OH′，DH′ = CO = 8

△OO′H′ において，∠OH′O′ = 90° であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{OH'}^2 &= \mathrm{OO'}^2 - \mathrm{O'H'}^2 \\ &= 13^2 - (4+8)^2 \\ &= 13^2 - 12^2 \\ &= 169 - 144 \\ &= 25 \end{aligned}$$

◀ 三平方の定理を用いる．



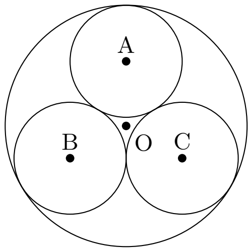
OH′ > 0 より，$\mathrm{OH'} = \sqrt{25} = 5$

よって，CD = OH′ = **5**

解答 A3.2.8 ★★ 問題 p.115

問題文

右の図のように，半径 1 の円 O に，半径が同じ 3 つの円が内接している．このとき，円 A の面積 S を求めよ．

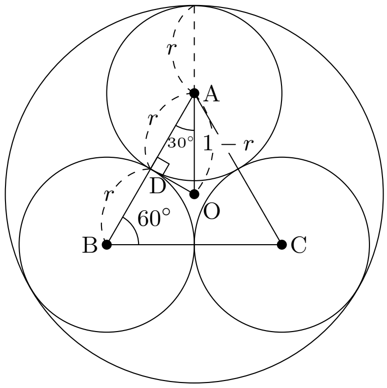


右の図のように，内接円の半径を r，線分 AB と内接円の交点を D とする．
$\angle\mathrm{OAD} = 30^\circ, \angle\mathrm{ODA} = 90^\circ$ より，

$$\mathrm{OA} : \mathrm{AD} = 2 : \sqrt{3}$$

$(1-r) : r = 2 : \sqrt{3}$ より，

$$2r = \sqrt{3}(1-r)$$



◀ △ABC は正三角形である．

したがって，$r = 2\sqrt{3} - 3$
よって，求める面積 S は，

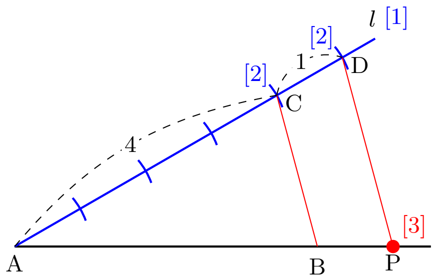
$$S = \pi r^2 = \pi(2\sqrt{3}-3)^2 = \boldsymbol{(21 - 12\sqrt{3})\pi}$$

解答 A3.2.9 ★ 問題 p.116

問題文

与えられた線分 AB について，線分 AB を $5:1$ に外分する点 P を作図せよ．

[1] 点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 l を引く．
[2] 半直線 l 上に，$\mathrm{AC} : \mathrm{CD} = 4 : 1$となるように点 C，D をとる．
[3] 点 D を通り，直線 CB に平行な直線を引き，直線 AB との交点を P とする．このとき，点 P が求める点である．



◀ 点 C，D を作図するときにコンパスでとる等しい長さは，適当でよい．

$\mathrm{BC} /\!/ \mathrm{PD}$ より，$\mathrm{AB} : \mathrm{BP} = \mathrm{AC} : \mathrm{CD} = 4 : 1$
よって，$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 5 : 1$ であるから，点 P は線分 AB を $5:1$ に外分する点である．

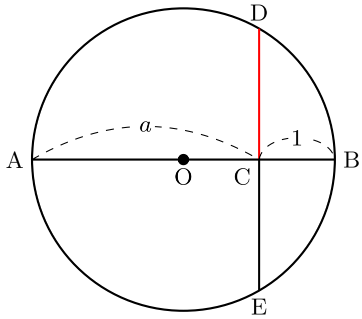
◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

解答
3.2

解答 A3.2.10 ★★★ 問題 p.117

問題文

長さ 1，a の線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{a}$ の線分を作図せよ．



直線上に，$\mathrm{AC}=a$，$\mathrm{CB}=1$ となる 3 点 A，C，B をこの順にとる．
[1] 線分 AB を直径とする円 O をかく．
[2] 点 C を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，[1] の円との交点をそれぞれ D，E とする．このとき，線分 CD が求める線分である．

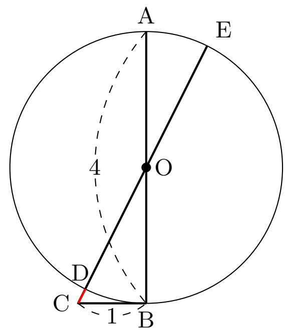
方べきの定理より，$\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CE}=\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}$
$\mathrm{CD}=\mathrm{CE}$ であるから，$\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CB}=a$ より，$\mathrm{CD}=\sqrt{a}$
よって，線分 CD は長さ $\sqrt{a}$ の線分である．

◀ 長さ $\sqrt{m}$ の線分の作図は，方べきの定理を利用するとよい．

解答 A3.2.11 ★★ 問題 p.118

問題文

長さ 1 の線分が与えられたとき，2 次方程式 $x^2+4x-1=0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ．



$x^2+4x-1=0$ より，$x(x+4)=1^2$
[1] 長さ 4 の線分 AB を直径とする円 O をかく．
[2] 円 O 上の点 B を通る線分 AB の垂線を引き，この直線上で $\mathrm{BC}=1$ となる点 C をとる．
[3] 点 C と AB の中点である O を結ぶ直線と円 O との交点を，右の図のように D，E とすると，線分 CD，CE が求める線分である．

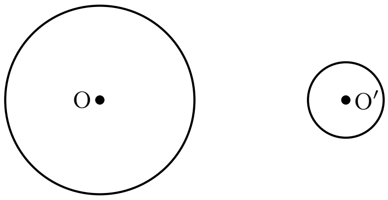
CB は円に接するから，方べきの定理より，$\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CE}=\mathrm{CB}^2=1^2$
$\mathrm{CD}=x$ とすると，$\mathrm{CE}=x+4$ より，$x(x+4)=1^2$
よって，線分 CD は 2 次方程式 $x^2+4x-1=0$ の正の解を長さとする線分である．

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．
◀ $x=-2+\sqrt{5}$

解答 A3.2.12 ★★★ 問題 p.119

問題文

右の図のように，半径がそれぞれ r，r' $(r > r')$ である 2 つの円 O，O$'$ がある．この 2 つの円の共通内接線を作図せよ．



[1] 線分 OO$'$ を直径とする円をかく．

◀ 垂直二等分線を引く．

[2] O を中心とする半径 $r + r'$ の円をかく．

[3] [1] の円と [2] の円の交点を P，Q とする．

[4] 半直線 OP，OQ と円 O の交点を，それぞれ A，C とする．また，点 O$'$ を通り，線分 OA，OC に平行な直線と円 O$'$ との交点を，それぞれ B，D とする．このとき，直線 AB と直線 CD を引くと，この 2 直線が 2 つの円 O，O$'$ の共通内接線である．

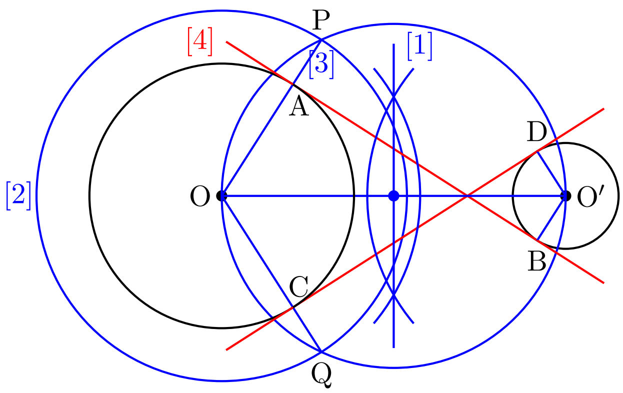
$\angle \mathrm{OPO'} = 90°$，$\mathrm{AP} = \mathrm{OP} - \mathrm{OA} = (r + r') - r = r'$ であり，$\mathrm{OA} /\!/ \mathrm{O'B}$ であるから，四角形 APO$'$B は長方形となる．

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

したがって，$\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{O'BA} = 90°$

よって，直線 AB は 2 つの円 O，O$'$ の共通内接線である．

直線 CD についても同様に示される．



解答（節末）A3.2.1 ★★★ 節末 p.120

問題文

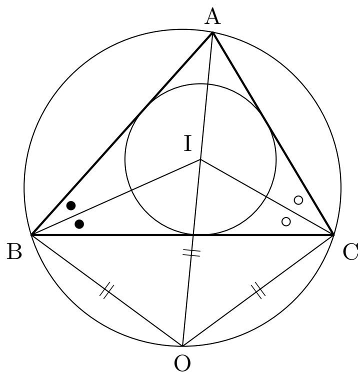
△ABC の内心を I，△BCI の外心を O とする．4 点 A，B，C，O は同一円周上にあることを示せ．

点 I が △ABC の内心であるから，

$$\angle\mathrm{IBC} = \angle\mathrm{IBA}, \quad \angle\mathrm{ICB} = \angle\mathrm{ICA}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{IBC} + \angle\mathrm{ICB} &= \frac{1}{2}\angle\mathrm{ABC} + \frac{1}{2}\angle\mathrm{ACB} \\ &= \frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{ACB}) \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle\mathrm{BAC}) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC} \cdots (\mathrm{i})\end{aligned}$$



また，点 O が △BCI の外心であるから OB = OI = OC
ゆえに，∠BOI = 180° − 2∠BIO，∠COI = 180° − 2∠CIO
したがって，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BOC} &= \angle\mathrm{BOI} + \angle\mathrm{COI} \\ &= (180^\circ - 2\angle\mathrm{BIO}) + (180^\circ - 2\angle\mathrm{CIO}) \\ &= 360^\circ - 2(\angle\mathrm{BIO} + \angle\mathrm{CIO}) \\ &= 360^\circ - 2\angle\mathrm{BIC} \cdots (\mathrm{ii})\end{aligned}$$

◀ △BOI，△COI は二等辺三角形であるから，∠BIO = ∠IBO，∠CIO = ∠ICO

ここで，(i) より，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BIC} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{IBC} + \angle\mathrm{ICB}) \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}\right) \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}\end{aligned}$$

◀ (i) より，

$$\begin{aligned}&\angle\mathrm{IBC} + \angle\mathrm{ICB} \\ =&90^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}\end{aligned}$$

これを (ii) に代入すると，

$$\angle\mathrm{BOC} = 360^\circ - 2\left(90^\circ + \frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}\right) = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC}$$

ゆえに，∠BOC + ∠BAC = 180°
よって，四角形 ABCO は円に内接する，すなわち，4 点 A，B，C，O は同一円周上にある． ■

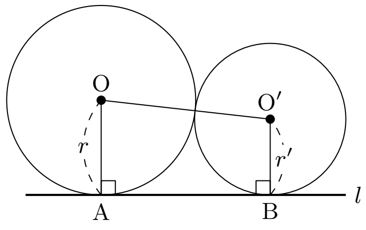
◀ 円に内接する四角形の対角の和は 180° である．

解答 3.2

解答（節末）A3.2.2 ★★ 節末 p.120

問題文

右の図のように，半径 r，r' $(r > r')$ の円 O と O′ が外接しており，さらに直線 l にそれぞれ A, B で接しているとする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 線分 AB の長さを r，r' で表せ．
(2) 2 つの円 O，O′ に外接し，さらに線分 AB に接する円 O″ の半径 x を求めよ．

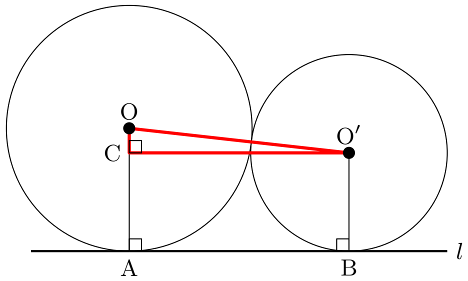


(1) 円 O, O′ が外接しているから，$OO' = r + r'$
O′ から OA に垂線 O′C を下ろすと，$OC = r - r'$

△OO′C において，

$$O'C = \sqrt{OO'^2 - OC^2} = \sqrt{(r + r')^2 - (r - r')^2} = 2\sqrt{rr'}$$

◀ 三平方の定理を用いる．

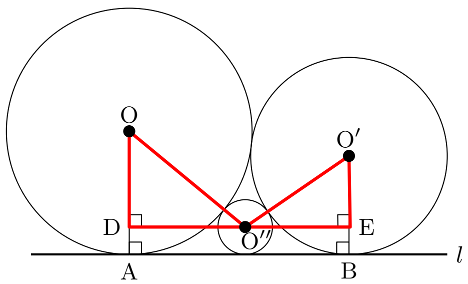


よって，$AB = O'C = \boldsymbol{2\sqrt{rr'}}$

(2) 中心 O″ から OA，O′B に垂線 O″D，O″E をそれぞれ下ろすと，

$$DO'' = \sqrt{OO''^2 - OD^2} = 2\sqrt{rx},$$
$$EO'' = \sqrt{O'O''^2 - O'E^2} = 2\sqrt{r'x}$$

◀ 三平方の定理を用いる．



$DE = DO'' + EO''$ であるから，

$$2\sqrt{rx} + 2\sqrt{r'x} = 2\sqrt{rr'}$$

したがって，$(\sqrt{r} + \sqrt{r'})\sqrt{x} = \sqrt{rr'}$

◀ $\sqrt{x}$ をくくり出す．

ゆえに，$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{rr'}}{\sqrt{r}+\sqrt{r'}}$
よって，$x = \boldsymbol{\frac{rr'}{(\sqrt{r}+\sqrt{r'})^2}}$

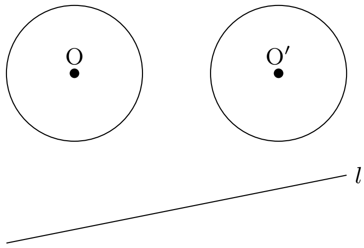
解答 3.2

One math

解答（節末）A3.2.3 ★★　節末 p.120

問題文

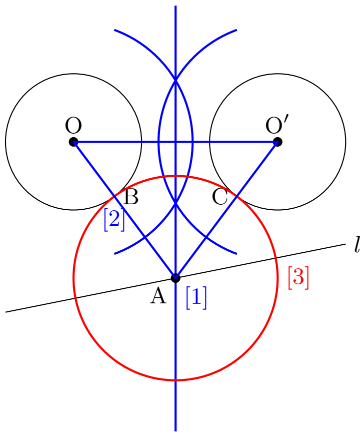
右の図のように，半径が等しい 2 つの円 O，O′ と直線 l がある．直線 l 上に中心があり，この 2 つの円 O，O′ に外接する円を作図せよ．



[1] 線分 OO′ の垂直二等分線を引き，直線 l との交点を A とする．

[2] 線分 OA と円 O の交点を B，線分 O′A と円 O′ の交点を C とする．

[3] 点 A を中心として，半径 AB の円をかく．この円が求める円である．



◀ 求める円の中心は，2 つの円の中心 O，O′ からの距離が等しい．

◀ AC をかいてもよい．

A は O と O′ の垂直二等分線上にあるから，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{O'A}$$

したがって，$\mathrm{OB} + \mathrm{AB} = \mathrm{O'C} + \mathrm{AC}$

また，円 O と円 O′ の半径が等しいから，$\mathrm{OB} = \mathrm{O'C}$

ゆえに，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$

よって，円 A は 2 つの円 O，O′ に接する．

◀ $\mathrm{OA} - \mathrm{OB} = \mathrm{O'A} - \mathrm{O'}C$

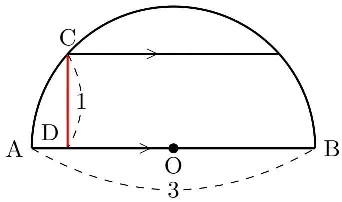
解答（節末）A3.2.4 ★★　節末 p.120

問題文

長さ 3 の線分が与えられたとき，連立方程式 $x + y = 3$，$xy = 1$ の解を長さとする線分を作図せよ．

[1] 長さ 3 の線分 AB を直径とする半円をかく．

[2] 線分 AB に平行で，線分 AB との距離が 1 である直線と，[1] の半円との交点の 1 つを C とする．



◀ $x + y = 3$ より，

$$y = 3 - x$$

これを $xy = 1$ に代入すると，$x(3 - x) = 1$ となることから，方べきの定理の利用を考える．

[3] C から線分 AB に垂線を引き，その交点を D とすると，線分 AD，BD が求める線分である．

$\mathrm{AD} = x$，$\mathrm{BD} = y$ とすると，$\mathrm{AD} + \mathrm{BD} = \mathrm{AB}$ より，

$$x + y = 3$$

◀ 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する．

また，方べきの定理より，$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DB} = \mathrm{CD}^2$ であるから，$xy = 1$

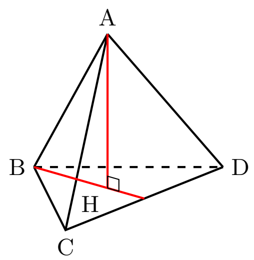
よって，線分 AD，BD は連立方程式 $x + y = 3$，$xy = 1$ の解を長さとする線分である．

空間図形（解答）

解答 A3.3.1 ★★ 問題 p.123

問題文

四面体 ABCD において, $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ であるとする．このとき，A から平面 BCD に垂線 AH を下ろすとき, 点 H は $\triangle BCD$ の垂心であることを示せ.



$AH \perp$ 平面 BCD より，$AH \perp CD$
また, $AB \perp CD$ より, CD は平面 ABH 上の交わる 2 直線 AB，AH に垂直であるから，

$$CD \perp \text{平面 ABH}$$

◀ 直線 l と平面 α について，平面 α 上の交わる 2 直線が垂直であるならば，直線 l と平面 α は垂直である．

BH は平面 ABH 上にあるから，$BH \perp CD \cdots$(i)
$CD \perp$ 平面 ABH と同様に考えると，$BD \perp$ 平面 ACH
したがって，$CH \perp BD \cdots$(ii)
よって，点 H は $\triangle BCD$ の垂心である． ■

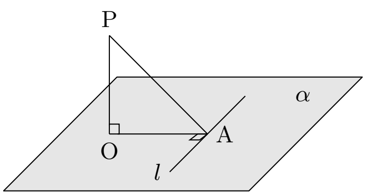
◀ $AH \perp BD$，$AC \perp BD$ より，$BD \perp$ 平面 ACH

解答 A3.3.2 ★★★ 問題 p.124

問題文

l を平面 α 上の直線，P を平面 α 上にない点，A を直線 l 上の点，O を l 上にない平面 α 上の点とするとき，次のことを示せ．
(1) $PO \perp \alpha$，$PA \perp l$ ならば $OA \perp l$
(2) $PO \perp \alpha$，$OA \perp l$ ならば $PA \perp l$

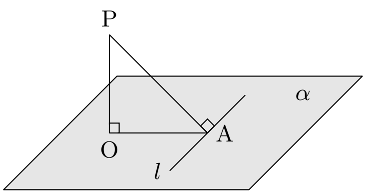
(1) $PO \perp \alpha$ より，$PO \perp l \cdots$(i)
仮定より，$PA \perp l \cdots$(ii)
(i)，(ii) より，l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PA，PO に垂直であるから，$l \perp$ 平面 AOP



◀ 直線 PA，PO は点 P で交わる．

よって，OA は平面 AOP 上にあるから，$OA \perp l$ ■

(2) $PO \perp \alpha$ より，$PO \perp l \cdots$(i)
仮定より，$OA \perp l \cdots$(ii)
(i)，(ii) より，l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，OA に垂直であるから，$l \perp$ 平面 AOP



◀ 直線 PO，OA は点 O で交わる．

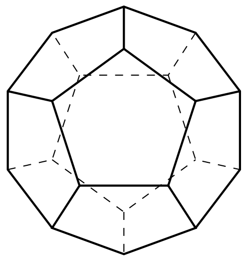
よって，PA は平面 AOP 上にあるから，$PA \perp l$ ■

解答 3.3

解答 A3.3.3 ★★★ 問題 p.125

問題文

正二十面体において，各辺の中点を通る平面ですべてのかどを切り取ったときにできる多面体の面の数 f，辺の数 e，頂点の数 v をそれぞれ求めよ．



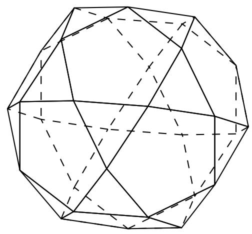
正十二面体は，各面が正五角形であり，1 つの頂点に集まる面の数は 3 個である．
したがって，正十二面体の辺の数は $5 \times 12 \div 2 = 30$
頂点の数は，$5 \times 12 \div 3 = 20 \cdots$ (i)
ここで，正二十面体の 1 つのかどを切り取ると，新しい面として正三角形の面が 1 つできる．
(i) より，新しく増える面として正三角形が 20 個できる．
ゆえに，面の数は，$f = 12 + 20 = \mathbf{32}$
辺の数は，正三角形が 20 個あるから，

$$e = 3 \times 20 = \mathbf{60}$$

頂点の数は，オイラーの（多面体）定理から，$v = 60 - 32 + 2 = \mathbf{30}$

◀ 先に，正十二面体の辺の数と頂点の数を求める．

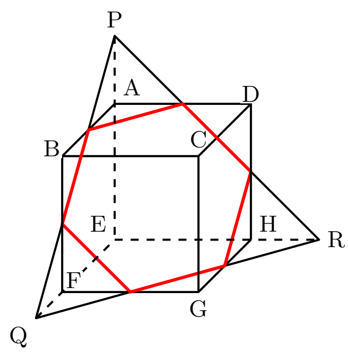
◀ なお，正二十面体の各辺の中点でかどを切り取ったときにできる多面体と，同じ多面体となる．



解答 A3.3.4 ★★★ 問題 p.126

問題文

右の図のような三角錐 P − EQR と，1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD − EFGH における共通部分の立体の体積を求めよ．ただし，AP，FQ，HR の長さを 1 とする．



求める立体は，三角錐 P − EQR から立方体に重なっていない部分の 3 つの三角錐の体積を除いたものである．
三角錐 P − EQR の体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{EQR} \cdot \mathrm{EP} = \frac{1}{3} \times \left\{\frac{1}{2} \times (2+1) \times (2+1)\right\} \times (2+1) = \frac{9}{2}$$

三角錐 P − EQR において，立方体に重なっていない部分の 3 つの三角錐の体積は，

$$\mathrm{AP} : \mathrm{EP} = \mathrm{FQ} : \mathrm{EQ} = \mathrm{HR} : \mathrm{ER} = 1 : 3$$

より，それぞれ $\frac{1}{27}V$ である．
よって，求める体積は，$V - 3 \times \frac{1}{27}V = \frac{8}{9}V = \mathbf{4}$

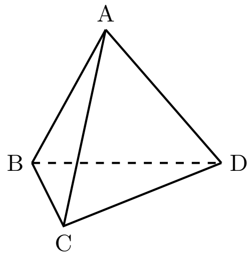
◀ 3 つの三角錐は，三角錐 P − EQR と相似である．

◀ 相似比が 1 : 3 であるから，体積比は $1^3 : 3^3$ となることを利用する．

解答（節末）A3.3.1 ★★　節末 p.127

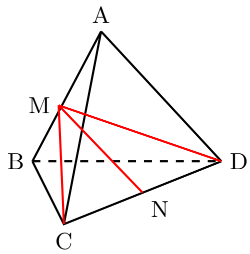
問題文

正四面体 ABCD において，向かい合う 2 辺 AB と CD は垂直であることを示せ．



辺 AB と辺 CD の中点をそれぞれ M, N とすると, △NAB は NA = NB の二等辺三角形であるから,

$$\mathrm{MN} \perp \mathrm{AB} \cdots \text{(i)}$$



また，△CAB は CA = CB の二等辺三角形であるから,

$$\mathrm{CM} \perp \mathrm{AB} \cdots \text{(ii)}$$

したがって，(i)，(ii) より，AB は直線 MN，CM を含む平面 MCD に垂直である．AB は平面 MCD 上にある直線 CD に垂直である，すなわち，向かい合う 2 辺 AB と CD は垂直である． ■

◀ 直線 h が平面 α 上の交わる 2 直線に垂直 $\Longrightarrow$ 直線 $h \perp$ 平面 α

解答（節末）A3.3.2 ★★　節末 p.127

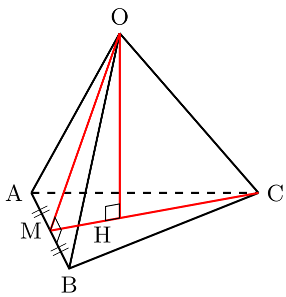
問題文

正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から線分 CM に下ろした垂線を OH とする．このとき，OH ⊥ 平面 ABC であることを示せ．

辺 CM は正三角形である △CAB の中線であるから,

◀ 点 M は辺 AB の中点である．

$$\mathrm{CM} \perp \mathrm{AB} \cdots \text{(i)}$$



辺 OM は正三角形である △OAB の中線であるから,

◀ 点 M は辺 AB の中点である．

$$\mathrm{OM} \perp \mathrm{AB} \cdots \text{(ii)}$$

また，与えられた条件より，OH ⊥ CM であるから,

$$\mathrm{OH} \perp \mathrm{HM} \cdots \text{(iii)}$$

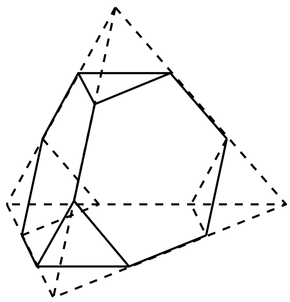
(i)～(iii) より，三垂線の定理を用いて，OH ⊥ 平面ABC である． ■

◀ PA ⊥ l，OA ⊥ l，PO ⊥ OA $\Longrightarrow$ PO ⊥ α

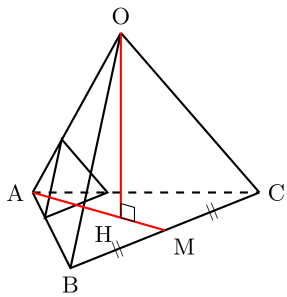
解答（節末）A3.3.3 ★★★ 節末 p.127

問題文

1 辺の長さが 3 の正四面体がある．この正四面体を右の図のように，1 つの頂点に集まる 3 つの辺においてそれぞれ 3 等分した点のうち，頂点に近い方の点を結んでできる正三角形を含む平面で切り，頂点を含む正四面体を取り除く．すべての頂点において同様に正四面体を取り除いたとき，残った立体の体積 V を求めよ．



右の図のように，正四面体 OABC の頂点 O から底面 ABC に垂線を下ろすと，その足 H は，正三角形 ABC の重心と一致する．
辺 BC の中点を M とすると，



$$\mathrm{AH} = \frac{2}{3}\mathrm{AM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB} = \sqrt{3}$$

したがって，

$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

正四面体 OABC の体積を V_0 とすると，

$$V_0 = \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

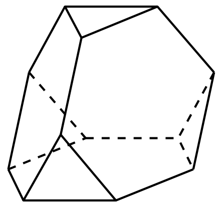
また，取り除かれる正四面体の 1 辺の長さは 1 であるから，その体積を V_1 とすると，

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

取り除かれる正四面体の数は正四面体の頂点の数と同じであるから，4 個取り除かれる．
よって，残った立体の体積 V は，

$$V = V_0 - 4V_1 = \frac{9\sqrt{2}}{4} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{12} = \boldsymbol{\frac{23\sqrt{2}}{12}}$$

◀ なお，すべての頂点で正四面体を取り除いたときにできる残った多面体を切頂四面体ということがある．



解答 3.3

One math

解答（節末）A3.3.4 ★★★ 節末 p.127

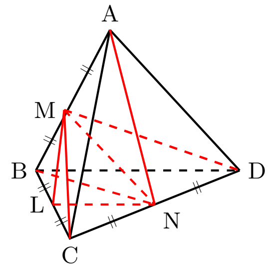
問題文

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD の 2 辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．2 直線 CM，DM のなす角を α，2 直線 MN，AC のなす角を β とするとき，$\cos\alpha$ と β を求めよ．

CM と DM のなす角 α は $\angle$CMD に等しい．

◀ 2 つの面 ABC，ABD のなす角でもある．

ここで，$\angle\mathrm{AMD} = 90^\circ$ より，



$$\mathrm{CM} = \mathrm{DM} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

◀ 三平方の定理を用いる．

したがって，$\triangle$CMD において余弦定理を用いると，

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{CM}^2 + \mathrm{DM}^2 - \mathrm{CD}^2}{2\cdot\mathrm{CM}\cdot\mathrm{DM}} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

また，辺 BC の中点を L とすると，AC$/\!/$ML であることから，MN と AC のなす角 β は $\angle$LMN に等しい．

ここで，$\angle\mathrm{CNM} = 90^\circ$ より，

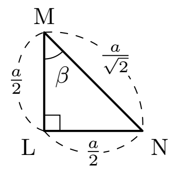
$$\mathrm{MN} = \sqrt{\mathrm{CM}^2 - \mathrm{CN}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

◀ 三平方の定理を用いる．

$\mathrm{ML} = \mathrm{LN} = \frac{a}{2}$ であるから，$\triangle$LNM において余弦定理を用いると，

◀ $\triangle$LNM は，$\angle\mathrm{L} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である．

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{ML}^2 + \mathrm{MN}^2 - \mathrm{LN}^2}{2\cdot\mathrm{ML}\cdot\mathrm{MN}} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



よって，$\beta = \mathbf{45^\circ}$

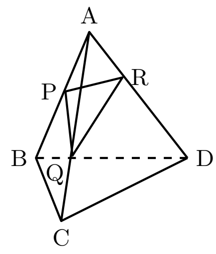
解答 3.3

章末問題 3（解答）

解答（章末）A3.1 ★★ 章末 p.128

問題文

右の図のような四面体 ABCD において, AP : PB = $a_1 : b_1$, AQ : QC = $a_2 : b_2$, AR : RD = $a_3 : b_3$ とする. このとき, 四面体 APQR と四面体 ABCD の体積比を求めよ.



$$\triangle AQR : \triangle ACD = AQ \cdot AR : AC \cdot AD = a_2 a_3 : (a_2+b_2)(a_3+b_3) \cdots \text{(i)}$$

◀ $\triangle AQR = \frac{1}{2} AQ \cdot AR \sin\angle CAD$, $\triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin\angle CAD$

B から面 ACD に下ろした垂線の足を M, P から面 ACD に下ろした垂線の足を N とすると,

$$PN : BM = AP : AB = a_1 : (a_1+b_1) \cdots \text{(ii)}$$

◀ AB と面 ACD のなす角を α とすると,
$PN : BM$
$= AP\sin\alpha : AB\sin\alpha$
$= AP : AB$

よって, (i), (ii) より, 求める体積比は,

$$a_2 a_3 \cdot a_1 : (a_2+b_2)(a_3+b_3)\cdot(a_1+b_1) = \boldsymbol{a_1 a_2 a_3 : (a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}$$

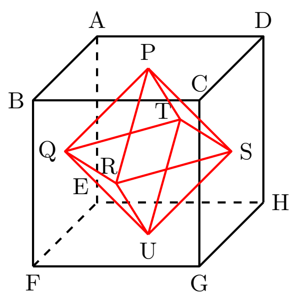
解答（章末）A3.2 ★★ 章末 p.128

問題文

1 辺の長さが 2 の立方体がある. この立方体の各面の正方形における, 対角線の交点を頂点とする正八面体について, 次の問いに答えよ.

(1) 正八面体の 1 辺の長さを求めよ. (2) 正八面体の体積を求めよ.

右の図のように, 立方体を ABCD − EFGH とし, 各面の対角線の交点を頂点とする正八面体を PQRSTU とする.



(1) 辺 AB, BC の中点をそれぞれ M, N とすると,

$$QR = MN = \sqrt{1^2+1^2} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

◀ 三平方の定理を用いる.

(2) PU は平面 QRST に垂直であり, 四角錐 P − QRST と四角錐 U − QRST は合同であるから, 求める正八面体の体積は,

$$\begin{aligned} 2 \times (\text{四角錐 P}-\text{QRST}) &= 2 \cdot \left\{\frac{1}{3} \cdot (\text{四角形QRST}) \cdot \frac{1}{2}\text{PU}\right\} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 1 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

◀ 四角形 QRST は正方形である. また, PU = 2

解答（章末）A3.3 ★★★★ 章末 p.128

問題文

各面が正三角形である正多面体は何種類あるか．すべて挙げよ．

正 m 面体（m は 4 以上の自然数）の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とする．
正 m 面体の 1 つの頂点に集まる角の和は $360°$ より小さく，1 つの頂点には少なくとも 3 つ以上の面が集まる．
したがって，1 つの頂点に集まる面の数を n （n は 3 以上の自然数）とすると，

$$60° \times n < 360°$$

◀ 正三角形の 1 つの角は $60°$ であるから，$60° \times n$

ゆえに，$n < 6$ であるから，$n = 3,\ 4,\ 5$ の場合について考える．
(i) $n = 3$ のとき
1 つの頂点に 3 つの面が集まるから，

$$v = \frac{3 \times m}{3} = m, \quad e = \frac{3 \times m}{2} = \frac{3}{2}m, \quad f = m$$

◀ $v = \dfrac{\text{すべての面の頂点の数の和}}{\text{1 つの頂点に集まる面の数}}$，$e = \dfrac{\text{すべての面の辺の数の和}}{\text{1 つの辺に共有される面の数}}$

これらをオイラーの定理に代入すると，

$$m - \frac{3}{2}m + m = 2$$

したがって，$m = 4$ であるから，この正多面体は正四面体である．
(ii) $n = 4$ のとき
1 つの頂点に 4 つの面が集まるから，

$$v = \frac{3 \times m}{4} = \frac{3}{4}m, \quad e = \frac{3 \times m}{2} = \frac{3}{2}m, \quad f = m$$

これらをオイラーの定理に代入すると，

◀ オイラーの（多面体）定理 $v - e + f = 2$

$$\frac{3}{4}m - \frac{3}{2}m + m = 2m = 8$$

したがって，$m = 8$ であるから，この正多面体は正八面体である．
(iii) $n = 5$ のとき
1 つの頂点に 5 つの面が集まるから，

$$v = \frac{3 \times m}{5} = \frac{3}{5}m, \quad e = \frac{3 \times m}{2} = \frac{3}{2}m, \quad f = m$$

これらをオイラーの定理に代入すると，

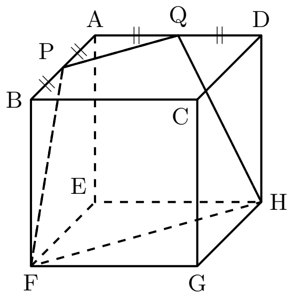
$$\frac{3}{5}m - \frac{3}{2}m + m = 2$$

したがって，$m = 20$ であるから，この正多面体は正二十面体である．
よって，(i)〜(iii) より，各面が正三角形である正多面体は，正四面体，正八面体，正二十面体の **3 種類**ある．

解答（章末）A3.4 ★★★ 章末 p.128

問題文

1 辺の長さが 8 の立方体 ABCD − EFGH において，辺 AB，AD の中点をそれぞれ P，Q とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 立体 PQA − EFH の体積を求めよ．
(2) 台形 PQHF の面積を求めよ．



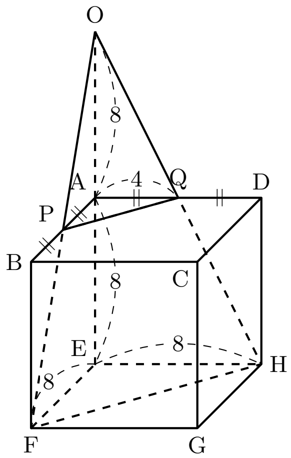
(1) 線分 FP,線分 EA,線分 HQ の延長の交点を O とすると,QA : HE = 4 : 8 = 1 : 2 であるから，OA : OE = 1 : 2

◀ △OAQ ∽ △OEH である．

したがって，三角錐 OPQA と三角錐 OFHE の体積比は，

$$1^3 : 2^3 = 1 : 8$$

◀ 相似比が $m : n$ のとき，体積比は $m^3 : n^3$ となる．



ここで，三角錐 OFHE の体積は,

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{FHE}\cdot\mathrm{OE} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\right)\cdot 16 = \frac{1}{3}\cdot 32\cdot 16 = \frac{512}{3}$$

よって，求める体積は,

$$\frac{512}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{512}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{3584}{24} = \boldsymbol{\frac{448}{3}}$$

◀ 三角錐 OPQA と三角錐 OFHE の体積比が 1 : 8 であることから，立体 PQA − EFH の体積は，三角錐 OFHE の体積の $\frac{7}{8}$ 倍である．

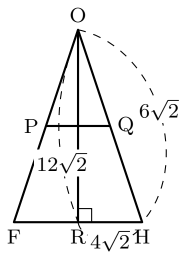
(2) O から FH に垂線 OR を下ろす．△OFH は二等辺三角形であるから，OR は FH の垂直二等分線である．

$\mathrm{FP} = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}$，$\mathrm{FH} = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}$ より，$\mathrm{FO} = 8\sqrt{5}$，$\mathrm{RH} = 4\sqrt{2}$

したがって,

$$\mathrm{OR} = \sqrt{(8\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2} = 12\sqrt{2}$$

◀ 三平方の定理を用いる．



ゆえに,

$$\triangle\mathrm{OFH} = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 192 = 96$$

ここで，△OPQ ∽ △OFH であり，OP : OF = 1 : 2 より，△OPQ と △OFH の面積比は,

$$1^2 : 2^2 = 1 : 4$$

◀ 相似比が $m : n$ のとき，面積比は $m^2 : n^2$ である．

よって，台形 PQHF の面積は，$96\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = 96\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{72}$

数学と人間の活動（解答）

約数と倍数（解答）

解答 A4.1.1 ★★ 問題 p.132

問題文

一の位と十の位の数字がわからない 5 桁の自然数 317□□ に，それぞれ数を入れると，9 の倍数となる．このとき，5 桁の自然数が最小となるものを求めよ．

□ に入る十の位の数を a (a は整数，$0 \leqq a \leqq 9$), 一の位に入る数を b (b は整数，$0 \leqq b \leqq 9$) とする．
各桁の数字の和は，$3+1+7+a+b=a+b+11$ である．これが 9 の倍数となるとき，317□□ は 9 の倍数となる．
$0 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$ より，$0 \leqq a+b \leqq 18$ であるから，$a+b+11$ が 9 の倍数となるのは，$a+b=7$ または $a+b=16$ のときである．
自然数が最小となるものを求めるから，$a+b=7$
これを満たす a，b のうち，a が最小となるものを求めればよい．
したがって，$a=0$，$b=7$
よって，求める自然数は，**31707** である．

◀ $11 \leqq a+b+11 \leqq 29$ において，$a+b+11$ が 9 の倍数となるのは，$a+b+11=9 \cdot 2$，$a+b+11=9 \cdot 3$ のとき，すなわち，$a+b=7$ または $a+b=16$ のときである．

解答 A4.1.2 ★★ 問題 p.133

問題文

(1) n を自然数とする．$\sqrt{27000n}$ が自然数となるような最小の n を求めよ．
(2) $\frac{n}{6}$，$\frac{n^2}{196}$，$\frac{n^3}{1323}$ がすべて自然数となるような最小の自然数 n を求めよ．

(1) $\sqrt{27000n}$ が自然数となるのは，27000 がある自然数の 2 乗になるとき，つまり，27000 を素因数分解したときの素因数の指数がすべて偶数となるときである．
27000 を素因数分解すると，$27000=2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$
したがって，求める自然数 n は，$n=2 \cdot 3 \cdot 5$
よって，$n=2 \cdot 3 \cdot 5=\mathbf{30}$

(2) $\frac{n}{6}$ が自然数となるのは，n が 6 の倍数のときである．
したがって，$n=6k$（k は自然数）とおくと，$n=2 \cdot 3 \cdot k$
このとき，

$$\frac{n^2}{196}=\frac{(2 \cdot 3 \cdot k)^2}{2^2 \cdot 7^2}=\frac{3^2 \cdot k^2}{7^2}$$

これが自然数となるのは，k が 7 の倍数のときである．
ゆえに，$k=7l$（l は自然数）とおくと，$n=2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot l \cdots$ (i)
このとき，

$$\frac{n^3}{1323}=\frac{(2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot l)^3}{3^3 \cdot 7^2}=2^3 \cdot 7 \cdot l^3$$

よって，これが自然数となるもので最小のものは，$l=1$ のときであるから，(i) に代入すると，

$$n=2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1=\mathbf{42}$$

◀ 分母が 6 であることから，$n=6k$ とおく．

◀ 分母が 2^2 であることから，$k=7l$ とおく．

◀ l が最小のとき，n も最小となる．

解答 A4.1.3 ★★ 問題 p.134

問題文

(1) 360 の正の約数の個数と，正の約数の総和を求めよ．
(2) 18 の倍数のうち，正の約数の個数が 9 個である自然数 n をすべて求めよ．
(3) 400 以下の自然数のうち，正の約数が 15 個である自然数の個数をすべて求めよ．

(1) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ であるから，正の約数の個数は，

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24}\ \textbf{(個)}$$

また，正の約数の総和は，

$$\left(1+2+2^2+2^3\right)\left(1+3+3^2\right)(1+5) = 15 \cdot 13 \cdot 6 = \mathbf{1170}$$

(2) 9 を素因数分解すると，$9 = 3^2$
したがって，正の約数の個数が 9 個である自然数 n を素因数分解すると，p^8，p^2q^2 (p，q は異なる素数) のいずれかの形で表される．
n は 18 の倍数であり，$18 = 2 \cdot 3^2$ であるから，n は p^2q^2 の形で表される．
ゆえに，求める自然数 n は，$n = 2^2 \cdot 3^2$
よって，$n = \mathbf{36}$

◀ $9 = 3^2 = 3 \cdot 3$ より，$p^{9-1}q^{1-1}$ または $p^{3-1}q^{3-1}$

◀ p^8 の場合は起こらない．

(3) 15 を素因数分解すると，$15 = 3 \cdot 5$
したがって，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を素因数分解すると，p^{14}，p^4q^2 (p，q は異なる素数) のいずれかの形で表される．

(i) 自然数 n が p^{14} の形で表されるとき
2^{14} は 400 以下ではないので，該当する自然数はない．
(ii) 自然数 n が p^4q^2 の形で表されるとき

$$2^4 \cdot 3^2,\ 2^4 \cdot 5^2,\ 3^4 \cdot 2^2$$

が条件を満たすから，3 個

よって，(i)，(ii) より，**3 個**

◀ p^{14} の正の約数の個数は，$14+1 = 15$ (個) であり，p^4q^2 の正の約数の個数は，$(4+1)(2+1) = 15$ (個) である．

◀ 2^{14} は $2^{14} = 16384$ であるから，条件を満たさない．

解答 4.1

One math

解答 A4.1.4 ★★ 問題 p.135

問題文

(1) 15! が 2^k で割り切れるとき，自然数 k の最大値を求めよ．

(2) 50! は，末尾には 0 が何個連続して並ぶ整数であるか答えよ．

(1) 1 から 15 までの自然数について，

$$2 \text{ の倍数は } 7 \text{ 個，} 2^2 \text{ の倍数は } 3 \text{ 個，} 2^3 \text{ の倍数は } 1 \text{ 個}$$

したがって，15! に含まれる因数 2 の個数は，$7+3+1=11$ (個)
よって，求める自然数 k の最大値は，$k=\mathbf{11}$
(2) 求める 0 の個数は 50! に含まれる因数 10 の個数に等しい．また，$10=2\cdot5$ であり，50!に含まれる因数 5 の個数が因数 2 の個数より少ないので，因数 10 の個数は因数 5 の個数に等しい．
1 から 50 までの自然数について，

◀ 1 から 50 までの自然数について，2 の倍数は 25 個，5 の倍数は 10 個である．

$$5 \text{ の倍数は } 10 \text{ 個，} 5^2 \text{ の倍数は } 2 \text{ 個}$$

◀ 5，25 の倍数の個数をそれぞれ求める．

$50=5\times10$，$50=25\times2$

したがって，50! に含まれる因数 5 の個数は，$10+2=12$ (個)
よって，求める 0 の個数は，**12 個**

解答 A4.1.5 ★ 問題 p.136

問題文

(1) 次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めよ．

(i) 144，192　　(ii) 210，360，540

(2) n を正の整数とする．n と 20 の最小公倍数が 80 となるような n をすべて求めよ．

(1) (i) 与えられた 2 つの数を素因数分解すると，

◀
$$\begin{array}{r|r} 2 & 144 \\ 2 & 72 \\ 2 & 36 \\ 2 & 18 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 192 \\ 2 & 96 \\ 2 & 48 \\ 2 & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ & 3 \end{array}$$

$$144=2^4\cdot3^2,\quad 192=2^6\cdot3$$

最大公約数は，$2^4\cdot3=\mathbf{48}$
最小公倍数は，$2^6\cdot3^2=\mathbf{576}$

(ii) 与えられた 3 つの数を素因数分解すると，

$$210=2\cdot3\cdot5\cdot7,\quad 360=2^3\cdot3^2\cdot5,\quad 540=2^2\cdot3^3\cdot5$$

最大公約数は，$2\cdot3\cdot5=\mathbf{30}$
最小公倍数は，$2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7=\mathbf{7560}$

◀ 共通する素因数は，2，3，5 であり，すべての素因数は，2，3，5，7 であると考える．それらの指数のうち，それぞれ最小のもの，最大のものを掛け合わせる．

(2) 20，80 をそれぞれ素因数分解すると，

$$20=2^2\cdot5,\quad 80=2^4\cdot5$$

したがって，20 との最小公倍数が 80 である正の整数は，$2^4\cdot5^a$ $(a=0,\ 1)$
ゆえに，求める正の整数 n は，

◀ n は複数の値が考えられるので注意すること．

$$n=2^4\cdot5^0,\quad 2^4\cdot5^1$$

よって，$n=\mathbf{16,\ 80}$

解答 4.1

One math

解答 A4.1.6 ★★ 問題 p.137

問題文

次の条件を満たす 2 つの自然数 a, b の組をすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

(1) 和が 180，最大公約数が 15　　(2) 積が 400，最小公倍数が 80

(1) 最大公約数が 15 であるから，2 つの自然数 a, b は $a=15a'$, $b=15b'$ とおける．ただし，a', b' は互いに素な自然数であり，$a<b$ より，$a'<b'$

◀ $a=ga'$, $b=gb'$

和が 180 であるから，$15a'+15b'=180$

したがって，$a'+b'=12$

これを満たす，互いに素な自然数 a', b' の組は，

◀「a, b が互いに素 $\Longleftrightarrow$ a, b の最大公約数が 1」が成り立つ．これより，例えば，$(a',\ b')=(2,\ 10)$ は，a' と b' が互いに素ではないので不適である（最大公約数が 1 ではない）.

$$(a',\ b')=(1,\ 11),\ (5,\ 7)$$

よって，$(a,\ b)=\boldsymbol{(15,\ 165),\ (75,\ 105)}$

(2) 最大公約数を g とすると，積が 400，最小公倍数が 80 であるから，$400=g\cdot 80$

したがって，$g=5$ であるから，$a=5a'$, $b=5b'$ とおける．ただし，a', b' は互いに素な自然数であり，$a<b$ より，$a'<b'$

◀ $a=ga'$, $b=gb'$

$80=5a'b'$ が成り立つから，$a'b'=16$

◀ $l=a'b'g$

これを満たす，互いに素な自然数 a', b' の組は，

$$(a',\ b')=(1,\ 16)$$

よって，$(a,\ b)=\boldsymbol{(5,\ 80)}$

解答 A4.1.7 ★★ 問題 p.138

問題文

n を自然数とする．$n+3$ が 6 の倍数であり，$n+1$ が 8 の倍数であるとき，$n+9$ が 24 の倍数であることを証明せよ．

$n+3$, $n+1$ は，それぞれ $n+3=6k$, $n+1=8l$ (k, l は自然数) とおける．

$n+9$ を k, l を用いて表すと，

$$n+9=(n+3)+6=6k+6=6(k+1)\cdots\text{(i)},$$

$$n+9=(n+1)+8=8l+8=8(l+1)$$

したがって，$6(k+1)=8(l+1)$

すなわち，$3(k+1)=4(l+1)$ であり，3 と 4 は互いに素であるから，$k+1$ は 4 の倍数である．

ゆえに，$k+1=4m$ (m は自然数) と表せる．

(i) より，$n+9=6(k+1)=6\cdot 4m=24m$

よって，$n+9$ は 24 の倍数である．■

◀ m は自然数であるから，$24m$ は 24 の倍数である．

解答 A4.1.8 ★★★ 問題 p.139

問題文

a，b を自然数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) $a+b$ と ab が互いに素であるとき，a と b も互いに素であることを証明せよ．
(2) a と b が互いに素であるとき，a^2 と b^2 も互いに素であることを証明せよ．

(1) a と b が互いに素ではないと仮定すると，a，b はある素数 p を約数にもち，$a=pm\cdots$(i)，$b=pn\cdots$(ii) とおける．ただし，m と n は互いに素な自然数とする．

◀ 背理法を用いる．

(i)，(ii) の辺々を足し合わせると，$a+b=pm+pn=p(m+n)$
(i)，(ii) の辺々を掛け合わせると，$ab=p^2mn$
したがって，p は $a+b$ と ab は公約数となり，これは $a+b$ と ab が互いに素であることに矛盾する．
よって，a と b は互いに素である． ■

(2) a^2 と b^2 が互いに素ではないと仮定すると，a^2 と b^2 は共通の素因数 p をもつ．
a^2 は p の倍数であるから，a は p の倍数であり，b^2 は p の倍数であるから，b も p の倍数である．

◀ 背理法を用いる．

◀ n^2 が k の倍数ならば，n も k の倍数である．

これは a と b が互いに素であることに矛盾する．
よって，a^2 と b^2 は互いに素である． ■

解答 A4.1.9 ★★★ 問題 p.140

問題文

n 以下の自然数で，n と互いに素である自然数の個数を $f(n)$ とするとき，次の値を求めよ．ただし，p，q，r は異なる素数とする．

(1) $f(75)$　　(2) $f(p^2q)$　　(3) $f(2^m)$

(1) $75=3\cdot5^2$ であるから，75 と互いに素ではない自然数は，3 または 5 の倍数である．
75 以下の自然数について，3 の倍数は 25 個，5 の倍数は 15 個，15 の倍数は 5 個
したがって，75 以下の自然数のうち 3 または 5 の倍数は，$25+15-5=35$ (個)
よって，$f(75)=75-35=\mathbf{40}$

◀ $n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(2) p，q はともに素数であるから，p^2q と互いに素ではない自然数は，p または q の倍数である．
p^2q 以下の自然数について，

$$p \text{ の倍数は，} p^2q=pq\cdot p \text{ より，} pq \text{ 個，}$$
$$q \text{ の倍数は，} p^2q=p^2\cdot q \text{ より，} p^2 \text{ 個，}$$
$$pq \text{ の倍数は，} p^2q=p\cdot pq \text{ より，} p \text{ 個}$$

◀ $1\cdot p$，$2\cdot p$，$\ldots$，$(pq-1)\cdot p$，$pq\cdot p$ の pq 個

したがって，p^2q 以下の自然数のうち p または q の倍数は，$pq+p^2-p$ 個
よって，$f(p^2q)=p^2q-(pq+p^2-p)=\boldsymbol{p^2q-p^2-pq+p}$

◀ $n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(3) 2^m 以下の自然数について，2 の倍数は，$2^m=2\cdot2^{m-1}$ より，2^{m-1} 個
よって，$f(2^m)=\boldsymbol{2^m-2^{m-1}}$

◀ $1\cdot2$，$2\cdot2$，$\ldots$，$2^{m-1}\cdot2$ の 2^{m-1} 個

解答 4.1

One math

解答 A4.1.10 ★ 問題 p.141

問題文

a，b を整数とする．a を 7 で割ると 4 余り，b を 7 で割ると 5 余る．このとき，次の数を 7 で割った余りを求めよ．

(1) $a+2b$　(2) ab　(3) a^4

$a=7k+4,\ b=7l+5$ ($k,\ l$ は整数) と表される．

(1)

$$\begin{aligned} a+2b &= 7k+4+2(7l+5) \\ &= 7k+4+14l+10 \\ &= 7(k+2l+2) \end{aligned}$$

よって，求める余りは，**0**

(2)

$$\begin{aligned} ab &= (7k+4)(7l+5) \\ &= 49kl+35k+28l+20 \\ &= 7(7kl+5k+4l+2)+6 \end{aligned}$$

よって，求める余りは，**6**

(3)

$$a^2=(7k+4)^2=49k^2+56k+16=7(7k^2+8k+2)+2$$

◀ a^2 を 7 で割った余りを考えるとよい．

したがって，$a^2=7m+2$ (m は整数) と表されるから，

$$a^4=(a^2)^2=(7m+2)^2=49m^2+28m+4=7(7m^2+4m)+4$$

よって，求める余りは，**4**

解答 4.1

One math

解答 A4.1.11 ★★ 問題 p.142

問題文

n を整数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) n^2-5n+4 は偶数であることを証明せよ．
(2) n^3+2n+1 を 3 で割った余りが 1 であることを証明せよ．

(1) すべての整数 n は，$n=2k$，$n=2k+1$ (k は整数) のいずれかの形で表される．

(i) $n=2k$ のとき

$$n^2-5n+4=(2k)^2-5\cdot 2k+4=4k^2-10k+4=2(2k^2-5k+2)$$

◀ 偶数である（2 で割り切れる）．

(ii) $n=2k+1$ のとき

$$n^2-5n+4=(2k+1)^2-5(2k+1)+4=4k^2-6k=2(2k^2-3k)$$

◀ 偶数である（2 で割り切れる）．

よって，(i)，(ii) より，n^2-5n+4 は偶数である． ■

(2) すべての整数 n は，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ (k は整数) のいずれかの形で表される．

(i) $n=3k$ のとき

$$\begin{aligned}n^3+2n+1&=(3k)^3+2\cdot 3k+1\\ &27k^3+6k+1\\ &=3(9k^3+2k)+1\end{aligned}$$

(ii) $n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}n^3+2n+1&=(3k+1)^3+2(3k+1)+1\\ &=27k^3+27k^2+15k+4\\ &=3(9k^3+9k^2+5k+1)+1\end{aligned}$$

(iii) $n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}n^3+2n+1&=(3k+2)^3+2(3k+2)+1\\ &=27k^3+54k^2+42k+13\\ &=3(9k^3+18k^2+14k+4)+1\end{aligned}$$

よって，(i)〜(iii) より，n^3+2n+1 を 3 で割ると余りは 1 である． ■

解答 A4.1.12 ★★★ 問題 p.143

問題文

(1) n を整数とする．このとき，n^2 を 3 で割った余りが 0 または 1 であることを証明せよ．
(2) a，b，c を整数とする．$a^2+b^2=c^2$ のとき，a，b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを証明せよ．

(1) すべての整数 n は，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ (k は整数) のいずれかの形で表される．

(i) $n=3k$ のとき

$$n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$$

となるから，n^2 を 3 で割った余りは 0 である．
(ii) $n=3k+1$ のとき

$$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$

となるから，n^2 を 3 で割った余りは 1 である．
(iii) $n=3k+2$ のとき

$$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$$

となるから，n^2 を 3 で割った余りは 1 である．

よって，(i)〜(iii) より，n^2 を 3 で割った余りは，0 または 1 である． ■

(2) a と b がともに 3 の倍数ではないと仮定すると，(1) より，a^2 と b^2 を 3 で割った余りはそれぞれ 1 である．
したがって，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2 である．
一方，(1) より，c^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 であり，$a^2+b^2=c^2$ の両辺を 3 で割った余りが一致しないので，矛盾する．
よって，a，b の少なくとも一方は 3 の倍数である． ■

◀ 背理法を用いる．

◀ m，n を整数とすると，$a^2=3m+1$，$b^2=3n+1$ より，

$$a^2+b^2=3(m+n)+2$$

解答 A4.1.13 ★★★ 問題 p.144

問題文

(1) 2^{50} を 7 で割ったときの余りを求めよ．
(2) 1000^{100} を 14 で割ったときの余りを求めよ．
(3) 456^{456} の一の位の数を求めよ．

(1) $2^1 \equiv 2 \pmod 7$，$2^2 \equiv 4 \pmod 7$，$2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$ より，

$$2^{50} \equiv \left(2^3\right)^{16} \cdot 2^2 \equiv 1^{16} \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7$$

◀ $2^3 \equiv 1$ より，$(2^3)^n \equiv 1 \pmod 7$
◀ $50 = 3 \cdot 16 + 2$

よって，2^{50} を 7 で割ったときの余りは，**4**

(2) $1000 \equiv 6 \pmod{14}$ より，$1000^{100} \equiv 6^{100} \pmod{14}$
ここで，$6^2 \equiv 36 \equiv 8 \pmod{14}$，$6^3 \equiv 8 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{14}$，$6^4 \equiv 6^2 \equiv 8 \pmod{14}$ より，k を自然数とすると，

$$6^{2k} \equiv 8 \pmod{14}$$

◀ $6^5 \equiv 6 \pmod{14}$，$6^6 \equiv 8 \pmod{14}, \ldots$ と余りは 6 と 8 が繰り返される．

したがって，$1000^{100} \equiv 6^{100} \equiv 8 \pmod{14}$
よって，1000^{100} を 14 で割ったときの余りは，**8**

◀ 6^{2k} において，$k = 50$ のとき，$6^{2\cdot 50} = 6^{100}$

(3) $456 \equiv 6 \pmod{10}$，$456^2 \equiv 6^2 \equiv 6 \pmod{10}$，$456^3 \equiv 6^3 \equiv 6 \pmod{10}$ より，k を自然数とすると，

$$456^k \equiv 6 \pmod{10}$$

よって，456^{456} の一の位の数は，**6**

解答 A4.1.14 ★★★ 問題 p.145

問題文

(1) n を整数とする．n^2 を 7 で割った余りをすべて求めよ．
(2) n を自然数とする．合同式を用いて，$7^n + 2 \cdot 5^{2n}$ は 3 の倍数であることを証明せよ．

(1) すべての整数 n について

$$n \equiv 0 \pmod 7,\quad n \equiv 1 \pmod 7,\quad n \equiv 2 \pmod 7,\quad n \equiv 3 \pmod 7,$$
$$n \equiv 4 \pmod 7,\quad n \equiv 5 \pmod 7,\quad n \equiv 6 \pmod 7$$

のいずれかである．

(i) $n \equiv 0 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 7$
(ii) $n \equiv 1 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 7$
(iii) $n \equiv 2 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 7$
(iv) $n \equiv 3 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$
(v) $n \equiv 4 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$
(vi) $n \equiv 5 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv 4 \pmod 7$
(vii) $n \equiv 6 \pmod 7$ のとき，$n^2 \equiv 6^2 \equiv 36 \equiv 1 \pmod 7$

よって，(i)〜(vii) より，n^2 を 7 で割った余りは **0，1，2，4** のいずれかである．

(2) $7 = 6 + 1$ より，$7 \equiv 1 \pmod 3$ であるから，

$$7^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 3$$

◀ $a \equiv b \pmod m$ のとき，
$$a^n \equiv b^n \pmod m$$

$5 = 3 + 2$ より，$5 \equiv 2 \pmod 3$ であるから，

$$5^{2n} \equiv (2)^{2n} \equiv 4^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 3$$

したがって，

$$7^n + 2 \cdot 5^{2n} \equiv 1 + 2 \cdot 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$$

◀ $a \equiv b \pmod m$，$c \equiv d \pmod m$ のとき，
$$a + c \equiv b + d \pmod m$$

よって，$7^n + 2 \cdot 5^{2n}$ は 3 の倍数である．■

解答（節末）A4.1.1 ★★ 節末 p.146

問題文

正の約数の個数が 12 個である自然数のうち，最も小さい数を求めよ．

正の約数の個数が 12 個である自然数は，次の 4 つの場合がある．

(i) 素数 p を用いて p^{11} と表されるとき

このような自然数のうち，最も小さい数は，$2^{11} = 2048$

(ii) 2 つの異なる素数 p，q を用いて p^5q と表されるとき

このような自然数のうち，最も小さい数は，$2^5 \cdot 3 = 96$

(iii) 2 つの異なる素数 p，q を用いて p^3q^2 と表されるとき

このような自然数のうち，最も小さい数は，$2^3 \cdot 3^2 = 72$

(iv) 3 つの異なる素数 p，q，r を用いて p^2qr と表されるとき

このような自然数のうち，最も小さい数は，$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

(i)〜(iv) より，求める自然数は，**60**

◀ p^{11} の正の約数の個数は，$11 + 1 = 12$ (個)

◀ p^5q の正の約数の個数は，$(5+1)(1+1) = 12$ (個)

◀ p^3q^2 の正の約数の個数は，$(3+1)(2+1) = 12$ (個)

◀ p^2qr の正の約数の個数は，$(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ (個)

解答（節末）A4.1.2 ★★ 節末 p.146

問題文

$n!$ について，下 4 桁に 0 が 4 個連続して並ぶような最小の自然数 n を求めよ．

$n!$ が因数 10 を 4 個含むとき，下 4 桁に 0 が 4 個並ぶ．また，$10 = 2 \cdot 5$ であり，$n!$ に含まれる因数 5 の個数が因数 2 の個数より少ないので，因数 10 の個数は因数 5 の個数に等しい．

よって，$n!$ に 5 の倍数を 4 個含むような自然数 n のうち，最小のものが求める数となるから，

$$5 \times 4 = 20$$

より，求める自然数 n は，**20**

◀ 末尾に並ぶ 0 の個数は，因数 10 の個数と一致する．

◀ $n!$ は因数 5 を 4 個含む数となる．

◀ $20 < 5^2$ であるから，5^2 の倍数を考える必要はない．

解答（節末）A4.1.3 ★★ 節末 p.146

問題文

分数 $\frac{144}{35}$，$\frac{234}{55}$ のいずれに掛けても積が自然数となるような分数のうち，最小のものを求めよ．

与えられた条件を満たす分数を $\frac{a}{b}$ (a，b は互いに素な自然数) とすると，a は 35 と 55 の公倍数，b は 144 と 234 の公約数である．

したがって，$\frac{a}{b}$ が最小となるには，35 と 55 の最小公倍数を a，144 と 234 の最大公約数を b とすればよい．

よって，$35 = 5 \cdot 7$，$55 = 5 \cdot 11$，$144 = 2^4 \cdot 3^2$，$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$ であるから，

$$a = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385, \quad b = 2 \cdot 3^2 = 18$$

とすると，求める最小値は，$\boldsymbol{\frac{385}{18}}$

◀ $\frac{144}{35} \times \frac{a}{b}$ が自然数となるとき，a は 35 の倍数であり，b は 144 の約数である．また，$\frac{234}{55} \times \frac{a}{b}$ が自然数となるとき，a は 55 の倍数であり，b は 234 の約数である．

解答 4.1

解答（節末）A4.1.4 ★★★ 節末 p.146

問題文

すべての自然数 n について，n と $n+1$ は互いに素であることを証明せよ．

n と $n+1$ が互いに素ではないと仮定すると，n と $n+1$ は共通の素数 p を約数にもち，

$$n = ap, \quad n+1 = bp$$

とおける．ただし，a，b は自然数である．
このとき，

$$(n+1) - n = bp - ap$$

すなわち，$1 = (b-a)p$
ここで，$b-a$ は整数であるから，p は 1 の約数である．
これは p が素数であることに矛盾する．
よって，n と $n+1$ は互いに素である．■

◀ 背理法を用いる．n と $n+1$ が互いに素ではない ⇔ n と $n+1$ が素数を公約数にもつ

◀ 1 の約数は，1，-1 であり，どちらも素数ではない．

解答（節末）A4.1.5 ★★★ 節末 p.146

問題文

$\frac{n}{196}$ が 1 より小さい既約分数となるような正の整数 n は全部で何個あるか．

n は 196 と互いに素である 195 以下の正の整数である．$196 = 2^2 \cdot 7^2$ であるから，このような数は，1 から 195 までの 195 個の自然数のうち，2 または 7 の倍数を除いたものである．1 から 195 までの自然数について，

2 の倍数の個数は，$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 2,\ \ldots,\ 97 \cdot 2$ の 97 個
7 の倍数の個数は，$1 \cdot 7,\ 2 \cdot 7,\ \ldots,\ 27 \cdot 7$ の 27 個
14 の倍数の個数は，$1 \cdot 14,\ 2 \cdot 14,\ \ldots,\ 13 \cdot 14$ の 13 個

◀ $195 = 2 \times 97 + 1$
◀ $195 = 7 \times 27 + 6$
◀ $195 = 13 \times 14 + 13$

よって，求める個数は，

$$195 - (97 + 27 - 13) = \mathbf{84}\ \textbf{(個)}$$

◀ オイラー関数を用いると，$\phi(196) = \phi(2^2 \cdot 7^2) = 196\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 84$ のように検算できる．

ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法（解答）

解答 A4.2.1 ★ 問題 p.150

問題文

(1) ユークリッドの互除法を用いて，462 と 700 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．
(2) ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{871}{1209}$ を既約分数にせよ．

(1)

$$\begin{aligned} 700 &= 462 \times 1 + 238 \\ 462 &= 238 \times 1 + 224 \\ 238 &= 224 \times 1 + 14 \\ 224 &= 14 \times 16 \end{aligned}$$

◀ 余りが 0 となり，このときの 14 が最大公約数である．

224 と 14 の最大公約数は 14 であるから，462 と 700 の最大公約数は，**14**
したがって，$462 = 33 \times 14$，$700 = 50 \times 14$
よって，462 と 700 の最小公倍数は，

$$33 \times 50 \times 14 = \mathbf{23100}$$

(2)

$$\begin{aligned} 1209 &= 871 \times 1 + 338 \\ 871 &= 338 \times 2 + 195 \\ 338 &= 195 \times 1 + 143 \\ 195 &= 143 \times 1 + 52 \\ 143 &= 52 \times 2 + 39 \\ 52 &= 39 \times 1 + 13 \\ 39 &= 13 \times 3 \end{aligned}$$

◀ 余りが 0 となり，このときの 13 が最大公約数である．

39 と 13 の最大公約数は 13 であるから，871 と 1209 の最大公約数は，13
よって，$\frac{871}{1209} = \frac{13 \times 67}{13 \times 93} = \mathbf{\frac{67}{93}}$

◀ 最大公約数で約分できる．

解答 A4.2.2 ★★★ 問題 p.151

問題文

(1) $6n+1$ と $5n+3$ の最大公約数が 13 になるような 70 以下の自然数 n をすべて求めよ．
(2) $7n+4$ と $3n+1$ が互いに素になるような 120 以下の自然数 n は全部でいくつあるか．

(1)

$$6n+1=(5n+3)\times 1+(n-2)$$
$$5n+3=(n-2)\times 5+13$$

◀ 余りが 13 となり，定数項になる．

ここで，$6n+1$ と $5n+3$ の最大公約数は，$n-2$ と 13 の最大公約数に等しい．
$n-2$ と 13 の最大公約数が 13 となるのは，$n-2$ が 13 の倍数のときである．
n は 70 以下の自然数より，$1 \leqq n \leqq 70$
したがって，$-1 \leqq n-2 \leqq 68$

◀ n は 70 以下の自然数であることから，$n-2$ の値の範囲を定める．

この範囲において，$n-2$ が 13 の倍数となるのは，0，13，26，39，52，65
よって，$n-2=0,\ 13,\ 26,\ 39,\ 52,\ 65$ より，$n=$ **2，15，28，41，54，67**

(2)

$$7n+4=(3n+1)\times 2+(n+2)$$
$$3n+1=(n+2)\times 3-5$$

◀ 余りが 5 となり，定数項になる．

$7n+4$ と $3n+1$ が互いに素であるとき，$n+2$ と 5 も互いに素であるから，求める個数は，$n+2$ と 5 が互いに素であるような 120 以下の自然数 n の個数に等しい．

◀ $a=bq-r$ のときも，a と b の最大公約数は b と r の最大公約数と等しいことを利用する．

n は 120 以下の自然数より，$1 \leqq n \leqq 120$
したがって，$3 \leqq n+2 \leqq 122$
この範囲において，$n+2$ が 5 の倍数となるのは，

$$n+2=5\times 1,\ 5\times 2,\ \ldots,\ 5\times 23,\ 5\times 24$$

◀ 5 の倍数となるとき（互いに素ではないとき）の個数を求め，全体の 120 個から引くことを考える．

より，24 個
よって，求める個数は，$120-24=$ **96 (個)**

解答 A4.2.3 ★★ 問題 p.152

問題文

次の不定方程式の整数解を求めよ．

(1) $7x-3y=18$　　(2) $39x+56y=17$

(1) $7x-3y=18$ より，$7x=3(y+6)\cdots$(i)
7 と 3 は互いに素であるから，x は 3 の倍数となる．
したがって，k を整数として，$x=3k$ とおける．
これを (i) に代入すると，$7\times 3k=3(y+6)$
$7k=y+6$ より，$y=7k-6$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=3k,\ y=7k-6}$ **(k は整数)**

◀ 3 と 18 は 1 より大きい公約数 3 をもつ．

【別解】 $7x-3y=18$ より，$y=\frac{7}{3}x-6$
y は整数より，x は 3 の倍数となる．
したがって，$x=3k$ (k は整数) とおけ，$y=7k-6$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=3k,\ y=7k-6}$ **(k は整数)**

◀ x が 3 の倍数ではないとき，y は整数ではない．

(2) $56=39\times 1+17$ より，

$$39x+(39\times 1+17)y=17$$

◀ x と y の係数のうち，大きい数の 56 を小さい数の 39 で割ることを考える．

したがって，$39(x+y)=17(1-y)\cdots$(i)
39 と 17 は互いに素であるから，$x+y$ は 17 の倍数となる．
したがって，k を整数として，$x+y=17k$，すなわち，$x=17k-y\cdots$(ii) とおける．
(ii) を (i) に代入すると，$39\times 17k=17(1-y)$
$39k=1-y$ より，$y=-39k+1$
これを (ii) に代入すると，$x=56k-1$
よって，求める整数解は，$\boldsymbol{x=56k-1,\ y=-39k+1}$ **(k は整数)**

解答 A4.2.4 ★★ 問題 p.153

問題文

不定方程式 $4x+7y=1$ の整数解をすべて求めよ．

$4\times 2+7\times(-1)=1$であるから，$x=2$，$y=-1$ は $4x+7y=1$ を満たす整数解の 1 つである．
したがって，

◀ 特殊解を 1 つ見つける．$x=9$，$y=-5$ なども特殊解である．

$$4x+7y=1\cdots\text{(i)},\quad 4\times 2+7\times(-1)=1\cdots\text{(ii)}$$

とすると，(i) $-$ (ii) より，$4(x-2)+7(y+1)=0$
したがって，$4(x-2)=-7(y+1)\cdots$(iii)
ここで，4 と 7 は互いに素であるから，$x-2$ は 7 の倍数となり，k を整数とすると，$x-2=7k$，すなわち，$x=7k+2$
これを (iii) に代入すると，$4\times 7k=-7(y+1)$
$4k=-(y+1)$ より，$y=-4k-1$
よって，一般解は，$\boldsymbol{x=7k+2,\ y=-4k-1}$ **(k は整数)**

◀ a，b が互いに素で，an が b の倍数ならば，n は b の倍数であることを利用する．

解答 A4.2.5 ★★★ 問題 p.154

問題文
不定方程式 $47x+19y=1$ の整数解をすべて求めよ．

不定方程式 $47x+19y=1\cdots$(i) の係数である 47 と 19 について，ユークリッドの互除法を用いる．

$$\begin{aligned} 47 &= 19\times 2+9 \text{ より}, & 47-19\times 2 &= 9\cdots\text{(ii)} \\ 19 &= 9\times 2+1 \text{ より}, & 19-9\times 2 &= 1\cdots\text{(iii)} \end{aligned}$$

(iii) に (ii) を代入すると，$19-(47-19\times 2)\times 2=1$ より，

◀ $9=47-19\times 2$

$$-47\times 2+19\times 5=1\cdots\text{(iv)}$$

したがって，$x=-2$，$y=5$ は不定方程式 $47x+19y=1$ を満たす整数解の 1 つである．

◀ $x=-2$，$y=5$ が特殊解の 1 つである．

(i) − (iv) より，$47(x+2)+19(y-5)=0$
ゆえに，$47(x+2)=19(5-y)\cdots$(v)
47 と 19 は互いに素であるから，$x+2$ は 19 の倍数となり，k を整数とすると，
$x+2=19k$，すなわち，$x=19k-2$
これを (v) に代入すると，$47\times 19k=19(5-y)$
$47k=5-y$ より，$y=-47k+5$
よって，求める一般解は，$\boldsymbol{x=19k-2}$**，**$\boldsymbol{y=-47k+5}$ **(**$\boldsymbol{k}$ **は整数)**

解答 A4.2.6 ★★★ 問題 p.155

問題文
不定方程式 $x+3y+4z=15$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

与えられた不定方程式 $x+3y+4z=15$ を z について整理すると，$4z=15-x-3y$
x，y は自然数であるから，$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ より，

◀ 係数の大きい $4z$ について注目して整理する．

$$4z=15-x-3y\leqq 15-1-3\times 1=11$$

したがって，$z\leqq \frac{11}{4}$ より，$z=1$，2 となる．

◀ $1\leqq z\leqq \frac{11}{4}$ を満たす自然数 z の値は，$z=1$，2 である．

（ア）$z=1$ のとき
$x+3y+4\times 1=15$ より，$x+3y=11\cdots$(i)
$x\geqq 1$ より，$3y=11-x\leqq 11-1=10$

◀ $4z$ のときと同様に，不等式を利用して，係数の大きい $3y$ について注目して整理する．

したがって，$y\leqq \frac{10}{3}$ より，$y=1$，2，3
(i) より，$(x,\ y)=(8,\ 1)$，$(5,\ 2)$，$(2,\ 3)$
（イ）$z=2$ のとき
$x+3y+4\times 2=15$ より，$x+3y=7\cdots$(ii)
$x\geqq 1$ より，$3y=7-x\leqq 7-1=6$
したがって，$y\leqq 2$ より，$y=1$，2
(ii) より，$(x,\ y)=(4,\ 1)$，$(1,\ 2)$
よって，（ア），（イ）より，求める自然数の組は，

$$(x,\ y,\ z)=\boldsymbol{(8,\ 1,\ 1),\ (5,\ 2,\ 1),\ (2,\ 3,\ 1),\ (4,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 2)}$$

解答 4.2

One math

解答 A4.2.7 ★★★ 問題 p.156

問題文

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$，$x \leqq y \leqq z$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

$0 < x \leqq y \leqq z$ より，$\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x}$ である．

これより，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$

したがって，$\frac{3}{2} \leqq \frac{3}{x}$ より，$x \leqq 2$

◀ 両辺に $x\ (>0)$ を掛ける．

◀ $x=1,\ 2$

(i) $x=1$ のとき

$\frac{1}{1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$ より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

◀ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$ に $x=1$ を代入する．

ここで，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}$ より，$\frac{1}{2} \leqq \frac{2}{y}$

したがって，$y \leqq 4$

◀ 両辺に $y\ (>0)$ を掛ける．

$y=2$ のとき，$\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

これは，z は正の整数であるので不適である．

$y=3$ のとき，$\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より，$z=6$

$y=4$ のとき，$\frac{1}{4}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ より，$z=4$

(ii) $x=2$ のとき，$\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$ より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

ここで，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}$ より，$1 \leqq \frac{2}{y}$

したがって，$y \leqq 2$

◀ 両辺に $y\ (>0)$ を掛ける．

ゆえに，$x \leqq y$ より，$y=2$

このとき，$\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=1$ より，$z=2$

よって，(i)，(ii) より，$(x,\ y,\ z)=\mathbf{(1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 4),\ (2,\ 2,\ 2)}$

解答 A4.2.8 ★★★ 問題 p.157

問題文

(1) $x^2 - y^2 = 45$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．
(2) $\sqrt{n^2 - 63}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ．

(1) $x^2 - y^2 = 45$ より，$(x-y)(x+y) = 45$
ここで，$x,\ y$ は自然数であり，$x^2 - y^2 > 0$ より，$x > y$ であるから，$x-y,\ x+y$ も自然数であり，

$$x - y < x + y$$

◀ $y > 0$ より，$x-y$ と $x+y$ の大小が定まる．

よって，$(x-y,\ x+y) = (1,\ 45),\ (3,\ 15),\ (5,\ 9)$

◀ $n-m,\ n+m$ はともに $45 = 3^2 \cdot 5$ の正の約数である．
◀ 連立方程式を解くことで，$(x,\ y)$ を求めることができる．

(i) $x-y=1,\ x+y=45$ のとき，$(x,\ y) = (23,\ 22)$
(ii) $x-y=3,\ x+y=15$ のとき，$(x,\ y) = (9,\ 6)$
(iii) $x-y=5,\ x+y=9$ のとき，$(x,\ y) = (7,\ 2)$

(i)〜(iii) より，求める自然数の組は，

$$(x,\ y) = \mathbf{(23,\ 22),\ (9,\ 6),\ (7,\ 2)}$$

(2) $\sqrt{n^2 - 63} = m$ （m は自然数）とおく．
両辺を 2 乗すると，$n^2 - 63 = m^2$
したがって，$n^2 - m^2 = 63$ より，$(n-m)(n+m) = 63$
ここで，$n,\ m$ は自然数であり，$n^2 - m^2 > 0$ より，$n > m$ であるから，$n-m,\ n+m$ も自然数であり，

$$n - m < n + m$$

◀ $m \leqq 0$ となる自然数 n は存在しない．

ゆえに，$(n-m,\ n+m) = (1,\ 63),\ (3,\ 21),\ (7,\ 9)$

◀ $x-y,\ x+y$ はともに $63 = 3^2 \cdot 7$ の正の約数である．

(i) $n-m=1,\ n+m=63$ のとき，$(n,\ m) = (32,\ 31)$
(ii) $n-m=3,\ n+m=21$ のとき，$(n,\ m) = (12,\ 9)$
(iii) $n-m=7,\ n+m=9$ のとき，$(n,\ m) = (8,\ 1)$

よって，(i)〜(iii) より，$n = \mathbf{8,\ 12,\ 32}$

解答 4.2

解答 A4.2.9 ★★★ 問題 p.158

問題文

次の方程式を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(1) $xy+x+2y=0$　　(2) $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=1$

(1) $xy+x+2y=0$ より，$(x+2)(y+1)=2$
$x,\ y$ は整数であるから，$x+2,\ y+1$ も整数である.
したがって，

$$(x+2,\ y+1)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-2,\ -1)$$

よって，

$$(x,\ y)=\mathbf{(-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (-3,\ -3),\ (-4,\ -2)}$$

(2) $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=1$ より，$xy=3y+x$
したがって，$xy-x-3y=0$ であるから，$(x-3)(y-1)=3$
$x,\ y$ は整数であるから，$x-3,\ y-1$ も整数である.
ここで，$x\neq 0,\ y\neq 0$ より，$x-3\neq -3,\ y-1\neq -1$ であるから，

$$(x-3,\ y-1)=(3,\ 1),\ (1,\ 3),\ (-1,\ -3)$$

よって，

$$(x,\ y)=\mathbf{(6,\ 2),\ (4,\ 4),\ (2,\ -2)}$$

◀ 与えられた式の左辺の係数から，$(x+2)(y+1)$ を作る.

◀ 掛けて 2 になる整数の組を求める.

◀ 両辺に xy を掛ける.

◀ $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=1$ の分母は 0 ではない.

◀ $x-3\neq -3,\ y-1\neq -1$ より，$(x-3,\ y-1)=(-3,\ -1)$ は不適であることに注意すること.

解答 4.2

One math

解答 A4.2.10 ★★★★ 問題 p.159

問題文

$2x^2-7xy+3y^2+8x-9y-5=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ．

$$2x^2-7xy+3y^2=(2x-y)(x-3y)$$

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & -1 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & & -3 & \longrightarrow & -6 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$$

と因数分解できるので，定数 $p,\ q$ を用いて $(2x-y+p)(x-3y+q)$ を展開し，与えられた式の左辺と比較する．

$$\begin{aligned}(2x-y+p)(x-3y+q)&=(2x-y)(x-3y)+q(2x-y)+p(x-3y)+pq\\&=2x^2-7xy+3y^2+(p+2q)x-(3p+q)y+pq\end{aligned}$$

◀ $(2x-y),\ (x-3y)$ をまとめて扱って展開するとよい．

したがって，与えられた式と $x,\ y$ の項の係数を比較すると，

$$\begin{cases} p+2q=8 \\ -3p-q=-9 \end{cases}$$

これを解くと，$p=2,\ q=3$

ゆえに，

$$(2x-y+2)(x-3y+3)=2x^2-7xy+3y^2+8x-9y+6$$

したがって，与えられた式は，

$$2x^2-7xy+3y^2+8x-9y+6-11=0$$

整理すると，

$$(2x-y+2)(x-3y+3)=11$$

ゆえに，

$$(2x-y+2,\ x-3y+3)=(1,\ 11),\ (11,\ 1),\ (-1,\ -11),\ (-11,\ -1)$$

◀ なお，連立方程式をそれぞれ解いて，$x,\ y$ の値を求めてもよいが，

$$\begin{cases} 2x-y+2=A \\ x-3y+3=B \end{cases}$$

を解くと考え，

$$\begin{cases} x=\frac{3A-B-3}{5} \\ y=\frac{A-2B+4}{5} \end{cases}$$

を用いると計算が楽になる．

これを解いて，

$$(x,\ y)=\left(-\frac{11}{5},\ -\frac{17}{5}\right),\ \left(\frac{29}{5},\ \frac{13}{5}\right),\ (1,\ 5),\ (-7,\ -1)$$

よって，$x,\ y$ は整数より，$(x,\ y)=\boldsymbol{(1,\ 5),\ (-7,\ -1)}$

解答 4.2

One math

解答 A4.2.11 ★★★★ 問題 p.160

問題文

方程式 $x^2-2xy+2y^2-2x-2y+4=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

$x^2-2xy+2y^2-2x-2y+4=0$ を x について整理すると，

$$x^2-2(y+1)x+\left(2y^2-2y+4\right)=0\cdots\text{(i)}$$

◀ x に注目して，x の 2 次方程式と考える．なお，y について整理して解いてもよい．

2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(y+1)^2-1\cdot\left(2y^2-2y+4\right)=y^2+2y+1-\left(2y^2+2y-4\right)=-y^2+4y-3$$

(i) の解が実数となるから，$\frac{D}{4}\geqq 0$

◀ 解は実数（整数）である．

したがって，$-y^2+4y-3\geqq 0$ より，$-(y-1)(y-3)\geqq 0$

ゆえに，$1\leqq y\leqq 3$

y は整数であるから，$y=1,\ 2,\ 3$

（ア）$y=1$ のとき，(i) より，$x^2-4x+4=0$

これを解くと，$x=2$

（イ）$y=2$ のとき，(i) より，$x^2-6x+8=0$

これを解くと，$x=4,\ 2$

（ウ）$y=3$ のとき，(i) より，$x^2-8x+16=0$

これを解くと，$x=4$

よって，（ア）～（ウ）より，$(x,\ y)=\mathbf{(2,\ 1),\ (4,\ 2),\ (2,\ 2),\ (4,\ 3)}$

解答 A4.2.12 ★ 問題 p.161

問題文

(1) $11001_{(2)}$，$354_{(6)}$ をそれぞれ 10 進法で表せ．

(2) 10 進法で表された数 42 を，2 進法，3 進法，6 進法でそれぞれ表せ．

(3) $2.13_{(5)}$ を 10 進法で表せ．

(4) 10 進法で表された小数 0.625 を 2 進法で表せ．

(1)
$$11001_{(2)}=1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0=\mathbf{25},$$
$$354_{(6)}=3\times 6^2+5\times 6^1+4\times 6^0=\mathbf{142}$$

(2)
$$42=1\times 2^5+0\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+0\times 2^0=\mathbf{101010_{(2)}},$$
$$42=1\times 3^3+1\times 3^2+2\times 3^1+0\times 3^0=\mathbf{1120_{(3)}},$$
$$42=1\times 6^2+1\times 6^1+0\times 6^0=\mathbf{110_{(6)}}$$

◀ 42 を 2^5 で割り，その余りを 2^4 で割り，$\cdots$ という操作を繰り返す．

(3) $2.13_{(5)}=2+1\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5^2}=2+0.2+0.12=\mathbf{2.32}$

(4) $0.625=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2^2}+1\times\frac{1}{2^3}=\mathbf{0.101_{(2)}}$

【別解】 $0.625=0.abc\ldots_{(2)}$ とおくと，

$$0.625=a\times\frac{1}{2}+b\times\frac{1}{4}+c\times\frac{1}{8}+\cdots$$

◀ 2 を掛ける操作を繰り返し，整数部分を取り出してその数字を各位の数にする．

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1\ .25 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0\ .50 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1\ .0 \end{array}$$

両辺に 2 を掛けると，$1.25=a+b\times\frac{1}{2}+c\times\frac{1}{4}+\cdots$ より，$a=1$

これを代入して，両辺に 2 を掛けると，$0.5=b+c\times\frac{1}{2}+d\times\frac{1}{4}+\cdots$ より，$b=0$

これを代入して，両辺に 2 を掛けると，$1=c+d\times\frac{1}{2}+e\times\frac{1}{4}+\cdots$ より，$c=1$

よって，$0.625=\mathbf{0.101_{(2)}}$

解答 A4.2.13 ★ 問題 p.162

問題文

次の計算をせよ．

(1) $10101_{(2)} + 1110_{(2)}$　(2) $210_{(3)} \times 12_{(3)}$　(3) $543_{(6)} - 312_{(6)}$

(1) $10101_{(2)}$，$1110_{(2)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$10101_{(2)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 21,$$
$$1110_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 = 14$$

よって，

$$\begin{aligned} 10101_{(2)} + 1110_{(2)} &= 21 + 14 = 35 \\ &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \\ &= \mathbf{100011_{(2)}} \end{aligned}$$

◀ 筆算を用いてもよいが，$1 + 1 = 2 = 10_{(2)}$ のように，2 で繰り上がることに注意すること．

$$\begin{array}{r} 10101_{(2)} \\ +\quad 1110_{(2)} \\ \hline 100011_{(2)} \end{array}$$

(2) $210_{(3)}$，$12_{(3)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$210_{(3)} = 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 0 = 18 + 3 + 0 = 21,$$
$$12_{(3)} = 1 \times 3^1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

よって，

$$\begin{aligned} 210_{(3)} \times 12_{(3)} &= 21 \times 5 = 105 \\ &= 1 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \\ &= \mathbf{10220_{(3)}} \end{aligned}$$

◀ 筆算を用いてもよいが，3 で繰り上がることに注意すること．

$$\begin{array}{r} 210_{(3)} \\ \times 12_{(3)} \\ \hline 1120\phantom{_{(3)}} \\ 210\phantom{0_{(3)}} \\ \hline 10220_{(3)} \end{array}$$

(3) $543_{(6)}$，$312_{(6)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$543_{(6)} = 5 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 3 = 180 + 24 + 3 = 207,$$
$$312_{(6)} = 3 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 2 = 108 + 6 + 2 = 116$$

よって，$543_{(6)} - 312_{(6)} = 207 - 116 = 91 = 2 \times 6^2 + 3 \times 6^1 + 1 = \mathbf{231_{(6)}}$

解答 A4.2.14 ★★★ 問題 p.163

問題文

自然数 N を 4 進法と 7 進法で表すと，それぞれ 2 桁の数 $ab_{(4)}$ と $ba_{(7)}$ になるとする．このとき a，b の値を求めよ．また，N を 10 進法で表せ．

自然数 N を 4 進法，7 進法で表すと，それぞれ $ab_{(4)}$ と $ba_{(7)}$ であるから，

$$1 \leqq a \leqq 3, \quad 1 \leqq b \leqq 3 \cdots \text{(i)}$$

◀ a，b は 4 進法の数 $ab_{(4)}$ の各位の数字であるから，a，b はそれぞれ 0，1，2，3 のいずれかの整数である．また，$ab_{(4)}$ と $ba_{(7)}$ はどちらも 2 桁の数であるから，最高位になる a，b は，$a \neq 0$，$b \neq 0$ であることに注意すること．

$ab_{(4)}$，$ba_{(7)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと，

$$ab_{(4)} = a \cdot 4^1 + b \cdot 4^0 = 4a + b \cdots \text{(ii)},$$
$$ba_{(7)} = b \cdot 7^1 + a \cdot 7^0 = 7b + a$$

これらが等しいから，$4a + b = 7b + a$

したがって，$a = 2b$

よって，(i) において，これを満たす a，b を求めると，$a = \mathbf{2}$，$b = \mathbf{1}$

また，この値を (ii) に代入すると，$N = 4 \cdot 2 + 1 = \mathbf{9}$

解答 A4.2.15 ★★ 問題 p.164

問題文

0，1，2 の 3 種類の数字のみを用いて表される自然数を，小さい方から順に並べると，

$$1,\ 2,\ 10,\ 11,\ 12,\ 20,\ 21,\ 22,\ 100,\ \ldots$$

となる．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 2102 は小さい方から何番目の数であるかを求めよ．
(2) 小さい方から 87 番目の数を求めよ．

0，1，2 の 3 種類の数で表されているので，この数の列は，3 進法で表されている．
(1) $2102_{(3)}$ を 10 進法で表すと，

$$2102_{(3)} = 2 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 = 65$$

よって，2102 は，**65 番目**の数である．
(2) 87 を 3 進法で表すと，

$$87 = 10020_{(3)}$$

よって，87 番目の数は，**10020** である．

◀

		余り
3)	87	
3)	29	⋯ 0
3)	9	⋯ 2
3)	3	⋯ 0
3)	1	⋯ 0

順に並べると，10020

解答 A4.2.16 ★★ 問題 p.165

問題文

赤玉が 6 個，白玉が 4 個，青玉が 3 個入っている箱がある．この箱から玉を取り出すとき，いずれかの色の玉が必ず 3 個以上になるためには，最低何個取り出せばよいか．

いずれの色の玉も 2 個以下となるように取り出せる最大の個数は，$2 + 2 + 2 = 6$（個）である．
したがって，箱から 7 個取り出すと，少なくとも 1 つの色の玉が 3 個以上となる．
よって，最低 **7 個**取り出せばよい．

◀ 部屋割り論法の考え方を用いる．

解答 4.2

解答 A4.2.17 ★★ 問題 p.166

問題文

$[x]$ を x 以下の最大の整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $[3.2]$，$[-0.7]$，$[2]$，$[\sqrt{7}+1]$ の値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y = 2[x]$ のグラフをかけ．

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y = -[2x]$ のグラフをかけ．

(1) $3 \leqq 3.2 < 4$ であるから，$[3.2] = \mathbf{3}$

$-1 \leqq -0.7 < 0$ であるから，$[-0.7] = \mathbf{-1}$

$2 \leqq 2 < 3$ であるから，$[2] = \mathbf{2}$

$3 \leqq \sqrt{7}+1 < 4$ であるから，$[\sqrt{7}+1] = \mathbf{3}$

◀ $[-0.7] = 0$ ではないので注意すること．

◀ $2 \leqq \sqrt{7} < 3$ より，$3 \leqq \sqrt{7}+1 < 4$

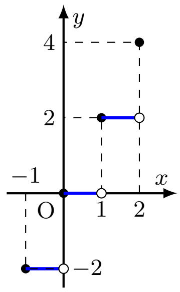
(2) $-1 \leqq x < 0$ のとき，$y = 2[x] = -2$

$0 \leqq x < 1$ のとき，$y = 2[x] = 0$

$1 \leqq x < 2$ のとき，$y = 2[x] = 2$

$x = 2$ のとき，$y = 2[x] = 4$

よって，グラフは右の図のようになる．



(3) $-1 \leqq x < -\frac{1}{2}$ のとき，$y = -[2x] = 2$

$-\frac{1}{2} \leqq x < 0$ のとき，$y = -[2x] = 1$

$0 \leqq x < \frac{1}{2}$ のとき，$y = -[2x] = 0$

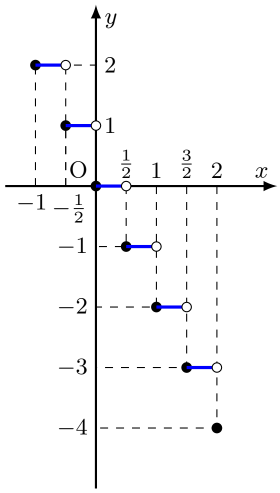
$\frac{1}{2} \leqq x < 1$ のとき，$y = -[2x] = -1$

$1 \leqq x < \frac{3}{2}$ のとき，$y = -[2x] = -2$

$\frac{3}{2} \leqq x < 2$ のとき，$y = -[2x] = -3$

$x = 2$ のとき，$y = -[2x] = -4$

よって，グラフは右の図のようになる．



解答 A4.2.18 ★★★ 問題 p.167

問題文

座標空間において，A(3, 2, 4) B(4, 3, 0) C(5, 4, 5) を頂点とする三角形は，直角三角形であることを示せ．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 &= (4-3)^2 + (3-2)^2 + (0-4)^2 = 18, \\
\mathrm{BC}^2 &= (5-4)^2 + (4-3)^2 + (5-0)^2 = 27, \\
\mathrm{CA}^2 &= (3-5)^2 + (2-4)^2 + (4-5)^2 = 9
\end{aligned}
$$

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2$ であるから，三平方の定理の逆より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は$\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ の直角三角形である． ■

◀ 直角である角を示す．

解答（節末）A4.2.1 ★★　節末 p.168

問題文
120 と 168 の最大公約数 g を求め，$g=120m+168n$ となる整数 m，n の組を 1 つ求めよ．

120 と 168 について，ユークリッドの互除法を用いる．

$$\begin{aligned} &168=120\times1+48 \text{ より，} && 168-120\times1=48\cdots\text{(i)}\\ &120=48\times2+24 \text{ より，} && 120-48\times2=24\cdots\text{(ii)}\\ &48=24\times2 \end{aligned}$$

よって，最大公約数 g は，$g=\mathbf{24}$

(ii) に (i) を代入すると，$120-(168-120\times1)\times2=24$ より，$120\times3-168\times2=24$

◀ $48=168-120\times1$

よって，求める整数 m，n の組の 1 つは，$(m,\ n)=\mathbf{(3,\ -2)}$

解答（節末）A4.2.2 ★★★　節末 p.168

問題文
方程式 $19x+53y=7$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の中で，$|x-y|$ が最小となるものを求めよ．

方程式 $19x+53y=7\cdots$(i) の係数である 19 と 53 について，ユークリッドの互除法を用いる．

$$\begin{aligned} &53=19\times2+15 \text{ より，} && 53-19\times2=15\cdots\text{(ii)}\\ &19=15\times1+4 \text{ より，} && 19-15\times1=4\cdots\text{(iii)}\\ &15=4\times3+3 \text{ より，} && 15-4\times3=3\cdots\text{(iv)}\\ &4=3\times1+1 \text{ より，} && 4-3\times1=1\cdots\text{(v)} \end{aligned}$$

(v) に (iv) を代入すると，$4-(15-4\times3)\times1=1$ より，

◀ $3=15-4\times3$

$$4\times4+15\times(-1)=1$$

これに (iii) を代入すると，$(19-15\times1)\times4+15\times(-1)=1$ より，

◀ $4=19-15\times1$

$$19\times4+15\times(-5)=1$$

これに (ii) を代入すると，$19\times4+(53-19\times2)\times(-5)=1$ より，

◀ $15=53-19\times2$

$$53\times(-5)+19\times14=1$$

この両辺に 7 を掛け合わせると，$53\times(-35)+19\times98=7\cdots$(vi)

◀ $x=98$，$y=-35$ は方程式 $19x+53y=7$ を満たす整数解の 1 つである．

(i) − (vi) より，$19(x-98)+53(y+35)=0$
したがって，$19(x-98)=-53(y+35)\cdots$(vii)
19 と 53 は互いに素であるから，$x-98$ は 53 の倍数となり，k を整数とすると，
$x-98=53k$，すなわち，$x=53k+98$
これを (vii) に代入して整理すると，$y=-19k-35$
ゆえに，(i) を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は，$\begin{cases} x=53k+98\\ y=-19k-35 \end{cases}$ （k は整数）$\cdots$(viii)
したがって，$|x-y|=|72k+133|$
これが最小となる k の値は，$k=-2$

◀ $k=-2$ のとき，$|x-y|=11$

よって，求める整数の組 $(x,\ y)$ は，(viii) より，$(x,\ y)=\mathbf{(-8,\ 3)}$

解答 4.2

解答（節末）A4.2.3 ★★ 節末 p.168

問題文

ある自然数から 35 を引いた数と，36 を加えた数がともに平方数となった．このとき，その自然数を求めよ．

求める自然数を n とする．
n から 35 を引いた数，n に 36 を足した数はともに平方数となるから，

$$n-35=p^2\cdots\text{(i)},\quad n+36=q^2\cdots\text{(ii)}$$

とおける．ただし，p，q は自然数とする．
ここで，$n-35<n+36$ より，$p^2<q^2$，すなわち，$p<q$
(ii)−(i) より，$q^2-p^2=71$
したがって，$(q+p)(q-p)=71$
$q+p>q-p>0$ より，$\begin{cases} q+p=71 \\ q-p=1 \end{cases}$
これを解くと，$p=35$，$q=36$
ゆえに，(i) に代入すると，$n-35=35^2$
したがって，$n=1260$
よって，求める自然数は，**1260**

◀ 71 は素数である．

◀ $0<p<q$ より，
$q+p>q-p$

解答（節末）A4.2.4 ★★ 節末 p.168

問題文

n を 5 以上の整数とする．
(1) 十進法で表された数 $(n+1)^2$ を n 進法で表せ．
(2) 十進法で表された数 $(2n-1)^2$ を n 進法で表したとき，n の位の数を求めよ．

(1) $(n+1)^2=n^2+2n+1=1\times n^2+2\times n+1=\mathbf{121_{(n)}}$
(2)
$$\begin{aligned}(2n-1)^2&=4n^2-4n+1\\&=3n^2+n^2-4n+1\\&=3n^2+(n-4)n+1\\&=3\times n^2+(n-4)\times n+1\end{aligned}$$
よって，n 進法で表したときの n の位の数は，$\boldsymbol{n-4}$

◀ n の位の数が 0 以上 $n-1$ 以下の整数となるように，$(n-4)n$ と式変形する．

◀ n は 5 以上の整数であるから，$n-4$ は $0\leqq n-4\leqq n-1$ を満たす．

解答（節末）A4.2.5 ★★ 節末 p.168

問題文

十進法の 1440 を n 進法で表すと $10400_{(n)}$ になった．n の値を求めよ．

$10400_{(n)}$ を十進法で表すと，

$$10400_{(n)}=1\times n^4+0\times n^3+4\times n^2+0\times n+0=n^4+4n^2$$

これが 1440 と等しくなるので，$n^4+4n^2=1440$
したがって，$n^4+4n^2-1440=0$
ゆえに，
$$(n^2+40)(n^2-36)=0$$
よって，n は 5 以上の自然数であるから，$n=\mathbf{6}$

◀ $n^2=t$ とおくと，
$t^2+4t-1440=0$
これを因数分解すると，
$(t+40)(t-36)=0$

章末問題 4（解答）

解答（章末）A4.1 ★★★ 章末 p.169

問題文

${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ が 2^n で割り切れるとき，自然数 n の最大値を求めよ．

与えられた ${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ は，${}_{80}\mathrm{C}_{40}=\frac{80!}{40!40!}$ と表される．
1 から 40 までの自然数について，

2 の倍数は 20 個，4 の倍数は 10 個，8 の倍数は 5 個，
16 の倍数は 2 個，32 の倍数は 1 個

したがって，40! に含まれる因数 2 の個数は，

$$20+10+5+2+1=38\ (個)$$

また，1 から 80 までの自然数について，

2 の倍数は 40 個，4 の倍数は 20 個，8 の倍数は 10 個，
16 の倍数は 5 個，32 の倍数は 2 個，64 の倍数は 1 個

ゆえに，80! に含まれる因数 2 の個数は，

$$40+20+10+5+2+1=78\ (個)$$

したがって，${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ に含まれる因数 2 の個数は，

$$78-38\times 2=2\ (個)$$

よって，求める自然数 n の最大値は，$n=\mathbf{2}$

◀ 80!　40! に含まれる因数 2 の個数をそれぞれ p，q とすると，2 を因数にもたない自然数を用いて，

$80!=m\cdot 2^p$，　$40!=n\cdot 2^q$

と表される．このとき，

$$\frac{80!}{40!\cdot 40!}=\frac{m}{n^2}\cdot 2^{p-2q}$$

よって，${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ に含まれる因数 2 の個数は，$(p-2q)$ 個となる．

◀ ${}_{80}\mathrm{C}_{40}$ に含まれる因数 2 の個数は，$(p-2q)$ 個

解答（章末）A4.2 ★★ 章末 p.169

問題文

n を自然数とする．$n+4$ は 5 の倍数であり，$n+9$ は 11 の倍数である．このような自然数 n で 300 より小さいものは何個あるか．

$n+4$，$n+9$ は，それぞれ $n+4=5k\cdots$(i)，　$n+9=11l\cdots$(ii) (k，l は自然数) とおける．
(ii)−(i) より，$5=11l-5k$
したがって，$11l=5(k+1)$
11 と 5 は互いに素であるから，l は 5 の倍数である．
ゆえに，$l=5m$ (m は自然数) と表せる．
(ii) より，$n+9=11l=11\cdot 5m=55m$ であるから，$n=55m-9$
したがって，$1\leqq n<300$ より，$1\leqq 55m-9<300$ であるから，

$$\frac{10}{55}\leqq m<\frac{309}{55}$$

m は自然数であるから，$1\leqq m\leqq 5$
よって，これを満たす自然数 m は 5 個であるから，条件を満たす自然数 n は，**5 個**

◀ a，b は互いに素で，ak が b の倍数であるならば，k は b の倍数である (a，b，k は整数)．

◀ $\frac{309}{55}=5.618\ldots$

解答（章末）A4.3 ★★★★ 章末 p.169

問題文

(1) 2 つの自然数 a と b $(a > b)$ が互いに素であるとき，a と $a-b$ も互いに素であることを証明せよ．
(2) 504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数はいくつあるか答えよ．
(3) 504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数の総和を求めよ．

(1) a と $a-b$ が互いに素ではないと仮定すると，a と $a-b$ はある素数 p を約数にもち，$a = pm \cdots$ (i)，$a-b = pn \cdots$ (ii) とおける．ただし，m と n は互いに素な自然数とする．

◀ 背理法を用いる．

(i) $-$ (ii) より，$b = p(m-n)$
ここで，$m-n$ は整数であるから，p は b の約数でもある．
したがって，p は a と b の公約数となり，これは a と b が互いに素であることに矛盾する．
よって，a と $a-b$ は互いに素である．■
(2) $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ であるから，504 は素因数として 2，3，7 をもつ．
504 以下の自然数について，

2 の倍数は 252 個，3 の倍数は 168 個，7 の倍数は 72 個
6 の倍数は 84 個，21 の倍数は 24 個，14 の倍数は 36 個，42 の倍数は 12 個

◀ 例えば，$504 \div 2 = 252$ (個)
◀ 最小公倍数の倍数を考える．

したがって，504 以下の自然数で，504 と互いに素ではない自然数の個数は，

◀ 2 または 3 または 7 の倍数である．

$$252 + 168 + 72 - 84 - 24 - 36 + 12 = 360 \text{ (個)}$$

◀ $n(A \cup B \cup C)$
$= n(A) + n(B) + n(C)$
$- n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

よって，504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数の個数は，

$$504 - 360 = \mathbf{144 \text{ (個)}}$$

(3) 504 以下の自然数で 504 と互いに素な自然数は，

$$1,\ 5,\ 11,\ 13,\ \ldots,\ 491,\ 493,\ 499,\ 503$$

◀ $1 + 503 = 504$，$5 + 499 = 504$，$11 + 493 = 504$，… と和が 504 になっていることに注目する．

の計 144 個である．
ここで，(1) より，504 以下の自然数の 1 つを n とすると，504 と n が互いに素であるとき，$504 - n$ と 504 も互いに素である．
したがって，504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数は，和が 504 となる 2 つの数の組に分けることができ，その組の数は，

$$144 \div 2 = 72 \text{ (組)}$$

◀ (1，503)，(5，499)，… のように，和が 504 となる 2 つの数の組が 72 組できる．

よって，504 以下の自然数で，504 と互いに素な自然数の総和は，

$$504 \times 72 = \mathbf{36288}$$

解答（章末）A4.4 ★★★ 章末 p.169

問題文

x についての 2 次方程式 $x^2+2ax+2a-8=0$ が異なる 2 つの整数解をもつような整数 a の値を求めよ.

与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4}=a^2-(2a-8)=a^2-2a+8=(a-1)^2+7$$

したがって，この 2 次方程式は，a の値に関わらず，異なる 2 つの実数解をもつ.
この 2 次方程式の解は,

$$x=-a\pm\sqrt{(a-1)^2+7}$$

◀ x の係数が偶数であるから,
$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$
を用いるとよい.

方程式が異なる 2 つの整数解をもつとき，$\sqrt{(a-1)^2+7}$ は整数となるから，$\sqrt{(a-1)^2+7}=b$ （b は正の整数）とおける.
両辺を 2 乗して整理すると,

$$(a-1)^2-b^2=-7$$

ゆえに,

$$\{(a-1)+b\}\{(a-1)-b\}=-7$$

ここで，$b>0$ より，$a-1+b>a-1-b$ であるから,

$$(a-1+b,\ a-1-b)=(7,\ -1),\ (1,\ -7)$$

したがって,

$$(a,\ b)=(4,\ 4),\ (-2,\ 4)$$

◀ a は整数，b は正の整数である．また，$\sqrt{(a-1)^2+7}$ が整数であれば，$x=-a\pm\sqrt{(a-1)^2+7}$ は整数となるから，逆を確かめなくてよい.

よって,

$$a=\mathbf{4,\ -2}$$

解答（章末）A4.5 ★★★★ 章末 p.169

問題文

6 の約数 1，2，3，6 の和は 6 の 2 倍になっている．このように，正の約数の和がその数の 2 倍に等しいとき，その数を完全数という．p，q を異なる素数として，次の問いに答えよ．

(1) pq の形の完全数をすべて求めよ．　(2) p^2q の形の完全数をすべて求めよ．

(1) pq の約数は，1，p，q，pq の 4 個であるから，pq が完全数であるための条件は，

$$1+p+q+pq=2pq$$

したがって，$(p-1)(q-1)=2$

◀ 移項して，因数分解する．

ここで，$p \geqq 2$，$q \geqq 2$ であるから，

$$(p-1,\ q-1)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

ゆえに，$(p,\ q)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

よって，pq の形の完全数は，**6**

(2) p^2q の約数は，1，p，q，p^2，pq，p^2q の 6 個であるから，p^2q が完全数であるための条件は，

$$1+p+q+p^2+pq+p^2q=2p^2q$$

◀ $q+pq+p^2q=q(1+p+p^2)$ より，$(1+p+p^2)(1+q)$ と因数分解できる．

したがって，$(1+p+p^2)(1+q)=2p^2q \cdots$ (i)

ここで，$1+p+p^2$ は p で割り切れないから，$1+q$ は p で割り切れる．

◀ $1+p+p^2$ を p で割ると 1 余るので，p で割り切れない．

ゆえに，(i) を，

$$\left(1+p+p^2\right)\frac{1+q}{p}=2pq$$

と式変形すると，$1+p+p^2$ は同様に p で割り切れないから，$\frac{1+q}{p}$ は p で割り切れ，さらに 2 で割り切れる．

◀ $1+p+p^2=1+p(p+1)$ は奇数であるから，2 で割り切れない．

ゆえに，

$$1+q=2p^2\cdot r\ (r \text{ は整数}) \cdots \text{(ii)}$$

とおける．これを (i) に代入すると，

$$\left(1+p+p^2\right)r=q \cdots \text{(iii)}$$

◀ 両辺を $2p^2 \neq 0$ で割り，整理している．

ここで，q は素数であるから，$r=1$ であり．(ii)，(iii) に代入すると，

$$1+q=2p^2,\quad 1+p+p^2=q$$

これを解くと，$p=2$，$q=7$

◀ $p \geqq 2$，$q \geqq 2$ である．

よって，p^2q の形の完全数は，**28**

索引

動画一覧

番号	動画（リンク）	✓
A1.1.1	例題 A1.1.1（解説動画）	
A1.1.2	例題 A1.1.2（解説動画）	
A1.1.3	例題 A1.1.3（解説動画）	
A1.1.4	例題 A1.1.4（解説動画）	
A1.1.5	例題 A1.1.5（解説動画）	
A1.1.6	例題 A1.1.6（解説動画）	
A1.1.7	例題 A1.1.7（解説動画）	
A1.1.8	例題 A1.1.8（解説動画）	
A1.1.9	例題 A1.1.9（解説動画）	
A1.2.1	例題 A1.2.1（解説動画）	
A1.2.2	例題 A1.2.2（解説動画）	
A1.2.3	例題 A1.2.3（解説動画）	
A1.2.4	例題 A1.2.4（解説動画）	
A1.2.5	例題 A1.2.5（解説動画）	
A1.2.6	例題 A1.2.6（解説動画）	
A1.2.7	例題 A1.2.7（解説動画）	
A1.2.8	例題 A1.2.8（解説動画）	
A1.2.9	例題 A1.2.9（解説動画）	
A1.2.10	例題 A1.2.10（解説動画）	
A1.2.11	例題 A1.2.11（解説動画）	
A1.2.12	例題 A1.2.12（解説動画）	
A1.2.13	例題 A1.2.13（解説動画）	
A1.2.14	例題 A1.2.14（解説動画）	
A1.2.15	例題 A1.2.15（解説動画）	
A1.2.16	例題 A1.2.16（解説動画）	
A1.2.17	例題 A1.2.17（解説動画）	
A1.2.18	例題 A1.2.18（解説動画）	
A1.2.19	例題 A1.2.19（解説動画）	
A1.2.20	例題 A1.2.20（解説動画）	
A1.2.21	例題 A1.2.21（解説動画）	
A1.2.22	例題 A1.2.22（解説動画）	
A1.2.23	例題 A1.2.23（解説動画）	
A1.2.24	例題 A1.2.24（解説動画）	

番号	動画（リンク）	✓
A2.1.1	例題 A2.1.1（解説動画）	
A2.1.2	例題 A2.1.2（解説動画）	
A2.1.3	例題 A2.1.3（解説動画）	
A2.1.4	例題 A2.1.4（解説動画）	
A2.1.5	例題 A2.1.5（解説動画）	
A2.1.6	例題 A2.1.6（解説動画）	
A2.1.7	例題 A2.1.7（解説動画）	
A2.1.8	例題 A2.1.8（解説動画）	
A2.1.9	例題 A2.1.9（解説動画）	
A2.2.1	例題 A2.2.1（解説動画）	
A2.2.2	例題 A2.2.2（解説動画）	
A2.2.3	例題 A2.2.3（解説動画）	
A2.2.4	例題 A2.2.4（解説動画）	
A2.2.5	例題 A2.2.5（解説動画）	
A2.2.6	例題 A2.2.6（解説動画）	
A2.2.7	例題 A2.2.7（解説動画）	
A2.2.8	例題 A2.2.8（解説動画）	
A2.2.9	例題 A2.2.9（解説動画）	
A2.2.10	例題 A2.2.10（解説動画）	
A2.2.11	例題 A2.2.11（解説動画）	
A2.2.12	例題 A2.2.12（解説動画）	
A2.2.13	例題 A2.2.13（解説動画）	
A2.2.14	例題 A2.2.14（解説動画）	
A2.2.15	例題 A2.2.15（解説動画）	
A2.2.16	例題 A2.2.16（解説動画）	
A2.2.17	例題 A2.2.17（解説動画）	

番号	動画（リンク）	✓
A3.1.1	例題 A3.1.1（解説動画）	
A3.1.2	例題 A3.1.2（解説動画）	
A3.1.3	例題 A3.1.3（解説動画）	
A3.1.4	例題 A3.1.4（解説動画）	
A3.1.5	例題 A3.1.5（解説動画）	
A3.1.6	例題 A3.1.6（解説動画）	
A3.1.7	例題 A3.1.7（解説動画）	
A3.1.8	例題 A3.1.8（解説動画）	
A3.1.9	例題 A3.1.9（解説動画）	
A3.1.10	例題 A3.1.10（解説動画）	
A3.2.1	例題 A3.2.1（解説動画）	
A3.2.2	例題 A3.2.2（解説動画）	
A3.2.3	例題 A3.2.3（解説動画）	
A3.2.4	例題 A3.2.4（解説動画）	
A3.2.5	例題 A3.2.5（解説動画）	
A3.2.6	例題 A3.2.6（解説動画）	
A3.2.7	例題 A3.2.7（解説動画）	
A3.2.8	例題 A3.2.8（解説動画）	
A3.2.9	例題 A3.2.9（解説動画）	
A3.2.10	例題 A3.2.10（解説動画）	
A3.2.11	例題 A3.2.11（解説動画）	
A3.2.12	例題 A3.2.12（解説動画）	
A3.3.1	例題 A3.3.1（解説動画）	
A3.3.2	例題 A3.3.2（解説動画）	
A3.3.3	例題 A3.3.3（解説動画）	
A3.3.4	例題 A3.3.4（解説動画）	

番号	動画（リンク）	✓
A4.1.1	例題 A4.1.1（解説動画）	
A4.1.2	例題 A4.1.2（解説動画）	
A4.1.3	例題 A4.1.3（解説動画）	
A4.1.4	例題 A4.1.4（解説動画）	
A4.1.5	例題 A4.1.5（解説動画）	
A4.1.6	例題 A4.1.6（解説動画）	
A4.1.7	例題 A4.1.7（解説動画）	
A4.1.8	例題 A4.1.8（解説動画）	
A4.1.9	例題 A4.1.9（解説動画）	
A4.1.10	例題 A4.1.10（解説動画）	
A4.1.11	例題 A4.1.11（解説動画）	
A4.1.12	例題 A4.1.12（解説動画）	
A4.1.13	例題 A4.1.13（解説動画）	
A4.1.14	例題 A4.1.14（解説動画）	
A4.2.1	例題 A4.2.1（解説動画）	
A4.2.2	例題 A4.2.2（解説動画）	
A4.2.3	例題 A4.2.3（解説動画）	
A4.2.4	例題 A4.2.4（解説動画）	
A4.2.5	例題 A4.2.5（解説動画）	
A4.2.6	例題 A4.2.6（解説動画）	
A4.2.7	例題 A4.2.7（解説動画）	
A4.2.8	例題 A4.2.8（解説動画）	
A4.2.9	例題 A4.2.9（解説動画）	
A4.2.10	例題 A4.2.10（解説動画）	
A4.2.11	例題 A4.2.11（解説動画）	
A4.2.12	例題 A4.2.12（解説動画）	
A4.2.13	例題 A4.2.13（解説動画）	
A4.2.14	例題 A4.2.14（解説動画）	
A4.2.15	例題 A4.2.15（解説動画）	
A4.2.16	例題 A4.2.16（解説動画）	
A4.2.17	例題 A4.2.17（解説動画）	
A4.2.18	例題 A4.2.18（解説動画）	

例題（問題）一覧

第 1 章　場合の数

第 2 章　確率

第 3 章　図形の性質

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
例題 A3.1.1	角の二等分線と比	★★	93	229		
例題 A3.1.2	三角形の性質	★★	94	230		
例題 A3.1.3	角の二等分線	★★★	95	230		
例題 A3.1.4	三角形の外心・内心の角の大きさ	★	96	231		
例題 A3.1.5	三角形の傍心	★★	97	232		
例題 A3.1.6	オイラー線	★★★	98	232		
例題 A3.1.7	三角形の面積比	★★	99	233		
例題 A3.1.8	チェバの定理・メネラウスの定理	★	100	233		
例題 A3.1.9	チェバの定理・メネラウスの定理の逆	★★	101	234		
例題 A3.1.10	メネラウスの定理と面積比	★★★	102	235		
例題 A3.2.1	円に内接する四角形	★★	108	239		
例題 A3.2.2	接線の長さ	★★	109	239		
例題 A3.2.3	接弦定理	★	110	240		
例題 A3.2.4	方べきの定理	★	111	240		
例題 A3.2.5	方べきの定理の逆	★★	112	241		
例題 A3.2.6	トレミーの定理	★★★	113	241		
例題 A3.2.7	共通接線	★★★	114	242		
例題 A3.2.8	互いに接する円	★★	115	243		
例題 A3.2.9	基本的な作図	★	116	243		
例題 A3.2.10	長さが与えられた線分の作図	★★★	117	244		
例題 A3.2.11	2 次方程式の解と作図	★★	118	244		
例題 A3.2.12	2 つの円の共通接線の作図	★★★	119	245		
例題 A3.3.1	直線と平面の垂直	★★	123	249		
例題 A3.3.2	三垂線の定理	★★★	124	249		
例題 A3.3.3	多面体の面・辺・頂点の数	★★★	125	250		
例題 A3.3.4	多面体の切断・体積	★★★	126	250		

第 4 章　数学と人間の活動

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
例題 A4.1.1	倍数の判定法	★★	132	257		
例題 A4.1.2	自然数となる条件	★★	133	257		
例題 A4.1.3	約数の個数と自然数	★★	134	258		
例題 A4.1.4	素因数の個数	★★	135	259		
例題 A4.1.5	最大公約数・最小公倍数 1	★	136	259		
例題 A4.1.6	最大公約数・最小公倍数 2	★★	137	260		
例題 A4.1.7	互いに素に関する証明 1	★★	138	260		
例題 A4.1.8	互いに素に関する証明 2	★★★	139	261		
例題 A4.1.9	互いに素な自然数の個数	★★★	140	261		
例題 A4.1.10	整数の除法と余り	★	141	262		
例題 A4.1.11	余りによる場合分け 1	★★	142	263		
例題 A4.1.12	余りによる場合分け 2	★★★	143	264		
例題 A4.1.13	合同式の利用 1	★★★	144	265		
例題 A4.1.14	合同式の利用 2	★★★	145	266		
例題 A4.2.1	ユークリッドの互除法	★	150	269		
例題 A4.2.2	文字式におけるユークリッドの互除法	★★★	151	270		
例題 A4.2.3	方程式の整数解 1	★★	152	271		
例題 A4.2.4	方程式の整数解 2	★★	153	271		
例題 A4.2.5	方程式の整数解 3	★★★	154	272		
例題 A4.2.6	方程式の整数解 4	★★★	155	272		
例題 A4.2.7	方程式の整数解 5	★★★	156	273		
例題 A4.2.8	方程式の整数解 6	★★★	157	274		
例題 A4.2.9	方程式の整数解 7	★★★	158	275		
例題 A4.2.10	方程式の整数解 8	★★★★	159	276		
例題 A4.2.11	方程式の整数解 9	★★★★	160	277		
例題 A4.2.12	記数法	★	161	277		
例題 A4.2.13	n 進法の四則計算	★	162	278		
例題 A4.2.14	n 進法の位の数	★★★	163	278		
例題 A4.2.15	n 進数の利用	★★	164	279		
例題 A4.2.16	部屋割り論法	★★	165	279		
例題 A4.2.17	ガウス記号を含むグラフ	★★	166	280		
例題 A4.2.18	座標空間における点	★★★	167	280		

三角比の表

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	——

ギリシャ文字の表

大文字	小文字	読み方
A	α	alpha（アルファ）
B	β	beta（ベータ）
Γ	γ	gamma（ガンマ）
Δ	δ	delta（デルタ）
E	ϵ, ε	epsilon（イプシロン）
Z	ζ	zeta（ゼータ）
H	η	eta（イータ）
Θ	θ, ϑ	theta（シータ）
I	ι	iota（イオタ）
K	κ	kappa（カッパ）
Λ	λ	lambda（ラムダ）
M	μ	mu（ミュー）

大文字	小文字	読み方
N	ν	nu（ニュー）
Ξ	ξ	xi（クシー）
O	o	omicron（オミクロン）
Π	π, ϖ	pi（パイ）
P	ρ, ϱ	rho（ロー）
Σ	σ, ς	sigma（シグマ）
T	τ	tau（タウ）
Υ	υ	upsilon（ウプシロン）
Φ	ϕ, φ	phi（ファイ）
X	χ	chi（カイ）
Ψ	ψ	psi（プサイ）
Ω	ω	omega（オメガ）

謝辞

本書の制作にあたり，市販の優れた参考書や資料，そして先人の貴重な研究成果から多くの学びを得ました．「はじめに」でも述べたとおり，教育という営みは古来より知識を継承・発展させる「祖述の学」に通じるものであり，高校数学の分野も例外ではありません．すでに最適解が確立されている箇所が多いことから，たとえ独自の工夫を加えたとしても，最終的に似通った流れや表現に行き着くのは避けがたい面がございます．そこで本書を執筆するにあたっては，よく知られている内容であっても再構成を試みて，細かな表現や途中式，数値などをできる限り変更することで，参考資料への敬意を払いつつも独自の形を保つよう配慮いたしました．

また，多くの参考書で採用されているような，最適解に近い構成を積極的に取り入れた部分もあります．それらは，広く認められている解法であることに加え，問題を最も的確かつ理解しやすい形で解決していると著者が判断したからに他ならず，学習者の利益を最優先に考えた結果でもあります．こうした背景のもと，万が一他の書籍や資料との類似点をご指摘いただいた際には，決して権利を侵害する意図がないことを改めて申し上げるとともに，速やかに事実関係を確認し，必要に応じて修正や対応を行う所存です．

なお，本書は私の趣味的活動の一環として制作しており，商業ベースの出版物や公式教材とは異なる「同人誌」のような位置づけにあります．既存の参考書と同等の完成度を追求するというよりは，PDF のリンク機能やプルダウン機能を活用した「扱いやすさ」や，動画教材との連携によって学習効率を高めるという試みをコンセプトとしております．拙い部分もあるかと存じますが，未熟な私とその教材を温かく見守っていただければ幸いです．

最後に，本書の作成に際し，多くの研究者・教育者の皆様が築かれた知的財産と尽力に学ぶ機会を得られたことに，改めて深く感謝申し上げます．本書を手に取ってくださった皆様が，数学への興味と学習意欲を少しでも高めていただけるならば，これ以上の喜びはありません．今後も皆様からのご意見・ご指摘を糧に，より良い教材づくりを目指して精進してまいります．ありがとうございました．

関連図書（参考文献）

本書を執筆する上でも参考にした，おすすめの参考書を関連図書としていくつか挙げたいと思います．本書と合わせて活用していただくことで，より学習効果が高まることでしょう．

「チャート式」シリーズ（数研出版）：学習参考書の定番として長い歴史を持ち，幅広い範囲を網羅しています．色によって難易度が分類されており，基礎から標準レベルを固めたい人は白チャートや黄チャート，難問にも挑戦したい人は青チャートや赤チャートなど，自分のレベルに合わせて選べる点が魅力です．

「Focus Gold」シリーズ（啓林館）：思考力を鍛えられる良問が並んでいます．受験を意識した例題や実践的な問題が多いため，実力を伸ばしたい人，ある程度数学に自信がある人におすすめです．

「NEW ACTION」シリーズ（東京書籍）：わかりやすい解説を重視しており，教科書レベルから標準的な演習まで丁寧にサポートしてくれます．本書では動画と連携することで「わかりやすさ」を補強していますが，文章自体のわかりやすさを重視したい方には特に役立つでしょう．

「大学への数学」シリーズ（東京出版）：難関大学レベルの受験対策に強みがある雑誌・書籍群です．月刊誌をはじめ，一般の問題集よりもややマニアックな内容や奥深い解法が多く，高度な演習ができるため，数学をさらに深く楽しみたい人にもおすすめです．

「総合的研究」シリーズ（旺文社）：「総合的研究数学 I+A」「論理学で学ぶ数学」など，学校の定期試験や受験対策だけでなく，数学を学問としてしっかり学びたい人にも対応する内容の書籍もあります．これらの書籍は受験用の数学の範囲を超えた話題に触れられることもあり，大学レベルへのステップアップを見据える人に有用です．

あくまで個人の推薦であり，これらの出版社や著者と公式な提携関係はありません．また，ここに挙げた以外にも素晴らしい教材や良書は多数存在しますが，私の個人的な見解から特におすすめしたいものを簡単に取り上げています．

あとがき

数学 I・A の One More と，それに付随する解説動画の作成を無事に終えることができました．本書をお手に取ってくださった方々，また動画をご視聴いただいた皆さまには，心より感謝申し上げます．

私は幼い頃から漫画が大好きで，「読み手を惹きつける工夫」を数多く学んできました．その体験を参考書づくりにも活かし，あたかも漫画家のように構成を練り上げながら執筆しています．本書は単なる「問題集」にとどまらず，一貫性ある構成と数学の奥深さを感じられる作品にしたいという思いで設計しました．

なお，本書および動画の制作では「犬飼シムラ」というペンネームを使用しています．これは漫画家と同様に，作品への没入感を高めたいこと，またプライバシー保護の観点からでもあります．今後，本名などを公開する予定は未定ですが，当面は控えさせていただきますのでご了承ください．

本書では，執筆，作問，編集，校正，組版，図形作成，表紙・ロゴデザイン，挿絵，動画原稿・字幕の作成，動画の編集に至るまで，すべての作業を一人で行いました．作業量は膨大で，例えば本書のソースコードの文字数と行数を示せばイメージがつきやすいでしょうか．本書だけで，ソースコードの文字数は約 130 万文字，行数は約 40000 行ありました（LaTeX という組版システムを使用しており，単に日本語テキストだけではなくコマンド文字列を含めています）．字幕や動画原稿も合わせると更に文字数は多くなり，その作業を本業の公立高校の教員と並行して進めているため，新しい参考書を頻繁に公開することは難しいのが現状です．また，いただいたコメントやご意見には可能な限り対応したいと考えていますが，すべてにお返事できない場合もあるかもしれません．何卒ご容赦ください．

「外注などをすれば効率が良いのでは」という意見もあるかもしれません．しかし，私は参考書作りに関しては，参考書を一つの「作品」として捉えており，執筆から図形の細部に至るまで，自分の手で丁寧に仕上げることにこだわっています．定番問題が多く特別な解説を記していないため，どこにでもあるような内容に見える部分があるかもしれませんが（そのような内容に意図的に寄せていますが），細部まで思いを込めて作り込むことで，より質の高い教材を提供できると信じています．とはいえ，校正作業だけは本当に大変ですね．どんなに工夫しても一人で校正するのには限界があると感じており，アシスタントが欲しいくらいです（主に手計算，手打ちで問題や図形を設定している影響でミスが頻出し，時間が掛かります）．第三者の視点を取り入れる必要性を実感しており，今後の課題として取り組んでいきたいと考えています．

次回作は数学 II・B の One More を予定しています．現時点で，既に一部作業を進めて形になりつつありますが，完成時期は未定です（可能な限り早く出したいと思っています）．また，本書のような参考書の他にも，「こんな教材を作りたい」というアイデアは沢山あります．しかし，一つ一つを形にするには時間が必要です．とりあえずしばらくの間は，本書の数学 II・B 版の作成を少しずつでも進めていきたいと考えています．

何かご意見やお問い合わせがありましたら，メールにてお気軽にお寄せください．私は数学教育の世界に微力ながら貢献したいという思いから，本書のような教材を一般公開することを始めました．皆さんの学びがより豊かなものになることを心から願っています．

著者：犬飼　シムラ

著者紹介

著者：犬飼 シムラ（いぬかい・しむら）

早稲田大学教育学部数学科を卒業し，高等学校の公立学校教員として勤務している．専門は函数解析，数学教育など．好きなものは，漫画，犬，動物，スポーツ，サウナとのこと．神奈川県在住との噂がある．

表紙デザイン：PGF/TikZ を使用して作成
本文：LaTeX を使用して作成
図版：PGF/TikZ を使用して作成
挿絵：PGF/TikZ を使用して作成・知人に依頼して作成

One More（数学 A）

2025年 4月 11日　初版公開
2025年 4月 19日　第 2 版公開
2025年 5月 14日　第 3 版公開
2025年 6月 22日　第 4 版公開
2026年 4月 7日　第 5 版公開

著者： 犬飼（いぬかい） シムラ
発行： Onemath

Onemath