Ⅰ

One More （数学 I）

高等学校数学科用

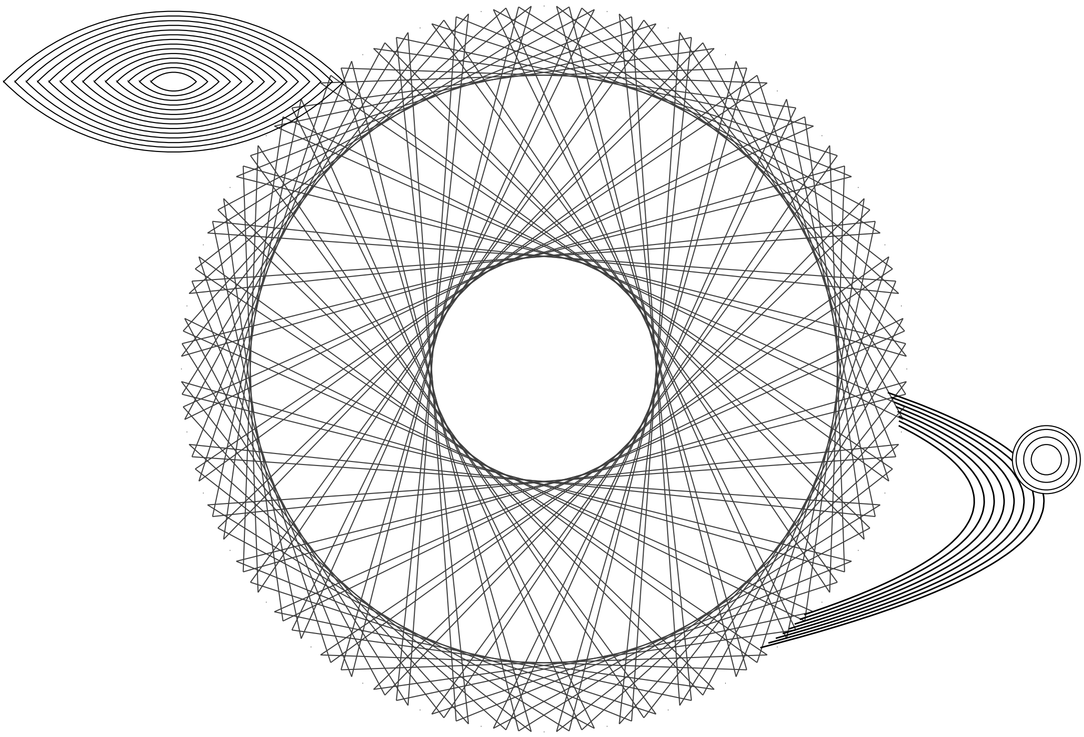
Onemath

※ 本 PDF は，プルダウン機能やチェックボックス機能を取り除いたものとなります．そのため，説明文中にプルダウンやチェックボックス機能に関する記述が残っておりますが，実際には使用できませんので，あらかじめご了承ください．

One More 数学 I

One More 数学 I

Onemath



はじめに

本書を手に取っていただき，ありがとうございます．本書は，高等学校の数学学習を効率的かつ効果的にサポートするために執筆された参考書です．基本的な知識の整理から，発展的な内容の習得までを目指した，いわゆる網羅系の参考書として編纂しました．動画解説や豊富なリンク機能を導入し，学習者が便利に活用できる設計となっています．特に電子版（PDF 版）では，解説動画への簡単なアクセスを可能にし，紙媒体では二次元コードを活用することで，繰り返し学習できる環境を整えました．

現在の大学入試用の数学参考書は，どれも非常に高品質で，高校数学教育の長い歴史の中で積み上げられた知識が見事に反映されています．これらの参考書は，数学的な厳密さと分かりやすさを両立させながら，限られた紙面の中で効率よく内容を伝えるためのフォーマットが確立され，最適化されつつあります．数学教育自体は性質上，既存の知識を整理し，体系的に伝達する「祖述の学問」に近いものがあります．そのため，現在の市場には質の高い教材が数多く存在し，学習者にとっても多くの選択肢が揃っています．

そうした素晴らしい既存の参考書を踏まえてリスペクトしつつ，本書は更なる効率的な学習を目指して設計しました．問題数を厳選し，入試対策の基盤を短期間で築けるよう随所で工夫するとともに，動画を繰り返し視聴することで，視覚的・聴覚的に記憶の定着を図ることができます．こうした工夫により，数学教育として最適化されつつある内容を効率良く学習できるように精選したものが本書となっております．

一方で，効率性だけに依存せず，数学的な厳密さや思考力も重視し，その両立を目指しています．あえて直感的すぎる説明を避けている箇所もあり，表現が周りくどく感じられることもあるかもしれません．しかし，これは数学的な厳密さや，高校数学に限らない一般的な数学の記法などを優先した結果です．最初は本書の表現に戸惑うかもしれませんが，読み進めるうちに自然と慣れ，着実に数学の力を身につけることができることでしょう．

また，作題や解答の作成には特に力を注ぎました．一部の有名問題を除き，殆どの問題と解説は自作したものです．多くの入試問題を参照し，個性を出しすぎず，広く入試問題に対応できる汎用性を持たせることに労力を掛けました．日本の高校数学における特有の慣習や配慮，細かいニュアンスなどが反映されているはずです．しかし，執筆量が多かったため，校正には万全を期したつもりですが，計算ミスや誤字・脱字，誤りなどが残っている可能性があります．お手数ですが，皆さんからの御叱正の程をよろしくお願いしたいと思っております．

本書は，私自身の教員経験を活かし，学習者や教員が便利に，自由に活用できる網羅系の参考書として作り上げました．誰でも気楽に使えるような，「こんな参考書があっても良いのではないか」という思いを込めて作成しています．また，本書は複数ページにまたがる記述や他のページを参照する記し方を可能な限り排し，1 ページで完結するようにしました．動画で補足的に他のページを参照することもありますが，基本的には 1 ページで完結するので，扱いやすさが増していると思います．自分の弱点箇所だけを印刷したり，印刷したものをシャッフルしてテストのように使ったりするなど，活用の幅は広がるはずです．本書が，皆さんの学びのパートナーとなり，さらなる数学の探求へと導く一助となれば幸いです．ぜひ，楽しみながら学習を進めてください．

著者：犬飼　シムラ

本書は，YouTube 動画と対応した教材として，PDF 形式で提供されています．内容の改善や更新に伴い，動画が削除または変更される場合があります．常に最新版の教材を使用し，最新の動画リンクを参照するようにしてください．最新バージョンは，YouTube の各動画の概要欄またはホームページからダウンロードできます．

本書は印刷された書籍として販売されているわけではありません．そのため，印刷したものが必要な場合は，学習者ご自身で PDF をダウンロードし，お手元で印刷してご利用ください．なお，PDF 版には，リンク機能や，プルダウン機能，チェックボックス機能を用いた学習の進捗状況を記録する機能があり，デジタル環境での利用がより便利です．しかし，利用環境によってはこれらの機能が正しく動作しない場合がありますのでご注意ください（ブラウザ上ではなく，PDF をダウンロードして使ったり，環境を変えたりすると正しく動作することがあります）．

本書の構成

本書には，これからの学習計画を立てたり，復習したりする際に便利な章扉と例題（問題）一覧のページがあります．章扉は各章のはじめに，例題（問題）一覧は巻末にあります．適宜ご活用ください．

【章扉】

問題への取り組み状況をメモすることで，学習の振り返りがしやすくなります．電子版（PDF 版）には，各問題へのリンクがついています．

【例題・問題の番号について】

例題や問題，節末問題（基本事項）は次のような規則に基づいて，番号をつけています．

問題 I 1.3.2 $\cdots$ 数学 I の 1 章の 3 節の 2 番目の問題（事項）

また，章末問題は次のような規則に基づいて，番号をつけています．

章末 I 2.1 $\cdots$ 数学 I の 2 章の 1 番目の問題

【プルダウン機能について】

本書の章扉ページ，例題・節末・章末問題ページ，例題（問題）一覧ページには，日々の学習記録を管理できるプルダウン機能が備わっています．一箇所で勉強の記録をチェックすると，その情報は該当する他のページにも自動的に反映され，保存されます．この機能により，学習の進捗状況を効率的に把握することができます．なお，環境によっては，印刷時にプルダウン部分に枠線が印刷されることもあります．

プルダウン機能

1 回目： 2 回目：

【チェックボックス機能について】

本書の例題ページ，動画一覧ページには，日々の動画視聴の記録を管理できるチェックボックス機能が備わっています．一箇所で動画視聴の記録をチェックすると，その情報は該当する他のページにも自動的に反映され，保存されます．この機能により，動画視聴の進捗状況を効率的に把握することができます．

チェックボックス機能

解説動画 ☐
解説動画 ☑

【基本事項について】

1.1.3　多項式の計算

	加法	乗法
交換法則	$A+B=B+A$	$AB=BA$
結合法則	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$

分配法則 $\cdots A(B+C)=AB+AC,\ (A+B)C=AC+BC$

とくに $A-B$ のような場合においては，括弧を忘れないように注意すること（右の例を参照）．また，分配法則を用いて多項式を変形，単項式の和のみの形にすることを**多項式の展開**という．

◀ 例：$A=2x+3y$，$B=x-y$ のとき，

$$\begin{aligned} &A-B \\ =&(2x+3y)-(x-y) \\ =&2x+3y-x+y \\ =&x+4y \end{aligned}$$

各節の冒頭には，その節で扱う基本事項を分かりやすく整理しています．定理や公式など，問題を解く際に必要となる重要なポイントを簡潔に整理しています．

【例題・問題について】


(vii) 1 数と式 (vii) 1.1 式の展開と因数分解

例題 I1.1.1 多項式の整理と次数，定数項 (i) ★ 数学 I (vii)

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$4-3x^3+2x-5x+x^3+x^2-7+3x^2$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．

$$3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a \quad [a],\ [a \text{ と } b]$$

(ii) 解説動画

(iii) 考え方 多項式の次数 ··· 同類項をまとめて整理した多項式において，最も次数が高い項の次数のこと．

(1) 同類項をまとめ，x について次数の高い順に並べる．

(2) 着目した文字以外の文字は，数として考える．例えば，a について着目したときは，b を数として扱う．

$$\underbrace{3a^2}_{2\text{次}}-\underbrace{4a^2b}_{2\text{次}}-\underbrace{ab^2}_{1\text{次}}+\underbrace{2b}_{\text{定数項}}+\underbrace{5a^2b}_{2\text{次}}-\underbrace{5}_{\text{定数項}}-\underbrace{2a}_{1\text{次}} \quad (a \text{ に着目したとき})$$

(iv) 解答

(1) $4-3x^3+2x-5x+x^3+x^2-7+3x^2$

$=(-3x^3+x^3)+(x^2+3x^2)+(2x-5x)+(4-7)$

$=\boldsymbol{-2x^3+4x^2-3x-3}$

よって，**次数は 3，定数項は −3**

◀ 同類項をまとめ，降べきの順（次数の高い順）に整理する．

◀ $-2x^3$ より，最も高い次数は 3 である．

(2) a に着目すると，

$$\begin{aligned}3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a &= (3-4b+5b)a^2+(-b^2-2)a+2b-5\\ &= (3+b)a^2-(b^2+2)a+2b-5\end{aligned}$$

よって，a に着目したとき，**次数は 2，定数項は $2b-5$**

◀ 着目した文字以外の文字を定数として考える．

また，a と b に着目すると，

$$\begin{aligned}3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a &= (-4+5)a^2b-ab^2+3a^2-2a+2b-5\\ &= a^2b-ab^2+3a^2-2a+2b-5\end{aligned}$$

よって，a と b に着目したとき，**次数は 3，定数項は −5**

◀ a^2b と $-ab^2$ より，最も高い次数は 3 である（次数は掛け合わせた文字の総数）．

One Point

(v) **文字について着目 → 着目した文字以外の文字を数として考える．**

(vi) 問題 I1.1.1 ★ 解答 p.223 (vii) (vii) ▶ 節末 I1.1.1

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$4x+5x^3+4x^2y+y-3x^2y-2-7y^2+3xy^2$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．

$$3ax^5-2abx^3y+5x^2y^4+b^3y^4-2a^3b, \quad [x],\ [y],\ [x \text{と} y]$$

1 回目： 2 回目： 16 (vii)

(i) 難易度（レベル）：★ の数に応じて，4 段階の難易度に分けて設定しています．

★ ··· 基礎問題（教科書の標準程度）

★★ ··· 標準問題（教科書の発展程度）

★★★ ··· 応用問題（入試問題の基礎程度）

★★★★ ··· 発展問題（入試問題の標準程度）

節末問題，章末問題の問題にも，同じように難易度（レベル）で分けて設定しています．

(ii) 解説動画：PDF 版では，青色部分の二次元コードをタップもしくはクリックすると，解説動画にアクセスできます．また，チェックボックスに動画視聴の履歴を記録できます．

(iii) 考え方：例題の解放や方針，まとめなどを記しています．

(iv) 解答：標準的な解法や，別解を記しています．側注には，適宜解答を補足しています．

(v) One Point：解答後にポイントが確認できるように，簡潔にまとめています．

(vi) 問題：例題の類題で構成しています．関連する節末問題や章末問題の番号を示した箇所もあります．

(vii) リンク機能：PDF 版では，リンク付きの箇所は青色で表示されており，活用することができます．それとは別に，図や解答に青色が使われることもあります．右下のフッターにあるロゴには，「例題（問題）一覧」へのリンク機能がついています．

また，上記以外にも必要に応じて，【注意】【余談】を記し，補足情報を提供しています．

【節末問題】

節ごとに 1 ページで構成された，各節のまとめとなる問題です．例題に沿ったものを中心として，標準的な内容から入試レベルの問題を中心に構成しています．

【章末問題】

章ごとに 1 ページで構成された，各章のまとめとなる問題です．節末問題との差は大きくありませんが，より実践的なものや，既に学習した章との融合問題を含むことがあります．

【コラム】

本書の効果的な使い方など，様々なことについてまとめています．

【例題（問題）一覧】

各例題（問題）のタイトルが一覧としてまとめられたもので，巻末にあります．利便性を上げるために，PDF 版からは各ページの右下のフッターにあるロゴに「例題（問題）一覧」へのリンク機能がついています．印刷時にページを参照するときや，タイトルから例題を探したいときに便利です．

One math

ロゴにリンク機能あり

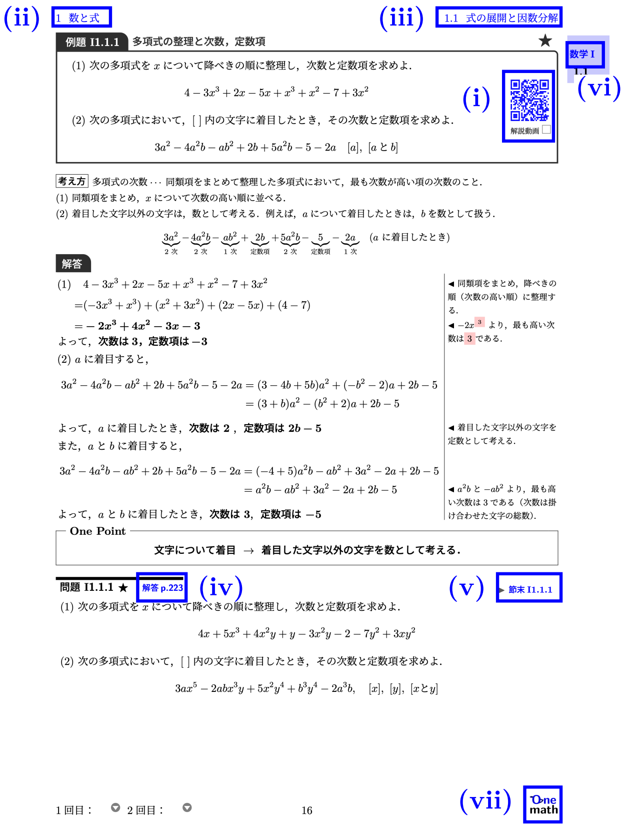
【索引】

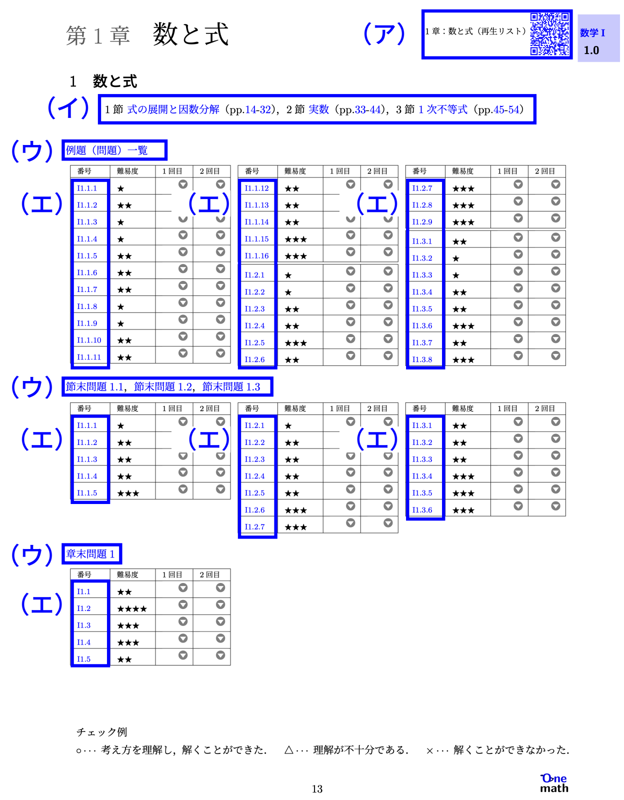
数学の用語を五十音に並べたもので，巻末にあります．用語から確認したいときなどに便利です．

リンク機能について

本書では，学習者がより効率的に教材を活用できるよう，PDF 版においてリンク機能を多数取り入れています．青色で表示されている箇所にはリンク機能が埋め込まれており（それとは別に，図や解答でも青色が使用されることがあります），関連する情報やコンテンツに素早くアクセスすることが可能です．

リンク機能の詳細をすべて説明するには紙面の都合上限りがありますが，以下にその一部を紹介します．リンク機能を活用することで，学習を効率化し，理解を深めることができます．使い込むほどに便利さを実感していただけるはずですので，ぜひ積極的に試してみてください．





例題ページ･･･ 例題ページには，学習をサポートするための多様なリンクが設定されています．以下のような用途で活用できます．

(i) YouTube で解説動画を閲覧したいとき

(ii) 該当する章の章扉を確認したいとき

(iii) 該当する節の基本事項を確認したいとき

(iv) 問題の解答を確認したいとき

(v) 関連する問題を確認したいとき

(vi) 目次を確認したいとき

(vii) 例題（問題）一覧を確認したいとき

章扉ページ･･･ 章扉ページには，章全体の学習をサポートするリンクが設定されています．以下のような用途で活用できます

（ア）YouTube で該当する章の解説動画のリストを閲覧したいとき

（イ）該当する節の基本事項を確認したいとき

（ウ）例題（問題）一覧，節末問題，章末問題を確認したいとき

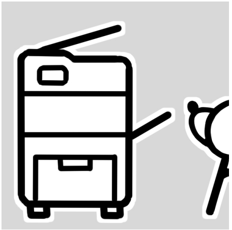
（エ）該当する問題を各問題番号から直接確認したいとき

本書を用いた学習例

本書は，印刷物（ご自宅の印刷機などで印刷してください）を利用した学習方法と，PDF 版（電子版）を利用した学習方法を想定しています．ご自身に最適な方法を探し出し，効果的に学習を進めてください．なお，印刷環境が整っていない場合は，PDF 版（電子版）をご利用ください．

【印刷物を活用する例】

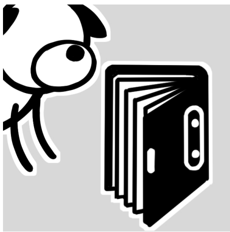
本書を印刷して利用する場合，**A4 サイズの用紙での印刷を推奨**しています．一般的な家庭の印刷機は A4 サイズに対応しているものが多いことから，A4 サイズでの活用を想定して執筆しました（全ページを印刷して冊子のように使用する場合は，やや嵩張り重量が増してしまいますが）．B5 サイズなどに縮小印刷すると文字が小さくなり，読みづらくなる可能性がありますのでご注意ください．



苦手な部分や特定の節や章だけを印刷して学習することも可能です．必要な部分だけを手元に置くことで，効率的な学習が期待できます．

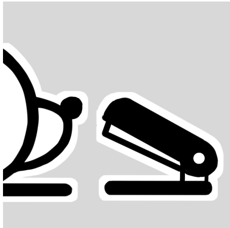
【バインダーを使用する方法】

印刷物を活用する方法の中で特に**推奨するのが，市販のバインダーを活用**する方法です．全ページを印刷する場合でも，一部だけ印刷する場合でも，2 穴タイプのバインダーを使用すると便利です．穴あけパンチとバインダーがあれば，本書を本のように快適に扱うことができます．全ページを収納する場合は，大容量のバインダー（数百枚収納できるもの）を選ぶと良いでしょう．バインダーはページの順番を自由に入れ替えられるため，自分だけのカスタマイズが簡単に可能なのでおすすめです．



【ホチキスを使用する方法】

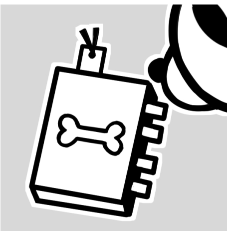
特定の節や章を印刷して利用する際には，ホチキスを用いれば簡単に冊子形式にまとめることができます．ただし，ページ数が多い場合は強力な大型のホチキスが必要となりますのでご注意ください．また，ホチキスの針の裏側は手を傷つける恐れがありますので，セロハンテープや製本テープで保護することをおすすめします．



【爪かけを活用する方法】

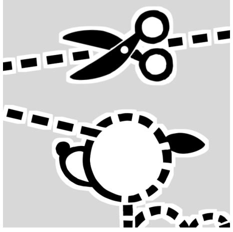
辞書や辞典のような厚みのある本で，本文の内容を小口側から検索しやすくするものを爪かけといい，本書にもページの右端部分につけています．爪かけを活用すると，目的のページを素早く見つけることができます．ただし，ご自宅のプリンターで印刷する場合，設定によっては印刷範囲の関係で紙の端まで印刷できず，ページの右端の爪かけ部分が機能されないことがあります（本書を横から見た時に，爪かけ部分が見えなくなります）．この場合，カッターと定規を使って本の小口（ページの外側の端）を少し切り落とすと，爪かけが機能するようになります．

【オリジナル参考書を作成する方法】



自分の**苦手な問題だけを集めて印刷したり，特定の節を組み合わせてオリジナルの参考書**を作成することも可能です．自分だけの参考書を作ることで，学習意欲も高まるでしょう．自分の学習スタイルやニーズに合わせて参考書をカスタマイズすることで，学習効率を飛躍的に高めることができます．

【オリジナルノートを作成する方法】



本書は A4 サイズですが，印刷した際の本文部分の幅は B5 サイズのノートにぴったり収まるように設計されています（ギリギリですが）．本文部分をきれいに切り取り，B5 サイズのノートに貼り付けることで，自分だけのオリジナルノートを作成できます．苦手な問題や重要なポイントをまとめたノートを作成し，学習効率をさらに高めましょう．

【PDF 版（電子版）を活用する例】

本書は PDF 版も用意しており，リンク機能や学習の結果をプルダウンやチェックボックスで選択し，記録する機能を備えているため非常に便利です．以下に，PDF 版を活用する方法を紹介します．

【スマートフォンでの活用】

スマートフォンに PDF 版をダウンロードしておけば，通学・通勤時間やちょっとした隙間時間に学習することができます．どこでも手軽にアクセスできるため，学習のハードルが下がります．YouTube のチャンネルを登録し，動画をお気に入りに登録しておくと，興味のある箇所をすぐに見返すことができます．また，紙での勉強に疲れた時などにも，動画による学習はおすすめです．

【タブレット端末・PC での活用】

タブレットやパソコンでは大画面で閲覧できるため，細かな数式や図も見やすくなります．自宅で集中して勉強したい時や，カフェなどでリラックスして学習する時に最適です．画面が大きいことで長時間の学習でも目の負担が軽減されます．

【学習アプリとの併用】

PDF に書き込みができる学習アプリを使用すると，デジタル上でメモやマーカーを追加できます．ただし，一部のアプリではリンク機能やプルダウン機能，チェックボックス機能が失われることがありますのでご注意ください．書き込み機能を活用することで，紙のノートと同じように自分だけの学習記録を残すことができます．

【その他の活用方法】

他の参考書と併用したり（本書を補足・演習用にするなど），**ページを抜き出してシャッフルしたりして学習するなど，自由な発想**で本書を活用してください．また，他の読者の学習にも役立つことがあるかもしれませんので，「こんな学習方法を試してみた」などのアイデアがあれば，ぜひご連絡ください．

第 I 部

数学 I

目次

例題（問題）一覧へのリンク

PDF 版からは各ページの右下のフッターにあるロゴに「例題（問題）一覧」へのリンク機能がついています．印刷時にページを参照するときや，タイトルから例題を探したいときに便利です．

ロゴにリンク機能あり

第 1 章　数と式

1　数と式

1 節 式の展開と因数分解（pp.14-32），2 節 実数（pp.33-44），3 節 1 次不等式（pp.45-54）

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.1.1	★		
I1.1.2	★★		
I1.1.3	★		
I1.1.4	★		
I1.1.5	★★		
I1.1.6	★★		
I1.1.7	★★		
I1.1.8	★		
I1.1.9	★		
I1.1.10	★★		
I1.1.11	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.1.12	★★		
I1.1.13	★★		
I1.1.14	★★		
I1.1.15	★★★		
I1.1.16	★★★		
I1.2.1	★		
I1.2.2	★		
I1.2.3	★★		
I1.2.4	★★		
I1.2.5	★★★		
I1.2.6	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.2.7	★★★		
I1.2.8	★★★		
I1.2.9	★★★		
I1.3.1	★★		
I1.3.2	★		
I1.3.3	★		
I1.3.4	★★		
I1.3.5	★★		
I1.3.6	★★★		
I1.3.7	★★		
I1.3.8	★★★		

節末問題 1.1，節末問題 1.2，節末問題 1.3

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.1.1	★		
I1.1.2	★★		
I1.1.3	★★		
I1.1.4	★★		
I1.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.2.1	★		
I1.2.2	★★		
I1.2.3	★★		
I1.2.4	★★		
I1.2.5	★★		
I1.2.6	★★★		
I1.2.7	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.3.1	★★		
I1.3.2	★★		
I1.3.3	★★		
I1.3.4	★★★		
I1.3.5	★★★		
I1.3.6	★★★		

章末問題 1

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.1	★★		
I1.2	★★★★		
I1.3	★★★		
I1.4	★★★		
I1.5	★★		

チェック例

○ · · · 考え方を理解し，解くことができた．　△ · · · 理解が不十分である．　× · · · 解くことができなかった．

1.1 式の展開と因数分解

1.1.1 単項式と多項式

(1) 数や文字，またはそれらを掛け合わせてできる式を**単項式**という．単項式において，掛け合わせた文字の総数をその単項式の**次数**という．また，数の部分を**係数**という．

◀ 例：単項式 $3x^2$ の次数は 2，係数は 3 である．

2 種類以上の文字が含まれる単項式では，1 つの文字に着目して係数や次数を考えることがあり，このとき他の文字は数と同様に扱われる．

(2) **多項式**とは，複数の単項式の和で表される式であり，これら単項式を多項式の**項**という．多項式は**整式**ともいわれる．

◀ 単項式を項が 1 つである多項式と考えることができる．なお，定義の仕方によって，単項式と多項式を区別する立場をとることもある．

(3) 多項式において，文字部分が同じである項を**同類項**という．多項式は，同類項を 1 つにまとめて整理することができる．

(4) 同類項をまとめて整理した多項式において，最も次数が高い項の次数をその多項式の**次数**とし，次数が n の多項式を $\boldsymbol{n}$ **次式**という．

2 種類以上の文字を含む多項式においても，特定の文字に着目し，他の文字は数として扱うことがある．多項式において，着目した文字を含まない項を**定数項**という．

◀ $3ax^2+y$ において，x に着目すると次数は 2，係数は $3a$，定数項は y となる．

1.1.2 多項式の整理

多項式において，特定の文字に着目して，その文字の次数が高いものから低いものへと並び替えることを**降べきの順に整理する**という．逆に，次数が低いものから高いものへと並べ替えることを**昇べきの順に整理する**という．

◀ 例：$xy^2+x^3+x^2y+y^2$ を x について降べきの順に整理すると，

$$x^3+yx^2+y^2x+y^2$$

1.1.3 多項式の計算

	加法	乗法
交換法則	$A+B=B+A$	$AB=BA$
結合法則	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$

分配法則 $\cdots A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$

とくに $A-B$ のような場合においては，括弧を忘れないように注意すること（右の例を参照）．また，分配法則を用いて多項式を変形，単項式の和のみの形にすることを**多項式の展開**という．

◀ 例：$A=2x+3y$，$B=x-y$ のとき，

$$\begin{aligned}&A-B\\=&(2x+3y)-(x-y)\\=&2x+3y-x+y\\=&x+4y\end{aligned}$$

1.1.4 指数法則

m，n を正の整数とする．このとき，次の**指数法則**が成り立つ．

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn},\quad (ab)^n=a^nb^n$$

なお，2×3 を $2\cdot 3$ とも表す．

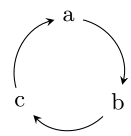
◀ $(3^2)^3\neq 3^5$ であるので注意すること．正しくは，$(3^2)^3=3^6$

1.1.5 乗法公式

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
(4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
(5) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
(6) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
(7) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
(8) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

◀ (1) において b を $-b$ とおくと，(2) が導かれる．(7) も同様の手順を考えれば，(8) が導かれる．

◀ a，b，c が輪の形となるように，循環するように整理している．これを，**輪環の順 (cyclic order)** に整理するという．



式を整理するときには，「アルファベット順」「輪環の順」「降べきの順」などが有効である．これらを用いて，式を見やすく整理することが推奨される．

1.1.6 因数分解

1 つの多項式を，1 次以上の多項式の積の形に変形することを，もとの式を**因数分解する**という．このとき，積を構成する各式を，もとの式の**因数**という．

◀ 因数分解は，既約分解または素元分解ということもある．

多項式の各項に共通の因数が存在する場合には，その共通因数をくくり出し，括弧の外にくくり出すことにより因数分解を行うことができる．

◀ $\underbrace{AB+AC}_{A\text{ が共通因数}}=A(B+C)$

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
(2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
(3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
(4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
(5) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
(6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
(7) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
(8) $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$
(9) $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$
(10) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$
(11) $a^4+a^2+1=\left(a^2+a+1\right)\left(a^2-a+1\right)$

◀ (5) たすき掛けの因数分解という．

◀ (8) 符号に注意すること．

◀ (9) 符号に注意すること．

◀ (11) 複 2 次式の形である．

なお，与えられた多項式を因数分解するときには，とくに指定がない限り，因数の係数を有理数の範囲内で考える．

◀ 例えば x^2-4 は (3) より，$(x+2)(x-2)$ と因数分解できるが，x^2-3 や x^2-2 などは因数分解できない．

$$\begin{tikzcd} x^2+5x+6 \arrow[r, bend right, "\text{因数分解}"'] & (x+2)(x+3) \arrow[l, bend right, "\text{展開}"'] \end{tikzcd}$$

例題 I1.1.1 多項式の整理と次数，定数項 ★

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$4-3x^3+2x-5x+x^3+x^2-7+3x^2$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．

$$3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a,\quad [a],\ [a \text{ と } b]$$

解説動画

考え方 多項式の次数 ⋯ 同類項をまとめて整理した多項式において，最も次数が高い項の次数のこと．
(1) 同類項をまとめ，x について次数の高い順に並べる．
(2) 着目した文字以外の文字は，数として考える．例えば，a について着目したときは，b を数として扱う．

$$\underbrace{3a^2}_{2\text{ 次}}-\underbrace{4a^2b}_{2\text{ 次}}-\underbrace{ab^2}_{1\text{ 次}}+\underbrace{2b}_{\text{定数項}}+\underbrace{5a^2b}_{2\text{ 次}}-\underbrace{5}_{\text{定数項}}-\underbrace{2a}_{1\text{ 次}}\quad (a \text{ に着目したとき})$$

解答

(1) $4-3x^3+2x-5x+x^3+x^2-7+3x^2$

$=(-3x^3+x^3)+(x^2+3x^2)+(2x-5x)+(4-7)$

$=\boldsymbol{-2x^3+4x^2-3x-3}$

よって，**次数は 3，定数項は -3**

◀ 同類項をまとめ，降べきの順（次数の高い順）に整理する．

◀ $-2x^3$ より，最も高い次数は 3 である．

(2) a に着目すると，

$$\begin{aligned}3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a &= (3-4b+5b)a^2+(-b^2-2)a+2b-5\\ &= (3+b)a^2-(b^2+2)a+2b-5\end{aligned}$$

よって，a に着目したとき，**次数は 2**，**定数項は $2b-5$**

◀ 着目した文字以外の文字を定数として考える．

また，a と b に着目すると，

$$\begin{aligned}3a^2-4a^2b-ab^2+2b+5a^2b-5-2a &= (-4+5)a^2b-ab^2+3a^2-2a+2b-5\\ &= a^2b-ab^2+3a^2-2a+2b-5\end{aligned}$$

よって，a と b に着目したとき，**次数は 3，定数項は -5**

◀ a^2b と $-ab^2$ より，最も高い次数は 3 である（次数は掛け合わせた文字の総数）．

One Point

文字について着目 → 着目した文字以外の文字を数として考える．

問題 I1.1.1 ★ 解答 p.224

▶ 節末 I1.1.1

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$5+x^4-3x^3+2x-4x+3x^2-9-x^4$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．

$$4b^2-3ab^2+ab-6a+7a^2-3+2b^3,\quad [b],\ [a \text{ と } b]$$

例題 I1.1.2 多項式の加法・減法 ★★

$A = x^2 + 3x - 1$，$B = 2x^2 - 2x + 5$ について，次の式を計算せよ．

(1) $A + B$　　(2) $A - B$

(3) $2A + B$　　(4) $2(3A - B) - \{(2A + 3B) - (A + 2B)\}$

解説動画

考え方

(2) 括弧の前にマイナスがついているときは，括弧を外すと括弧内の各項の係数の符号が変わる．

(4) A，B の式を直接代入せず，与えられた式を整理してから代入する．

解答

(1)
$$\begin{aligned} A + B &= (x^2 + 3x - 1) + (2x^2 - 2x + 5) \\ &= (x^2 + 2x^2) + (3x - 2x) + (-1 + 5) \\ &= \boldsymbol{3x^2 + x + 4} \end{aligned}$$

◀ 同類項をまとめて計算する．

(2)
$$\begin{aligned} A - B &= (x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - 2x + 5) \\ &= x^2 + 3x - 1 - 2x^2 + 2x - 5 \\ &= (x^2 - 2x^2) + (3x + 2x) + (-1 - 5) \\ &= \boldsymbol{-x^2 + 5x - 6} \end{aligned}$$

◀ $-(2x^2 - 2x + 5)$ は括弧を外すと，各項の係数の符号が変わる（分配法則）．

(3)
$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(x^2 + 3x - 1) + (2x^2 - 2x + 5) \\ &= 2x^2 + 6x - 2 + 2x^2 - 2x + 5 \\ &= (2x^2 + 2x^2) + (6x - 2x) + (-2 + 5) \\ &= \boldsymbol{4x^2 + 4x + 3} \end{aligned}$$

◀ この行は省略してもよい．

(4) $2(3A - B) - \{(2A + 3B) - (A + 2B)\} = 2(3A - B) - (A + B)$
$$\begin{aligned} &= 6A - 2B - A - B \\ &= 5A - 3B \\ &= 5(x^2 + 3x - 1) - 3(2x^2 - 2x + 5) \\ &= 5x^2 + 15x - 5 - 6x^2 + 6x - 15 \\ &= \boldsymbol{-x^2 + 21x - 20} \end{aligned}$$

◀ A，B について整理する．
$\{(2A + 3B) - (A + 2B)\}$
$= 2A + 3B - A - 2B$
のように，括弧は内側から外すとよい．

One Point

多項式を直接代入せず，整理してから代入する．

多項式の加法・減法は，同類項をまとめて次のように筆算で計算してもよい．

(1)
$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +3x & -1 \\ + & 2x^2 & -2x & +5 \\ \hline & 3x^2 & +x & +4 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +3x & -1 \\ - & 2x^2 & -2x & +5 \\ \hline & -x^2 & +5x & -6 \end{array}$$

問題 I1.1.2 ★★ 解答 p.225

$A = 2x^2 - 4x + 3$，$B = 3x^2 + x - 7$ について，次の式を計算せよ．

(1) $A + B$　　(2) $A - B$

(3) $3A - 2B$　　(4) $4(A + B) - (2A - 3B)$

例題 I1.1.3 多項式の乗法 ★

次の計算をせよ．

(1) $4x^3y^2 \times (-2xy^3)^2$　　　(2) $2ab^2c(3a^3 + 2b + c^2)$

(3) $(x + 2)(2x^2 - x + 5)$　　　(4) $(2x^3 - 4x^2 + x)(2 - x + x^2)$

解説動画

考え方

(1) 指数法則を用いる．

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

(2) 分配法則を用いる．

$$A(B + C) = AB + AC$$

(3) 分配法則を用いて，次のように展開する．

$$(x + 3)(x^2 + 2x - 5)$$

(4) 降べきの順に整理してから展開する．

解答

(1) $4x^3y^2 \times (-2xy^3)^2 = 4x^3y^2 \times (-2)^2x^2(y^3)^2 = 4x^3y^2 \times 4x^2y^6$

$= 4 \cdot 4x^{3+2}y^{2+6} = \boldsymbol{16x^5y^8}$

◀ $(-2xy^3)^2$ を先に計算する．

◀ 係数の積，文字の積をそれぞれ計算する．

(2) $2ab^2c(3a^3 + 2b + c^2) = 2ab^2c \cdot 3a^3 + 2ab^2c \cdot 2b + 2ab^2c \cdot c^2$

$= \boldsymbol{6a^4b^2c + 4ab^3c + 2ab^2c^3}$

◀ $A(B + C) = AB + AC$ より，次のことがいえる．

$A(B+C+D) = AB+AC+AD$

(3) $(x + 2)(2x^2 - x + 5) = x(2x^2 - x + 5) + 2(2x^2 - x + 5)$

$= 2x^3 - x^2 + 5x + 4x^2 - 2x + 10$

$= \boldsymbol{2x^3 + 3x^2 + 3x + 10}$

◀ $(A + B)(C + D + E)$
$= AB + AD + AE$
$+ BC + BD + BE$

(4) $(2x^3 - 4x^2 + x)(2 - x + x^2)$

$=(2x^3 - 4x^2 + x)(x^2 - x + 2)$

◀ 降べきの順に整理してから展開すると，まとめやすくなる．

$=2x^3(x^2 - x + 2) - 4x^2(x^2 - x + 2) + x(x^2 - x + 2)$

$=2x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x^3 - x^2 + 2x$

$=\boldsymbol{2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 2x}$

◀ 降べきの順に整理する．

One Point

指数法則，分配法則を用いて計算する．

【注意】 $(-a)^n$ は符号に注意して計算する．

n が**偶数のとき，$(-a)^n = a^n$** であり，n が**奇数のとき，$(-a)^n = -a^n$** である．

問題 I1.1.3 ★ 解答 p.226　　▶ 節末 I1.1.2

次の計算をせよ．

(1) $3x^2y \times (-4xy^2)^2$　　　(2) $5abc^2(2a^2 - 3b + 4c)$

(3) $(x - 3)(x^2 + 4x - 7)$　　　(4) $(x^3 - 2x + 5)(3x^2 - x + 4)$

例題 I1.1.4 乗法公式を用いた展開 ★

次の式を展開せよ．

(1) $(x+1)^2$　(2) $(x-2y)^2$　(3) $(3ab+1)(3ab-1)$

(4) $(a+2b)(a-3b)$　(5) $(3x+2)(4x+1)$　(6) $(x+y-z)^2$

解説動画

考え方 分配法則を考えると，公式を用いなくても展開することができるが，後に学ぶ因数分解のためにも公式による手法を覚えておくとよい．

解答

(1) $(x+1)^2=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=\boldsymbol{x^2+2x+1}$

(2) $(x-2y)^2=x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=\boldsymbol{x^2-4xy+4y^2}$

(3) $(3ab+1)(3ab-1)=(3ab)^2-1^2=\boldsymbol{9a^2b^2-1}$

(4) $(a+2b)(a-3b)=a^2+\{2b+(-3b)\}a+2b\cdot(-3b)=\boldsymbol{a^2-ab-6b^2}$

(5) $(3x+2)(4x+1)=3\cdot 4x^2+(3\cdot 1+2\cdot 4)x+2\cdot 1=\boldsymbol{12x^2+11x+2}$

(6)
$$\begin{aligned}(x+y-z)^2&=\{x+y+(-z)\}^2\\&=x^2+y^2+(-z)^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot x\\&=\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx}\end{aligned}$$

【別解】
$$\begin{aligned}(x+y-z)^2&=\{(x+y)-z\}^2\\&=(x+y)^2-2(x+y)z+z^2\\&=\left(x^2+2xy+y^2\right)-2xz-2yz+z^2\\&=\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx}\end{aligned}$$

◀ $(a+b)^2$ $=a^2+2ab+b^2$

◀ $(a-b)^2$ $=a^2-2ab+b^2$

◀ $(a+b)(a-b)$ $=a^2-b^2$

◀ $(x+a)(x+b)$ $=x^2+(a+b)x+ab$

◀ $(ax+b)(cx+d)$ $=acx^2+(ad+bc)x+bd$

◀ $(a+b+c)^2$ $=a^2+b^2+c^2$ $+2ab+2bc+2ca$

◀ $x+y=A$ とおくと，$(A-z)^2=A^2-2Az+z^2$

◀ 輪環の順に整理するとよい．

乗法公式

(i) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　(ii) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(iii) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　(iv) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(v) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$　(vi) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

【注意】 乗法公式 (v) を用いる (5) のような展開は，分配法則を用いても計算の手間に大差がない．乗法公式 (v) は後に学ぶ因数分解において大切であるが，乗法公式の中では公式として覚える価値が低い（実用的ではない）．なお，(6) は輪環の順ではない $x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2xz$ なども正答である．

問題 I1.1.4 ★ 解答 p.226

次の式を展開せよ．

(1) $(x+3)^2$　(2) $(k-2)^2$　(3) $(x+2y)(x-2y)$

(4) $(x-2y)(x-5y)$　(5) $(4a+2b)(3a+b)$　(6) $(2x-y-z)^2$

例題 I1.1.5 乗法公式（3 次）を用いた展開 ★★

次の式を展開せよ.

(1) $(2x+1)^3$　　(2) $(3x-4y)^3$

(3) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$　　(4) $(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$

(5) $(x+2)^3(x-2)^3$　　(6) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

解説動画

考え方 3 次の乗法公式を用いるときは，符号に注意すること.

3 次の乗法公式

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\quad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) = a^3+b^3,\quad (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3-b^3$$

解答

(1)
$$(2x+1)^3 = (2x)^3+3(2x)^2\cdot 1+3(2x)\cdot 1^2+1^3$$
$$= \boldsymbol{8x^3+12x^2+6x+1}$$

◀ $(a+b)^3$ $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2)
$$(3x-4y)^3 = (3x)^3-3(3x)^2\cdot 4y+3\cdot 3x\cdot(4y)^2-(4y)^3$$
$$= \boldsymbol{27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3}$$

◀ $(a-b)^3$ $=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3)
$$(2x+1)(4x^2-2x+1) = (2x+1)\{(2x)^2-2x\cdot 1+1^2\}$$
$$= (2x)^3+1^3$$
$$= \boldsymbol{8x^3+1}$$

◀ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $=a^3+b^3$

(4)
$$(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2) = (4a-3b)\{(4a)^2+4a\cdot 3b+(3b)^2\}$$
$$= (4a)^3-(3b)^3$$
$$= \boldsymbol{64a^3-27b^3}$$

◀ $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $=a^3-b^3$

(5)
$$(x+2)^3(x-2)^3 = \{(x+2)(x-2)\}^3$$
$$= (x^2-4)^3$$
$$= (x^2)^3-3(x^2)^2\cdot 4+3x^2\cdot 4^2-4^3$$
$$= \boldsymbol{x^6-12x^4+48x^2-64}$$

◀ 先に 3 次の乗法公式を用いて展開してもよいが，計算に手間が掛かる．そこで，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の利用を考える.

(6)
$$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$
$$=(x^3+1)(x^3-1)$$
$$=\boldsymbol{x^6-1}$$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

問題 I1.1.5 ★★ 解答 p.227

次の式を展開せよ.

(1) $(x+3)^3$　　(2) $(2x-5y)^3$

(3) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$　　(4) $(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2)$

(5) $(x-3)^3(x+3)^3$　　(6) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

例題 I1.1.6 おき換えを用いた展開 ★★

次の式を展開せよ．

(1) $(x-y+2)(x-y-4)$　　(2) $(3x+4y-z)(3x-4y+z)$

(3) $(a+b-c+d)(a+b+c-d)$

解説動画

考え方 分配法則を用いて展開してもよいが，計算に手間が掛かる．共通する部分を探し，それを 1 つの文字でおき換えるか括弧でくくると，適用できる乗法公式がわかる．

(1) $(x-y+2)(x-y-4)=(A+2)(A-4)$

(2) $(3x+4y-z)(3x-4y+z)=\{3x+(4y-z)\}\{3x-(4y-z)\}=(3x+A)(3x-A)$

(3) $(a+b-c+d)(a+b+c-d)=\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}=(A+B)(A-B)$

解答

(1)
$$
\begin{aligned}
&(x-y+2)(x-y-4)\\
=&\{(x-y)+2\}\{(x-y)-4\}\\
=&(x-y)^2-2(x-y)-8\\
=&\boldsymbol{x^2-2xy+y^2-2x+2y-8}
\end{aligned}
$$

◀ $x-y=A$ とおくと，
$(A+2)(A-4)$
$=A^2-2A-8$

(2)
$$
\begin{aligned}
&(3x+4y-z)(3x-4y+z)\\
=&\{3x+(4y-z)\}\{3x-(4y-z)\}\\
=&(3x)^2-(4y-z)^2\\
=&9x^2-\left(16y^2-8yz+z^2\right)\\
=&\boldsymbol{9x^2-16y^2+8yz-z^2}
\end{aligned}
$$

◀ $-(4y-z)$ とくくると，$4y-z$ が共通する部分となる．

◀ $4y-z=A$ とおくと，
$(3x+A)(3x-A)$
$=9x^2-A^2$

(3)
$$
\begin{aligned}
&(a+b+c-d)(a+b-c+d)\\
=&\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}\\
=&(a+b)^2-(c-d)^2\\
=&\left(a^2+2ab+b^2\right)-\left(c^2-2cd+d^2\right)\\
=&\boldsymbol{a^2+b^2-c^2-d^2+2ab+2cd}
\end{aligned}
$$

◀ $a+b-c+d$
$=(a+b)-(c-d)$

◀ $a+b=A$，$c-d=B$ とおくと，$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

One Point

共通する部分を探し，括弧でくくる．

問題 I1.1.6 ★★ 解答 p.228

▶ 節末 I1.1.3 ▶ 章末 I1.1

次の式を展開せよ．

(1) $(x+2y-3)(x+2y+5)$　　(2) $(4a-3b+c)(4a+3b-c)$

(3) $(p+q-r+s)(p+q+r-s)$

例題 I1.1.7 掛ける順序や組み合わせを工夫した展開 ★★

次の式を展開せよ．

(1) $(x-1)(x-4)(x+3)(x+6)$　　(2) $(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)\left(x^4+4\right)$

(3) $(p-q)^2(p+q)^2\left(p^2+q^2\right)^2$

解説動画

考え方 掛ける順序や組み合わせを意識せずに，左から順に分配法則を用いて展開してもよいが，計算に手間が掛かることがある．そこで，乗法公式が利用できるように，掛ける順序や組み合わせを工夫して展開する．例えば (1) は，組み合わせを工夫して掛け算を行うと，共通する部分 x^2+2x が見つかる．

解答

(1)
$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x-4)(x+3)(x+6)\\
=&(x-1)(x+3)\times(x-4)(x+6)\\
=&\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+2x-24\right)\\
=&\left\{\left(x^2+2x\right)-3\right\}\left\{\left(x^2+2x\right)-24\right\}\\
=&\left(x^2+2x\right)^2-27\left(x^2+2x\right)+72\\
=&x^4+4x^3+4x^2-27x^2-54x+72\\
=&\boldsymbol{x^4+4x^3-23x^2-54x+72}
\end{aligned}
$$

◀ 共通する部分が見つかるように，組み合わせを工夫する．

( )( )( )( )

◀ $x^2+2x=A$ とおくと，
$$
\begin{aligned}
&(A-3)(A-24)\\
=&A^2-27A+72
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)\left(x^4+4\right)\\
=&\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)\left(x^4+4\right)\\
=&\left(x^4-16\right)\left(x^4+4\right)\\
=&x^8+4x^4-16x^4-64\\
=&\boldsymbol{x^8-12x^4-64}
\end{aligned}
$$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を利用して，$(x-2)(x+2)$ を先に計算する．

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を再度利用する．

(3)
$$
\begin{aligned}
&(p-q)^2(p+q)^2\left(p^2+q^2\right)^2\\
=&\left\{(p-q)(p+q)\left(p^2+q^2\right)\right\}^2\\
=&\left\{\left(p^2-q^2\right)\left(p^2+q^2\right)\right\}^2\\
=&\left\{\left(p^2\right)^2-\left(q^2\right)^2\right\}^2\\
=&\left(p^4-q^4\right)^2\\
=&\boldsymbol{p^8-2p^4q^4+q^8}
\end{aligned}
$$

◀ $A^2B^2=(AB)^2$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

One Point

掛ける順序や組み合わせを工夫して，計算を簡単にする．

問題 I1.1.7 ★★ 解答 p.229

次の式を展開せよ．

(1) $(x-4)(x-5)(x+2)(x+3)$　　(2) $(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)\left(x^4+9\right)$

(3) $(m-n)^2\left(m^2+mn+n^2\right)^2$

例題 I1.1.8 因数分解の基本 ★

次の式を因数分解せよ．

(1) $3x^3y + 9x^2y + 15xy^3$ (2) $xy - y - x + 1$ (3) $x^2 + 10x + 25$

(4) $9a^3 - 6a^2 + a$ (5) $16x^2 - (x+1)^2$ (6) $a^2 + 5a + 6$

解説動画

考え方 1 つの多項式について，多項式の積の形に変形することを，因数分解するという．因数分解は，展開の逆の操作である．(3) 以降は，因数分解の公式の利用を考える．

(1) 共通因数のくくり出しを考える． (2) $-x+1 = -(x-1)$ と変形する． (3) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(4) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ (5) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (6) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

解答

(1) $3x^3y + 9x^2y + 15xy^3 = \boldsymbol{3xy(x^2+3x+5y^2)}$

◀ 3，9，15 の最大公約数は 3 である．

(2) $xy - y - x + 1 = (x-1)y - (x-1) = \boldsymbol{(x-1)(y-1)}$

◀ y について整理すると，共通因数 $x-1$ が見つかる．

(3) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = \boldsymbol{(x+5)^2}$

◀ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(4) $9a^3 - 6a^2 + a = a(9a^2 - 6a + 1) = a\{(3a)^2 - 2\cdot 3a\cdot 1 + 1^2\} = \boldsymbol{a(3a-1)^2}$

◀ 先に a をくくり出す．

(5)
$$\begin{aligned} 16x^2 - (x+1)^2 &= \{4x + (x+1)\}\{4x - (x+1)\} \\ &= (4x + x + 1)(4x - x - 1) \\ &= \boldsymbol{(5x+1)(3x-1)} \end{aligned}$$

◀ 括弧を外すときは符号に注意すること．

(6) $a^2 + 5a + 6 = a^2 + (2+3)a + 2\cdot 3 = \boldsymbol{(a+2)(a+3)}$

◀ 和が 5，積が 6 になる数を探す．

因数分解の公式

(i) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ (ii) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(iii) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (iv) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

【注意】因数分解は，先にくくり出しを試みる．次に，因数分解の公式の利用を考えるとよい．

問題 I1.1.8 ★ 解答 p.229

次の式を因数分解せよ．

(1) $4x^3y^2 + 8x^2y^2 + 12xy^3$ (2) $ab - b - a + 1$ (3) $x^2 - 14x + 49$

(4) $25m^3 - 20m^2 + 4m$ (5) $9y^2 - (y-2)^2$ (6) $x^2 + 7x + 10$

例題 I1.1.9 たすき掛けを用いた因数分解 ★

次の式を因数分解せよ．

(1) $3x^2+7x+2$　　(2) $3x^2-4x-15$　　(3) $3x^2+8xy+4y^2$

解説動画

考え方 たすき掛けを用いて，$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ を満たす a，b，c，d の組み合わせを考える．なお，たすき掛けの因数分解は，実用的には計算の手間に大差がなかった乗法公式 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ の逆の操作である．

解答

(1) $3x^2+7x+2=\boldsymbol{(x+2)(3x+1)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & & 7 \end{array}$$

◀（失敗例）

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow & 2 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

(2) $3x^2-4x-15=\boldsymbol{(x-3)(3x+5)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -3 & \rightarrow & -9 \\ 3 & & 5 & \longrightarrow & 5 \\ \hline & & & & -4 \end{array}$$

◀（失敗例）

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 3 & \longrightarrow & 9 \\ 3 & & -5 & \longrightarrow & -5 \\ \hline & & & & 4 \end{array}$$

(3) $3x^2+8xy+4y^2=\boldsymbol{(x+2y)(3x+2y)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2y & \longrightarrow & 6y \\ 3 & & 2y & \longrightarrow & 2y \\ \hline & & & & 8y \end{array}$$

◀ y を忘れないように注意すること．

因数分解の公式 (たすき掛け)

$$\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$$

【注意】 例えば (1) は，$3x^2+7x+2$ が $(ax+b)(cx+d)$ の形に因数分解できるとすると，

$$3x^2+\boxed{7}\,x+2=(ax+b)(cx+d)=\boxed{ac}\,x^2+(ad+bc)x+\boxed{bd}$$

したがって，$ac=3$，$ad+bc=7$，$bd=2$ を満たす a，b，c，d を見つければよい．

$$\boxed{ac}=3\ より，\ 1\times 3,\qquad \boxed{bd}=2\ より，1\times 2,\ (-1)\times(-2)$$

などの分解を考える．下の図式のように，a，b，c，d の組み合わせにおいて $ad+bc=\boxed{7}$ を満たすものは，$a=1, b=2, c=3, d=1$ が該当する（成功するまで，様々な a，b，c，d の組み合わせを試す）．

$$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \longrightarrow & bc \\ c & & d & \longrightarrow & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

（失敗例）
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow & 2 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

（失敗例）
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -1 & \longrightarrow & -3 \\ 3 & & -2 & \longrightarrow & -2 \\ \hline & & & & -5 \end{array}$$

（成功例）
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & & \boxed{7} \end{array}$$

よって，$3x^2+7x+2=(x+2)(3x+1)$ と因数分解できる．このような計算を，**たすき掛け**という．

問題 I1.1.9 ★ 解答 p.230

次の式を因数分解せよ．

(1) $2x^2+5x+3$　　(2) $4x^2-11x-3$　　(3) $6x^2+13xy+6y^2$

例題 I1.1.10 因数分解（3 次式） ★★

次の式を因数分解せよ.

(1) x^3+64 (2) $8a^3-125b^3$

(3) x^3+3x^2+3x+1 (4) $x^3+2x^2-9x-18$

解説動画

考え方 3 次式の因数分解を用いるときは，符号に注意すること.

3 次式の因数分解の公式

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right),\quad a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3,\quad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

なお，(4) のように公式が使えない場合は，組み合わせを工夫して共通因数のくくり出しを考えるとよい.

解答

(1) $x^3+64=x^3+4^3$

$=(x+4)\{x^2-x\cdot4+4^2\}$

$=\boldsymbol{(x+4)(x^2-4x+16)}$

◀ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2) $8a^3-125b^3=(2a)^3-(5b)^3$

$=(2a-5b)\{(2a)^2+2a\cdot5b+(5b)^2\}$

$=\boldsymbol{(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)}$

◀ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) $x^3+3x^2+3x+1=\boldsymbol{(x+1)^3}$

◀ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

【別解】 $x^3+3x^2+3x+1=(x^3+1)+(3x^2+3x)$ ◀ 組み合わせを工夫する.

$=(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)$ ◀ $x^3+1=x^3+1^3$

$=(x+1)\{(x^2-x+1)+3x\}$ ◀ $x+1$ をくくり出す.

$=(x+1)(x^2+2x+1)$

$=(x+1)(x+1)^2$

$=\boldsymbol{(x+1)^3}$

(4) $x^3+2x^2-9x-18=(x^3+2x^2)-(9x+18)$

$=x^2(x+2)-9(x+2)$

$=(x+2)(x^2-9)$ ◀ $x+2$ をくくり出す.

$=\boldsymbol{(x+2)(x-3)(x+3)}$

問題 I1.1.10 ★★ 解答 p.230

▶ 節末 I1.1.4

次の式を因数分解せよ.

(1) x^3-27 (2) $27m^3+8n^3$

(3) $x^3-6x^2+12x-8$ (4) x^3-4x^2-x+4

例題 I1.1.11 因数分解の工夫（次数の低い文字に着目） ★★

次の式を因数分解せよ．

(1) $4a^2+2ab+b-1$　　(2) $x^3+x^2y+2xy+y^2-1$

(3) $a^2+2ab+ac+b^2+bc$

解説動画

考え方 一般に，式は次数が低いほど扱いやすい．例えば，(2) は次数の高い x に着目すると，

$$x^3+x^2y+2xy+(y+1)(y-1)$$

となり，因数分解の見通しが立てにくい．それに対して，次数の低い y に着目すると，

$$y^2+\left(x^2+2x\right)y+x^3-1=y^2+\left(x^2+2x\right)y+(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

となり，因数分解の見通しが立つ（全体を y の 2 次式と考えると，たすき掛けを用いた因数分解が適用できる形である）．このように，複数の文字を含む式の因数分解は，次数の低い文字に着目するとよい．

解答

(1)
$$\begin{aligned}4a^2+2ab+b-1&=(2a+1)b+4a^2-1\\&=(2a+1)b+(2a+1)(2a-1)\\&=\boldsymbol{(2a+1)(2a+b-1)}\end{aligned}$$

◀ b について整理する．

◀ $2a+1$ をくくり出す．

(2)
$$\begin{aligned}&x^3+x^2y+2xy+y^2-1\\=&y^2+\left(x^2+2x\right)y+\left(x^3-1\right)\\=&y^2+\left(x^2+2x\right)y+(x-1)\left(x^2+x+1\right)\\=&\left\{y+\left(x^2+x+1\right)\right\}\left\{y+(x-1)\right\}\\=&\boldsymbol{\left(x^2+x+y+1\right)(x+y-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & x^2+x+1 & \to & x^2+x+1\\ 1 & & x-1 & \longrightarrow & x-1\\ \hline & & & & x^2+2x\end{array}$$

◀ y について整理する．

◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
を用いて因数分解する．さらに，全体を y の 2 次式と考えて，たすき掛けを用いて因数分解する．

(3)
$$\begin{aligned}&a^2+2ab+ac+b^2+bc\\=&(a+b)c+\left(a^2+2ab+b^2\right)\\=&(a+b)c+(a+b)^2\\=&(a+b)\{c+(a+b)\}\\=&\boldsymbol{(a+b)(a+b+c)}\end{aligned}$$

◀ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

One Point

複数の文字を含む式の因数分解は，次数の低い文字に着目するとよい．

問題 I1.1.11 ★★ 解答 p.231　　▶ 節末 I1.1.4

次の式を因数分解せよ．

(1) $9x^2+3xy+y-1$　　(2) $x^3+x^2y+3xy+y^2+2y-8$

(3) $xy+xz-y^2-z^2-2yz$

例題 I1.1.12 因数分解の工夫 (次数が同じ場合) ★★

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$　　(2) $2x^2+5xy+3y^2-3x-5y-2$

解説動画

考え方 複数の文字を含む式の因数分解は，次数の低い文字に着目するとよい．しかし，(1)，(2) のように，x，y どちらについても次数が同じ場合がある（x，y ともに 2 次式である）．このような場合は，どちらかの文字で整理すればよい．なお，解答において (1) は，x^2 の係数が 1 であることから x について整理している（計算が楽になることが見込まれる）．

解答

(1)

$$\begin{aligned}
&x^2+3xy+2y^2-x-3y-2\\
=&x^2+(3y-1)x+\left(2y^2-3y-2\right)\\
=&x^2+(3y-1)x+(y-2)(2y+1)\cdots\text{(i)}\\
=&\{x+(y-2)\}\{x+(2y+1)\}\cdots\text{(ii)}\\
=&\boldsymbol{(x+y-2)(x+2y+1)}
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -2 & \longrightarrow & -4 \\ 2 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & & -3 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\ 1 & & 2y+1 & \longrightarrow & 2y+1 \\ \hline & & & & 3y-1 \end{array}$$

◀ 先に，(i) のように $2y^2-3y-2$ をたすき掛けを用いて因数分解する．次に，(ii) のように全体を x の 2 次式と考えて，たすき掛けを用いて因数分解する．

(2)

$$\begin{aligned}
&2x^2+5xy+3y^2-3x-5y-2\\
=&2x^2+(5y-3)x+\left(3y^2-5y-2\right)\\
=&2x^2+(5y-3)x+(y-2)(3y+1)\cdots\text{(i)}\\
=&\{x+(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}\cdots\text{(ii)}\\
=&\boldsymbol{(x+y-2)(2x+3y+1)}
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -2 & \longrightarrow & -4 \\ 2 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & & -3 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & y-2 & \longrightarrow & 2y-4 \\ 2 & & 3y+1 & \longrightarrow & 3y+1 \\ \hline & & & & 5y-3 \end{array}$$

◀ y について整理して，因数分解してもよい．

問題 I1.1.12 ★★ 解答 p.231

▶ 節末 I1.1.4

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2+4xy+3y^2-2x-8y-3$　　(2) $3x^2+11xy+10y^2-x-3y-4$

例題 I1.1.13 因数分解の工夫 (おき換え) ★★

次の式を因数分解せよ．

(1) $(x+4y)^2-7(x+4y)+10$　　(2) $\left(x^2-3x\right)\left(x^2-3x-2\right)-8$

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

解説動画

考え方 (1) は，展開してから 1 つの文字に着目して因数分解してもよいが，計算に手間が掛かる．そこで，式の特徴に合わせて，共通する部分を見つけることを考える．(2) はそのままでも共通する部分があるが，(3) はそのままでは共通する部分がないので，組み合わせを工夫して共通する部分を見つける．

解答

(1) $(x+4y)^2-7(x+4y)+10$

$=\{(x+4y)-2\}\{(x+4y)-5\}$

$=\boldsymbol{(x+4y-2)(x+4y-5)}$

◀ $x+4y=A$ とおくと，
$A^2-7A+10$
$=(A-2)(A-5)$

(2) $\left(x^2-3x\right)\left(x^2-3x-2\right)-8$

$=\left(x^2-3x\right)\left\{\left(x^2-3x\right)-2\right\}-8$

$=\left(x^2-3x\right)^2-2\left(x^2-3x\right)-8$

$=\left\{\left(x^2-3x\right)-4\right\}\left\{\left(x^2-3x\right)+2\right\}$

$=\left(x^2-3x-4\right)\left(x^2-3x+2\right)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x-4)(x-1)(x-2)}$

◀ $x^2-3x=A$ とおくと，
$A(A-2)-8$
$=A^2-2A-8$
$=(A-4)(A+2)$

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$=(x+1)(x+4)\times(x+2)(x+3)-24$

$=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)-24$

$=\left\{\left(x^2+5x\right)+4\right\}\left\{\left(x^2+5x\right)+6\right\}-24$

$=\left(x^2+5x\right)^2+10\left(x^2+5x\right)$

$=\left(x^2+5x\right)\left\{\left(x^2+5x\right)+10\right\}$

$=\boldsymbol{x(x+5)\left(x^2+5x+10\right)}$

◀ 共通する部分が現れるように，組み合わせを工夫する．

(　)(　)(　)(　)

◀ $x^2+5x=A$ とおくと，
$(A+4)(A+6)-24$
$=A^2+10A$
$=A(A+10)$

One Point

共通する部分を探し，くくり出しや因数分解の公式の適用を考える．

【注意】 (2) や (3) において，それぞれ $(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)$，$(x^2+5x)(x^2+5x+10)$ と答えてしまわないように注意すること．因数分解はできるところまでするように心掛けよう（確認する習慣をつけるとよい）．

問題 I1.1.13 ★★

解答 p.232

▶ 節末 I1.1.4

次の式を因数分解せよ．

(1) $(x+3y)^2-5(x+3y)+6$　　(2) $\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-3\right)-4$

(3) $(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)+24$

例題 I1.1.14 因数分解（対称式，交代式） ★★

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

解説動画

考え方 a，b，c いずれについても 2 次式であるから，例えば a について整理する．また，答えを記すときは，慣習として輪環の順に整理することが多い．

解答

(1) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

$=(b+c)a^2+\left(b^2+2bc+c^2\right)a+b^2c+bc^2$　◀ a について整理する．

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc$

$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$　◀ $b+c$ をくくり出す．

$=(b+c)(a+b)(a+c)$　◀ このままでも正答であるが，輪環の順に整理するとよい．

$=\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}$

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

$=(b-c)a^2-\left(b^2-c^2\right)a+(b-c)bc$　◀ a について整理する．

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+(b-c)bc$

$=(b-c)\left\{a^2-(b+c)a+bc\right\}$　◀ $b-c$ をくくり出す．

$=(b-c)(a-b)(a-c)$　◀ このままでも正答であるが，輪環の順に整理するとよい．

$=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

【余談】 a，b，c の多項式で，a，b，c のどの 2 つの文字を入れ替えても，もとの式と同じ式になるものを**対称式**という．

また，a，b，c の多項式で，a，b，c のどの 2 つの文字を入れ替えても，もとの式と符号だけ変わる式になるものを**交代式**という．

例えば，2 つの文字 a，b の対称式は a^2+b^2，a^3+b^3，交代式は $a-b$，a^2-b^2 などがある．

さらに，(2) のような 3 つの文字の交代式は，**最簡**（さいかん）**交代式**といわれる $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつことが知られている．

問題 I1.1.14 ★★ 解答 p.233

▶ 章末 I1.2

次の式を因数分解せよ．

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$　　(2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

例題 I1.1.15　因数分解（$a^3+b^3+c^3-3abc$ の形）　★★★

(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを用いて，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ．

(2) $x^3+y^3+3xy-1$ を因数分解せよ．

解説動画

考え方 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\cdots$(i) を用いて変形すると，

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab\{(a+b)+c\}$$

ここで，$(a+b)^3+c^3$ について 3 次式の因数分解の公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ か (i) を適用すると，さらに因数分解することができる．

(2) は，(1) で得られた式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ を用いる．

解答

(1)
$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
=&(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\
=&\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b)-3abc\\
=&(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)\\
=&(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}\\
=&(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)\\
=&\boldsymbol{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}
\end{aligned}
$$

◀ a^3+b^3 $=(a+b)^3-3ab(a+b)$

◀ $(a+b)^3+c^3$ に 3 次式の因数分解の公式を適用する．

◀ $a+b+c$ が共通因数となる．

◀ 輪環の順に整理する．

【別解】
$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
=&(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\
=&\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b)-3abc\\
=&\{(a+b)+c\}^3-3(a+b)c\{(a+b)+c\}-3ab(a+b+c)\\
=&(a+b+c)\left\{(a+b+c)^2-3(a+b)c-3ab\right\}\\
=&\boldsymbol{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)}
\end{aligned}
$$

◀ $a+b=A$ とおくと，
A^3+c^3
$=(A+c)^3-3Ac(A+c)$

(2)
$$
\begin{aligned}
&x^3+y^3+3xy-1\\
=&x^3+y^3+(-1)^3-3x\cdot y\cdot(-1)\\
=&\{x+y+(-1)\}\{x^2+y^2+(-1)^2-x\cdot y-y\cdot(-1)-(-1)\cdot x\}\\
=&\boldsymbol{(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)}
\end{aligned}
$$

◀ (1) において，$a=x$，$b=y$，$c=-1$ の場合である（それぞれ代入する）．

因数分解の公式（3 次式）

$$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

問題 I1.1.15 ★★★　解答 p.233

▶ 節末 I1.1.5

次の式を因数分解せよ．

(1) $p^3+q^3+3pq-1$　　(2) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

例題 I1.1.16 因数分解（ax^4+bx^2+c の形）★★★

次の式を因数分解せよ．

(1) x^4-7x^2+12　(2) x^4+2x^2+9　(3) $x^4-15x^2y^2+9y^4$　(4) $4x^4+1$

解説動画

考え方 ax^4+bx^2+c の形の式を，**複 2 次式**という（各項の次数が偶数の 4 次式のことを指すことが多いが，次数が偶数の 6 次以上の式を指すこともある）．$x^2=A$ とおき，aA^2+bA+c の形に変形したとき，公式を用いた因数分解が直接できない場合は，平方の差の形を作ることを考える．

(1) $x^2=A$ とおくと，$A^2-7A+12$ となり，因数分解の公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を使うことができる．

(2) $x^2=A$ とおいても，A^2+2A+9 となり，直接公式を用いた因数分解ができない．そこで，x^4 と定数項 9 に注目して，$(x^2+3)^2$ または $(x^2-3)^2$ を作ることを考える．ここでは $(x^2+3)^2$ を作れば，平方の差の形に変形することができる．

解答

(1) $x^4-7x^2+12=(x^2-4)(x^2-3)=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x^2-3)}$

◀ $x^2=A$ とおくと，$A^2-7A+12=(A-4)(A-3)$

(2)
$$\begin{aligned} x^4+2x^2+9 &= (x^4+6x^2+9)-4x^2 \\ &= (x^2+3)^2-(2x)^2 \\ &= \{(x^2+3)+2x\}\{(x^2+3)-2x\} \\ &= \boldsymbol{(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)} \end{aligned}$$

◀ x^4 と定数項 9 より，$(x^2+3)^2$ または $(x^2-3)^2$ を作ることを考える．

(3)
$$\begin{aligned} x^4-15x^2y^2+9y^4 &= (x^4-6x^2y^2+9y^4)-9x^2y^2 \\ &= (x^2-3y^2)^2-9x^2y^2 \\ &= \{(x^2-3y^2)+3xy\}\{(x^2-3y^2)-3xy\} \\ &= \boldsymbol{(x^2+3xy-3y^2)(x^2-3xy-3y^2)} \end{aligned}$$

◀ x^4 と $9y^4$ より，$(x^2+3y^2)^2$ または $(x^2-3y^2)^2$ を作ることを考える．

(4)
$$\begin{aligned} 4x^4+1 &= (4x^4+4x^2+1)-4x^2 \\ &= (2x^2+1)^2-(2x)^2 \\ &= \{(2x^2+1)+2x\}\{(2x^2+1)-2x\} \\ &= \boldsymbol{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} \end{aligned}$$

◀ $4x^4$ と定数項 1 より，$(2x^2+1)^2$ または $(2x^2-1)^2$ を作ることを考える．

One Point

ax^4+bx^2+c の形の因数分解 → $x^2=A$ とおき換える．
→ 公式を用いた因数分解が直接できないときは，平方の差を作る．

$$\boldsymbol{x^4+2x^2+\underbrace{9}_{3\times3}=x^4+\underbrace{6}_{2\times3}x^2+\underbrace{9}_{3\times3}-4x^2=\left(x^2+3\right)^2-(2x)^2}$$

問題 I1.1.16 ★★★ 解答 p.234　▶ 節末 I1.1.5

次の式を因数分解せよ．

(1) x^4-11x^2+18　(2) x^4+4x^2+16　(3) $x^4-8x^2y^2+4y^4$

節末問題 1.1 式の展開と因数分解

節末 I1.1.1 ★ 解答（節末）p.235 ▶ 例題 I1.1.1

ある多項式に $5x^2-3x+1$ を加えるところを誤って引いたので，答えが $-3x^2+12x-5$ になった．正しい答えを求めよ．

節末 I1.1.2 ★★ 解答（節末）p.235 ▶ 例題 I1.1.3

$\left(x^3-4x^2+2x+3\right)\left(x^3+x^2-x+2\right)$ の展開式において，x^5 と x^3 の係数を求めよ．

節末 I1.1.3 ★★ 解答（節末）p.235 ▶ 例題 I1.1.6

次の式を展開せよ．

(1) $\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+x-1\right)$　(2) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

節末 I1.1.4 ★★ 解答（節末）p.236 ▶ 例題 I1.1.10 ▶ 例題 I1.1.11 ▶ 例題 I1.1.12 ▶ 例題 I1.1.13

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2y+2xy^2+x^2+4y^2+3xy+x+2y-2$　(2) $(x+y)^4-(x-y)^4$

(3) $(x+y)^3+z^3$　(4) x^6-1

(5) a^6-7a^3-8　(6) $\left(x^2+6x+3\right)\left(x^2+6x+7\right)+4$

節末 I1.1.5 ★★★ 解答（節末）p.237 ▶ 例題 I1.1.15 ▶ 例題 I1.1.16

次の式を因数分解せよ．

(1) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$　(2) $4x^4+7x^2y^2+16y^4$

1.2 実数

1.2.1 実数

(1) 自然数（Natural number）1，2，3，… に 0 と負の整数 -1，-2，-3，… を合わせて**整数（Zahlen）**という．

【余談】Zahlen はドイツ語で数を表す．また，自然数に 0 を含むという考え方もある．

(2) 整数 m と 0 ではない整数 n を使い，分数 $\frac{m}{n}$ の形で表される数を**有理数（Quotient，Rational number）**という．整数 m は $\frac{m}{1}$ として表すことができるので，整数も有理数の一種である．

◀ 2 つの自然数の足し算や掛け算の結果は常に自然数であるが，引き算や割り算は自然数になるとは限らない．このことを，自然数全体の集合は足し算や掛け算という演算に関して**閉じている**，引き算や割り算に関して**閉じていない**，という．

(3) 整数ではない有理数を小数で表すとき，それは**有限小数**になるか，あるいは循環する**無限小数（循環小数）**となる．

循環小数は，循環する最初と最後の数字の上に ● をつけて表すことができる．また，有限小数や循環小数は，常に分数の形で表すことができることが知られている．

◀ 循環小数の例：

$$\frac{1}{9} = 0.111\ldots = 0.\dot{1},$$

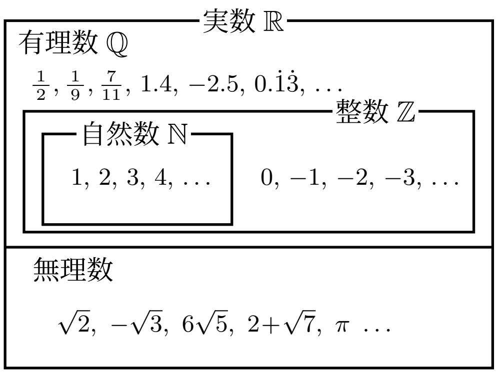
$$\frac{123}{999} = 0.123123\ldots = 0.\dot{1}2\dot{3}$$

(4) 整数，有限小数，または無限小数で表される数を**実数（Real number）**という．

(5) 実数の中で有理数ではないものを**無理数**という．無理数を小数で表すと，$\sqrt{3} = 1.732\ldots$，$\pi = 3.141\ldots$ のように循環しない無限小数となる．

自然数全体の集合，整数全体の集合，有理数全体の集合，実数全体の集合は，それぞれ，$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ という記号で表されることもある．

◀ $\mathbb{N}$ といった，重ね打ちしたような書体の文字を黒板文字という．



実数 $\mathbb{R}$
- 有理数 $\mathbb{Q}$
  - 整数 $\mathbb{Z}$
    - 自然数 $\mathbb{N}$
    - 0
    - 負の整数
  - 有限小数
  - 循環小数（無限小数）
- 無理数（循環しない無限小数）

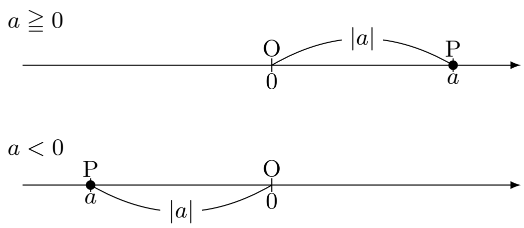
1.2.2 絶対値

数直線上の点 P の座標が a のとき，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a})$ と表される．原点 O(0) と P(a) の間の距離を $\boldsymbol{a}$ **の絶対値**といい，記号 $|\boldsymbol{a}|$ で表す．

◀ $|0| = 0$

(1) $|a| \geqq 0$

(2) $|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$



One math

1.2.3 平方根

(1) $x^2 = a$ を満たす数 x を a の**平方根**という．正の数 a の平方根は 2 つあり，その絶対値は等しく，符号が異なる．正の平方根を $\sqrt{a}$，負の平方根を $-\sqrt{a}$ と表し，両方をまとめて $\pm\sqrt{a}$ と記す．0 の平方根は 0 のみであり，$\sqrt{0} = 0$ と定める．なお，記号 $\sqrt{\ }$ を**根号**といい，$\sqrt{a}$ を「ルート a」と読む．

◀ 4 の平方根は ± 2 である．また，$\sqrt{4} = 2$，$-\sqrt{4} = -2$

◀ 負の数の平方根は，実数の範囲内では存在しない．

(2)

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

◀ $\sqrt{a^2} = |a|$ とも表される．

(3) $a > 0,\ b > 0,\ k > 0$ のとき，

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$$

(4) 分母に根号を含む式を変形して，分母に根号を含まない式にする操作を，**分母を有理化する**という．

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b} \quad (\text{複号同順})$$

◀ 1 つの式に現れる複号 $\pm$，$\mp$ において，上の符号同士，下の符号同士を組み合わせることを複号同順という．

(5) 2 つの数の大小関係は，次の原理に基づき簡単に判定できる．

$\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0$ のとき，

$$\alpha > \beta \iff \alpha^2 > \beta^2$$

この原理の特別な場合として，次の関係が成立する．

$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき，

$$a > b \iff \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

◀ 例えば次のように平方根で表された数の大小を判定するときに役立つ．
$3^2 < 13 < 4^2$ であるから，$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$，すなわち，$3 < \sqrt{13} < 4$

(6) 根号内にさらに根号が含まれているものを **2 重根号**という．

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (a > 0,\ b > 0),$$
$$\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (a > b > 0)$$

◀ $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}$ のとき，$\sqrt{\text{大}} - \sqrt{\text{小}}$ $(a > b > 0)$ であることに注意すること．

(7) 基本的な平方根の近似値は，次のように語呂合わせを用いて記憶することが推奨される．

$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ 一夜一夜(ひとよひとよ)に人見頃(ひとみごろ)　$\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$ 人並(ひとな)みに奢(おご)れや

$\sqrt{5} = 2.2360679\ldots$ 富士山麓鸚鵡鳴く(ふじさんろくおうむなく)　$\sqrt{6} = 2.44949$ 似(に)よよくよく

$\sqrt{7} = 2.64575\ldots$ 菜(な)に虫(むし)いない　$\sqrt{8} = 2.828427\ldots$ 庭(にわ)には呼(よ)ぶな

例題 I1.2.1 循環小数 ★

(1) 次の分数を小数の形に直し，循環小数の表し方で書け．

(i) $\frac{1}{3}$　　(ii) $\frac{3}{11}$　　(iii) $\frac{13}{18}$

(2) 次の循環小数を分数の形で表せ．

(i) $0.\dot{2}$　　(ii) $0.\dot{1}\dot{2}$

解説動画

考え方

(1) 割り算を行い，循環する部分の最初と最後の数字の上に ● をつけて表す．

(2) (i) $x = 0.\dot{2}$ とおくと，$10x = 2.\dot{2}$ となり，$10x$ と x の差を考えることで循環する部分を消すことができる．

(ii) 循環する部分が 2 桁であるので，$x = 0.\dot{1}\dot{2}$ とおいて，$10^2x\ (= 100x)$ と x の差を考える．

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 12.121212\ldots \\ - & x = & 0.121212\ldots \\ \hline & 99x = & 12 \end{array}$$

循環する部分が消える

解答

(1) (i) $\dfrac{1}{3} = 0.33\ldots = \mathbf{0.\dot{3}}$

(ii) $\dfrac{3}{11} = 0.2727\ldots = \mathbf{0.\dot{2}\dot{7}}$

(iii) $\dfrac{13}{18} = 0.722\ldots = \mathbf{0.7\dot{2}}$

◀ 筆算などで割り算を行う．

$$\begin{array}{r} 0.33\ldots \\ 3\,\big)\,\overline{10} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1\ldots \end{array}$$

(2) (i) $x = 0.\dot{2}$ とおく．右のように計算して，

$$9x = 2$$

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 2.22\ldots \\ - & x = & 0.22\ldots \\ \hline & 9x = & 2 \end{array}$$

よって，$x = \mathbf{\frac{2}{9}}$

◀ 循環する部分が 1 桁であるので，両辺を $10^1\ (= 10)$ 倍する．

(ii) $x = 0.\dot{1}\dot{2}$ とおく．右のように計算して，

$$99x = 12$$

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 12.121\ldots \\ - & x = & 0.121\ldots \\ \hline & 99x = & 12 \end{array}$$

よって，$x = \frac{12}{99} = \mathbf{\frac{4}{33}}$

◀ 循環する部分が 2 桁であるので，両辺を $10^2\ (= 100)$ 倍する．なお，答えは既約分数にする．

One Point

循環小数は，循環する桁数に着目して計算する．

【注意】 (2) の $\frac{2}{9}$，$\frac{4}{33}$ のように，分母と分子に 1 以外の公約数がなく，これ以上約分できない分数のことを**既約分数**という．

問題 I1.2.1 ★ 解答 p.238

▶ 節末 I1.2.1

(1) 次の分数を小数の形に直し，循環小数の表し方で書け．

(i) $\frac{2}{7}$　　(ii) $\frac{5}{12}$　　(iii) $\frac{7}{15}$

(2) 次の循環小数を分数の形で表せ．

(i) $0.\dot{4}$　　(ii) $0.\dot{3}\dot{6}$

例題 I1.2.2 平方根の計算 ★

次の式を計算せよ．

(1) $4\sqrt{12}-\sqrt{18}-2\sqrt{75}$　(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$　(4) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

解説動画

考え方

(1) 根号内の数を素因数分解し，$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$ を用いて根号内をできるだけ小さい数にする．例えば，$\sqrt{12}$ は，$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$ とする．

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

(2)，(3) 文字式と同じように展開して，$(\sqrt{a})^2=a$，$(-\sqrt{a})^2=a$ を用いて計算する．

(4) 乗法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を用いる．

解答

(1) $$4\sqrt{12}-\sqrt{18}-2\sqrt{75}=4\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^2\cdot 2}-2\sqrt{5^2\cdot 3}$$
$$=8\sqrt{3}-3\sqrt{2}-10\sqrt{3}=\boldsymbol{-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$$

◀ 素因数分解し，根号内を小さい数にする．

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=\mathbf{1}$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$$
$$+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$$
$$=5+2\sqrt{15}+3+5-2\sqrt{15}+3=\mathbf{16}$$

◀ $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a>0,\ b>0)$

(4) $$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$$
$$=2+2\sqrt{6}+3-5=\boldsymbol{2\sqrt{6}}$$

◀ $(\sqrt{2}+\sqrt{3})=A$ とおくと，$(A+\sqrt{5})(A-\sqrt{5})=A^2-5$

One Point

$$\boldsymbol{a>0,\ k>0\ \text{のとき，}\ \sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}}$$

【余談】 今後の学習のために，$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$ も合わせて覚えておくとよい．

問題 I1.2.2 ★ 解答 p.238

▶ 節末 I1.2.2

次の式を計算せよ．

(1) $3\sqrt{20}-2\sqrt{45}+\sqrt{27}$　(2) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

(3) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$　(4) $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{3})$

例題 I1.2.3 分母の有理化 ★★

次の式の分母を有理化して簡単にせよ．

(1) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ (4) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

解説動画

考え方

(1) 分母と分子に同じ数を掛け，$(\sqrt{a})^2=a$ を用いる．

(2)，(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$ を用いる．

(4) 分母を 2 つの項と 1 つの項に分けて，分母と分子に同じ数を掛けることを考える．しかし，ここでは 1 回の操作で有理化することができない．そこで，2 回の操作で計算することを考える．なお，1 回目の同じ数を掛ける操作において，$1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ と分けて分母と分子に $1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ を掛けるより，$(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}$ と分けて分母と分子に $(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}$ を掛けた方が計算が楽になる（$1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$ に着目して，項を分けるとよい）．

$1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ に分けた場合

$$\frac{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-4-2\sqrt{6}}$$

2 回目の操作において，$-4+2\sqrt{6}$ を掛けなければならない．

$(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}$ に分けた場合

$$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

2 回目の操作において，単に $\sqrt{2}$ を掛ければよい．

解答

(1) $$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

◀ 分母，分子に $\sqrt{2}$ を掛ける．

【別解】 $$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

(2) $$\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\frac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3}=\boldsymbol{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$

◀ $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$
$=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2=4$

(3) $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}&=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}\\&=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{3-1}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{7}}{2}}\end{aligned}$$

◀ 第 1 項と第 2 項の分母,分子にそれぞれ，$\sqrt{3}+1$，$\sqrt{7}+\sqrt{5}$ を掛ける．

(4) $$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}&=\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}\\&=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}\end{aligned}$$

◀ $1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$ より，$(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}$ と項を分けて，$(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}$ を掛ける．

◀ 更に分母を有理化する．

One Point

分母の有理化は，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ を用いる．

問題 I1.2.3 ★★ 解答 p.239

▶ 節末 I1.2.3 ▶ 節末 I1.2.4

次の式の分母を有理化して簡単にせよ．

(1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ (3) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

例題 I1.2.4 2 重根号 ★★

次の 2 重根号を簡単な形にせよ．

(1) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$ (2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ (3) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$ (5) $\sqrt{4+\sqrt{15}}$

解説動画

考え方 $\sqrt{p\pm2\sqrt{q}}$ の形は，$a+b=p$，$ab=q$（和が p，積が q）になる数 a，b を見つければ，次のように式変形できる．

$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{p+2\sqrt{q}}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，

$a>b>0$ のとき，$\sqrt{p-2\sqrt{q}}=\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$$\sqrt{\underbrace{a+b}_{和}\pm2\sqrt{\underbrace{ab}_{積}}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$$

(1) 和が 9，積が 14 になる 2 つの数を探す．
(2) 和が 7，積が 10 になる 2 つの数を探す．
(3)，(4)，(5) $2\sqrt{ab}$ の形を作るように式変形する．

解答

(1) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{(7+2)+2\sqrt{7\times2}}=\boldsymbol{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

(2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{(5+2)-2\sqrt{5\times2}}=\boldsymbol{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{8}}=\sqrt{(4+2)+2\sqrt{4\times2}}=\boldsymbol{2+\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt{8-\sqrt{48}}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\times2}}=\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

(5)
$$\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\times3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}$$

◀ 和が 9，積が 14 になる 2 つの数は，7 と 2 である．
◀ $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ は誤りであるので注意すること．
◀ $4\sqrt{2}=2\times2\sqrt{2}$
$=2\sqrt{2^2\cdot2}=2\sqrt{8}$
◀ $\sqrt{48}=\sqrt{2^2\cdot12}=2\sqrt{12}$
◀ $\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{1}$ の分母，分子に $\sqrt{2}$ を掛ける．
◀ 分母を有理化する．

2 重根号

$$\sqrt{p+2\sqrt{q}}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\quad(a>0,\ b>0),$$
$$\sqrt{p-2\sqrt{q}}=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}\quad(a>b>0)$$

【注意】 $2\sqrt{ab}$ の 2 がない場合は，2 を作るように式変形する．

【注意】 $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ のときの 2 つの数 a，b は，$a>b>0$ であるので注意すること．例えば (2) は，$\sqrt{2}>\sqrt{5}$ ではなく，$\sqrt{5}>\sqrt{2}$ であるので，$\sqrt{5-2\sqrt{10}}=\sqrt{2}-\sqrt{5}$ と答えてしまわないようにする（正しくは，$\sqrt{5-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$）．

問題 I1.2.4 ★★ 解答 p.240 ▶ 節末 I1.2.5

次の 2 重根号を簡単な形にせよ．

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$ (2) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$ (3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}$ (4) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}$

例題 I1.2.5 対称式 x^n+y^n の値 ★★★

$x=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $x+y$ (2) xy (3) x^2+y^2 (4) x^3+y^3 (5) x^4+y^4 (6) x^5+y^5

解説動画

考え方 $x+y$, x^2+y^2 のように，x, y を入れ替えても，もとの式と同じ式になるものを，x, y の対称式といい，$x+y$, xy を**基本対称式**という．x, y の対称式は，基本対称式 $x+y$, xy で表されることが知られている．

(3)，(4) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ より，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ と式変形できる．3 次式の場合も同様に，$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ より，$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ と式変形できることを用いればよい．

(6) $x^5=\boxed{x^2}\times\boxed{x^3}$, $y^5=\boxed{y^2}\times\boxed{y^3}$ より，

$$\left(\boxed{x^2}+\boxed{y^2}\right)\left(\boxed{x^3}+\boxed{y^3}\right)=\boxed{x^5}+x^2y^3+x^3y^2+\boxed{y^5}=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)=x^5+y^5+(xy)^2(x+y)$$

よって，$x^5+y^5=\left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)-(xy)^2(x+y)$ となり，(1)〜(4) の結果を利用すればよい．

解答

(1)
$$x+y=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{3-2}=\mathbf{4\sqrt{3}}$$

(2)
$$xy=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{4}{3-2}=\mathbf{4}$$

(3)
$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(4\sqrt{3})^2-2\cdot4=48-8=\mathbf{40}$$

(4)
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(4\sqrt{3})^3-3\cdot4\cdot4\sqrt{3}$$
$$=192\sqrt{3}-48\sqrt{3}=\mathbf{144\sqrt{3}}$$

【別解】 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=4\sqrt{3}\cdot(40-4)=\mathbf{144\sqrt{3}}$

(5)
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=40^2-2\cdot4^2=1600-32=\mathbf{1568}$$

(6)
$$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$$
$$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$$
$$=40\cdot144\sqrt{3}-4^2\cdot4\sqrt{3}=5760\sqrt{3}-64\sqrt{3}=\mathbf{5696\sqrt{3}}$$

◀ $x=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ のように，x, y のそれぞれの分母を有理化してから，$x+y$, xy の値を計算してもよい．

◀ (1)，(2) で求めた $x+y=4\sqrt{3}$, $xy=4$ を利用する．

◀ a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

◀ $(x^2+y^2)^2$
$=x^4+2x^2y^2+y^4$

◀ $(x^2+y^2)(x^3+y^3)$
$=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$

One Point

x，y の対称式は，基本対称式 $x+y$，xy で表す．

$$\boldsymbol{x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,\quad x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

問題 I1.2.5 ★★★ 解答 p.240

$x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, $y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $x+y$ (2) xy (3) x^2+y^2 (4) x^3+y^3 (5) x^4+y^4

例題 I1.2.6 対称式の値 ★★

$x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$　　(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$　　(3) $x-\frac{1}{x}$

解説動画

考え方

(1)，(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$，$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ を用いる．
(3) $(x-\frac{1}{x})^2$ を用いる．

解答

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=(\sqrt{6})^2-2=\mathbf{4}$

◀ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

【別解】 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$ の両辺を 2 乗すると，$x^2+2+\frac{1}{x^2}=6$
よって，$x^2+\frac{1}{x^2}=\mathbf{4}$

(2)
$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=(\sqrt{6})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{6}\\&=6\sqrt{6}-3\sqrt{6}=\mathbf{3\sqrt{6}}\end{aligned}$$

◀ x^3+y^3
$=(x+y)^3-3xy(x+y)$

【別解】
$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\\&=\sqrt{6}(4-1)=\mathbf{3\sqrt{6}}\end{aligned}$$

◀ x^3+y^3
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(3) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2=4-2=2$
したがって，$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=2$
よって，$x-\frac{1}{x}=\mathbf{\pm\sqrt{2}}$

◀ (1) の $x^2+\frac{1}{x^2}=4$ を用いるために，$(x-\frac{1}{x})^2$ を考える．

◀ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ を用いて求めてもよい．

【注意】 $\frac{1}{x}=y$ とおくと，$x+\frac{1}{x}=x+y$，$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+y^2$，$x^3+\frac{1}{x^3}=x^3+y^3$ のように，x と y の対称式となる．なお，$x-\frac{1}{x}$ は対称式ではないが，$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ は対称式である．

問題 I1.2.6 ★★ 解答 p.241

$x-\frac{1}{x}=3$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$　　(2) $x+\frac{1}{x}$　　(3) $x^3+\frac{1}{x^3}$　　(4) $x^6+\frac{1}{x^6}$

例題 I1.2.7 3 文字の対称式の値 ★★★

$x=-1+\sqrt{3}$, $y=-1-\sqrt{3}$, $z=2$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $x+y+z$　(2) $xy+yz+zx$　(3) xyz

(4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$　(5) $x^2+y^2+z^2$　(6) $x^3+y^3+z^3$

解説動画

考え方 x, y, z の対称式を基本対称式で表すことを考える．3 文字の場合の基本対称式は，$x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz である．すべての対称式は，基本対称式で表すことができる．

(5) 直接代入するのではなく，乗法公式 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ の利用を考える．$2xy+2yz+2zx$ を移項した，次の式を利用すると考える．

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

(6) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\cdots$(i) を利用する．$-3abc$ を移項した，次の式を利用すると考えてもよい．

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

解答

(1) $x+y+z=(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})+2=\mathbf{0}$

(2)
$$\begin{aligned}&xy+yz+zx\\=&(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})\cdot 2+2\cdot(-1+\sqrt{3})\\=&1-3-2-2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}=\mathbf{-6}\end{aligned}$$

(3) $xyz=(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})\cdot 2=(1-3)\cdot 2=\mathbf{-4}$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{yz}{x\cdot yz}+\frac{zx}{y\cdot zx}+\frac{xy}{z\cdot xy}=\frac{yz+zx+xy}{xyz}\\&=\frac{-6}{-4}=\mathbf{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

◀ 通分して分母を揃える．

(5)
$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\&=0^2-2\cdot(-6)=\mathbf{12}\end{aligned}$$

◀ $(x+y+z)^2$ $=x^2+y^2+z^2$ $+2(xy+yz+zx)$

(6)
$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3&=(x^3+y^3+z^3-3xyz)+3xyz\\&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz\\&=0+3\cdot(-4)=\mathbf{-12}\end{aligned}$$

◀ (i) を利用する．

◀ (3) より，$xyz=-4$ であり，(1) より，$x+y+z=0$ である．

One Point

x, y, z の対称式は，基本対称式 $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz で表す．

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)}$$

$$\boldsymbol{x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz}$$

問題 I1.2.7 ★★★ 解答 p.241

▶ 節末 I1.2.6 ▶ 章末 I1.3

$x+y+z=3$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=-2$ を満たす実数 x, y, z に対して，次の式の値を求めよ．

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$　(2) $x^2+y^2+z^2$　(3) $x^3+y^3+z^3$

例題 I1.2.8 式の値 ★★★

$\alpha = \sqrt{2} - 1$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2 + 2\alpha - 1$ (2) $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

解説動画

考え方

(1) 直接 α を代入して求めることもできるが，計算に手間が掛かる．計算を簡単にするために，$\alpha = \sqrt{2} - 1$ を根号のない形に変形することを考える．$\alpha = \sqrt{2} - 1$ を移項すると，$\alpha + 1 = \sqrt{2}$ となる．この式の両辺を 2 乗すると，根号のない形が得られる．

(2) α の値を $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$ に直接代入しようとすると，計算に手間が掛かる．そこで，(1) の結果を利用することを考える．(1) より，$\alpha^2+2\alpha-1=0$ であり，移項すると，$\alpha^2 = -2\alpha+1 \cdots$ (i) が得られる．これより，α^2 は α の 1 次式で表されるので，$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2$ は，(i) を用いることで次数を下げることができる．α^4 も同様の操作で次数を下げ，α の 1 次式で表す．

$\underbrace{\alpha \cdot \alpha^2}_{3次式} = \underbrace{\alpha(-2\alpha+1)}_{2次式}$

解答

(1) $\alpha = \sqrt{2} - 1$ より，$\alpha + 1 = \sqrt{2}$

◀ 右辺を根号のみの形にする．

両辺を 2 乗すると，$(\alpha+1)^2 = (\sqrt{2})^2$

したがって，$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 2$

よって，$\boldsymbol{\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0}$

(2) (1) より，$\alpha^2 = -2\alpha + 1$

$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2$，$\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3$ であるから，

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(-2\alpha+1) = -2\alpha^2 + \alpha = -2(-2\alpha+1) + \alpha = 5\alpha - 2,$$
$$\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3 = \alpha(5\alpha-2) = 5\alpha^2 - 2\alpha = 5(-2\alpha+1) - 2\alpha = -12\alpha + 5$$

◀ α^3 は，$\alpha^2 = -2\alpha+1$ を用いて，次数を下げる．α^4 は，α^3 の結果を用いて次数を下げる．なお，$\alpha^4 = (\alpha^2)^2 = (-2\alpha+1)^2$ を用いてもよい．

よって，

$$\begin{aligned}\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 &= (-12\alpha+5) + (5\alpha-2) + (-2\alpha+1) + \alpha + 1 \\ &= -8\alpha + 5 = -8(\sqrt{2}-1) + 5 = \mathbf{13 - 8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

One Point

次数の高い式の値を求めるには，次数を下げることを考える．

【余談】 数学 II で学習する，多項式の除法を用いると，$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ は次のように変形できる．

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = (\alpha^2 + 2\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha + 4) - 8\alpha + 5$$

ここで，$\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ より，$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ の値は $-8\alpha + 5$ の値と等しいことがわかる．

問題 I1.2.8 ★★★ 解答 p.242

$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $2\alpha^2 - 2\alpha - 1$ (2) α^8

例題 I1.2.9 整数部分と小数部分 ★★★

$\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．

(1) a，b の値を求めよ． (2) a^2+ab の値を求めよ．

解説動画

考え方

(もとの数) = (整数部分) + (小数部分) に分けられるので，小数部分は，(小数部分) = (もとの数) − (整数部分) と考えることができる．例えば $\sqrt{5}=2.236\ldots$ は，右のように $\sqrt{5}=2+0.236\ldots$ と分けられるので，$0.236\ldots=\sqrt{5}-2$ と考えることができる．

$$\sqrt{5}=2.236\ldots=\underbrace{2}_{\text{整数部分}}+\underbrace{0.236\ldots}_{\text{小数部分}}$$

なお，$\sqrt{5}$ の整数部分は，$n^2 \leqq 5 < (n+1)^2$ となる整数 n を見つけることで求められる．
例：$\sqrt{5}$ は，$2^2<5<3^2$ より $2<\sqrt{5}<3$ であるから，$\sqrt{5}=2.\ldots$ となる．よって，整数部分は 2 である．

解答

(1) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

◀ 分母を有理化する．

$2<\sqrt{5}<3$ であるから，$5<3+\sqrt{5}<6$

◀ $2^2<5<3^2$ より，$2<\sqrt{5}<3$

したがって，$\frac{5}{4}<\frac{3+\sqrt{5}}{4}<\frac{3}{2}$

◀ $\frac{5}{4}=1.25$，$\frac{3}{2}=1.5$

ゆえに，$a=\mathbf{1}$

よって，

$$b=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-a=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-1=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

◀ 小数部分は，
(もとの数) − (整数部分)
で求められる．

(2) (1) より，

$$a^2+ab=a(a+b)=1\cdot\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{4}}$$

◀ $a+b$ はもとの数 $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ であることを用いる．

One Point

(小数部分) = (もとの数) − (整数部分)

【注意】 実数 x の整数部分は，$n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n である．
例：$4 \leqq x < 5$ のとき，x の整数部分は 4，小数部分は $x-4$

問題 I1.2.9 ★★★ 解答 p.242

▶ 節末 I1.2.7

$\frac{3}{4-\sqrt{7}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．

(1) a，b の値を求めよ． (2) $a+\frac{1}{b}$ の値を求めよ．

節末問題 1.2 実数

節末 I1.2.1 ★ 解答（節末）p.243

▶ 例題 I1.2.1

循環小数の積 $0.\dot{1}\dot{5} \times 0.\dot{5}\dot{4}$ を，1 つの既約分数で表せ．

節末 I1.2.2 ★★ 解答（節末）p.243

▶ 例題 I1.2.2

$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{6}$ のとき，$\sqrt{16x^2 - 24x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{36x^2 - 60x + 25}$ を簡単にせよ．

節末 I1.2.3 ★★ 解答（節末）p.243

▶ 例題 I1.2.3

次の式を計算せよ．

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

節末 I1.2.4 ★★ 解答（節末）p.244

▶ 例題 I1.2.3

次の式の分母を有理化して計算せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

節末 I1.2.5 ★★ 解答（節末）p.244

▶ 例題 I1.2.4

次の式を簡単な形にせよ．

$$\sqrt{4+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$$

節末 I1.2.6 ★★★ 解答（節末）p.245

▶ 例題 I1.2.7

実数 a, b, c が $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=14$, $abc=-2$ を満たすとき，$(a+b)(b+c)(c+a)$ の値を求めよ．

節末 I1.2.7 ★★★ 解答（節末）p.245

▶ 例題 I1.2.9

$\frac{1}{4-\sqrt{11}}$ の整数部分を a，小数部分を b とし，$10b$ の整数部分を c，小数部分を d とするとき，次の値を求めよ．

(1) a　(2) $10b$　(3) c　(4) d

1.3 1 次不等式

1.3.1 不等式

(1) 数量の間の大小関係を，不等号 $>$，$<$，$\geqq$，$\leqq$ を用いて表した式を**不等式**という．不等号の左側を**左辺**，右側を**右辺**といい，左辺と右辺を合わせて**両辺**という．

◀ $\geqq$ を $\geq$，$\leqq$ を $\leq$ と表すこともある．

(2) 不等式についても，等式とよく似た性質が成り立つ．不等式についても等式の場合と同様に，移項することによって，与えられた不等式を簡単な形に変形できる．

$$a < b \iff a + c < b + c,$$
$$a < b \iff a - c < b - c,$$

$$c > 0 \text{ のとき}, a < b \iff ac < bc,$$
$$c > 0 \text{ のとき}, a < b \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

とくに，負の数 c を両辺に掛けると不等号の向きが逆転するので注意すること．

$$c < 0 \text{ のとき}, a < b \iff ac > bc,$$
$$c < 0 \text{ のとき}, a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

◀ 例えば不等式 $2 < 5$ に対して，両辺に負の数 -1 を掛けると，次のように式不等号の向きが変わる．

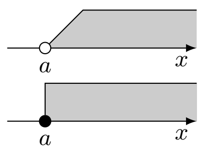
$$-2 \underbrace{>}_{\text{向きが変わる}} -5$$

(3) x が満たすべき条件を示す不等式（これを x に対する不等式という）において，不等式を満たす x の値を，その不等式の**解**といい，不等式を満たすすべての x の値を求めることを**不等式を解く**という．また，不等式のすべての解の集合を，その**不等式の解集合**ともいう．

◀ 不等式を解くことは，不等式の基本的な性質に基づき，それを最も単純な形の不等式に変形（同値変形）することを指す．

(4) 不等式においてすべての項を左辺に集めて（右辺が 0 になるように）整理したとき，$ax + b > 0$, $ax + b \leqq 0$ のように，左辺が x の 1 次式となる不等式を，x に関する **1 次不等式**という．ここで，a，b は定数であり，$a \neq 0$ とする．

数直線上に不等式の解を示すときには，右の図のように行う．本書では「$<$」「$>$」の場合は $\circ$，「$\leqq$」「$\geqq$」の場合は $\bullet$ を用いて表す．



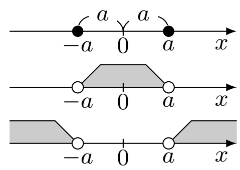
◀ 図は上から順にそれぞれ，$x > a$，$x \geqq a$ のときを示している．

1.3.2 絶対値と方程式・不等式

$a > 0$ のとき，次のことがいえる．

$$|x| = a \text{ の解は，} x = \pm a$$
$$|x| < a \text{ の解は，} -a < x < a$$
$$|x| > a \text{ の解は，} x < -a,\ x > a$$

◀ 上から順にそれぞれ，



絶対値記号を含む方程式，不等式を解くには，

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geqq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

より，絶対値記号を外して計算すればよい．

◀ なお，絶対値記号の定義は，

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geqq 0) \\ -A & (A \leqq 0) \end{cases}$$

としても構わない．この方が実践的であり，気楽であるという考え方もある．

例題 I1.3.1 不等式の性質 ★★

$-2<x<1$，$1<y<3$ のとき，次の式のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $x+1$　　(2) $2x$　　(3) $x+y$　　(4) $x-y$　　(5) $2x-3y$

解説動画

考え方 (1) は，不等式の性質により，$a<b \Longrightarrow a+c<b+c$ であるから，$\begin{cases} -2+1<\boxed{x+1} \\ \boxed{x+1}<1+1 \end{cases}$

つまり，$-2<x<1$ の各辺に 1 を加えた，$-1<\boxed{x+1}<2$ が成り立つことを用いる．

(3)，(4)，(5) は $a<x<b$，$c<y<d \Longrightarrow a+c<x+y<b+d$ などの不等式の性質を用いる．

解答

(1) $-2<x<1$ の各辺に 1 を加えると，$\boldsymbol{-1<x+1<2}$

◀ $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

(2) $-2<x<1$ の各辺に 2 を掛けると，$\boldsymbol{-4<2x<2}$

◀ $c>0$，$a<b \Rightarrow ac<bc$

(3) $-2<x<1$ の各辺に y を加えると，$-2+y<x+y<1+y$

◀ $-2<x<1$，$1<y<3$ の各辺を足し合わせて，$-1<x+y<4$ としてもよい．

$1<y$ より，$-2+1<-2+y$

また，$y<3$ より，$1+y<1+3$

したがって，$-1<x+y$，$x+y<4$

よって，$\boldsymbol{-1<x+y<4}$

(4) $1<y<3$ の各辺に -1 を掛けると，$-1>-y>-3$

◀ 不等式の両辺に負の数を掛けるときは，不等号の向きが変わる．

すなわち，$-3<-y<-1$

したがって，$-2<x<1$，$-3<-y<-1$ より，

$$-2+(-3)<x+(-y)<1+(-1)$$

◀ $-2-1<x-y<1-3$ より，$-3<x-y<-2$ とする操作は誤りであるので注意すること．

よって，$\boldsymbol{-5<x-y<0}$

(5) (2) より，$-4<2x<2$

$1<y<3$ の各辺に -3 を掛けると，$-3>-3y>-9$

◀ 不等号の向きが変わる．

すなわち，$-9<-3y<-3$

したがって，$-4<2x<2$，$-9<-3y<-3$ より，

$$-4+(-9)<2x+(-3y)<2+(-3)$$

よって，$\boldsymbol{-13<2x-3y<-1}$

One Point

$$\boldsymbol{a<b,\quad c<d \Longrightarrow a+c<b+d,}$$
$$\boldsymbol{a<b,\quad c<d \Longrightarrow a-d<b-c,}$$
$$\boldsymbol{0<a<b,\quad 0<c<d \Longrightarrow ac<bd}$$

【注意】 $a<x<b$，$c<y<d$ のとき，$a-c<x-y<b-d$ は必ずしも成り立たない．例えば，$-2<x<1$，$1<y<5$ とすると，$-3<x-y<-4$ となりこれは明らかに成り立たない．(4) のように $x+(-y)$ として，$a-d<x-y<b-d$ とする操作が正しいので注意すること．

問題 I1.3.1 ★★ 解答 p.246

$-3<x<2$，$-1<y<4$ のとき，次の式のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $x+2$　　(2) $3x$　　(3) $x+y$　　(4) $x-y$　　(5) $3x-2y$

例題 I1.3.2 1 次不等式（基本）★

次の 1 次不等式を解け．

(1) $3x-2<4x+1$　　(2) $2(x+1)\leqq 3(2x-1)$　　(3) $\frac{x+1}{6}-4\geqq\frac{x}{3}-\frac{7}{2}$

解説動画

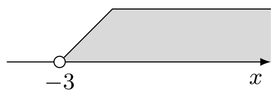
考え方 $ax>b$ または $ax<b$ の形や，$ax\geqq b$ または $ax\leqq b$ の形に変形する．また，両辺に負の数を掛ける（負の数で割る）ときは，不等号の向きが変わるので注意すること．
(3) 両辺の分数の形に着目し，分母の最小公倍数を掛けてから不等式の解を求めるとよい．

解答

(1) 移項すると，$3x-4x<1+2$　◀ 移項すると符号が変わる．

整理すると，$-x<3$

よって，$\boldsymbol{x>-3}$　◀ 不等式の両辺に -1 を掛ける，もしくは両辺を -1 で割ると考える．このとき，不等号の向きが変わるので注意すること．

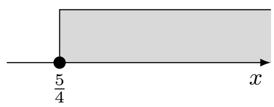


(2) 展開すると，$2x+2\leqq 6x-3$

移項すると，$2x-6x\leqq -3-2$

整理すると，$-4x\leqq -5$

よって，$\boldsymbol{x\geqq\frac{5}{4}}$　◀ 不等号の向きが変わる．

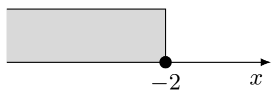


(3) 両辺に 6 を掛けると，$x+1-24\geqq 2x-21$　◀ 不等式の両辺に，2，3，6 の最小公倍数 6 を掛ける．

移項すると，$x-2x\geqq -21+23$

整理すると，$-x\geqq 2$

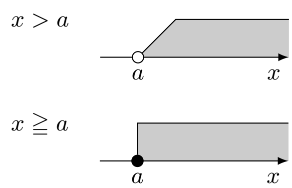
よって，$\boldsymbol{x\leqq -2}$　◀ 不等号の向きが変わる．



One Point

不等式の両辺に，負の数を掛ける（負の数で割る）ときは，不等号の向きが変わる．

【注意】本書において，数直線上に不等式の解を示すときには，「$>$，$<$」を「○」，「$\geqq$，$\leqq$」を「●」を用いて表す．



問題 I1.3.2 ★　解答 p.246

次の 1 次不等式を解け．

(1) $5x+1<3x-4$　　(2) $4(2x-3)>3(x+2)$　　(3) $\frac{2x+3}{4}-\frac{x-1}{6}\geqq\frac{1}{3}$

例題 I1.3.3　1 次不等式，連立 1 次不等式 ★

次の不等式，連立 1 次不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 5x+4>3x+2 \\ -x+4 \geqq 2(x-1) \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+5<-1-2x \\ 3x+1 \geqq 1 \end{cases}$

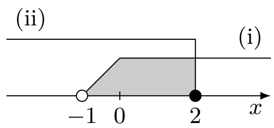
(3) $x+1<2x+3<5x$

解説動画

考え方 与えられたそれぞれの不等式を解き，それぞれの解を数直線上に表して，共通する範囲を求めるとよい．
(3) 不等式 $A<B<C$ は，2 つの不等式 $A<B$，$B<C$ が同時に成り立つことを表している．よって，不等式 $A<B$，$B<C$ は，連立不等式 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ と同じ意味である．

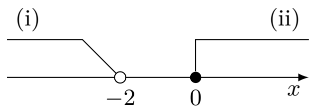
解答

(1) $5x+4>3x+2$ より，$2x>-2$
したがって，$x>-1 \cdots$ (i)
また，$-x+4 \geqq 2(x-1)$ より，$-3x \geqq -6$
したがって，$x \leqq 2 \cdots$ (ii)
よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，



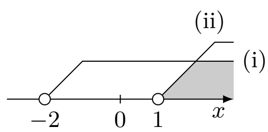
$$\boldsymbol{-1<x \leqq 2}$$

(2) $x+5<-1-2x$ より，$3x<-6$
したがって，$x<-2 \cdots$ (i)
また，$3x+1 \geqq 1$ より，$3x \geqq 0$
したがって，$x \geqq 0 \cdots$ (ii)
(i) と (ii) の共通範囲はない．
よって，**解なし**



◀ $0 \leqq x<-2$ は誤りであるので注意すること．共通範囲がないので，解なしと答える．

(3) $x+1<2x+3<5x$ より，$\begin{cases} x+1<2x+3 \\ 2x+3<5x \end{cases}$
$x+1<2x+3$ より，$-x<2$
したがって，$x>-2 \cdots$ (i)
また，$2x+3<5x$ より，$-3x<-3$
したがって，$x>1 \cdots$ (ii)
よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，$\boldsymbol{x>1}$



◀ B と C の大小関係がわからなくなってしまうので，$A<B<C$ を $\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$ とするのは誤りであるので注意すること．

One Point

連立不等式の解は，数直線上に解を図示して求める．

問題 I1.3.3 ★　解答 p.247

次の不等式，連立 1 次不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 4x-1>2x+3 \\ 2x+5 \leqq 3(x-1) \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+4 \geqq 3-x \\ x-2<0 \end{cases}$

(3) $2x+1 \leqq 3x-4<-4x-7$

例題 I1.3.4 不等式を満たす整数の解 ★★

(1) 不等式 $4x-2<2x+4$ を満たす自然数 x の値をすべて求めよ．

(2) 不等式 $4x+a<5x<3x+10$ を満たす整数 x がちょうど 2 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

解説動画

考え方

(1) 不等式を解き，その解の中から条件に適する自然数を考える．このとき，与えられた不等式は等号を含まないので注意すること．

(2) 不等式を解き，その解を満たす整数 x がちょうど 2 個存在する定数 a の範囲を，数直線を用いて考える．このとき，等号を含むか否かをよく考えて注意すること．

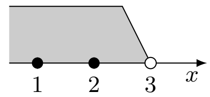
解答

(1) 与えられた不等式より，$2x<6$

したがって，$x<3$

よって，x は自然数であるから，$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

◀ 3 は含まない．



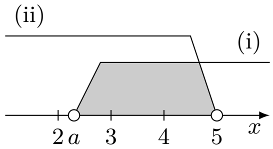
(2) $4x+a<5x$ を解くと，$-x<-a$ より，$x>a$ $\cdots$(i)

$5x<3x+10$ を解くと，$2x<10$ より，$x<5$ $\cdots$(ii)

◀ $A<B<C$ より，
$$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$$

(i)，(ii) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 2 個となるのは右の図のような場合である．

よって，$\boldsymbol{2 \leqq a<3}$



◀ 数直線を用いるとよい．

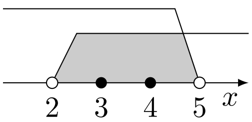
◀ 等号を含むか否かに注意すること．

One Point

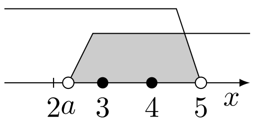
等号を含むか否かをよく考える．

【注意】 (2) は $a=2,\ 3$ のときに適するか否かを考えて注意すること．

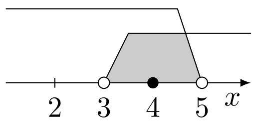
$a=2$ のとき



$2<a<3$ のとき



$a=3$ のとき



上の図より，$a=2$，$2<a<3$ のとき，$x=3,\ 4$ となるので適することがわかる．$a=3$ のとき，$x=4$ となるので不適である．

問題 I1.3.4 ★★ 解答 p.248

▶ 節末 I1.3.1

(1) 不等式 $3x-1<2x+5$ を満たす自然数 x の値をすべて求めよ．

(2) 次の連立不等式を満たす整数 x がちょうど 2 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

$$\begin{cases} 3x+a<4x \\ 3x>4x-7 \end{cases}$$

例題 I1.3.5 1 次不等式の文章題 ★★

(1) 1 個 80 円のお菓子 A と 1 個 120 円のお菓子 B を合わせて 60 個買い，150 円の箱に詰めて友人に渡したい．お菓子代と箱代の合計金額を 6000 円以下にするとき，お菓子 B は最大で何個まで買うことができるか．
(2) 連続する 3 つの整数の和が 62 以上になるもののうち，その和が最小となる 3 つの数を求めよ．

解説動画

考え方 不等式の文章題は，求めるものを x とおいて不等式を作るとよい．
(1) x は整数であることに注意すること．
(2) 連続する 3 つの整数は，例えば中央の数を x とおくと，$x-1$，x，$x+1$ と表すことができる．

	不等号
より大きい	$>$
より小さい，未満	$<$
以上	$\geqq$
以下	$\leqq$

解答

(1) お菓子 B を x 個買うとすると，お菓子 A は $(60-x)$ 個買うことになる．このとき，お菓子代と箱代の合計金額は，

◀ 求めるものを x とおく．

$$80(60-x)+120x+150 \quad \text{（円）}$$

これが 6000 円以下であるから，

$$80(60-x)+120x+150 \leqq 6000$$

整理すると，$40x \leqq 1050$
したがって，$x \leqq \frac{1050}{40} = 26.25$
これを満たす最大の整数 x は $x = 26$ である．
よって，お菓子 B は **26 個**まで買うことができる．

◀ x は整数であるので注意すること．

(2) 連続する 3 つの整数は，中央の数を x とおくと，$x-1$，x，$x+1$ と表すことができる．このとき，

◀ 一番小さい数を x とおいて，x，$x+1$，$x+2$ としてもよい．

$$\begin{aligned}(x-1)+x+(x+1) &\geqq 62\\ 3x &\geqq 62\\ x &\geqq \frac{62}{3} = 20.66\ldots\end{aligned}$$

したがって，連続する 3 つの整数の和が 62 以上になる最小の整数 x は 21 である．
よって，求める 3 つの数は，**20，21，22**

問題 I1.3.5 ★★ 解答 p.248

▶ 節末 I1.3.2 ▶ 節末 I1.3.3

(1) 1 個 100 円のペンと 1 個 180 円のノートを合わせて 20 個買い，200 円のケースに入れて息子に渡したい．文具代とケース代の合計金額を 3500 円以下にするとき，ノートは最大で何個まで買うことができるか．
(2) 連続する 4 つの整数の和が 90 以上になるもののうち，その和が最小となる 4 つの数を求めよ．

例題 I1.3.6 文字を含む 1 次不等式 ★★★

a を定数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) x の不等式 $ax-3<0$ を解け． (2) x の不等式 $(a+1)x<a^2+a$ を解け．

解説動画

考え方

(1) $a \neq 0$ であれば与えられた不等式は 1 次不等式となるが，$a=0$ のときも含まれていることに注意すること．$a=0$ のときは，両辺を a で割ることはできない（0 で割ることはできない）．一般に，1 次不等式 $Ax>B$ の解は，$A=0$ のときは次のようになる．

1 次不等式 $Ax>B$ の解

$A=0$ のとき，不等式は，$0 \cdot x > B$
よって，$B \geqq 0$ のとき，**解なし**である．また，$B<0$ のとき，解は**すべての実数**となる．

(2) のような，$Ax<B$ の解も同様に考えられる．なお，負の数で割るとき，不等号の向きが変わることにも注意すること．

解答

(1) $ax-3<0$ より，$ax<3$

(i) $a>0$ のとき，$x<\frac{3}{a}$

(ii) $a=0$ のとき，不等式は，$0 \cdot x<3$

したがって，解はすべての実数

◀ x がどのような値でも，$0<3$ であるので，すべての実数 x について成り立つ．

(iii) $a<0$ のとき，不等式は，$x>\frac{3}{a}$

◀ $a<0$ より，負の数 a で割るので，不等号の向きが変わる．

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} a>0 & \text{のとき，} \quad x<\frac{3}{a} \\ a=0 & \text{のとき，} \quad \text{すべての実数} \\ a<0 & \text{のとき，} \quad x>\frac{3}{a} \end{cases}$$

(2) $(a+1)x<a^2+a$ より，$(a+1)x<a(a+1)$

(i) $a+1>0$，すなわち，$a>-1$ のとき，$x<a$

(ii) $a+1=0$，すなわち，$a=-1$ のとき，$0 \cdot x<0$

これを満たす x の値はない．したがって，解なし

◀ $0<0$ が成り立つような x の値はない．

(iii) $a+1<0$，すなわち，$a<-1$ のとき，$x>a$

◀ $a<-1$ より，負の数 $a+1$ で割るので，不等号の向きが変わる．

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} a>-1 & \text{のとき，} \quad x<a \\ a=-1 & \text{のとき，} \quad \text{解なし} \\ a<-1 & \text{のとき，} \quad x>a \end{cases}$$

問題 I1.3.6 ★★★ 解答 p.249

▶ 節末 I1.3.4 ▶ 章末 I1.4

a を定数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) x の不等式 $ax+2>0$ を解け． (2) x の不等式 $(a-1)x \leqq a^2-a$ を解け．

例題 I1.3.7 絶対値記号を含む方程式・不等式 1 ★★

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-3|=2$　　(2) $|x-1| \leqq 5$　　(3) $|x-4|>3$

解説動画

考え方 絶対値記号を含む方程式・不等式を解くには，場合分けをして絶対値記号を外すことが基本である．
ただし，(1)〜(3) のような右辺がすべて正の定数の場合は，$|x|$ を数直線上の原点 O から任意の点 x までの距離と考えることができるので，次の性質を用いて解くとよい．

絶対値と方程式・不等式

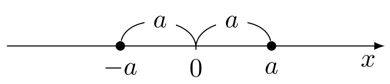
$a>0$ のとき，

(i) $|x|=a$ の解は，　$x=\pm a$

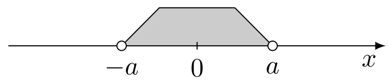
(ii) $|x|<a$ の解は，　$-a<x<a$

(iii) $|x|>a$ の解は，　$x<-a,\ x>a$

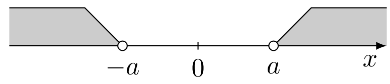
(i)



(ii)



(iii)



解答

(1) $|x-3|=2$ より，$x-3=\pm 2$
よって，$\boldsymbol{x=1,\ 5}$

(2) $|x-1| \leqq 5$ より，$-5 \leqq x-1 \leqq 5$
よって，$\boldsymbol{-4 \leqq x \leqq 6}$

(3) $|x-4|>3$ より，$x-4<-3,\ 3<x-4$
よって，$\boldsymbol{x<1,\ 7<x}$

◀ $x-3=X$ とおくと，$|X|=2$
よって，$X=\pm 2$

◀ $x-1=X$ とおくと，$|X| \leqq 5$
よって，$-5 \leqq X \leqq 5$

◀ $x-4=X$ とおくと，$|X|>3$
よって，$X<-3,\ 3<X$

問題 I1.3.7 ★★ 解答 p.249

▶ 節末 I1.3.5 ▶ 章末 I1.4

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x+2|=3$　　(2) $|x-5| \leqq 4$　　(3) $|x+1|>2$

例題 I1.3.8　絶対値記号を含む方程式・不等式 2　★★★

次の方程式，不等式を解け．

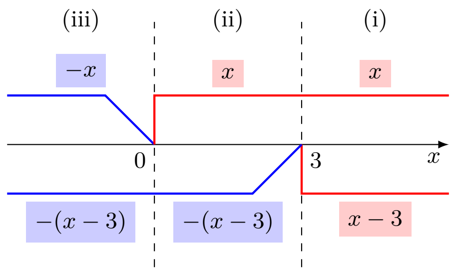
(1) $|x-3|=2x$　　　　(2) $|x|+|x-3|<x+1$

解説動画

考え方 絶対値記号の外に文字がある場合や，2 つ以上絶対値記号がある場合は，場合分けをするとよい．とくに，(2) は，

$$|x|=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases},\quad |x-3|=\begin{cases} x-3 & (x \geqq 3) \\ -(x-3) & (x<3) \end{cases}$$

となるので，右の図のように数直線を用いて，(i) $x \geqq 3$, (ii) $0 \leqq x<3$, (iii) $x<0$ の 3 つの部分に分けて考えるとよい．



解答

(1)　(i) $x-3 \geqq 0$，すなわち，$x \geqq 3$ のとき
$x-3=2x$ より，$x=-3$
これは，$x \geqq 3$ を満たさない．
(ii) $x-3<0$，すなわち，$x<3$ のとき
$-(x-3)=2x$ より，$x=1$
これは，$x<3$ を満たす．

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{x=1}$

◀ $x-3=X$ とおくと，
$$|X|=\begin{cases} X & (X \geqq 0) \\ -X & (X<0) \end{cases}$$
であるので，X が 0 以上のときと負のときで場合分けをする．

◀ 求めた x の値が x の条件を満たすか否かを調べる（忘れないように注意すること）．

(2)　(i) $x \geqq 3$ のとき
$x+(x-3)<x+1$ より，$x<4$
したがって，$x \geqq 3$ より，$3 \leqq x<4$
(ii) $0 \leqq x<3$ のとき
$x-(x-3)<x+1$ より，$x>2$
したがって，$0 \leqq x<3$ より，$2<x<3$
(iii) $x<0$ のとき
$-x-(x-3)<x+1$ より，$x>\frac{2}{3}$
これは，$x<0$ を満たさないので，解なし

よって，(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{2<x<4}$

◀ $x \geqq 3$ のとき，$|x|=x$，$|x-3|=x-3$

◀ $0 \leqq x<3$ のとき，$|x|=x$，$|x-3|=-(x-3)$

◀ $x<0$ のとき，$|x|=-x$，$|x-3|=-(x-3)$

問題 I1.3.8 ★★★　解答 p.250

▶ 節末 I1.3.5 ▶ 章末 I1.5

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x+2|=3x$　　　　(2) $|x+2|-|x-1| \geqq x$

節末問題 1.3 1 次不等式

節末 I1.3.1 ★★ 解答（節末）p.251 ▶ 例題 I1.3.4

連立不等式 $\begin{cases} x > 4a-3 \\ 3x-2 > 8(x-1) \end{cases}$ の解について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 解に 0 が含まれる．

(2) 解に含まれる整数がちょうど 4 個存在する．

節末 I1.3.2 ★★ 解答（節末）p.251 ▶ 例題 I1.3.5

整数 x は 4 の倍数であり，x を 15 で割ったところ，割り切れなかった．そこで $\frac{x}{15}$ を計算し，その小数第 1 位を四捨五入したところ，4 になった．このとき，整数 x をすべて求めよ．

節末 I1.3.3 ★★ 解答（節末）p.252 ▶ 例題 I1.3.5

(1) 駅から自宅までの道のりは 30 km である．この道のりを，初めは時速 5 km で歩き，途中からは時速 10 km で走ると，掛かった時間は 5 時間以内であった．時速 5 km で歩いた道のりはどれほどであるか．

(2) 7% の食塩水と 10% の食塩水がある．7% の食塩水 500 g と 10% の食塩水を何 g か混ぜ合わせて，8% 以上 8.5% 以下の食塩水を作りたい．10% の食塩水を何 g 以上何 g 以下混ぜればよいか．

節末 I1.3.4 ★★★ 解答（節末）p.253 ▶ 例題 I1.3.6

次の不等式を解け．ただし，a，b は定数とする．

(1) $ax > b$　　(2) $(a+b)x \leqq a^2-b^2$

節末 I1.3.5 ★★★ 解答（節末）p.254 ▶ 例題 I1.3.7 ▶ 例題 I1.3.8

次の方程式を解け．

(1) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=6$　　(2) $x^2+|x+3|+|x-2|=6$

節末 I1.3.6 ★★★ 解答（節末）p.255 ▶ 例題 I1.3.7 ▶ 例題 I1.3.8

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|2x-3|<3x$　　(2) $|x-3|+|x-5| \leqq 5$

(3) $||x-2|+4|=3x$

章末問題 1 数と式

1.4 章末問題 1

章末 I1.1 ★★ 解答（章末）p.256

▶ 例題 I1.1.6

次の式を展開せよ．

$$(x+y+z)^2-(y+z-x)^2+(z+x-y)^2-(x+y-z)^2$$

章末 I1.2 ★★★★ 解答（章末）p.256

▶ 例題 I1.1.14

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$　　(2) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

章末 I1.3 ★★★ 解答（章末）p.257

▶ 例題 I1.2.7

$x+y+z=0$ のとき，$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ の値を求めよ．

章末 I1.4 ★★★ 解答（章末）p.257

▶ 例題 I1.3.6 ▶ 例題 I1.3.7

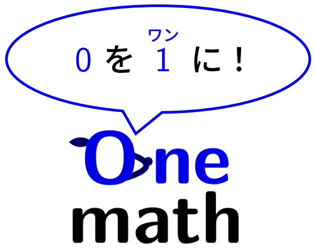
不等式 $|ax+2| \leqq b$ の解が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき a，b の値を求めよ．

章末 I1.5 ★★ 解答（章末）p.258

▶ 例題 I1.3.8

$x=2a-1$ のとき，$\sqrt{x^2+8a}+\sqrt{a^2-x}$ を簡単にせよ．

Column 1 ～「Onemath」という名前に込めた想いと余談～



「Onemath」という名前には，学ぶ人に対する一人ひとりへの願いと想いが詰まっています．この名前は，数学を通じて 0 を 1 に，そして 1 からその先に成長させるという理念を象徴しています．「数学が得意ではない」「入試に向けて何から受験勉強を始めたらいいかわからない」という 0 の状態から，一歩を踏み出すきっかけを作りたい．そして，基礎をしっかり築いた皆さんが，その 1 を磨き，大きな可能性を広げていく手助けをしたい．そのような想いを込めています．

他には，「One」には「一人ひとり (One by one) に寄り添う」という意味が込められています．学ぶスピードや得意分野は人それぞれ違います．「Onemath」は，皆さんが自分のペースで学び，自分に合った方法で成長できる環境を作ることを目指しています．また，「One」＝「1」は，数学の基本でありながら，そこから無限の可能性が広がるスタート地点でもあります．数学は「0 か 1 か」の世界とも言われることがありますが，実はその背後には数えきれないほどの可能性が広がっているのです．皆さん一人ひとりの可能性を大切にし，その成長を支える道しるべとなりたいと考えています．

「Onemath」は，一人ひとりが学びの旅を進めるための「架け橋」であり，自分の可能性を磨くための「道具箱」となることを目指しています．皆さんがそれぞれの目標に向かって，この教材を自由に，そして存分に活用してくれることを心から願っています．

【余談】 Onemath マスコットキャラクター紹介

名前：One ちゃん（女の子）

誕生日：11 月 11 日

好きな漫画：ワンパンマン

特徴：アルファベットの「O」「n」「e」からできており，耳の部分は葉っぱでできている．One More の作成に利用した LaTeX と Overleaf のロゴから，著者が着想を得て誕生したらしい．体はリンク機能を象徴する青色であるとのこと．

噂：「n」の部分は胴体と足で，「e」の部分は，尻尾と足に分かれているらしいが真相は定かではない（片足をあげている？）．また，「O」の部分は「0」でも構わないとの噂がある．

普通の One ちゃん

見返り美人の One ちゃん

実は「Onemath」という名前には，上述の由来に加え，もうひとつユニークな理由があります．著者が犬好きで，犬の鳴き声「ワン」に愛着があったからです．いくつか候補があったなかで，「Onemath（ワンマス）」に最終決定したのは，この「ワン」が犬のように可愛らしく，学びの場をより身近に感じてもらえると考えたからでした．遊び心を取り入れることで，数学と向き合うときの緊張やハードルを下げ，気軽に学べるようになればという願いを込めています．そんな思いを共有してくれる「One ちゃん」とともに，ぜひ楽しく数学を学んでください．

第 2 章　集合と命題

2 章：集合と命題（再生リスト）

数学 I
2.0

2　集合と命題

1 節 集合と論理（pp.58-77）

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I2.1.1	★		
I2.1.2	★		
I2.1.3	★★		
I2.1.4	★★★		
I2.1.5	★★		
I2.1.6	★★★★		
I2.1.7	★		
I2.1.8	★		
I2.1.9	★★		
I2.1.10	★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I2.1.11	★★★		
I2.1.12	★		
I2.1.13	★★		
I2.1.14	★★★		
I2.1.15	★★		
I2.1.16	★★★		

節末問題 2.1

番号	難易度	1 回目	2 回目
I2.1.1	★		
I2.1.2	★★		
I2.1.3	★★★		
I2.1.4	★★★		
I2.1.5	★★		
I2.1.6	★★★★		

章末問題 2

番号	難易度	1 回目	2 回目
I2.1	★★★		
I2.2	★★★		
I2.3	★★		
I2.4	★★★		
I2.5	★★		

チェック例

○・・・ 考え方を理解し，解くことができた．　△・・・ 理解が不十分である．　×・・・ 解くことができなかった．

2.1 集合と論理

2.1.1 集合

(1) 明確な範囲をもつ事物の集まりを**集合**という．また，集合に属する 1 つ 1 つのものを，その集合の**要素**という．ある要素 a が集合 A に含まれる場合，a は集合 A に**属する**といい，$\boldsymbol{a \in A}$ と表す．逆に，要素 b が集合 A に含まれない場合には，$\boldsymbol{b \notin A}$ と表す．このとき，任意の要素 a と集合 A の関係において，$a \in A$ または $a \notin A$ のいずれかが成り立つ．要素が有限個である集合を**有限集合**，要素の数が無限に存在する集合を**無限集合**という．

◀ 要素は元（げん）と訳されることもある．

(2) 集合を表すには，次の 2 つの方法がある．

(i) **要素を列記する方法**

(ii) **要素の満たす条件を述べて表す方法**

例えば，1 桁の正の奇数の集合を A とすると，A には次のような表し方がある．

(i) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

◀ 波括弧（brace）を用いて表す．

(ii) $A = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 9,\ x \text{ は奇数 }\}$, $A = \{2n-1 \mid 1 \leqq n \leqq 5,\ n \text{ は整数 }\}$

(3) 2 つの集合 A, B に関して，A のすべての要素が B の要素でもある場合，つまり $x \in A$ ならば $x \in B$ が成り立つとき，A を B の**部分集合**といい，$A \subset B$ と表す．このとき，A は B に**含まれる**，あるいは B は A を**含む**という．また，A は A 自身の部分集合でもあり，任意の集合 A について $A \subset A$ が成り立つ．

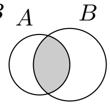
2 つの集合 A, B が一致しているとは，互いに他方の部分集合となっていることである．すなわち，A と B が等しい $\iff A \subset B$ かつ $B \subset A \iff A = B$

◀ $\iff$ は同値を表す．また，$A \iff B$ のことを，A iff B と表すこともある．

(4) **空集合** $\varnothing$ は，要素を 1 つも含まない集合を指す．任意の集合 A に対して，$\varnothing$ は A の部分集合であるとする．すなわち，$\varnothing \subset A$ と約束する．

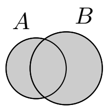
A, B の両方に属するような要素全体の集合を A と B の **共通部分** (A と B の交わり) といい，$A \cap B$ で表す．

◀ $A \cap B$



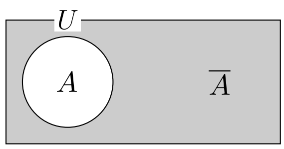
A, B の少なくとも一方に属するような要素全体の集合を A と B の **和集合** (A と B の結び) といい，$A \cup B$ で表す．

$A \cup B$



(5) **全体集合**とは，特定の文脈や議論において，考えられるすべての要素を含む集合である．**補集合**とは，全体集合 U に属し，かつ U の部分集合 A に属さない要素全体からなる集合である．これを $\overline{A}$ で表す（A^c で表されることもある）また，次のことが成り立つ．

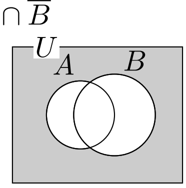
◀ 全体集合と補集合



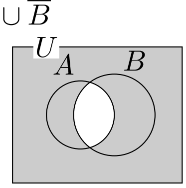
$$\overline{\varnothing} = U, \quad \overline{U} = \varnothing, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad \overline{\overline{A}} = A$$

(6) **ド・モルガンの法則（ド・モーガンの法則）**

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



◀ このような図をベン図という．ド・モルガンの法則はベン図を用いて確認できる．

2.1.2 命題

(1) 式や文章によって示される事柄で，明確に正しいか正しくないかが決定される文や式を**命題**という．命題が正しい場合，その命題は**真**であるといい，正しくない場合は**偽**であるという．命題においては，真または偽のいずれかが必ず確定する．

(2) 文字を含んだ文や式において，文字のとる値を変えると，真偽が変わるものがある．例えば，$x+y=11$ は，$x=1$，$y=10$ のときは真，$x=2$，$y=3$ のときは偽である．このように，含まれる文字に値を代入することで真偽が明確に決まる（すなわち，命題となる）文や式を**条件**という．また，これを「x と y に関する条件」などということもある．

◀ 2 つの条件 $p(x)$，$q(x)$ を用いて，命題を

$$p(x) \Longrightarrow q(x)$$

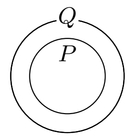
で表したとき，$p(x)$ を仮定，$q(x)$ を結論という．

命題「$\underbrace{p}_{\text{仮定}} \Longrightarrow \underbrace{q}_{\text{結論}}$」

(3) 命題「$p \Longrightarrow q$」において，条件 p を満たす要素の集合を P，条件 q を満たす要素の集合を Q とする．

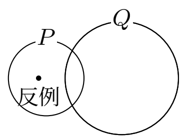
$$\text{「}p \Longrightarrow q \text{ が真」} \iff P \subset Q \iff P \cap \overline{Q} = \varnothing,$$
$$\text{「}p \iff q \text{ が真」} \iff P = Q$$

◀ $p \Longrightarrow q$ が真：$P \subset Q$



(4) 命題「$p \Longrightarrow q$」において，p は満たすが q を満たさないような例を**反例**という．反例が 1 つでもあれば，命題「$p \Longrightarrow q$」は偽であるといえる．

$p \Longrightarrow q$ が偽



2.1.3 必要条件と十分条件

命題「$p \Longrightarrow q$」が真の場合，p は q であるための**十分条件**である，q は p であるための**必要条件**であるという．命題「$p \Longrightarrow q$」と「$q \Longrightarrow p$」が共に真である，すなわち，命題「$p \iff q$」が成り立つとき，p は q（q は p）であるための**必要十分条件**であるという．また，この場合，p と q は互いに**同値**であるという．

◀ 命題「$p \Longrightarrow q$」が真の場合，

命題「$\underbrace{p}_{\text{十分条件}} \Longrightarrow \underbrace{q}_{\text{必要条件}}$」

2.1.4 条件の否定

(1) 条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とする．このとき，p と q をともに満たすものの全体の集合は $P \cap Q$，p または q のいずれかを満たすものの全体の集合は $P \cup Q$ である．

(2) 条件 p の**否定**（p ではない）を $\overline{p}$ で表す．$\overline{p}$ を満たすものの集合は，p を満たすものの集合 P の補集合 $\overline{P}$ となる．

(3) **ド・モルガンの法則**

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}, \quad \overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$$

◀ 集合におけるド・モルガンの法則に対応する．

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q},$$
$$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$$

(4) 「すべて」と「ある」の否定は次のようになる．

命題「すべての x について p である」の否定は，「ある x について $\overline{p}$ である」

命題「ある x について p である」の否定は，「すべての x について $\overline{p}$ である」

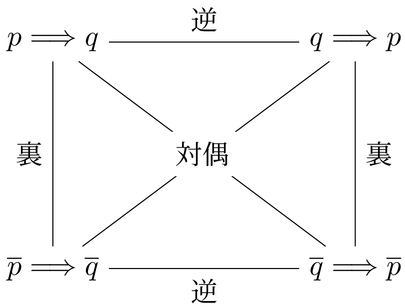
2.1.5 逆・裏・対偶

(1) 命題「$p \Longrightarrow q$」に対して，

命題「$q \Longrightarrow p$」を「$p \Longrightarrow q$」の**逆**,
命題「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」を「$p \Longrightarrow q$」の**裏**,
命題「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」を「$p \Longrightarrow q$」の**対偶**

◀ $\overline{p}$ の否定は，p となる．

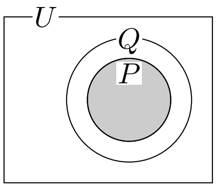
といい，次のような関係が成り立つ．



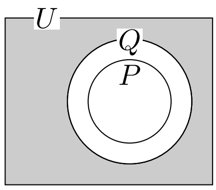
(2) 命題「$p \Longrightarrow q$」とその対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は，**真偽が一致する**.

◀ 命題「$p \Longrightarrow q$」の逆と裏は対偶の関係にあるので，逆と裏の真偽も一致する．

$P \subset Q$ より，「$p \Longrightarrow q$」は真



$\overline{Q} \subset \overline{P}$ より，対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は真



◀ 条件 p, q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P, Q とする．

命題「$p \Longrightarrow q$」の証明では，代わりにその対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」を証明してもよい（対偶証明法）．一方，真である命題の逆や裏は真であるとは限らない．

2.1.6 背理法

ある命題に対して，その結論が成り立たないと仮定し，矛盾が導かれることを示すことにより，もとの命題が成り立つことを証明する方法を**背理法**（帰謬法（きびゅう））という．

◀ 背理法で証明する場合，否定を作る．

例題 I2.1.1 集合の表し方 ★

(1) $A = \{x \mid x$ は 15 以下の素数$\}$ とする．次の $\boxed{}$ の中に，$\in$ または $\notin$ のいずれか適するものを書き入れよ．

(i) $2 \boxed{} A$　(ii) $10 \boxed{} A$　(iii) $13 \boxed{} A$

(2) 次の集合を要素を書き並べて表せ．

(i) 12 の正の約数全体の集合　(ii) $\{x \mid -3 \leqq x < 4,\ x$ は整数$\}$

(3) 次の 2 つの集合 $A,\ B$ の間に成り立つ包含関係をいえ．

(i) $A = \{2n - 1 \mid 0 \leqq n \leqq 5,\ n$ は整数$\}$，$B = \{6n - 5 \mid 1 \leqq n \leqq 2,\ n$ は整数$\}$

(ii) $A = \{2n + 1 \mid n = 1,\ 2\}$，$B = \{x \mid (x - 3)(x - 5) = 0,\ x$ は整数$\}$

解説動画

考え方

(1) 2 以上の自然数において，1 とその数以外に約数をもたない数を素数という．それぞれの要素が，15 以下の素数であるか否かを調べる．
(3) $A,\ B$ の要素を具体的に書き並べて表し，要素を比較して包含関係を調べる．

$\underbrace{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}}_{x\text{ の要素を書き並べて表す}}$

$\{x \mid \underbrace{-3 \leqq x < 4,\ x \text{ は整数}}_{x\text{ の満たす条件}}\}$

解答

(1) (i) 2 は 15 以下の素数であるから，$\boldsymbol{2 \in A}$
(ii) 10 は 15 以下の素数ではないから，$\boldsymbol{10 \notin A}$
(iii) 13 は 15 以下の素数であるから，$\boldsymbol{13 \in A}$

◀ 集合 A の要素を書き並べて表すと，
$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$

(2) (i) $\boldsymbol{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}}$
(ii) $\boldsymbol{\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}}$

◀ 波括弧を用いて表す．

(3) (i)
$$A = \{2 \cdot 0 - 1,\ 2 \cdot 1 - 1,\ 2 \cdot 2 - 1,\ 2 \cdot 3 - 1,\ 2 \cdot 4 - 1,\ 2 \cdot 5 - 1\}$$
$$= \{-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\},$$
$$B = \{6 \cdot 1 - 5,\ 6 \cdot 2 - 5\} = \{1,\ 7\}$$
よって，$\boldsymbol{B \subset A}$

◀ 例えば，A の要素 -1 は B に属さないから，$A \subset B$ ではない．

(ii) $A = \{2 \cdot 1 + 1,\ 2 \cdot 2 + 1\} = \{3,\ 5\}$
また，$(x - 3)(x - 5) = 0$ を解くと，$x = 3,\ 5$
したがって，$B = \{3,\ 5\}$
よって，$\boldsymbol{A = B}$

問題 I2.1.1 ★ 解答 p.259

(1) $A = \{x \mid x$ は 20 以下の奇数$\}$ とする．次の $\boxed{}$ の中に，$\in$ または $\notin$ のいずれか適するものを書き入れよ．

(i) $7 \boxed{} A$　(ii) $12 \boxed{} A$

(2) 次の集合を要素を書き並べて表せ．

(i) 16 の正の約数全体の集合　(ii) $\{x \mid -5 \leqq x < 3,\ x$ は整数$\}$

(3) 次の 2 つの集合 $A,\ B$ の間に成り立つ包含関係をいえ．

(i) $A = \{4n + 1 \mid 0 \leqq n \leqq 1,\ n$ は整数$\}$，$B = \{2n - 1 \mid -1 \leqq n \leqq 3,\ n$ は整数$\}$

(ii) $A = \{2n + 1 \mid n = 0,\ 1\}$，$B = \{x \mid (x - 1)(x - 3) = 0,\ x$ は整数$\}$

例題 I2.1.2 2 つの集合の共通部分と和集合，補集合 ★

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$，$B=\{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B$　(2) $\overline{A}\cap B$　(3) $\overline{A\cap B}$

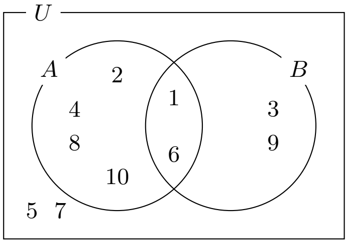
(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(5) $\overline{A\cup\overline{B}}$

解説動画

考え方 与えられた条件をもとに，ベン図をかく．(5) は，ド・モルガンの法則を用いるとよい．

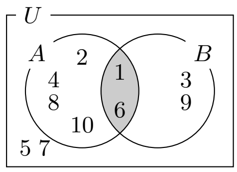
解答

与えられた条件をもとに，U，A，B をベン図で表すと，下の図のようになる．



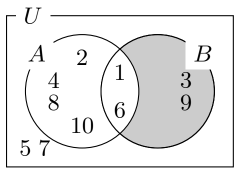
(1) $A\cap B$ は，A と B の共通部分であるから，

$$A\cap B=\mathbf{\{1,\ 6\}}$$



(2) $\overline{A}\cap B$ は B の要素のうち，$A\cap B$ の要素ではないものであるから，

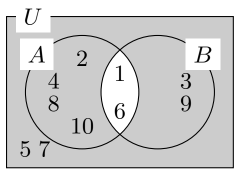
$$\overline{A}\cap B=\mathbf{\{3,\ 9\}}$$



(3) $\overline{A\cap B}$ は，$A\cap B$ の補集合である．

よって，(1) より，

$$\overline{A\cap B}=\mathbf{\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}}$$



(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$ は，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ の和集合である．

$\overline{A}=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$ より，

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\mathbf{\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}}$$

(5) ド・モルガンの法則より，$\overline{A\cup\overline{B}}=\overline{A}\cap B$ となり，$\overline{A\cup\overline{B}}$ は，$\overline{A}$ と B の共通部分である．

◀ $\overline{(\overline{B})}=B$

よって，(2) より，

$$\overline{A\cup\overline{B}}=\overline{A}\cap B=\mathbf{\{3,\ 9\}}$$

◀ U から $A\cup\overline{B}$ を除いたものである．

ド・モルガンの法則

$$\boldsymbol{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$$

【注意】 (1)，(3) より，$A\cap B$ と $\overline{A\cap B}$ は補集合の関係であることがわかる．また，(3) と (4) の関係や，(2) と (5) の関係より，ド・モルガンの法則が成り立っていることがわかる．

問題 I2.1.2 ★ 解答 p.260

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A，B を $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$，$B=\{1,\ 5,\ 6,\ 9,\ 12\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B$　(2) $\overline{A}\cap B$　(3) $\overline{A\cap B}$

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(5) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$

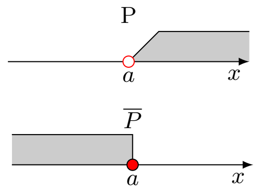
例題 I2.1.3　不等式で表される集合　★★

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A=\{x \mid x-1>0\}$, $B=\{x \mid |x-1| \leqq 2\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B$　　(2) $A\cup\overline{B}$　　(3) $\overline{A\cup B}$

解説動画

考え方 全体集合が実数全体の場合，要素を書き並べて表すことは難しいので，要素の満たす条件を述べて表す．また，集合を視覚化して，数直線で表すとよい．なお，端点を含むか否かにはよく注意すること．



解答

$x-1>0$ より，$x>1$

よって，$A=\{x \mid x>1\}$

$|x-1| \leqq 2$ より，$-2 \leqq x-1 \leqq 2$

すなわち，$-1 \leqq x \leqq 3$

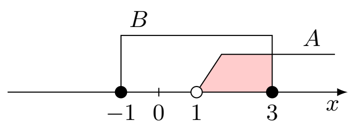
よって，$B=\{x \mid -1 \leqq x \leqq 3\}$

◀ 集合 A，B の条件を表す不等式を解く．

◀ $|x| \leqq a$（$a>0$）の解は，$-a \leqq x \leqq a$

(1) 右の数直線より，

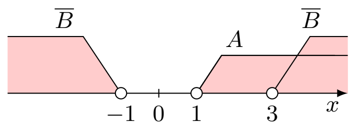
$$A\cap B=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{1<x\leqq 3}\}$$



◀ $A\cap B$ は共通部分である．

(2) $\overline{B}=\{x \mid x<-1,\ 3<x\}$ であるから，右の数直線より，

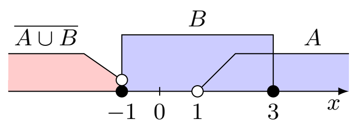
$$A\cup\overline{B}=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x<-1,\ 1<x}\}$$



◀ 端点を含むか否かをよく考える（解を $x \leqq -1$，$3 \leqq x$ とするのは誤りであるので注意すること）．

(3) 右の数直線より，$A\cup B=\{x \mid x \geqq -1\}$ であるから，

$$\overline{A\cup B}=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x<-1}\}$$



問題 I2.1.3 ★★　解答 p.261

▶ 節末 I2.1.2

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A=\{x \mid x+3<0\}$, $B=\{x \mid |x+3| \leqq 1\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cup B$　　(2) $A\cap\overline{B}$　　(3) $\overline{A\cap B}$

例題 I2.1.4 集合の要素の決定 ★★★

$U=\{x \mid x$ は実数$\}$ を全体集合とする．U の部分集合

$$A=\{2,\ a+1,\ a^2+a-6\},\quad B=\{2,\ 6,\ a^2-4,\ a^2-5a+4\}$$

とする．$A\cap B=\{0,\ 2\}$ であるとき，定数 a の値を求めよ．

解説動画

考え方 $2\in A$，$2\in B$ であり，2 は明らかに $A\cap B$ の要素である．ここでは，0 が $A\cap B$ の要素となるような a の条件を求める．そこで，$0\in A$ かつ $0\in B$ となるような a の値について考えるが，先に $0\in B$ であることを利用しようとすると計算に手間が掛かるので，先に $0\in A$ から考える．

解答

$A\cap B=\{0,\ 2\}$ より，$0\in A$ であるから，$a+1=0$ または $a^2+a-6=0$

◀ $0\in A$ から考える．

(i) $a+1=0$，すなわち，$a=-1$ のとき

$$A=\{-6,\ 0,\ 2\},\quad B=\{-3,\ 2,\ 6,\ 10\}$$

◀ $a=-1$ のとき,$a^2+a-6=(-1)^2+(-1)-6=-6$
a^2-4，a^2-5a+4 も同様に計算すると，それぞれ -3，10 となる．

したがって，$0\notin B$ となるから，不適である．

(ii) $a^2+a-6=0$ のとき

$$(a+3)(a-2)=0$$

したがって $a=-3,\ 2$

（ア）$a=2$ のとき

$$A=\{0,\ 2,\ 3\},\quad B=\{-2,\ 0,\ 2,\ 6\}$$

◀ $a=2$ のとき，$a+1=2+1=3$
a^2-4，a^2-5a+4 も同様に計算すると，それぞれ 0，-2 となる．

したがって，$A\cap B=\{0,\ 2\}$ となるから，条件に適する．

（イ）$a=-3$ のとき

$$A=\{-2,\ 0,\ 2\},\quad B=\{2,\ 5,\ 6,\ 28\}$$

◀ $a=-3$ のとき，$a+1=(-3)+1=-2$
a^2-4，a^2-5a+4 も同様に計算すると，それぞれ 5，28 となる．

したがって，$0\notin B$ となるから，不適である．

よって，(i)，(ii) より，求める a の値は $a=\mathbf{2}$

One Point

計算に手間が掛からないように条件を用いる．

【注意】 $0\in B$ から考えて場合分けをしようとすると，$a^2=4$ または $a^2-5a+4=0$ より，$a=\pm2$ または $a=1,\ 4$ となる．これより，$a=-2,\ 1,\ 2,\ 4$ の 4 つの場合を考えなければならないので，$0\in B$ からではなく，扱いやすい 1 次式を含む $0\in A$ から考えて場合分けをするとよい．

問題 I2.1.4 ★★★ 解答 p.262

$U=\{x \mid x$ は実数$\}$ を全体集合とする．U の部分集合

$$A=\{3,\ a+2,\ a^2-a-11\},\quad B=\{3,\ 7,\ a^2-15,\ a^2-3a+2\}$$

とする．$A\cap B=\{1,\ 3\}$ であるとき，定数 a の値を求めよ．

例題 I2.1.5 3 つの集合の共通部分，和集合 ★★

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A,\ B,\ C$ を $A=\{n \mid n$ は 12 の正の約数$\}$，$B=\{n \mid n$ は奇数$\}$，$C=\{n \mid n$ は 10 の正の約数$\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

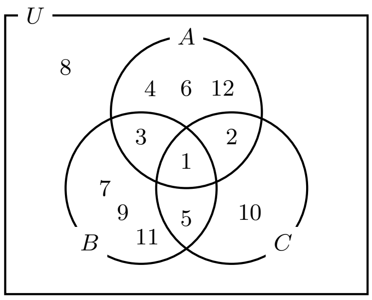
(1) $A\cap B\cap C$　(2) $(A\cup B)\cap C$　(3) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$　(4) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

解説動画

考え方 2 つの集合のときと同様に，与えられた条件をもとに，ベン図をかく．(4) は，ド・モルガンの法則を用いる．

解答

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$，$C=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ であり，与えられた条件をもとに，$U,\ A,\ B,\ C$ をベン図で表すと．下の図のようになる．



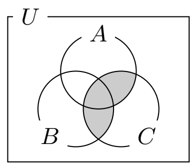
(1) $A\cap B\cap C$ は，$A,\ B,\ C$ の共通部分であるから，

$$A\cap B\cap C=\{\mathbf{1}\}$$

(2) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12\}$ より，

$$(A\cup B)\cap C=\{\mathbf{1,\ 2,\ 5}\}$$

◀ $(A\cup B)\cap C$



(3) $A\cap C=\{1,\ 2\}$，$B\cap C=\{1,\ 5\}$ より，

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{\mathbf{1,\ 2,\ 5}\}$$

◀ (2)，(3) の結果より，
$(A\cup B)\cap C$
$=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(4) ド・モルガンの法則より，

$$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}=\{\mathbf{8}\}$$

3 つの集合における分配法則，ド・モルガンの法則

3 つの集合 $A,\ B,\ C$ について，次のことが成り立つ．

(i) 結合法則

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

(ii) 分配法則

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),\quad (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

(iii) ド・モルガンの法則

$$\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C},\quad \overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

問題 I2.1.5 ★★ 解答 p.263

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A,\ B,\ C$ を $A=\{n \mid n$ は 10 の正の約数$\}$，$B=\{n \mid n$ は偶数$\}$，$C=\{n \mid n$ は 14 の正の約数$\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B\cap C$　　(2) $(A\cup B)\cap C$

(3) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$　　(4) $\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap\overline{C})}$

例題 I2.1.6 集合の包含関係・相等の証明 ★★★★

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

(1) $A=\{6x+1 \mid x\in\mathbb{Z}\}$，$B=\{3x+1 \mid x\in\mathbb{Z}\}$ であるとき，$A\subset B$ かつ $A\neq B$

(2) $A=\{4x-3y \mid x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z}\}$，$B=\{5x+2y \mid x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z}\}$ であるとき，$A=B$

解説動画

考え方

(1) A のすべての要素が B の要素であること，すなわち，$\alpha\in A$ ならば，$\alpha\in B$ が成り立つとき，A を B の部分集合という．よって，「$\alpha\in A$ ならば，$\alpha\in B$」を示せばよい．また，$A\neq B$ であることを示すためには，B の要素であるが A の要素ではないものを 1 つ挙げればよい．

(2) $A=B$（2 つの集合の相等）を示すためには，$A\subset B$ かつ $B\subset A$ 示せばよい．なお，$A\subset B$ の証明は，任意の整数 x，y に対して，「$4x-3y=5\times(\text{整数})+2\times(\text{整数})$」で表せることを示す（$B\subset A$ も同様の手法で示すことができる）．

解答

(1) $\alpha\in A$ とすると，$\alpha=6x+1$ $(x\in\mathbb{Z})$ と表すことができる．

このとき，$\alpha=3\times 2x+1$ と表されるので，$2x=y$ とおくと，$\alpha=3y+1$ $(y\in\mathbb{Z})$

したがって，$\alpha\in B$

よって，$\alpha\in A$ ならば，$\alpha\in B$ が成り立つから，$A\subset B$

また，$4\in B$ であるが $4\notin A$ であることから，$A\neq B$ ■

(2) (i) $\alpha\in A$ とすると，$\alpha=4x-3y$ $(x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z})$ と表すことができる．

$4=5\times 0+2\times 2$，$3=5\times 1+2\times(-1)$ より，

$$\alpha=(5\times 0+2\times 2)x-\{5\times 1+2\times(-1)\}y=5\times(-y)+2(2x+y)$$

$x\in\mathbb{Z}$，$y\in\mathbb{Z}$ より，$-y\in\mathbb{Z}$，$2x+y\in\mathbb{Z}$ であるから，$\alpha\in B$

したがって，$A\subset B$ が成り立つ．

(ii) $\beta\in B$ とすると，$\beta=5x+2y$ $(x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z})$ と表すことができる．

$5=4\times 2+3\times(-1)$，$2=4\times(-1)+3\times 2$ より，

$$\beta=\{4\times 2+3\times(-1)\}x+\{4\times(-1)+3\times 2\}y=4(2x-y)-3(x-2y)$$

$x\in\mathbb{Z}$，$y\in\mathbb{Z}$ より，$2x-y\in\mathbb{Z}$，$x-2y\in\mathbb{Z}$ であるから，$\beta\in A$

したがって，$B\subset A$ が成り立つ．

よって，(i)，(ii) より，$A\subset B$ かつ $B\subset A$ であるから，$A=B$ が成り立つ． ■

◀ $\alpha\in B$ を示すために，$3\times(\text{整数})+1$ の形にする．

◀ B の要素であるが，A の要素ではないものを 1 つ挙げることで，$A\neq B$ が示せる．

◀ $4x-3y$ を $5\times(\text{整数})+2\times(\text{整数})\cdots$（ア） の形で表すために，4 と 3 を（ア）の形で表す．なお，$3=5\times1+2\times(-1)$ などとしてもよい．

◀ $5x+2y$ を $4\times(\text{整数})-3\times(\text{整数})\cdots$（イ） の形で表すために，5 と 2 を（イ）の形で表す．

One Point

$$\boldsymbol{A\subset B \iff x\in A \text{ ならば，} x\in B,}$$
$$\boldsymbol{A=B \iff A\subset B \text{ かつ } B\subset A}$$

【注意】$4\times1-3\times1=1$ のようになることから，$4\times n-3\times n=n$ であることがわかる．つまり，$x=y=n$ のとき，$4x-3y=n$ となり，A は整数全体となる（B も同様に $x=n$，$y=-2n$ のときを考えれば，整数全体となることがわかる）．

問題 I2.1.6 ★★★★ 解答 p.264

▶ 章末 I2.1

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

(1) $A=\{6x+5 \mid x\in\mathbb{Z}\}$，$B=\{3x-1 \mid x\in\mathbb{Z}\}$ であるとき，$A\subset B$

(2) $A=\{5x+2y \mid x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z}\}$，$B=\{4x+3y \mid x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z}\}$ であるとき，$A=B$

例題 I2.1.7 命題の真偽 ★

次の命題の真偽を調べよ．また，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x, y は実数とする．

(1) $x = 2$ ならば，$x^2 = 4$

(2) $x^2 = 9$ ならば，$x = 3$

(3) $|x| < 1$ ならば，$x < 1$

(4) $x + y = 0$ ならば，$x = y = 0$

(5) $\triangle$ABC が二等辺三角形ならば，$\angle A = \angle B$

解説動画

数学 I 2.1

考え方 命題「$p \Longrightarrow q$」が 真である ときは，その命題が正しいことを示す．命題「$p \Longrightarrow q$」が 真ではない（偽である） ときは，p は満たすが q を満たさないもの，すなわち，p であるが q ではないもの（反例）を探し，1 つ挙げればよい．なお，命題の真偽を判断するときは，先に反例があるか否かを調べるとよい．

解答

(1) $x = 2$ の両辺を 2 乗すると，$x^2 = 4$
よって，命題は**真**である．

◀ $A = B$ ならば，$A^2 = B^2$ が成り立つ．

(2) $x = -3$ のとき，$x^2 = 9$ であるが，$x = 3$ ではない．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{x = -3}$

◀ $x^2 = 9$ を解くと，$x = 3, -3$

(3) $|x| < 1$ より，$-1 < x < 1$
したがって，$x < 1$
よって，命題は**真**である．

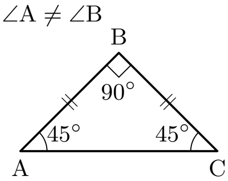
◀ $-1 < x < 1$ より，$x < 1$ が成り立つ．

(4) $x = 1$, $y = -1$ のとき，$x + y = 0$ であるが，$x = y = 0$ ではない．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{x = 1,\ y = -1}$

◀ 先に反例があるか否かを調べる．また，反例は他にも，$x = 2$, $y = -2$ などが挙げられる．

(5) $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ のとき，$\triangle$ABC は二等辺三角形であるが，$\angle A = \angle B$ ではない．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{\angle A = \angle C = 45^\circ,\ \angle B = 90^\circ}$

◀ $\angle A \neq \angle B$



One Point

命題の真偽は，先に反例を探すとよい．

問題 I2.1.7 ★ 解答 p.265

▶ 節末 I2.1.3

次の命題の真偽を調べよ．また，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x, y は実数とする．

(1) $x^2 = 16$ ならば，$x = 4$

(2) $x - y = 0$ ならば，$x = y = 0$

(3) $x^2 + y^2 = 0$ ならば，$x = y = 0$

(4) xy が有理数ならば，x, y はともに有理数である．

例題 I2.1.8 命題の真偽と集合 ★

次の命題の真偽を，集合の考えを用いて調べよ．

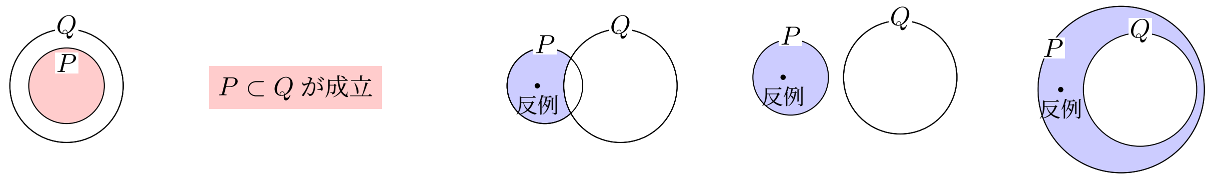
(1) n を自然数とする．n が 6 以下の正の偶数ならば，n は 12 の正の約数である．

(2) 実数 x について，$0 \leqq x \leqq 2$ ならば，$|x| < 2$

解説動画

考え方 条件 p, q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P, Q とする．命題「$p \Longrightarrow q$」の真偽は，P と Q の包含関係を調べればよい．

$p \Longrightarrow q$ が真　　　　$p \Longrightarrow q$ が偽



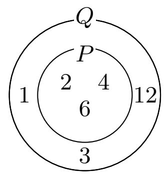
また，実数の集合を扱うときは，数直線を用いると考えやすい．

解答

(1) $P = \{2,\ 4,\ 6\}$, $Q = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ とおくと，

$$P \subset Q$$

よって，命題は**真**である．



(2) $P = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 2\}$, $Q = \{x \mid |x| < 2\}$ とおく．

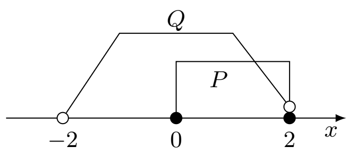
$|x| < 2$ より，$-2 < x < 2$

P, Q を数直線上に表すと，右の図のようになる．

ここで，$x = 2$ のとき，P に属するが，Q には属さない．

したがって，$P \subset Q$ は成り立たない．

よって，命題は**偽**である．



◀ $|x| < a$ $(a > 0)$ の解は，$-a < x < a$

◀ $x = 2$ が反例である．

問題 I2.1.8 ★ 解答 p.265

次の命題の真偽を，集合の考えを用いて調べよ．

(1) n を自然数とする．n が 1 桁の正の奇数ならば，n は 15 の正の約数である．

(2) 実数 x について，$|x| < 3$ ならば，$x > -4$

例題 I2.1.9 必要条件・十分条件 ★★

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x > 0$ は，$x \geqq 0$ であるための $\boxed{}$.

(2) $x > y$ は，$x^4 > y^4$ であるための $\boxed{}$.

(3) $x = y = 1$ は，$2x - y = 2y - 1 = 1$ であるための $\boxed{}$.

(4) $\triangle$ABC において，$\angle A < 90°$ は，$\triangle$ABC が鋭角三角形であるための $\boxed{}$.

(i) 必要条件であるが十分条件ではない　　(ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である　　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

解説動画

考え方 命題を「$p \Longrightarrow q$」，「$q \Longrightarrow p$」の形に変形して考える．

(i) p は必要条件　　(ii) p は十分条件　　(iii) p は必要十分条件　　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

$p \underset{\text{真}}{\overset{\text{偽}}{\rightleftarrows}} q$　　$p \underset{\text{偽}}{\overset{\text{真}}{\rightleftarrows}} q$　　$p \underset{\text{真}}{\overset{\text{真}}{\rightleftarrows}} q$　　$p \underset{\text{偽}}{\overset{\text{偽}}{\rightleftarrows}} q$

解答

(1) 「$x > 0 \Longrightarrow x \geqq 0$」は，真である．

「$x \geqq 0 \Longrightarrow x > 0$」は，偽である．反例は，$x = 0$

よって，**(ii) 十分条件であるが必要条件ではない**

◀ $x > 0 \underset{\text{偽}}{\overset{\text{真}}{\rightleftarrows}} x \geqq 0$

(2) 「$x > y \Longrightarrow x^4 > y^4$」は，偽である．反例は，$x = 0$，$y = -1$

「$x^4 > y^4 \Longrightarrow x > y$」は，偽である．反例は，$x = -1$，$y = 0$

よって，**(iv) 必要条件でも十分条件でもない**

◀ $x > y \underset{\text{偽}}{\overset{\text{偽}}{\rightleftarrows}} x^4 > y^4$

(3) $x = y = 1$ のとき，$2x - y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$，$2y - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

したがって，「$x = y = 1 \Longrightarrow 2x - y = 2y - 1 = 1$」は，真である．

$2x - y = 2y - 2 = 2$ のとき，$2y - 1 = 1$ から，$y = 1$

また，これを $2x - y = 1$ に代入すると，$x = 1$

したがって，「$2x - y = 2y - 1 = 1 \Longrightarrow x = y = 1$」は，真である．

よって，**(iii) 必要十分条件である**

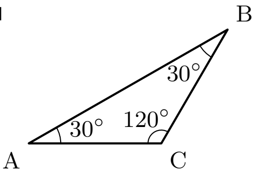
◀ x，y の値を代入して，真であることを確かめる．

(4) $\triangle$ABC において，「$\angle A < 90° \Longrightarrow \triangle$ABC が鋭角三角形」は，偽である．

反例は，$\angle A = 30° < 90°$，$\angle B = 30°$，$\angle C = 120°$

「$\triangle$ABC が鋭角三角形 $\Longrightarrow \angle A < 90°$ 」は，真である．

よって，**(i) 必要条件であるが十分条件ではない**

◀


問題 I2.1.9 ★★ 解答 p.266

▶ 節末 I2.1.4

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x = 2$ は，$x^2 < 10$ であるための $\boxed{}$.

(2) $x + y > 10$ は，$x > 5$ かつ $y > 5$ であるための $\boxed{}$.

(i) 必要条件であるが十分条件ではない　　(ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である　　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

例題 I2.1.10 条件の否定 ★

次の条件の否定を述べよ．ただし，a, b, c, x を実数，m, n を整数とする．

(1) $1 < x \leqq 2$

(2) $x < -2$ または $x \geqq 3$

(3) $x = 1$ または $x = -1$

(4) m, n はともに偶数

(5) $a = b = c = 0$

解説動画

数学 I 2.1

考え方 条件を，「かつ」「または」を用いて言い換えることができるかを考える．

(4)「ともに」は「かつ」を用いて言い換えることができる．「整数 m,n はともに偶数」
$\iff$ 「整数 m が偶数かつ整数 n が偶数」であり，その否定を考える．

m	偶	偶	奇	奇
n	偶	奇	偶	奇

(5) $a = b = c = 0$ は，$a = 0$ かつ $b = 0$ かつ $c = 0$ であることから，次のド・モルガンの法則を用いる（ド・モルガンの法則は 3 つの集合や条件についても成り立つ）．

$$\overline{p \text{ かつ } q \text{ かつ } r} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q} \text{ または } \overline{r}$$

解答

(1) 「$1 < x \leqq 2$」は，「$x > 1$ かつ $x \leqq 2$」のことである．
よって，否定は，「**$x \leqq 1$ または $x > 2$**」
(2) 否定は，「$x \geqq -2$ かつ $x < 3$」
すなわち，「**$-2 \leqq x < 3$**」
(3) 否定は，「**$x \neq 1$ かつ $x \neq -1$**」
(4) 「整数 m, n はともに偶数」は，「整数 m は偶数かつ整数 n は偶数」のことである．
よって，否定は，「**整数 m は奇数または整数 n は奇数**」
(5) 「$a = b = c = 0$」は，「$a = 0$ かつ $b = 0$ かつ $c = 0$ 」のことである．
よって，否定は，「**$a \neq 0$ または $b \neq 0$ または $c \neq 0$**」

◀「整数 m, n の少なくとも 1 つは奇数」としてもよい．

◀「a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 ではない」としてもよい．

ド・モルガンの法則

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}, \quad \overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$$

問題 I2.1.10 ★ 解答 p.266

次の条件の否定を述べよ．ただし，x, y を実数とする．

(1) $0 \leqq x < 5$

(2) x は 1 でも 2 でもない

(3) $x = 0$ または $x = 2$

(4) x, y の少なくとも一方は 1 である．

例題 I2.1.11 「すべて」「ある」の否定 ★★★

次の命題の否定を述べよ．また，もとの命題とその否定の真偽を答えよ．

(1) すべての実数 x について，$x^2 > 0$

(2) ある自然数 n について，$n^2 = 2n$

(3) 任意の実数 x，y について，$x^2 - 2xy + y^2 > 0$

解説動画

考え方 命題の否定において「すべて」と「ある」を含むとき，「すべて」と「ある」を入れ替えて，もとの命題の結論を否定すればよい．一般に，p が真のときその否定 $\overline{p}$ は偽であり，p が偽のときその否定 $\overline{p}$ は真であることが成り立つ．また，解答では否定の真偽の理由を記しているが，もとの命題の真偽がわかっている場合は，必ずしも記す必要はない（例えば，「もとの命題が真なので，否定は偽である」などと否定の理由を省略してよい．なお，否定の真偽がわかっている場合も同様である）．

解答

(1) 否定は，「**ある実数 x について，$x^2 \leqq 0$**」

これは，$x = 0$ のとき，$x^2 = 0$

よって，**真**である．

また，もとの命題は $x = 0$ のとき，$x^2 = 0$ であるから，$x^2 > 0$ は成り立たない．

よって，**偽**である．

◀「すべて」を「ある」に入れ替える．

(2) 否定は，「**すべての自然数 n について，$n^2 \neq 2n$**」

これは，$n = 2$ のとき，$n^2 = 2n$ であるから，$n^2 \neq 2n$ は成り立たない．

よって，**偽**である．

また，もとの命題は $n = 2$ のとき，$n^2 = 2n$ であるから，**真**である．

◀ $n = 0$ も反例である（日本の高校数学では 0 を自然数に含めない）．

(3) 否定は，「**ある実数 x，y について，$x^2 - 2xy + y^2 \leqq 0$**」

これは，$x = y = 0$ のとき，$x^2 - 2xy + y^2 = 0$

よって，**真**である．

また，もとの命題は $x = y = 1$ とすると，$x^2 - 2xy + y^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 = 0$

よって，**偽**である．

◀ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$
$\iff (x - y)^2 = 0$
$\iff x = y$

One Point

命題の否定は，「すべて」と「ある」に注意する．

【注意】「すべての x」を，「任意の x」ということもある（「常に」を用いて表されることもある）．また，「ある x」を，「適当な x」や「少なくとも 1 つの x」ということもある．

問題 I2.1.11 ★★★ 解答 p.267

次の命題の否定を述べよ．また，もとの命題とその否定の真偽を答えよ．

(1) ある整数 k について，$k^2 = 3k$

(2) 任意の実数 x，y について，$(x + y)^2 > x^2 + y^2$

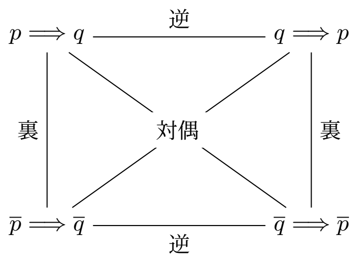
例題 I2.1.12 逆・裏・対偶 ★

次の命題の逆，裏，対偶を述べよ．また，それらの真偽を調べよ．ただし，x，a，b は実数とする．

(1) $x=4$ ならば，$x^2=16$　　(2) $a+b \geqq 0$ ならば，$a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$

解説動画

考え方 命題「$p \Longrightarrow q$」とその逆，裏，対偶との関係は，右の図のようになる．「$p \Longrightarrow q$」と「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」，「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」と「$q \Longrightarrow p$」は互いに対偶の関係にあり，その真偽は一致する．なお，真偽を答えるときは，明らかに真であることが成り立つのであれば証明を省略してもよいが，偽のときは反例を必ず示すように注意すること．



解答

(1) 逆は，「$\boldsymbol{x^2=16}$ **ならば，** $\boldsymbol{x=4}$」

これは，**偽**である．反例は，$x=-4$

裏は，「$\boldsymbol{x \neq 4}$ **ならば，** $\boldsymbol{x^2 \neq 16}$」

これは，**偽**である．反例は，$x=-4$

◀ 裏の反例は，逆の反例と同じものでよい．

対偶は，「$\boldsymbol{x^2 \neq 16}$ **ならば，** $\boldsymbol{x \neq 4}$」

これは，もとの命題が真 ($x=4$ ならば，$x^2=16$) であるから，**真**である．

(2) 逆は，「$\boldsymbol{a \geqq 0}$ **かつ** $\boldsymbol{b \geqq 0}$ **ならば，** $\boldsymbol{a+b \geqq 0}$」

これは，明らかに成り立つから，**真**である．

◀ $a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ より，辺々を足し合わせると，$a+b \geqq 0$

裏は，「$\boldsymbol{a+b<0}$ **ならば，** $\boldsymbol{a<0}$ **または** $\boldsymbol{b<0}$」

これは，裏の対偶，すなわち，逆が真であるから，**真**である．

◀ 逆と裏の真偽は一致する．

対偶は，「$\boldsymbol{a<0}$ **または** $\boldsymbol{b<0}$ **ならば，** $\boldsymbol{a+b<0}$」

これは，**偽**である．反例は，$a=-1$，$b=2$

◀ なお，もとの命題は偽である．

One Point

命題とその対偶は，真偽が一致する．

【注意】「$a<0$ または $b<0$」は「a，b の 少なくとも 1 つ は 0 より小さい」などと表されることもある．

問題 I2.1.12 ★ 解答 p.267

次の命題の逆，裏，対偶を述べよ．また，それらの真偽を調べよ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x=-3$ ならば，$x^2=9$

(2) $x+y>2$ ならば，x，y の少なくとも 1 つは 1 より大きい．

One math

例題 I2.1.13 対偶を用いた証明 1 ★★

次の命題を証明せよ．ただし，m，n を整数とする．
(1) n^2 が偶数ならば，n は偶数である．
(2) mn が偶数ならば，m または n は偶数である．

解説動画

考え方

(1)「n^2 が偶数 $\Longrightarrow$ n は偶数」を直接証明するのは，n^2 が扱いにくいので難しい（素因数分解の一意性を用いれば証明できるが，敷居が高い）．そこで，このように直接証明することが難しいときは，対偶を用いて証明することを考える．対偶を考えると，次数の低い n を含む条件が仮定となり，扱いやすくなる．

(2) mn が偶数であることから，「m が偶数または n が偶数 $\cdots$(i)」であることを直接証明するのは，3 つの場合があり扱いにくい．そこで，対偶を考えると，(i) は「m が奇数かつ n が奇数」となり，扱いやすくなる．

m	奇	奇	偶	偶
n	奇	偶	奇	偶

解答

(1) もとの命題の対偶「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」を証明する．
n は奇数であるとき，整数 k を用いて $n=2k+1$ と表せるから，

$$n^2=(2k+1)^2=2\left(2k^2+2k\right)+1$$

k は整数より，$2k^2+2k$ も整数であるから，n^2 は奇数である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

(2) もとの命題の対偶「m，n がともに奇数ならば，mn は奇数である」を証明する．
m，n は奇数であるとき，整数 k，l を用いて $m=2k+1$，$n=2l+1$ と表せるから，

$$mn=(2k+1)(2l+1)=2(2kl+k+l)+1$$

k，l は整数より，$2kl+k+l$ も整数であるから，mn は奇数である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

◀ $n=2k-1$ とおいてもよい．

◀ $2k^2+2k$ が整数であることを記すように注意すること．

◀「m が偶数または n が偶数」の否定は，「m は奇数かつ n は奇数」，すなわち，「m，n はともに奇数」である．

対偶証明法

直接証明するのが難しいときは，対偶を用いて証明する．

【注意】 ■ はハルモス記号や墓石記号といい，証明の終わりを示す（□ などでも表される）．なお，証明の終わりに必ずしも記す必要はない．

【余談】 例えば，k を整数とすると，整数 n は次のように表すことができる．

(i) $\boldsymbol{2k}$，$\boldsymbol{2k+1}$ （偶数，奇数）
(ii) $\boldsymbol{3k}$，$\boldsymbol{3k+1}$，$\boldsymbol{3k+2}$ （3 で割った余りが 0，1，2）
(iii) $\boldsymbol{pk}$，$\boldsymbol{pk+1}$，$\boldsymbol{pk+2}$，$\boldsymbol{\ldots}$，$\boldsymbol{pk+(p-1)}$ (p で割った余りが 0，1，2，$\ldots$，$p-1$)

これらを用いると，(1) と同様の手法で，「n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数である」や，「n^2 が 5 の倍数ならば，n は 5 の倍数である」などを示すことができる．

問題 I2.1.13 ★★ 解答 p.268

▶ 節末 I2.1.5 ▶ 章末 I2.2 ▶ 章末 I2.3

次の命題を証明せよ．ただし，a，b を整数とする．
(1) a^3 が偶数ならば，a は偶数である．
(2) a^2+b^2 が奇数ならば，積 ab は偶数である．

例題 I2.1.14 対偶を用いた証明 2 ★★★

次の命題を証明せよ．ただし，m, n を整数とする．

mn が 3 の倍数ならば，m, n の少なくとも一方は 3 の倍数である．

解説動画

考え方 直接証明するのは，「mn が 3 の倍数」が扱いにくいので難しい．ここで，「少なくとも一方」，すなわち，「少なくとも 1 つ」は，「または」と言い換えることができる．「かつ」と「または」を入れ替えて，対偶を用いて証明する．

One Point

「$p \Longrightarrow (q$ または $r)$」の対偶は，「$(\overline{q}$ かつ $\overline{r}) \Longrightarrow \overline{p}$」

解答

もとの命題の対偶「m, n がともに 3 の倍数ではないならば，mn は 3 の倍数ではない」を証明する．
m, n がともに 3 の倍数ではないとき，3 で割ったときの余りはそれぞれ 1 または 2 であるから，k, l を整数とすると，次の (i)〜(iv) のいずれかの場合で表せる．

◀ $m = 3k \pm 1$, $n = 3l \pm 1$ とおいて証明することもできる．

(i) $m = 3k+1$, $n = 3l+1$ のとき

$$mn = (3k+1)(3l+1) = 3(3kl+k+l)+1$$

$3kl+k+l$ は整数であるから，mn は 3 の倍数ではない．

◀ 3 ×（整数）＋1 より，3 で割った余りが 1 であるので，3 の倍数ではない．

(ii) $m = 3k+1$, $n = 3l+2$ のとき

$$mn = (3k+1)(3l+2) = 3(3kl+2k+l)+2$$

$3kl+2k+l$ は整数であるから，mn は 3 の倍数ではない．

(iii) $m = 3k+2$, $n = 3l+1$ のとき

$$mn = (3k+2)(3l+1) = 3(3kl+k+2l)+2$$

$3kl+k+2l$ は整数であるから，mn は 3 の倍数ではない．

(iv) $m = 3k+2$, $n = 3l+2$ のとき

$$mn = (3k+2)(3l+2) = 3(3kl+2k+2l+1)+1$$

$3kl+2k+2l+1$ は整数であるから，mn は 3 の倍数ではない．

したがって，(i)〜(iv) のいずれの場合も，mn は 3 の倍数ではない．
ゆえに，対偶は真である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

問題 I2.1.14 ★★★ 解答 p.268

次の命題を証明せよ．ただし，a, b, c は整数とする．

$a^2+b^2+c^2$ が偶数ならば，a, b, c のうち少なくとも 1 つは偶数である．

例題 I2.1.15 背理法を用いた証明 1 ★★

(1) $\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ．
(2) $\sqrt{2}$ は無理数であることを用いて，$\sqrt{2}+1$ が無理数であることを証明せよ．

解説動画

考え方 直接証明するのは，無理数であることを一般的な式で表しにくいので難しい．無理数であることを否定すると，有理数になる．背理法を用いて，$\sqrt{2}$ が有理数，すなわち，既約分数で表されると仮定して矛盾を導く（この手法は厳密には，無理数の定義を用いている操作に過ぎず，背理法ではないという考え方もある）．
なお，2 つの自然数 a，b の最大公約数が 1 であるとき，a，b は互いに素であるといい，このとき，$\frac{a}{b}$ は既約分数である．

解答

(1) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}\ (m\ \text{と}\ n\ \text{は互いに素な自然数})$$

と表される．
このとき，$\sqrt{2}n=m$
両辺を 2 乗すると，$2n^2=m^2\cdots$(i)
$2n^2$ は 2 の倍数であるから，m^2 も 2 の倍数である．
したがって，m は 2 の倍数となる．
$m=2k$ (k は整数) とおくと，(i) より $2n^2=(2k)^2$
すなわち，$n^2=2k^2$
$2k^2$ は 2 の倍数であるから，n^2 は 2 の倍数である．
したがって，n は 2 の倍数となる．
ゆえに，m，n はともに 2 の倍数となり，互いに素であることに矛盾する．
よって，$\sqrt{2}$ は無理数である． ■

(2) $\sqrt{2}+1$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{2}+1=r\ (r\ \text{は有理数})$$

と表される．
整理すると，$\sqrt{2}=r-1$
$r-1$ は有理数であるから，$\sqrt{2}$ も有理数となる．
これは，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．
よって，$\sqrt{2}+1$ は無理数である． ■

◀ 結論の否定を仮定する（無理数ではないことから，有理数であると仮定する）．

◀ 偶数である．

◀ m^2 が 2 の倍数ならば，m も 2 の倍数である．

◀ m，n がともに 2 を約数にもつことから，互いに素であることに反する．

◀ 結論の否定を仮定する．

◀ (有理数) − (有理数) ＝ (有理数)

One Point

背理法 → 結論の否定を仮定して，矛盾を導く．

【注意】 (1) は「n^2 が k の倍数ならば，n も k の倍数である $\cdots$(i)」であることを用いている．問題文によっては，「(i) を用いてもよい」などと記されている場合もある．

問題 I2.1.15 ★★ 解答 p.269

▶ 節末 I2.1.6

(1) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．
(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを用いて，$\sqrt{3}-1$ が無理数であることを証明せよ．

例題 I2.1.16 背理法を用いた証明 2 ★★★

a，b を有理数とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてもよい．

(1) $a+b\sqrt{2}=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ であることを証明せよ．

(2) $a(3+\sqrt{2})+b(4-\sqrt{2})=6+2\sqrt{2}$ を満たす a，b の値を求めよ．

解説動画

考え方 直接証明するのは難しいので，背理法を用いる．(1) の結論は，「$a=0$ かつ $b=0$」なので，その否定である「$a\neq 0$ または $b\neq 0$」を仮定してもよいが，ここでは $b\neq 0$ と仮定すると うまくいく．結論が「p かつ q」という場合は，一方の否定のみを仮定して矛盾を導いた方が 考えやすい．

解答

(1) $b\neq 0$ と仮定する．

$a+b\sqrt{2}=0$ より，$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$

ここで，a，b は有理数より，$-\frac{a}{b}$ も有理数となるが，これは $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．

したがって，$b=0$ である．

これを $a+b\sqrt{2}=0$ に代入すると，$a=0$

よって，a，b が有理数のとき，$a+b\sqrt{2}=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ である．■

◀ $b=0$ であることのみを導いている．次に，$b=0$ を用いて $a=0$ を導く．

(2) $a(3+\sqrt{2})+b(4-\sqrt{2})=6+2\sqrt{2}$ を整理すると，

$$(3a+4b-6)+(a-b-2)\sqrt{2}=0$$

◀ $\sqrt{2}$ について整理する．

a，b が有理数より，$3a+4b-6$，$a-b-2$ は有理数となる．したがって，(1) より，

$$\begin{cases} 3a+4b-6=0 \\ a-b-2=0 \end{cases}$$

◀ $3a+4b-6$，$a-b-2$ がともに有理数であることを記すように注意すること．

◀ 連立方程式を解く．

よって，これを解いて，$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=0}$

One Point

a，b，c，d が有理数，$\sqrt{A}$ が無理数のとき，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{a+b\sqrt{A}=c+d\sqrt{A} \text{ ならば，} a=c,\ b=d}$$

$$\boldsymbol{\text{とくに，} a+b\sqrt{A}=0 \text{ ならば，} a=b=0}$$

【余談】背理法の無制限な利用に反対する考え方もある．この立場を構成主義や直観主義という．興味のある人は調べてみるとよい．

問題 I2.1.16 ★★★ 解答 p.270

▶ 節末 I2.1.6 ▶ 章末 I2.4

a，b を有理数とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい．

(1) $a+b\sqrt{3}=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ であることを証明せよ．

(2) $a(2+\sqrt{3})+b(5-\sqrt{3})=13+3\sqrt{3}$ を満たす a，b の値を求めよ．

節末問題 2.1 集合と論理

節末 I2.1.1 ★ 解答（節末）p.271

$P = \{a,\ b,\ c\}$ の部分集合をすべて求めよ．

節末 I2.1.2 ★★ 解答（節末）p.271

▶ 例題 I2.1.3

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A = \{x \mid |x-1| < \sqrt{6}\}$，$B = \{x \mid -a \leqq x \leqq a\}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) $A \supset B$ となる a の値の範囲を求めよ．

(2) $A \cup B$ に属する整数の個数が 9 個となる a の値の範囲を求めよ．

節末 I2.1.3 ★★★ 解答（節末）p.272

▶ 例題 I2.1.7

次の命題の真偽を調べよ．また，真のときにはその証明をし，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x，y は実数とし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$ は無理数であることを用いてもよい．

(1) x が無理数，y が有理数ならば，$x+y$ は無理数である．

(2) $x^2 - x$ が有理数ならば，x は有理数である．

(3) x，y がともに無理数ならば，$x+y$，x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である．

節末 I2.1.4 ★★★ 解答（節末）p.272

▶ 例題 I2.1.9

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，a，b，c は実数とする．

(1) $a=b$ は，$ac=bc$ であるための $\boxed{}$

(2) $a=b=c$ は，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ であるための $\boxed{}$

(3) $a^2>b^2$ は，$a>b$ であるための $\boxed{}$

(i) 必要条件であるが十分条件ではない　(ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

節末 I2.1.5 ★★ 解答（節末）p.273

▶ 例題 I2.1.13

次の命題が成り立つことを対偶を用いて証明せよ．

x，y がともに正の数のとき，$x^2+y^2 \geqq 4$ ならば，$x \geqq \sqrt{2}$ または $y \geqq \sqrt{2}$ である．

節末 I2.1.6 ★★★★ 解答（節末）p.273

▶ 例題 I2.1.15 ▶ 例題 I2.1.16

整数 a，b を係数とする 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が有理数の解 r をもつならば，r は整数であることを証明せよ．

章末問題 2 集合と命題

2.2 章末問題 2

章末 I2.1 ★★★ 解答（章末）p.274

▶ 例題 I2.1.6

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

$$A = \{5x + 2y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\} \text{ であるとき，} A = \mathbb{Z}$$

章末 I2.2 ★★★ 解答（章末）p.274

▶ 例題 I2.1.13

次の命題の真偽を調べよ．また，真のときにはその証明をし，偽のときには具体的な反例を挙げよ．ただし，a，b を自然数とする．

(1) a が奇数かつ b が奇数ならば，$a^2 + b^2$ が偶数

(2) $a^2 + b^2$ が偶数ならば，a が偶数かつ b が偶数

(3) $a^2 + b^2$ が奇数ならば，a が奇数または b が奇数

章末 I2.3 ★★ 解答（章末）p.275

▶ 例題 I2.1.13

次の命題を証明せよ．ただし，m，n は正の整数，$m > n$ とする．

$$\frac{m+n}{m-n} \text{ が既約分数ならば，} \frac{n}{m} \text{ は既約分数である．}$$

章末 I2.4 ★★★ 解答（章末）p.275

▶ 例題 I2.1.16

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ はともに有理数であることを証明せよ．ただし，a，b を正の有理数とする．

章末 I2.5 ★★ 解答（章末）p.276

三角形の内角で，60° 以上のものが少なくとも 1 つ存在することを証明せよ．

第 3 章　2 次関数

3 章：2 次関数（再生リスト）

3　2 次関数

1 節 2 次関数のグラフ（pp.80-94），2 節 2 次関数の最大・最小と決定（pp.95-109），
3 節 2 次方程式と 2 次不等式（pp.110-148）

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.1.1	★		
I3.1.2	★		
I3.1.3	★		
I3.1.4	★		
I3.1.5	★		
I3.1.6	★★		
I3.1.7	★★		
I3.1.8	★		
I3.1.9	★★★		
I3.1.10	★★		
I3.1.11	★★★		
I3.1.12	★★★		
I3.2.1	★		
I3.2.2	★★		
I3.2.3	★★★		
I3.2.4	★★★		
I3.2.5	★★★		
I3.2.6	★★★		
I3.2.7	★★★		
I3.2.8	★★★		
I3.2.9	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.2.10	★★		
I3.2.11	★★		
I3.2.12	★★		
I3.2.13	★★★		
I3.3.1	★		
I3.3.2	★★		
I3.3.3	★★★		
I3.3.4	★★		
I3.3.5	★		
I3.3.6	★★		
I3.3.7	★★		
I3.3.8	★★★		
I3.3.9	★		
I3.3.10	★★		
I3.3.11	★★		
I3.3.12	★★		
I3.3.13	★★		
I3.3.14	★		
I3.3.15	★★		
I3.3.16	★		
I3.3.17	★		

番号	難易度	チェック	動画視聴
I3.3.18	★★		
I3.3.19	★★★		
I3.3.20	★★		
I3.3.21	★★★		
I3.3.22	★★★		
I3.3.23	★★★		
I3.3.24	★★★		
I3.3.25	★★★		
I3.3.26	★★★		
I3.3.27	★★		
I3.3.28	★★★		
I3.3.29	★★★★		
I3.3.30	★★★		
I3.3.31	★★★		
I3.3.32	★★★		
I3.3.33	★★		
I3.3.34	★★★★		
I3.3.35	★★★★		
I3.3.36	★★★		

節末問題 3.1，節末問題 3.2，節末問題 3.3

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.1.1	★		
I3.1.2	★★		
I3.1.3	★★		
I3.1.4	★★		
I3.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.2.1	★★		
I3.2.2	★★★★		
I3.2.3	★★		
I3.2.4	★★★		
I3.2.5	★★★		
I3.2.6	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.3.1	★★		
I3.3.2	★★★		
I3.3.3	★★★		
I3.3.4	★★★★		
I3.3.5	★★★		

章末問題 3

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.1	★★★		
I3.2	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.3	★★★		
I3.4	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.5	★★★		

チェック例

○･･･ 考え方を理解し，解くことができた．　△･･･ 理解が不十分である．　×･･･ 解くことができなかった．

3.1　2 次関数のグラフ

3.1.1　関数

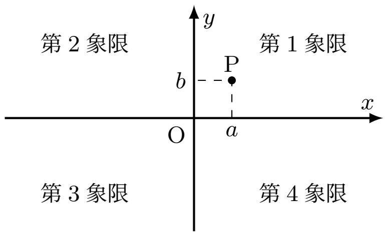
(1) 2 つの変数 x, y があり，x の値を定めるとそれに応じて y の値がただ 1 つ定まるとき，**y は x の関数**であるといい，$\boldsymbol{y = f(x)}$，$\boldsymbol{y = g(x)}$ などと表す．また，x の関数を単に関数 $\boldsymbol{f(x)}$ ともいう．

◀ f という記号は関数と訳される単語（英語では function）の頭文字に由来する．

(2) 関数 $y = f(x)$ において，$x = a$ のときの y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ と表し，$f(a)$ を関数 $f(x)$ の $x = a$ における**値**という．

◀ 例：$f(x) = x^2 + 2x + 1$ のとき，$f(1) = 1^2 + 2\cdot 1 + 1 = 4$

(3) 座標の定められた平面を**座標平面**という．座標軸によって分けられている 4 つの部分を，右の図のように，第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限という．また，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする．



◀ x 軸と y 軸は，原点 O（origin）を通って直交する．また，座標が $(a,\ b)$ である点 P を $\mathrm{P}(a,\ b)$ と記す．なお，進んだ数学（主に大学以降）では直交しない座標軸を考えることもある．

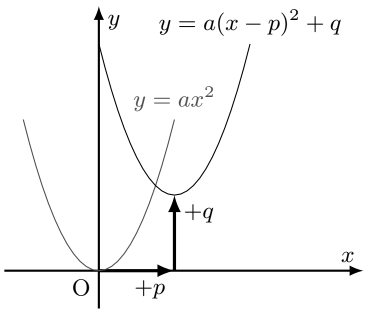
(4) 関数 $y = f(x)$ において，x のとる値の範囲をこの関数の**定義域**といい，x が定義域内のすべての値をとるときの y のとる値の範囲を**値域**という．

3.1.2　2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$（標準形）のグラフ

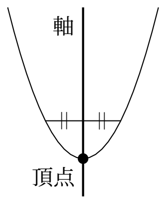
2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した**放物線**で，

軸は直線 $\boldsymbol{x = p}$，頂点は点 $\boldsymbol{(p,\ q)}$

また，この放物線は $a > 0$ のときは**下に凸**，$a < 0$ のときは**上に凸**である．



◀



3.1.3　2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$（一般形）のグラフ

$y = ax^2 + bx + c$ の右辺を $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形することを**平方完成**という．

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\cdot\frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

◀ x^2 の係数でくくり出す．

◀ x の係数の半分を 2 乗する．

◀ $-\frac{b^2}{4a^2}$ に a をかけ忘れないように注意すること．

この関数のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で，軸は直線 $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$，頂点は点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

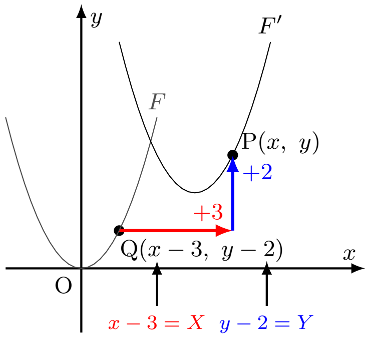
3.1.4　曲線の平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフ F を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる F' の方程式は，次のようになる．

$$\boldsymbol{y-q=f(x-p)}$$

例：$y=2x^2$ のグラフを F，$y=2(x-3)^2+2$ のグラフを F' とすると，F' は F を x 軸方向に 3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．$\cdots$(i)
なお，ここで F' 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとり，(i) の平行移動によって P に移される F 上の点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$x=X+3,\quad Y=y+2$$



◀ $x=X+3$，$y=Y+2$，すなわち，$X=x-3$，$Y=y-2$ より，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は $\mathrm{Q}(x-3,\ y-2)$ と表される．

すなわち，$X=x-3$，$Y=y-2$ であり，点 Q は F 上にあるから，$Y=2X^2$
この式の X に $x-3$，Y に $y-2$ を代入すると，F の方程式は，

$$y-2=2(x-3)^2$$

◀「移動後の方程式は $y+q=a(x+p)^2$ である」とするのは誤りであるので注意すること．

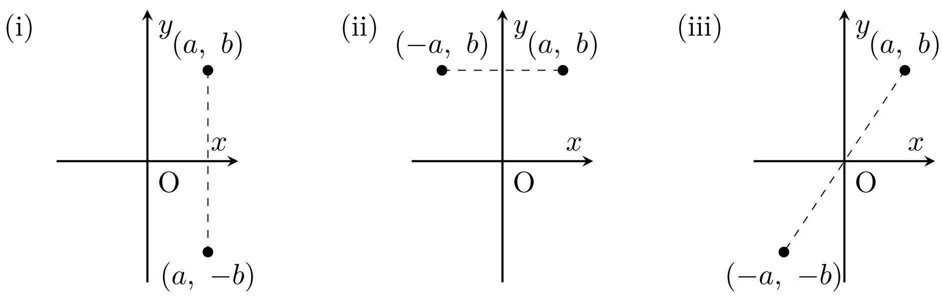
このように，F' の方程式は，F の方程式において，

$$\boldsymbol{y=2x^2}\ \textbf{の}\ \boldsymbol{x}\ \textbf{を}\ \boldsymbol{x-3,\ y}\ \textbf{を}\ \boldsymbol{y-2}$$

におき換えたものになっている．

3.1.5　点・グラフの対称移動

点 $(a,\ b)$ の対称移動
(i) x 軸に関して対称移動 $\cdots$ 点 $(a,\ -b)$ に移る．
(ii) y 軸に関して対称移動 $\cdots$ 点 $(-a,\ b)$ に移る．
(iii) 原点に関して対称移動 $\cdots$ 点 $(-a,\ -b)$ に移る．



関数 $y=f(x)$ のグラフの平行移動・対称移動
(i) x 軸方向に p だけ平行移動 $\cdots x$ を $x-p$ におき換えて，$y=f(x-p)$
(ii) y 軸方向に q だけ平行移動 $\cdots y$ を $y-q$ におき換えて，$y-q=f(x)$　◀ $y=f(x)+q$
(iii) x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動 $\cdots x$ を $x-p$ ，y を $y-q$ におき換えて，$y-q=f(x-p)$　◀ $y=f(x-p)+q$
(iv) x 軸に関して対称移動 $\cdots y$ を $-y$ におき換えて，$-y=f(x)$　◀ $y=-f(x)$
(v) y 軸に関して対称移動 $\cdots x$ を $-x$ におき換えて，$y=f(-x)$
(vi) 原点に関して対称移動 $\cdots x$ を $-x$ ，y を $-y$ におき換えて，$-y=f(-x)$　◀ $y=-f(-x)$

例題 I3.1.1　関数の値 $f(a)$　★

関数 $f(x)=3x^2-5x+2$ について，次の値を求めよ．

(1) $f(1)$　　(2) $f(0)$　　(3) $f\left(\frac{4}{3}\right)$

(4) $f(2a)$　　(5) $f(3a-2)$

解説動画

考え方 $f(x)$ の式のすべての x に a を代入すれば，$f(a)$ の値を求めることができる．なお，$f(2a)$ の $2a$ や，$f(3a-2)$ の $3a-2$ は，括弧をつけて代入するように注意すること．

解答

(1) $f(x)$ に $x=1$ を代入すると，

$$f(1)=3\cdot 1^2-5\cdot 1+2=3-5+2=\mathbf{0}$$

◀ $f(x)=3x^2-5x+2$ に 1 を代入する．

(2) $f(x)$ に $x=0$ を代入すると，

$$f(0)=3\cdot 0^2-5\cdot 0+2=0-0+2=\mathbf{2}$$

(3) $f(x)$ に $x=\frac{4}{3}$ を代入すると，

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2-5\cdot\frac{4}{3}+2=\frac{48}{9}-\frac{20}{3}+2=\frac{16}{3}-\frac{20}{3}+2=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(4) $f(x)$ に $x=2a$ を代入すると，

$$f(2a)=3\cdot(2a)^2-5\cdot(2a)+2=\mathbf{12a^2-10a+2}$$

◀ 括弧をつけずに $2a$ を代入して，$3\cdot 2a^2-5\cdot 2a+2=6a^2-10a+2$ とするのは誤りであるので注意すること．

(5) $f(x)$ に $x=3a-2$ を代入すると，

$$\begin{aligned}f(3a-2)&=3(3a-2)^2-5(3a-2)+2\\&=3(9a^2-12a+4)-15a+10+2\\&=27a^2-36a+12-15a+12\\&=\mathbf{27a^2-51a+24}\end{aligned}$$

◀ 括弧をつけて $3a-2$ を代入する．

問題 I3.1.1 ★　解答 p.277　　▶ 節末 I3.1.1

関数 $f(x)=4x^2-x+5$ について，次の値を求めよ．

(1) $f(2)$　　(2) $f\left(-\frac{3}{2}\right)$　　(3) $f(3a)$

(4) $f(2a+1)$　　(5) $f(a^2-1)$

例題 I3.1.2　関数の値域　★

次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ．

(1) $y = 3x - 4\ (-1 \leqq x < 2)$　　(2) $y = \frac{1}{2}x^2\ (-2 \leqq x \leqq 3)$

解説動画

考え方 関数 $y = f(x)$ において，y のとる値の範囲を値域という．グラフをかくときは，端点がグラフに含まれるか否かに注意すること．

解答

(1) $y = 3x - 4$ において，

$x = -1$ のとき

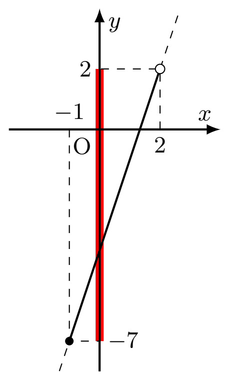
$$y = 3 \cdot (-1) - 4 = -7$$

$x = 2$ のとき

$$y = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

よって，グラフは右の図のようになる．

値域は $\boldsymbol{-7 \leqq y < 2}$



◀ $y = 3x - 4$ のグラフは，y 切片が -4，傾きが 3 の直線である．

◀ グラフには，定義域の両端の座標を記す．

(2) $y = \frac{1}{2}x^2$ において，

$x = -2$ のとき

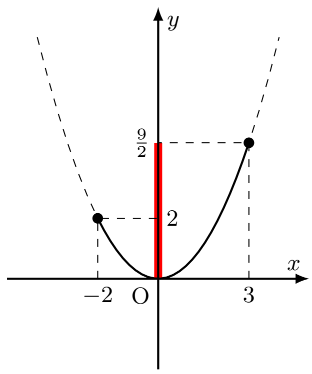
$$y = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$$

$x = 3$ のとき

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{9}{2}$$

よって，グラフは右の図のようになる．

値域は $\boldsymbol{0 \leqq y \leqq \frac{9}{2}}$



◀ $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフは，頂点が原点，軸が y 軸であり，下に凸の放物線である．

◀ 定義域の端点が値域の端点になるとは限らないので注意すること．

【注意】 数直線のときと同様に，本書ではグラフにおいて端点を含まない場合は「○」，端点を含む場合は「●」で表す．

問題 I3.1.2 ★　解答 p.278

次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ．

(1) $y = -2x + 5\ (-2 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = x^2\ (-1 \leqq x \leqq 2)$

例題 I3.1.3 値域から 1 次関数の係数決定 ★

関数 $y = ax + b$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値が 10，最小値が 4 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

解説動画

考え方 グラフをかいて考える．ここで，$y = ax + b$ のグラフは a の値によって変わり，最大値と最小値をとる位置も変わるので，(i) $a > 0$，(ii) $a = 0$，(iii) $a < 0$ の 3 つの場合に分けて考える．このとき，求めた a，b の値が場合分けの条件を満たすか否かを確認する．

解答

(i) $a > 0$ のとき

グラフは右の図のようになり，

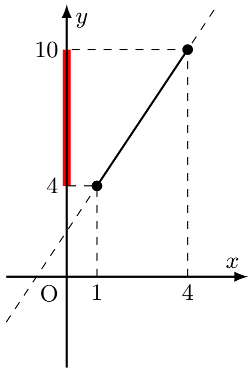
$x = 1$ のとき，最小値 4，
$x = 4$ のとき，最大値 10

をとるから，

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 4 \\ a \cdot 4 + b = 10 \end{cases}$$

したがって，$a = 2$，$b = 2$

これは，$a > 0$ を満たす．



◀ 点 (1，4) を通る．

◀ 点 (4，10) を通る．

◀ 点 (1 ， 4) を通ることから，$y = ax + b$ に代入して，

$4 = a \cdot 1 + b$

点 (4，10) にも同様の操作を行うと，$a \cdot 4 + b = 10$ が得られる．

(ii) $a = 0$ のとき

$y = b$（定数関数）となり，最大値と最小値は一致するので，不適である．

◀ x 軸に平行な直線となる．

(iii) $a < 0$ のとき

グラフは右の図のようになり，

$x = 1$ のとき，最大値 10，
$x = 4$ のとき，最小値 4

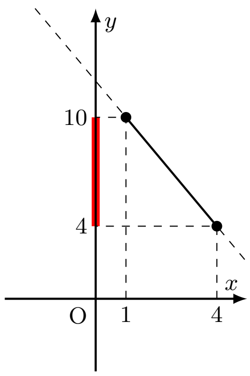
をとるから，

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 10 \\ a \cdot 4 + b = 4 \end{cases}$$

したがって，$a = -2$，$b = 12$

これは，$a < 0$ を満たす．

よって，(i)～(iii) より，求める a，b の値は，$(a,\ b) = \mathbf{(2,\ 2),\ (-2,\ 12)}$



◀ 点 (1，10) を通る．

◀ 点 (4, 4) を通る．

◀ 連立方程式を解く．

◀ 場合分けの条件を満たすことを確認する．

問題 I3.1.3 ★ 解答 p.279

関数 $y = ax + b$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 8，最小値が 2 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

例題 I3.1.4　2 次関数のグラフ 1　★

次の 2 次関数のグラフは，2 次関数 $y=2x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか．また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

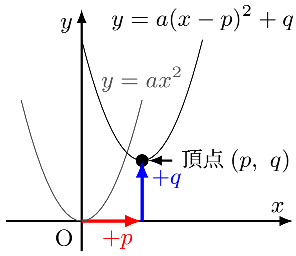
(1) $y=2x^2-1$　　(2) $y=2(x+1)^2$　　(3) $y=2(x-1)^2+1$

解説動画

考え方 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線で，

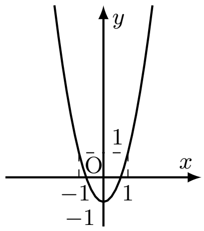
軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ q)$

また，$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，頂点 $(p,\ q)$ を原点と見て，$y=ax^2$ のグラフをかけばよい．



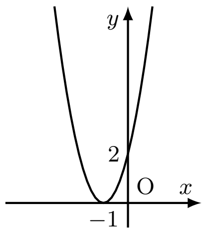
解答

(1) y 軸方向に -1 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．
軸は y 軸（直線 $x=0$）
頂点は点 $(0,\ -1)$



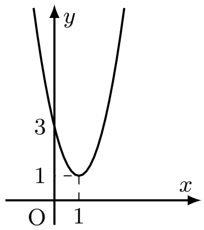
◀ $y=a(x-p)^2+q$ において，$p=0$ の形であるから，y 軸方向にのみ平行移動する．

(2) x 軸方向に -1 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．
軸は直線 $x=-1$
頂点は点 $(-1,\ 0)$

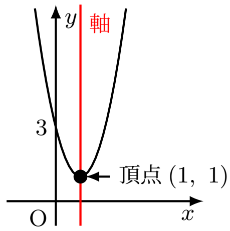


◀ $y=a(x-p)^2+q$ において，$q=0$ の形であるから，x 軸方向にのみ平行移動する．

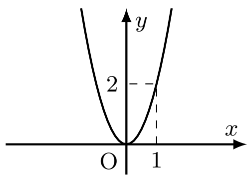
(3) x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．
軸は直線 $x=1$
頂点は点 $(1,\ 1)$



◀



【注意】グラフをかくときは，頂点の座標と頂点以外の通る 1 点を示す．通る 1 点は，y 軸との交点など（$x=0$ を代入して求められる），求めやすい点を示すのがよい．
例：2 次関数 $y=2x^2$ をかくときは，y 軸との交点が原点であり，頂点と一致する．通る 1 点として例えば，求めやすい点 $(1,\ 2)$ を示す．



問題 I3.1.4 ★　解答 p.280

次の 2 次関数のグラフは，2 次関数 $y=-x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか．また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

(1) $y=-x^2+3$　　(2) $y=-(x-2)^2$　　(3) $y=-(x+1)^2-4$

例題 I3.1.5　2 次関数のグラフ 2　★

次の 2 次関数のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

(1) $y = 3x^2 - 6x + 2$　　　(2) $y = -2x^2 + 4x - 5$

解説動画

$\boxed{\text{考え方}}$ 一般形 $y = ax^2 + bx + c$ の右辺を標準形 $y = a(x-p)^2 + q$ の形に平方完成して，グラフをかく．このとき，$x^2 + mx = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$ の利用を考えるとよい．

$$x^2 + mx = \Big(x + \underbrace{\frac{m}{2}}_{m\text{の半分}}\Big)^2 - \Big(\underbrace{\frac{m}{2}}_{m\text{の半分}}\Big)^2$$

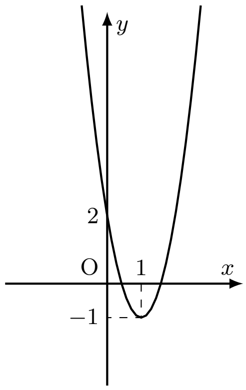
解答

(1)
$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 6x + 2 \\ &= 3(x^2 - 2x) + 2 \\ &= 3\{(x-1)^2 - 1^2\} + 2 \\ &= 3(x-1)^2 - 3 \cdot 1^2 + 2 \\ &= 3(x-1)^2 - 1 \end{aligned}$$

よって，グラフは右の図のようになる．

軸は直線 $\boldsymbol{x = 1}$

頂点は点 $\boldsymbol{(1,\ -1)}$



◀ 3 でくくり出す．

◀ x の係数の半分を 2 乗する．

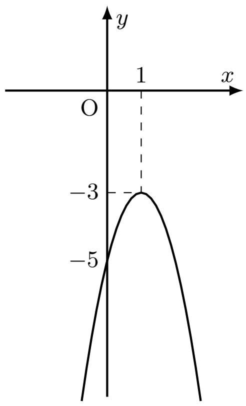
◀ $y = a(x-p)^2 + q$ の形であるから，軸や頂点を求めることができ，グラフがかける．

(2)
$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x - 5 \\ &= -2(x^2 - 2x) - 5 \\ &= -2\{(x-1)^2 - 1^2\} - 5 \\ &= -2(x-1)^2 + 2 \cdot 1^2 - 5 \\ &= -2(x-1)^2 - 3 \end{aligned}$$

よって，グラフは右の図のようになる．

軸は直線 $\boldsymbol{x = 1}$

頂点は点 $\boldsymbol{(1,\ -3)}$



◀ −2 でくくり出す．

◀ x の係数の半分を 2 乗する．

◀ −2 を分配して展開する．

◀ なお，平方完成した後は，展開すればもとの式に戻るか検算することができる．

問題 I3.1.5 ★　解答 p.280

次の 2 次関数のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

(1) $y = 2x^2 + 8x + 3$　　　(2) $y = -x^2 + 6x - 8$

例題 I3.1.6 2 次関数のグラフの平行移動 1　★★

放物線 $y=-x^2+8x-12$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

解説動画

考え方 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる放物線の方程式は，

$$y-q=a(x-p)^2+b(x-p)+c$$

これは，$y=ax^2+bx+c$ の x を $x-p$，y を $y-q$ におき換えたものになっている．
なお，別解のように放物線の方程式を標準形に変形して，頂点の移動に注目して解いてもよい．このとき，平行移動しても x^2 の係数は変わらないので注意すること．

解答

放物線 $y=-x^2+8x-12$ の x を $x-(-1)$，すなわち，$x+1$，y を $y-2$ におき換えると，

$$y-2=-(x+1)^2+8(x+1)-12$$

◀ $x+(-1)$，$y+2$ におき換えるのは誤りである．符号に注意すること．

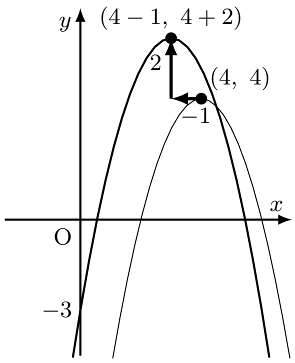
よって，求める放物線の方程式は，$\boldsymbol{y=-x^2+6x-3}$

◀ 移項して整理する．

【別解】

$$\begin{aligned} y &= -(x^2-8x)-12 \\ &= -\{(x-4)^2-4^2\}-12 \\ &= -(x-4)^2+16-12 \\ &= -(x-4)^2+4 \end{aligned}$$

◀ 平方完成する．



したがって，もとの放物線 $y=-x^2+8x-12$ の頂点は点 $(4,\ 4)$ である．
この頂点を平行移動すると，点 $(4-1,\ 4+2)$
すなわち，点 $(3,\ 6)$ になる．

◀ 符号に注意すること．

よって，求める放物線の方程式は，$\boldsymbol{y=-(x-3)^2+6}$

◀ x^2 の係数は変わらない．なお，$y=-x^2+6x-3$ でもよい．

Notes

放物線は平行移動しても，x^2 の係数は変わらない．

【注意】 別解において，頂点である点 $(3,\ 6)$ から放物線の方程式を求めるとき，$y=(x-3)^2+6$ などとするのは誤りである．平行移動しても x^2 の係数は変わらないので，$y=-(x-3)^2+6$ とするように注意すること．

問題 I3.1.6 ★★ 解答 p.281

放物線 $y=x^2-6x+5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

One math

例題 I3.1.7 2 次関数のグラフの平行移動 2 ★★

(1) 放物線 $y=-x^2+6x-4$ は放物線 $y=-x^2-2x+3$ をどのように平行移動したものか．

(2) x 軸方向に 3，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると，放物線 $y=3x^2-2x+5$ になるような放物線 C の方程式を求めよ．

解説動画

考え方

(1) 頂点の移動に注目するとよい．

(2) 放物線 $y=3x^2-2x+5$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，放物線 C が得られる．求めるグラフは，与えられた平行移動の 逆向きに平行移動したもの であるので注意すること．

$$C \underset{\substack{x\text{ 軸方向に } -p\\ y\text{ 軸方向に } -q}}{\overset{\substack{x\text{ 軸方向に } p\\ y\text{ 軸方向に } q}}{\rightleftarrows}} C'$$

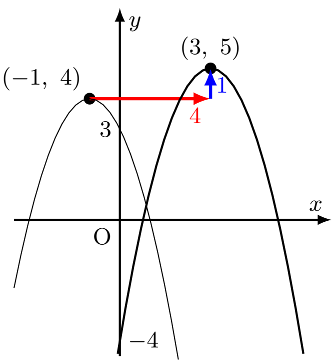
解答

(1) $y=-x^2+6x-4=-(x-3)^2+5$ より，頂点は点 $(3,\ 5)$

$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$ より，頂点は点 $(-1,\ 4)$

頂点 $(-1,\ 4)$ が点 $(3,\ 5)$ に移されるから，

$$x\text{ 軸方向に } 3-(-1)=4,$$
$$y\text{ 軸方向に } 5-4=1$$



◀ 頂点の座標を求める．

◀ 移動した後の座標から，移動する前の座標を引くことを考える．

だけ平行移動している．

よって，**x 軸方向に 4，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの**である．

(2) 放物線 $y=3x^2-2x+5$ において，

$$x\text{ 軸方向に } -3,\quad y\text{ 軸方向に } -2$$

だけ平行移動したものが放物線 C である．

◀ 与えられた平行移動の 逆向き の移動を考える．「x 軸方向に 3，y 軸方向に 2 だけ平行移動」とするのは誤りであるので注意すること．

したがって，放物線 $y=3x^2-2x+5$ の x を $x+3$, y を $y+2$ におき換えて，

$$y+2=3(x+3)^2-2(x+3)+5$$

よって，$\boldsymbol{y=3x^2+16x+24}$

【別解】 $y=3x^2-2x+5=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}$ より，頂点は点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{14}{3}\right)$

◀ 頂点の移動に注目した解法である．

したがって，放物線 C の頂点は点 $\left(\frac{1}{3}-3,\ \frac{14}{3}-2\right)$

すなわち，点 $\left(-\frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right)$

よって，放物線 C の方程式は，

$$y=3\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+\frac{8}{3}=\boldsymbol{3x^2+16x+24}$$

◀ 平行移動しても，x^2 の係数は変わらない．

問題 I3.1.7 ★★ 解答 p.282

(1) 放物線 $y=x^2+4x+1$ は放物線 $y=x^2-2x-3$ をどのように平行移動したものか．

(2) x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y=-2x^2+5x-7$ になるような放物線 C の方程式を求めよ．

例題 I3.1.8 2次関数のグラフの対称移動 ★

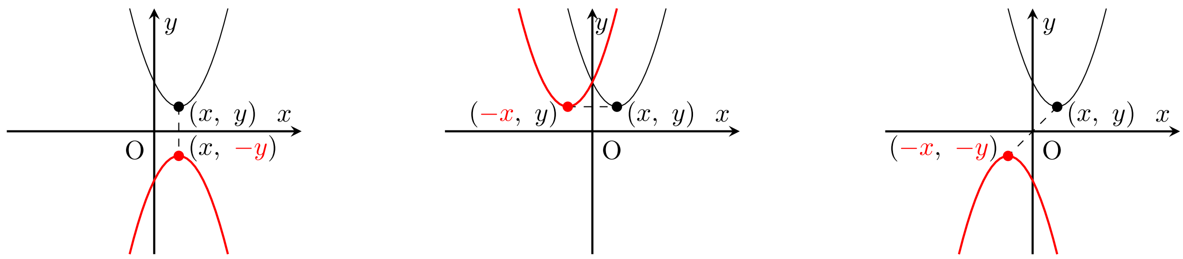
放物線 $y=x^2-2x+3$ を，次のように移動した放物線の方程式を求めよ．

(1) x 軸に関して対称移動　(2) y 軸に関して対称移動　(3) 原点に関して対称移動

解説動画

考え方 関数 $y=f(x)$ のグラフをそれぞれ x 軸，y 軸，原点に関して対称移動すると，次のようになる．

x 軸 $\cdots -y=f(x)$　　y 軸 $\cdots y=f(-x)$　　原点 $\cdots -y=f(-x)$



解答

(1) y を $-y$ におき換えて，$-y=x^2-2x+3$

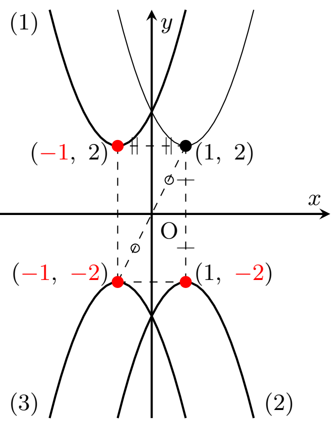
よって，$\boldsymbol{y=-x^2+2x-3}$

(2) x を $-x$ におき換えて，$y=(-x)^2-2(-x)+3$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+2x+3}$

(3) x を $-x$，y を $-y$ におき換えて，$-y=(-x)^2-2(-x)+3$

よって，$\boldsymbol{y=-x^2-2x-3}$



【別解】 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ より，頂点は点 $(1,\ 2)$ で下に凸の放物線である．

(1) 点 $(1,\ 2)$ を x 軸に関して対称移動すると，$(1,\ -2)$

移動したグラフは上に凸であるから，$\boldsymbol{y=-(x-1)^2-2}$

(2) 点 $(1,\ 2)$ を y 軸に関して対称移動すると，$(-1,\ 2)$

移動したグラフは下に凸であるから，$\boldsymbol{y=(x+1)^2+2}$

(3) 点 $(1,\ 2)$ を原点に関して対称移動すると，$(-1,\ -2)$

移動したグラフは上に凸であるから，$\boldsymbol{y=-(x+1)^2-2}$

◀ 答えを記すときは，標準形でも一般形でもよい．

◀ x^2 の係数の符号が変わり，上に凸のグラフとなる．

2次関数のグラフの対称移動

x 軸に関して対称移動 $\cdots$ y を $-y$ におき換える．

y 軸に関して対称移動 $\cdots$ x を $-x$ におき換える．

原点に関して対称移動 $\cdots$ x を $-x$ ，y を $-y$ におき換える．

問題 I3.1.8 ★ 解答 p.283

▶ 節末 I3.1.3

放物線 $y=-x^2+4x-5$ を，次のように移動した放物線の方程式を求めよ．

(1) x 軸に関して対称移動　(2) y 軸に関して対称移動　(3) 原点に関して対称移動

例題 I3.1.9　2 次関数の平行移動と対称移動　★★★

放物線 $y=ax^2+bx+c\cdots$(i) を x 軸方向に 1，y 軸方向に 5 だけ平行移動し，さらに y 軸に関して対称移動すると，放物線 $y=2x^2+8x+3\cdots$(ii) になった．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

解説動画

考え方 グラフが複数回の移動をする問題では，移動の順序に注意する．なお，先に $y=ax^2+bx+c$ からグラフの移動を考えてもよいが，計算に手間が掛かる（別解）．そこで，先に $y=2x^2+8x+3$ からグラフの移動を考えるとよい．このとき，与えられた平行移動の逆向きに平行移動したものを考えることになるので，符号に注意すること．

$$\text{(i)}\ y=ax^2+bx+c \ \underset{\substack{x\text{ 軸方向に }-1\\ y\text{ 軸方向に }-5}}{\overset{\substack{x\text{ 軸方向に }1\\ y\text{ 軸方向に }5}}{\rightleftarrows}}\ \text{(iii)}\ \underset{y\text{軸に関して対称移動}}{\overset{y\text{軸に関して対称移動}}{\rightleftarrows}}\ \text{(ii)}\ y=2x^2+8x+3$$

解答

(ii) を y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，

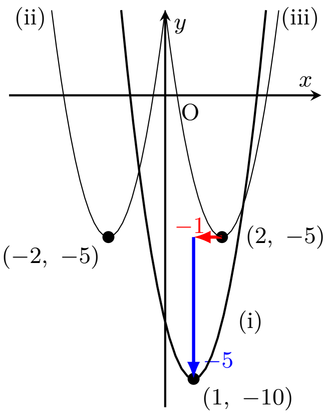
$$y=2(-x)^2+8(-x)+3$$

すなわち，$y=2x^2-8x+3\cdots$(iii)

(iii) を x 軸方向に -1，y 軸方向に -5 だけ平行移動するから，

$$y+5=2(x+1)^2-8(x+1)+3$$

すなわち，$y=2x^2-4x-8$



よって，$y=2x^2-4x-8$ が (i) と一致するから，係数を比較すると，

$$a=\mathbf{2},\quad b=\mathbf{-4},\quad c=\mathbf{-8}$$

【別解】 (i) のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 5 だけ平行移動した放物線の方程式は，$y-5=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

したがって，$y=ax^2+(b-2a)x+a-b+c+5$

y 軸に関して対称移動すると，

$$y=a(-x)^2+(b-2a)(-x)+a-b+c+5$$

ゆえに，$y=ax^2+(2a-b)x+a-b+c+5$

したがって，$y=ax^2+(2a-b)x+a-b+c+5$ が (ii) と一致するから，係数を比較すると，$a=2$，$2a-b=8$，$a-b+c+5=3$

よって，これを解いて，$a=\mathbf{2}$，$b=\mathbf{-4}$，$c=\mathbf{-8}$

◀ 与えられた平行移動の逆向きの平行移動を考える．「y 軸に関して対称移動」の逆の移動は，そのまま，「y 軸に関して対称移動」である．

◀ 標準形にして，頂点の移動に注目して解いてもよい．

◀ x を $x-(-1)$，すなわち，$x+1$，y を $y-(-5)$，すなわち，$y+5$ におき換える．

◀ $y=ax^2+bx+c\cdots$(i) と係数を比較する．

◀ 先に $y=ax^2+bx+c$ からグラフの移動を考えた解法である．頂点の移動に注目して解くと，(i) の頂点は

$$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

となり，計算に更に手間が掛かる．

◀ $y=2x^2+8x+3\cdots$(ii) と係数を比較する．

問題 I3.1.9 ★★★　解答 p.284

▶ 節末 I3.1.4

放物線 $y=ax^2+bx+c\cdots$(i) を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，さらに y 軸に関して対称移動すると，放物線 $y=-x^2+6x+4\cdots$(ii) になった．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

例題 I3.1.10　絶対値記号を含む関数のグラフ 1　★★

次の関数のグラフをかけ．

(1) $y=|x-1|$　　(2) $y=|x^2+2x-3|$

解説動画

考え方 絶対値記号内が 0 になる値を境に，場合分けをして絶対値記号を外す．

(1) $|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x-1\geqq 0) \\ -(x-1) & (x-1<0) \end{cases}=\begin{cases} x-1 & (x\geqq 1) \\ -(x-1) & (x<1) \end{cases}$ より，$x=1$ を境に，場合分けをする．

(2) $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ より，$x=-3,\ 1$ を境に，場合分けをする．

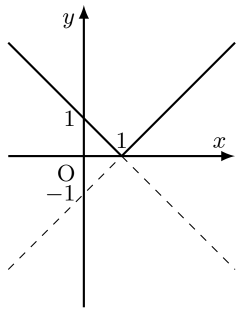
解答

(1)　(i) $x-1\geqq 0$，すなわち，$x\geqq 1$ のとき

$$y=x-1$$

(ii) $x-1<0$，すなわち，$x<1$ のとき

$$y=-(x-1)=-x+1$$



よって，(i)，(ii) より，**グラフは右上の図のようになる．**

◀ $x\geqq 1$，$x<1$ の代わりに，$x>1$，$x\leqq 1$ のように，$x=1$ はどちらの範囲に含めて記してもよいが，解答のように記すことが多い．

◀ なお，$y=|x-1|$ は，

$$y=\begin{cases} x-1 & (x\geqq 1) \\ -x+1 & (x<1) \end{cases}$$

のように表されることもある．

(2)　$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ より，

$x^2+2x-3\geqq 0$ のとき，$x\leqq -3,\ 1\leqq x$

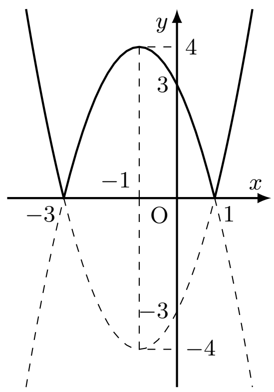
$x^2+2x-3<0$ のとき，$-3<x<1$

(i) $x\leqq -3,\ 1\leqq x$ のとき

$$y=|x^2+2x-3|=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$$

(ii) $-3<x<1$ のとき

$$y=|x^2+2x-3|=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$$



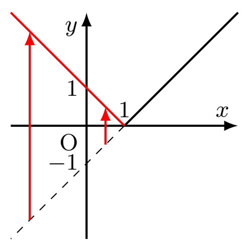
よって，(i)，(ii) より，**グラフは右上の図のようになる．**

◀ 絶対値記号内が 0 になる値を境に場合分けをする．

【注意】 (1) において，$y=x-1$ のグラフと，$y=-x+1$ のグラフは，x 軸に関して対称なグラフとなっている．$|x-1|\geqq 0$ であるから，$y=|x-1|$ のグラフは常に x 軸より上側にある．また，$y=|x-1|$ のグラフは，$y=x-1$ のグラフの x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返したもの になっている．

一般に，$y=|f(x)|$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸の上下に分けて，$y\geqq 0$（上側）にある部分はそのまま，$y<0$（下側）にある部分は x 軸に関して対称に折り返したもの になる．

$y<0$ の部分を折り返す



問題 I3.1.10 ★★　解答 p.285

次の関数のグラフをかけ．

(1) $y=|2x+3|$　　(2) $y=|x^2-4x+3|$

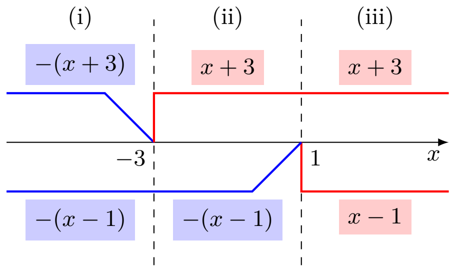
例題 I3.1.11　絶対値記号を含む関数のグラフ 2　★★★

関数 $y = |x+3| + |x-1|$ のグラフをかけ．

解説動画

考え方　絶対値記号内が 0 になる値を境に場合分けをする．$x+3=0$ より，$x=-3$，$x-1=0$ より，$x=1$ であるから，$x=-3$，1 を境に，$x<-3$，$-3 \leqq x < 1$，$1 \leqq x$ の 3 つの部分に分けて場合分けをする．

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & (x \geqq -3) \\ -(x+3) & (x < -3) \end{cases}, \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geqq 1) \\ -(x-1) & (x < 1) \end{cases}$$



解答

(i) $x < -3$ のとき

$$\begin{aligned} |x+3| + |x-1| &= -(x+3) - (x-1) \\ &= -2x - 2 \end{aligned}$$

(ii) $-3 \leqq x < 1$ のとき

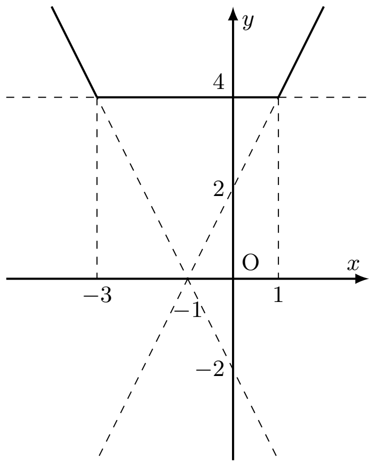
$$\begin{aligned} |x+3| + |x-1| &= (x+3) - (x-1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

◀ 定数関数 $y=4$ となる．

(iii) $1 \leqq x$ のとき

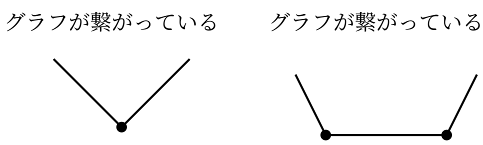
$$\begin{aligned} |x+3| + |x-1| &= (x+3) + (x-1) \\ &= 2x + 2 \end{aligned}$$

よって，(i)〜(iii) より，**グラフは右上の図のようになる．**



◀ グラフは繋がっている．

【余談】 一般に，$y = |f(x)|$，$y = |f(x)| \pm |g(x)|$（$f(x)$，$g(x)$ は 1 次関数 $y = ax + b$ や 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ とする）などの形の関数は，場合分けの境となる x でグラフが繋がっていることが知られている．



問題 I3.1.11 ★★★　解答 p.285

▶ 節末 I3.1.5

関数 $y = |x+2| + |x-4|$ のグラフをかけ．

例題 I3.1.12 絶対値記号を含む関数のグラフ 3 ★★★

不等式 $|2x+2|+|x-1| > -x+2$ をグラフを利用して解け.

解説動画

数学 I 3.1

考え方 一般に，$f(x) > g(x)$ は，$y=f(x)$ のグラフが $y=g(x)$ のグラフよりも上側にあることを指す．（ア）$y=|2x+2|+|x-1|$ と（イ）$y=-x+2$ のグラフをそれぞれかき，グラフの上下関係から判断して不等式の解を求める．

解答

$y=|2x+2|+|x-1|$ とする．

(i) $x<-1$ のとき

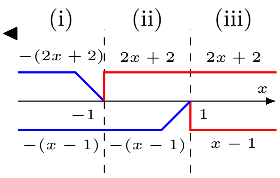
$$y=-(2x+2)-(x-1)=-3x-1$$

(ii) $-1 \leqq x < 1$ のとき

$$y=(2x+2)-(x-1)=x+3$$

(iii) $1 \leqq x$ のとき

$$y=(2x+2)+(x-1)=3x+1$$

◀ 

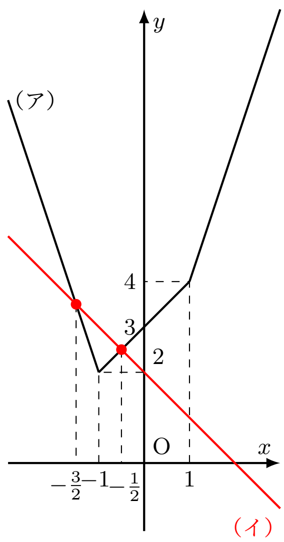
したがって，(i)〜(iii) より，関数 $y=|2x+2|+|x-1|$ のグラフは右の図の（ア）となる．一方，関数 $y=-x+2$ のグラフは右の図の（イ）となる．右の図より，（ア）と（イ）のグラフは，$x<-1$ または $-1 \leqq x < 1$ の範囲で交わる．

（ア）と（イ）のグラフの交点の x 座標は，$x<-1$ のとき，$-3x-1=-x+2$ より，$x=-\frac{3}{2}$

$-1 \leqq x < 1$ のとき，$x+3=-x+2$ より，$x=-\frac{1}{2}$

よって，不等式 $|2x+2|+|x-1| > -x+2$ の解は，

$$\boldsymbol{x < -\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{2} < x}$$



◀ 2 つの関数のグラフをかいて，グラフの上下関係を利用して不等式の解を求める．

One Point

絶対値を含む不等式の解は，グラフの上下関係から判断して解く．

問題 I3.1.12 ★★★ 解答 p.286

不等式 $|x+4|+|2x-1| \leqq -2x+2$ をグラフを利用して解け.

節末問題 3.1　2 次関数のグラフ

節末 I3.1.1 ★　解答（節末）p.287

▶ 例題 I3.1.1

関数 $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ について，$f(f(a))$ の値を求めよ．

数学 I 3.1

節末 I3.1.2 ★★　解答（節末）p.287

2 つの放物線 $y = 3x^2 - 18x + 25$ と $y = ax^2 + 8x + b$ の頂点が一致するように定数 a，b の値を定めよ．

節末 I3.1.3 ★★　解答（節末）p.288

▶ 例題 I3.1.8

$y = ax^2 + bx + c$ で表される放物線が点 $(1,\ -2)$ に関して放物線 $y = -3x^2$ と点対称であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

節末 I3.1.4 ★★　解答（節末）p.288

▶ 例題 I3.1.9

放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ を x 軸方向に 3 だけ平行移動し，さらに直線 $y = 2$ に関して折り返してできる放物線の方程式を求めよ．

節末 I3.1.5 ★★★　解答（節末）p.289

▶ 例題 I3.1.11

次の関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(1) $f(x) = |x-2| + |x-4| + |x-6|$　　(2) $f(x) = |x + |2x-10||$

3.2　2 次関数の最大・最小と決定

3.2.1　2 次関数の最大・最小

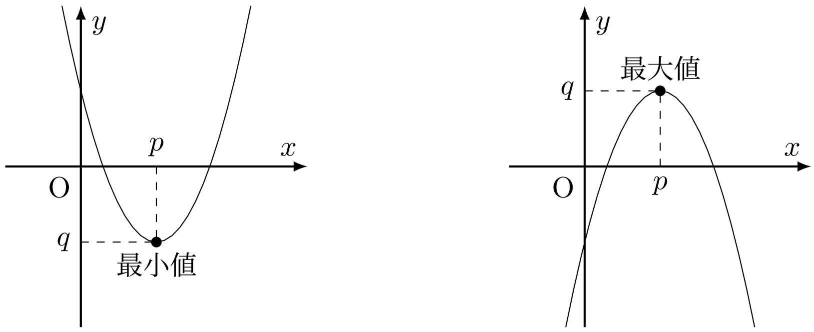
(1) $y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ は,

$a>0$ のとき, $\boldsymbol{x=p}$ **で最小値** $\boldsymbol{q}$, **最大値はない**.

$a<0$ のとき, $\boldsymbol{x=p}$ **で最大値** $\boldsymbol{q}$, **最小値はない**.

◀ $p=-\frac{b}{2a}$, $q=-\frac{b^2-4ac}{4a}$

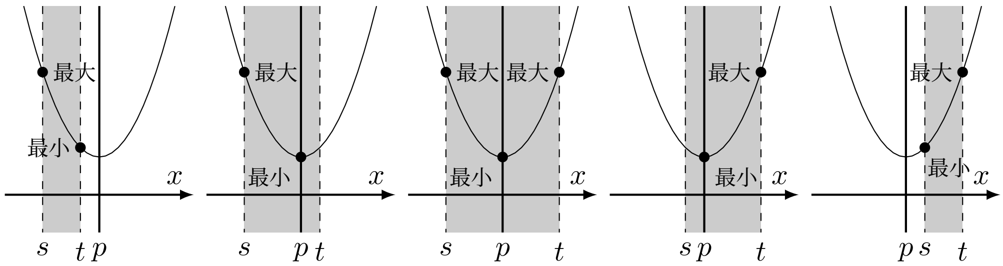
$a>0$ のとき　　　　$a<0$ のとき



(2) 定義域に制限があるとき

$a>0$ のとき, $y=a(x-p)^2+q$ $(s \leqq x \leqq t)$ の最大・最小は, 定義域（軸の位置）によって次のようになる.

◀ $a<0$ のときも同様に考えることができ, グラフは上に凸で, 最大と最小が入れ替わる.



3.2.2　2 次関数の決定

3 点を通る. $\cdots$ **一般形** $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$ とおく.

頂点が点 $(p,\ q)$ である. $\cdots$ **標準形** $\boldsymbol{y=a(x-p)^2+q}$ とおく.

x 軸と $x=\alpha,\ \beta$ で交わる. $\cdots$ $\boldsymbol{y=a(x-\alpha)(x-\beta)}$ とおく.

x 軸と点 $(\alpha,\ 0)$ で接する. $\cdots$ $\boldsymbol{y=a(x-\alpha)^2}$ とおく.

◀ これらの方法以外でも 2 次関数を決定することができるが, 計算に手間が掛かることが多いので注意すること.

例題 I3.2.1　2 次関数の最大・最小　★

次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

(1) $y = 2x^2 - 4x + 5$　　(2) $y = -5x^2 + 10x$

解説動画

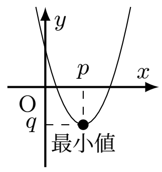
考え方 $y = ax^2 + bx + c$ の形の式を変形（平方完成）して，標準形 $y = a(x-p)^2 + q$ の形にする．

$y = ax^2 + bx + c = a(x-p)^2 + q$ は，

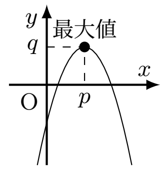
$a > 0$ のとき，$x = p$ で最小値 q，最大値はない．

$a < 0$ のとき，$x = p$ で最大値 q，最小値はない．

$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき



解答

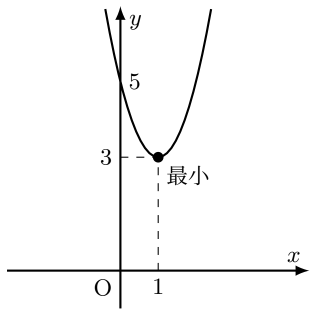
(1)　$y = 2x^2 - 4x + 5$

$= 2(x^2 - 2x) + 5$

$= 2\{(x-1)^2 - 1^2\} + 5$

$= 2(x-1)^2 + 3$

よって，$x = 1$ のとき，**最小値 3，最大値はない．**



◀ 平方完成する．

◀ グラフは下に凸の放物線で，頂点は (1, 3) である．y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない．

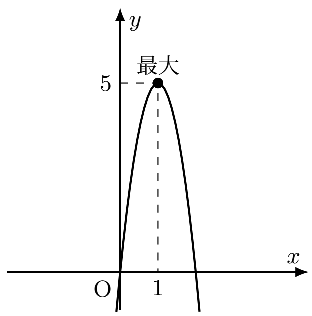
(2)　$y = -5x^2 + 10x$

$= -5(x^2 - 2x)$

$= -5\{(x-1)^2 - 1^2\}$

$= -5(x-1)^2 + 5$

よって，$x = 1$ のとき，**最大値 5，最小値はない．**



◀ 平方完成する．

◀ グラフは上に凸の放物線で，頂点は (1, 5) である．y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない．

【注意】最大値，最小値をとるときの x の値は「必ず記すべきである」という考え方もある．

問題 I3.2.1 ★　解答 p.290

次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

(1) $y = -3x^2 + 6x + 2$　　(2) $y = 4x^2 + 8x - 1$

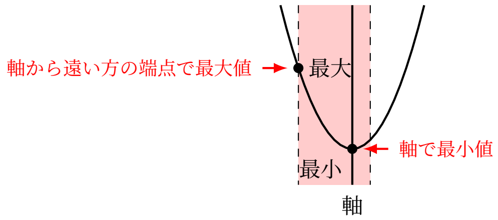
例題 I3.2.2 定義域が定められたときの 2 次関数の最大・最小 ★★

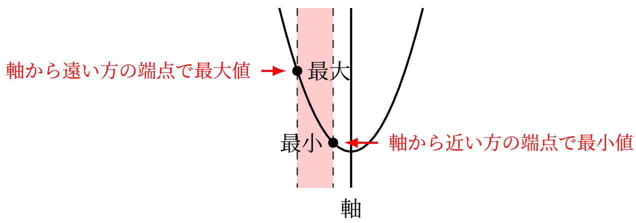
次の定義域における 2 次関数 $y = x^2 - 6x + 5$ の最大値，最小値を求めよ．

(1) $1 \leqq x \leqq 4$　　(2) $0 < x \leqq 2$

解説動画

考え方 2 次関数の最大・最小には，グラフの利用が有効である．このとき，定義域が定められている場合は，軸が定義域に含まれるか否かに注意すること．放物線は軸で対称であることを利用して，軸と定義域の端の値（端点）の位置関係から，最大値・最小値を求めることができる．





解答

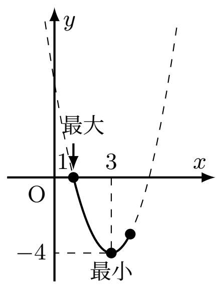
$$y = x^2 - 6x + 5 = \{(x-3)^2 - 3^2\} + 5 = (x-3)^2 - 4$$

◀ 軸は直線 $x = 3$，頂点は点 $(3,\ -4)$ の下に凸の放物線である．

(1) $x = 1$ のとき，$y = 0$，$x = 4$ のとき，$y = -3$

したがって，$1 \leqq x \leqq 4$ のとき，グラフは右の図のようになる．

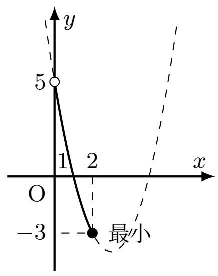
よって，$x = 1$ のとき，**最大値 0**，$x = 3$ のとき，**最小値 -4**



(2) $x = 0$ のとき，$y = 5$，$x = 2$ のとき，$y = -3$

したがって，$0 < x \leqq 2$ のとき，グラフは右の図のようになる．

よって，$x = 2$ のとき，**最小値 -3**，**最大値はない．**



◀ $x = 0$ を代入すると，$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$，$x = 2$ を代入すると，$y = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3$

◀ $0 < x \leqq 2$ より，$x = 0$ は定義域に含まれないので，最大値はない．

One Point

定義域が定められた 2 次関数の最大・最小は，軸（頂点）の位置と定義域の端の値に注目する．

問題 I3.2.2 ★★ 解答 p.290

次の定義域における 2 次関数 $y = -x^2 + 4x + 1$ の最大値，最小値を求めよ．

(1) $0 \leqq x < 2$　　(2) $1 < x \leqq 4$

例題 I3.2.3　最大・最小による係数の決定　★★★

関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 2b \ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 7，最小値が -2 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

解説動画

考え方 $a > 0$（下に凸の放物線），$a = 0$（直線），$a < 0$（上に凸の放物線）の 3 つの場合に分けて考える．なお，場合分けで得られた値が，場合分けの条件を満たすか否かの確認を忘れないように注意すること．

解答

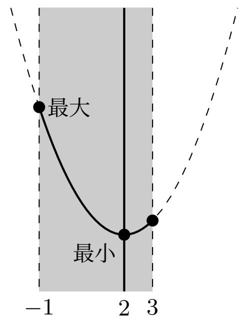
$$f(x) = ax^2 - 4ax + 2b = a(x-2)^2 - 4a + 2b$$

(i) $a > 0$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲で $f(x)$ は，$x = -1$ のとき，最大値 $5a + 2b$，$x = 2$ のとき，最小値 $-4a + 2b$ をとる．

◀ 軸は直線 $x = 2$，頂点は点 $(2,\ -4a + 2b)$ の放物線である．

◀ 軸から遠い方の端点である $x = -1$ のとき，最大となる．



したがって，$\begin{cases} 5a + 2b = 7 \\ -4a + 2b = -2 \end{cases}$

ゆえに，$a = 1$，$b = 1$

これは $a > 0$ を満たす．

◀ 場合分けの条件を満たすことを確認する．

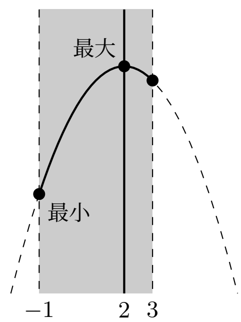
(ii) $a = 0$ のとき

$f(x) = b$ で一定の値をとり，最大値 7，最小値 -2 をとることはないから，不適である．

(iii) $a < 0$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲で $f(x)$ は，$x = 2$ のとき，最大値 $-4a + 2b$，$x = -1$ のとき，最小値 $5a + 2b$ をとる．

◀ 軸から遠い方の端点である $x = -1$ のとき，最小となる．



したがって，$\begin{cases} -4a + 2b = 7 \\ 5a + 2b = -2 \end{cases}$

ゆえに，$a = -1$，$b = \frac{3}{2}$

これは $a < 0$ を満たす．

よって，(i)～(iii) より，求める a，b の値は，$(a,\ b) = \boldsymbol{(1,\ 1),\ \left(-1,\ \frac{3}{2}\right)}$

【注意】問題文では単に「関数 $f(x)$」となっていることから，$f(x)$ は 2 次関数であるとは限らない．「2 次関数 $f(x)$」であれば $a \neq 0$ は仮定されていると考えるが，「関数 $f(x)$」となっていることから，$a = 0$ のときを考えなければならないので注意すること．

問題 I3.2.3 ★★★　解答 p.291

▶ 節末 I3.2.1

関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 2b \ (-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -1 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

例題 I3.2.4　定義域が拡大するときの最大・最小　★★★

$a > 0$ とする．関数 $f(x) = x^2 - 4x + 6 \ (0 \leqq x \leqq a)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．

解説動画

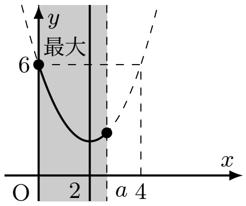
考え方 $y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸から遠いほど y の値は大きくなる．また，定義域は a の値が大きくなるにつれて拡大する．定義域の拡大に伴い，最大値をとる端点も変わるので，軸からの距離を考えて a について場合分けをする．ここでは，定義域の中央と軸が一致するときに注目する．

解答

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$$

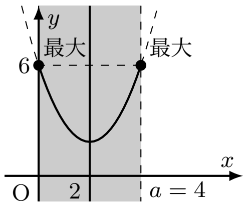
$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x = 2$

(i) $0 < a < 4$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x = 0$ のとき最大となり，最大値 $f(0) = 6$



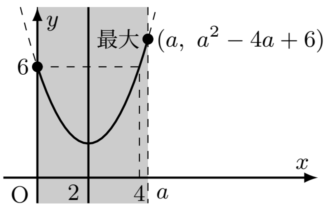
◀ 定義域 $0 \leqq x \leqq a$ の中央である $x = \frac{a}{2}$ と軸の直線 $x = 2$ が一致するときを境にして，場合分けをする．ここでは，$\frac{a}{2} = 2$，すなわち，$a = 4$ を境に場合分けをする．

(ii) $a = 4$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x = 0,\ 4$ のとき最大となり，最大値 $f(0) = f(4) = 6$



◀ 定義域の両端における y 座標が等しくなる．

(iii) $4 < a$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x = a$ のとき最大となり，最大値 $f(a) = a^2 - 4a + 6$



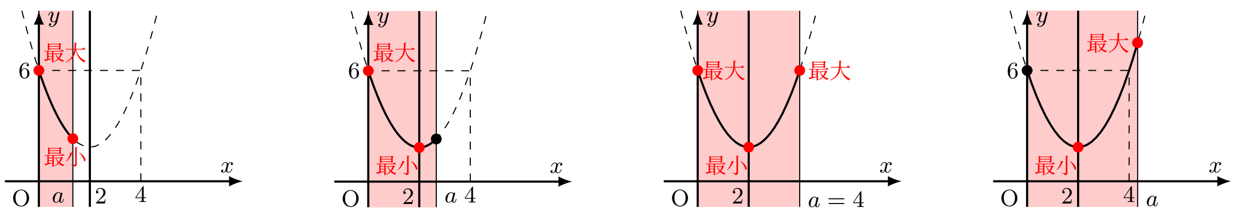
◀ $x = a$ の方が軸から遠いので，$x = a$ で最大となる．

よって，(i)〜(iii) より，

$$\begin{cases} \mathbf{0 < a < 4} \text{ のとき，} & \mathbf{x = 0} \text{ で最大値 } \mathbf{6} \\ \mathbf{a = 4} \text{ のとき，} & \mathbf{x = 0,\ 4} \text{ で最大値 } \mathbf{6} \\ \mathbf{4 < a} \text{ のとき，} & \mathbf{x = a} \text{ で最大値 } \mathbf{a^2 - 4a + 6} \end{cases}$$

【注意】 下の問題の (1) の結果と合わせると，最大値と最小値は次のようにまとめることができる．

(i) $0 < a < 2$　(ii) $2 \leqq a < 4$　(iii) $a = 4$　(iv) $4 < a$



問題 I3.2.4 ★★★　解答 p.292

(1) $a > 0$ とする．関数 $f(x) = x^2 - 4x + 6 \ (0 \leqq x \leqq a)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．
(2) $a > 0$ とする．関数 $f(x) = -x^2 + 6x - 8 \ (0 \leqq x \leqq a)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

例題 I3.2.5 軸が移動するときの最大・最小　★★★

関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3\ (0 \leqq x \leqq 3)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

解説動画

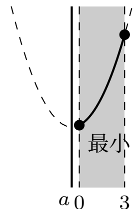
考え方 関数 $f(x)$ を標準形にすると，$f(x) = (x - a)^2 - a^2 + 3$ となり，軸は直線 $x = a$ である．a の値が変わると，軸の位置も変わり，定義域における最小値をとる端点（頂点）も変わる．よって，定義域に対する軸の位置を考えて a について場合分けをする．

解答

$$y = x^2 - 2ax + 3 = (x - a)^2 - a^2 + 3$$

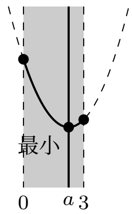
$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x = a$

(i) $a < 0$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域より左側にある．
$x = 0$ のとき最小となり，最小値 $f(0) = 3$



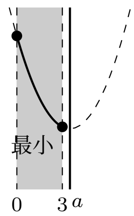
◀ 軸が定義域より左側か右側にあるとき，定義域の左端か右端で最小値をとる．これと軸が定義域内にある場合，頂点で最小値をとることから，全部で 3 通りの場合分けとなる．

(ii) $0 \leqq a \leqq 3$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域内にある．
$x = a$ のとき最小となり，最小値 $f(a) = -a^2 + 3$



◀ 頂点で最小値をとる．

(iii) $3 < a$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域より右側にある．
$x = 3$ のとき最小となり，最小値 $f(3) = -6a + 12$

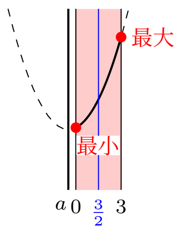


よって，(i)〜(iii) より，

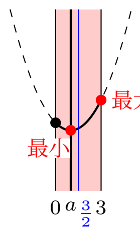
$$\begin{cases} \boldsymbol{a < 0} \text{ のとき，} & \boldsymbol{x = 0} \text{ で最小値 } \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{0 \leqq a \leqq 3} \text{ のとき，} & \boldsymbol{x = a} \text{ で最小値 } \boldsymbol{-a^2 + 3} \\ \boldsymbol{3 < a} \text{ のとき，} & \boldsymbol{x = 3} \text{ で最小値 } \boldsymbol{-6a + 12} \end{cases}$$

【注意】 下の問題の (1) の結果と合わせると，最大値と最小値は次のようにまとめることができる．

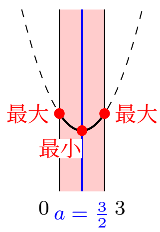
(i) $a < 0$



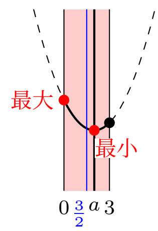
(ii) $0 \leqq a < \frac{3}{2}$



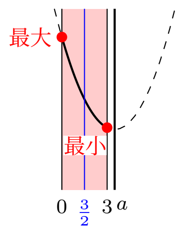
(iii) $a = \frac{3}{2}$



(iv) $\frac{3}{2} < a \leqq 3$



(v) $3 < a$



問題 I3.2.5 ★★★　解答 p.293

(1) 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3\ (0 \leqq x \leqq 3)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5\ (1 \leqq x \leqq 4)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

例題 I3.2.6　定義域が変化するときの最大・最小　★★★

関数 $f(x)=x^2-2x+3\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．

解説動画

数学 I
3.2

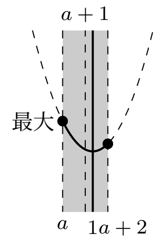
考え方 定義域が変化するが，定義域の幅は常に 2 で一定である．定義域の中央と軸に注目して，場合分けをする．定義域の中央は，$\frac{a+(a+2)}{2}=a+1$ であり，これと軸 $x=1$ が一致するとき，すなわち，$a+1=1$ より $a=0$ で定義域の両端と軸までの距離が等しくなる．よって，$a=0$ を境に場合分けをすればよい．

解答

$$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

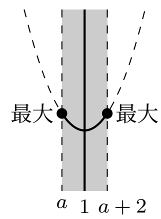
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=1$

(i) $a+1<1$，すなわち，$a<0$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=a$ で最大となり，最大値 $f(a)=a^2-2a+3$

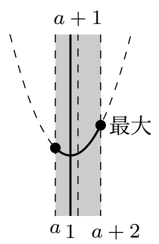


◀ 定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ の中央である $x=a+1$ と軸の直線 $x=1$ が一致するときを境にして，場合分けをする．ここでは，$a+1=1$，すなわち，$a=0$ を境に場合分けをする．また，(i) は $x=a$ の方が軸から遠いので，$x=a$ で最大となる．

(ii) $a+1=1$，すなわち，$a=0$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=0,\ 2$ で最大となり，最大値 $f(0)=f(2)=3$



(iii) $1<a+1$，すなわち，$a>0$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=a+2$ で最大となり，最大値 $f(a+2)=a^2+2a+3$



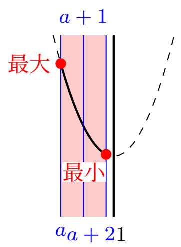
◀ $x=a+2$ の方が軸から遠いので，$x=a+2$ で最大となる．

よって，(i)〜(iii) より，

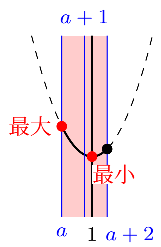
$$\begin{cases} \boldsymbol{a<0\ \text{のとき，}\quad x=a\ \text{で最大値}\ a^2-2a+3} \\ \boldsymbol{a=0\ \text{のとき，}\quad x=0,\ 2\ \text{で最大値}\ 3} \\ \boldsymbol{a>0\ \text{のとき，}\quad x=a+2\ \text{で最大値}\ a^2+2a+3} \end{cases}$$

【注意】 下の問題の (1) の結果と合わせると，最大値と最小値は次のようにまとめることができる．

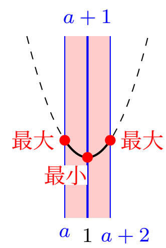
(i) $a<-1$



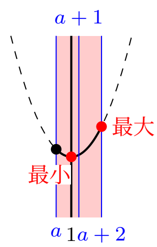
(ii) $-1 \leqq a<0$



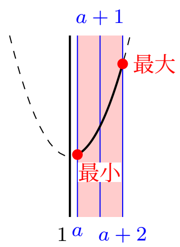
(iii) $a=0$



(iv) $0<a \leqq 1$



(v) $1<a$



問題 I3.2.6 ★★★　解答 p.294

▶ 節末 I3.2.2

(1) 関数 $f(x)=x^2-2x+3\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．
(2) 関数 $f(x)=x^2-4x+5\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．

例題 I3.2.7　最小値の最大値　★★★

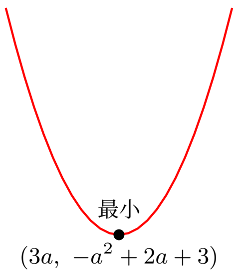
x の 2 次関数 $y = x^2 - 6ax + 8a^2 + 2a + 3$ の最小値を m とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．
(1) 最小値 m を a を用いて表せ．
(2) a の値が $0 \leqq a \leqq 3$ で変化するとき，m の最大値を求めよ．

解説動画

考え方 (2) (1) で求めた最小値 m を a の関数と見ると，定義域における最大・最小の問題となる．a を変数として，関数 $m = -a^2 + 2a + 3$ の最大値を求める．

解答

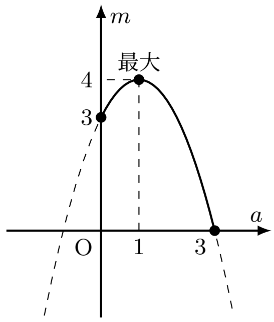
(1)
$$\begin{aligned} y =& x^2 - 6ax + 8a^2 + 2a + 3 \\ =& \left\{(x-3a)^2 - (3a)^2\right\} + 8a^2 + 2a + 3 \\ =& (x-3a)^2 - a^2 + 2a + 3 \end{aligned}$$
グラフは右の図のようになる．
よって，y は $x = 3a$ で最小値 $\boldsymbol{m = -a^2 + 2a + 3}$



◀ 平方完成する．

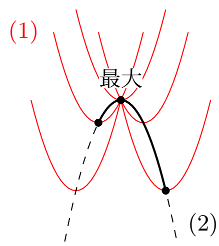
◀ m は a の 2 次式で表される．

(2)
$$\begin{aligned} m &= -a^2 + 2a + 3 \\ &= -\left(a^2 - 2a\right) + 3 \\ &= -\left\{(a-1)^2 - 1^2\right\} + 3 \\ &= -(a-1)^2 + 4 \end{aligned}$$
グラフは右の図のようになる．
よって，$0 \leqq a \leqq 3$ の範囲において，a の関数 m は，$a = 1$ で**最大値 4**



◀ x 軸，y 軸ではなく，a 軸，m 軸であることに注意すること．

【注意】「最小値の最大値」と聞いても，具体的にイメージすることができないかもしれない．$y = x^2 - 6ax + 8a^2 + 2a + 3$ のグラフは，a の値を 1 つ定めると，その配置がただ 1 つに定まる．頂点の y 座標が最小値 m であり，m は $m = -a^2 + 2a + 3$ と表されるから，最小値は a の関数であり，グラフは上に凸の放物線となる．(2) は $0 \leqq a \leqq 3$ におけるそのグラフの最大値を求めている．イメージとしては，右の図のようになる．



問題 I3.2.7 ★★★　解答 p.295

x の 2 次関数 $y = -x^2 + 4ax - 5a^2 + 3a + 6$ の最大値を M とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．
(1) 最大値 M を a を用いて表せ．
(2) a の値が $-2 \leqq a \leqq 3$ で変化するとき，M の最小値を求めよ．

例題 I3.2.8 おき換えを用いた最大・最小 ★★★

関数 $y=\left(x^2-2x\right)^2+4\left(x^2-2x\right)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t=x^2-2x$ とおいて，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) y を t の式で表し，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

解説動画

数学 I 3.2

考え方 4次関数の問題であるが，共通する部分をおき換えることによって，2次関数の最大・最小の問題と見ることができる．$x^2-2x=t$ とおくと，y は t の2次関数として考えることができる．なお，文字でおき換えた場合は，その文字の変域を考える必要があるので注意すること．

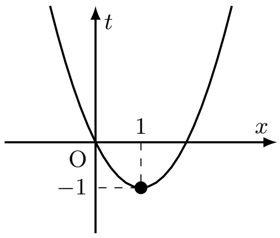
解答

(1) $t=x^2-2x$

$\quad=(x-1)^2-1$

グラフは右の図のようになる．

よって，t のとりうる値の範囲は，$\boldsymbol{t \geqq -1}$



◀ t は x についての2次関数となるので，x 軸，y 軸ではなく，x 軸，t 軸であることに注意すること．

(2) $t=x^2-2x$ とおくと，

$$y=t^2+4t=(t+2)^2-4\cdots\text{(i)}$$

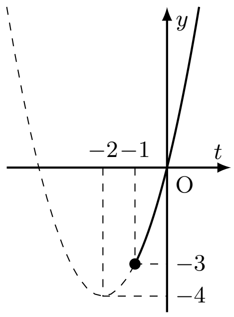
(1) より，$t \geqq -1$ であるから，この範囲で，(i) のグラフをかくと，右の図のようになる．

したがって，$t=-1$ のとき，y は最小値 -3 をとる．

また，$t=-1$ のとき，$x^2-2x=-1$

ゆえに，$x=1$

よって，$\boldsymbol{x=1}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-3}$



◀ (1) で求めた t の値の範囲を忘れないようにする．また，x 軸ではなく，t 軸であることに注意すること．

◀ $x^2-2x=-1$ より，$(x-1)^2=0$ となるので，これを解いて，$x=1$

One Point

共通する部分をおき換えて，2次関数と見て考える．このとき，おき換えた文字の変域に注意すること．

問題 I3.2.8 ★★★ 解答 p.295

▶ 節末 I3.2.3

関数 $y=\left(x^2-4x\right)^2+6\left(x^2-4x\right)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t=x^2-4x$ とおいて，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) y を t の式で表し，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

例題 I3.2.9 条件付きの 2 変数関数の最大・最小 1 ★★★

$2x+y=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ．
(1) x^2+y^2 の最小値を求めよ．
(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ．

解説動画

考え方 変数が少ない方が扱いやすいため，文字の消去を考える．
(1) 条件から $2x+y=1$ は，$y=1-2x$ と変形できるため，x^2+y^2 に代入すると，$x^2+y^2=x^2+(1-2x)^2$ となる．これは，文字が消去されて 1 変数の式であるから，1 変数の 2 次関数の最小値を求める問題とすることができる．

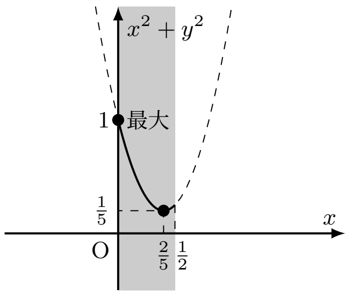
(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の条件より，(1) の 2 次関数における文字の値の範囲を求めてから，最大値を考える．

解答

(1) $2x+y=1$ より，$y=1-2x \cdots$ (i)
したがって，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(1-2x)^2 \\ &= 5x^2-4x+1 \\ &= 5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5} \cdots \text{(ii)} \end{aligned}$$

◀ y を代入して，文字を消去する．



ゆえに，$x=\frac{2}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$
このとき，(i) より，$y=1-2\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$
よって，$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ のとき，**最小値 $\mathbf{\frac{1}{5}}$**
(2) $y \geqq 0$ であるから，(i) より，$1-2x \geqq 0$
$x \geqq 0$ との共通範囲は，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \cdots$ (iii)

◀ $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ から，x の値の範囲を求める．

(ii) より，(iii) において，x^2+y^2 は $x=0$ で最大値 1
このとき，(i) より，$y=1-2\cdot 0=1$
よって，$x=0$，$y=1$ のとき，**最大値 1**

One Point

変数を少なくするために，文字の消去を考える．

問題 I3.2.9 ★★★ 解答 p.296

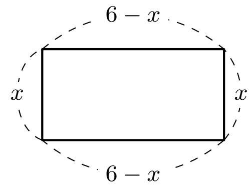
$x+3y=6$ を満たすとき，次の問いに答えよ．
(1) x^2+y^2 の最小値を求めよ．
(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ．

例題 I3.2.10 2 次関数の最大・最小の文章題 ★★

周囲の長さが 12 である長方形において，次の問いに答えよ．
(1) この長方形の面積の最大値を求めよ．
(2) この長方形の対角線の長さの最小値を求めよ．

解説動画

考え方 長方形の縦の長さと横の長さを x を用いて表すと，長方形の面積は x の関数となる．縦の長さを x とすると，横の長さは $\frac{12-2x}{2}=6-x$ となる．なお，最大値を求めるときは，x の値の範囲に注意すること．
(2) 対角線の長さ l は，根号を含む $l=\sqrt{f(x)}$ の形となる．このようなときは，$l^2=f(x)$ の最小値を求めて，l の最小値を考える．



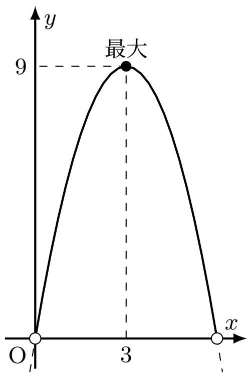
$x+(6-x)+x+(6-x)=12$

解答

(1) 長方形の縦の長さを x とすると，
横の長さは $\frac{12-2x}{2}=6-x$ である．
また，$x>0$，$6-x>0$ であるから，$0<x<6$
この長方形の面積を y とすると，

$$y=x(6-x)=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$$

$0<x<6$ より，y は $x=3$ で最大値 9 をとる．
よって，長方形の面積の**最大値は， 9**



◀ 辺の長さが正であることから，x の値の範囲を求める．

(2) 長方形の対角線の長さを l とすると，

$$l^2=x^2+(6-x)^2=2x^2-12x+36=2(x-3)^2+18$$

◀ 三平方の定理を用いる．

$0<x<6$ において，l^2 は $x=3$ で最小値 18 をとる．
ここで，$l>0$ であるから，l^2 が最小となるとき，l も最小となる．
よって，対角線の**最小値は，**$\sqrt{18}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

◀ $a>0$，$b>0$ のとき，
$$a<b \iff a^2<b^2$$
を用いている．詳しくは，数学 II で学習する．

One Point

文字の値の範囲に注意すること．

問題 I3.2.10 ★★ 解答 p.296

直角を挟む 2 辺の長さの和が 10 である直角三角形において，斜辺の長さが最小となる直角三角形を求め，その斜辺の長さを求めよ．

例題 I3.2.11　2 次関数の決定 1　★★

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ.
(1) 頂点が点 $(-3,\ 2)$ で，点 $(0,\ 5)$ を通る.
(2) 軸が直線 $x=-1$ で，2 点 $(0,\ -6)$, $(2,\ 2)$ を通る.

解説動画

考え方 頂点 $(p,\ q)$ や軸 $x=p$ に関する条件が与えられたときは，標準形 $y=a(x-p)^2+q$ を用いて考えるとよい（計算が楽になることが見込まれる）.

解答

(1) 頂点が点 $(-3,\ 2)$ であるから，求める 2 次関数は,

$$y=a(x+3)^2+2$$

と表される.

◀ 頂点が与えられているから，標準形を用いる.

この関数のグラフが点 $(0,\ 5)$ を通るから,

$$5=a(0+3)^2+2$$

◀ $y=a(x+3)^2+2$ に，$x=0$, $y=5$ を代入する.

したがって，$a=\frac{1}{3}$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}(x+3)^2+2}$

◀ $y=\frac{1}{3}x^2+2x+5$ でもよい.

(2) 軸が直線 $x=-1$ であるから，求める 2 次関数は,

$$y=a(x+1)^2+q$$

と表される.

◀ 軸が与えられているから，標準形を用いる.

この関数のグラフが 2 点 $(0,\ -6)$, $(2,\ 2)$ を通るから,

$$-6=a(0+1)^2+q, \quad 2=a(2+1)^2+q$$

◀ $x=0$, $y=-6$ と $x=2$, $y=2$ を，それぞれ $y=a(x+1)^2+q$ に代入する.

したがって，$a+q=-6$, $9a+q=2$
これを解いて，$a=1$, $q=-7$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=(x+1)^2-7}$

◀ 連立方程式を解く.
◀ $y=x^2+2x-6$ でもよい.

One Point

頂点 $(p,\ q)$ や軸 $x=p$ が与えられたときは，標準形 $y=a(x-p)^2+q$ を用いる.

問題 I3.2.11 ★★　解答 p.297

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ.
(1) 頂点が点 $(-2,\ 3)$ で，点 $(1,\ 6)$ を通る.
(2) 軸が直線 $x=2$ で，2 点 $(0,\ -4)$, $(3,\ 5)$ を通る.

例題 I3.2.12 2 次関数の決定 2 ★★

次の 3 点を通るような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(1) $(-1,\ 8)$，$(2,\ 8)$，$(-3,\ -12)$　　(2) $(2,\ 0)$，$(-4,\ 0)$，$(1,\ -10)$

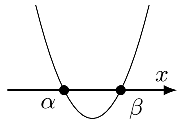
解説動画

数学 I
3.2

考え方

(1) 3 点が与えられたとき は，一般形 $y = ax^2 + bx + c$ を用いて考えるとよい．通る 3 点の座標を代入することで，a，b，c の連立方程式を作ることができる．

(2) x 軸との交点が 2 つ与えられたとき は，$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ を用いて考えるとよい．一般に，2 次関数のグラフが x 軸と 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わるとき，$f(\alpha) = 0$，$f(\beta) = 0$ となることから，$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と表すことができる．



解答

(1) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする．

この関数のグラフが 3 点 $(-1,\ 8)$，$(2,\ 8)$，$(-3,\ -12)$ を通るから，

$$\begin{cases} 8 = a - b + c \cdots (\mathrm{i}) \\ 8 = 4a + 2b + c \cdots (\mathrm{ii}) \\ -12 = 9a - 3b + c \cdots (\mathrm{iii}) \end{cases}$$

◀ $y = ax^2 + bx + c$ に (i) は $x = -1$，$y = 8$，(ii) は $x = 2$，$y = 8$，(iii) は $x = -3$，$y = -12$ をそれぞれ代入している．

(ii) − (i) より，$0 = 3a + 3b$，すなわち，$a + b = 0 \cdots (\mathrm{iv})$

(ii) − (iii) より，$20 = -5a + 5b$，すなわち，$-a + b = 4 \cdots (\mathrm{v})$

◀ c を消去して，a，b についての連立方程式 (iv)，(v) を解く．

(iv)，(v) を解いて，$a = -2$，$b = 2$

したがって，これを (i) に代入すると，$c = 12$

よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y = -2x^2 + 2x + 12}$

(2) x 軸との共有点の座標が $(2,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ であるから，求める 2 次関数は，

$$y = a(x-2)(x+4)$$

と表される．

◀ $y = ax^2 + bx + c$ としてもよいが，連立方程式を解く必要があり，手間が掛かる．

この関数のグラフが点 $(1,\ -10)$ を通るから，

$$-10 = a(1-2)(1+4)$$

◀ $y = (x-2)(x+4)$ とするのは誤りである．a を忘れないように注意すること．

したがって，$a = 2$

よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y = 2(x-2)(x+4)}$

◀ $y = 2x^2 + 4x - 16$ でもよい．

One Point

3 点が与えられたときは，$y = ax^2 + bx + c$ を用いる．

x 軸との共有点が与えられたときは，$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ を用いる．

問題 I3.2.12 ★★ 解答 p.298

▶ 節末 I3.2.6

次の 3 点を通るような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(1) $(1,\ 7)$，$(3,\ 7)$，$(-2,\ -8)$　　(2) $(-1,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(2,\ -12)$

One math

例題 I3.2.13 2 次関数の決定 3 ★★★

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が x 軸上にあり，2 点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 27)$ を通る．

(2) 放物線 $y = 2x^2$ を平行移動したもので，点 $(1,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y = -x + 1$ 上にある．

解説動画

$\boxed{\text{考え方}}$ 頂点に関する条件が与えられているので，標準形 $y = a(x-p)^2 + q$ を用いて考える．

(1) 頂点が x 軸上にあるから，$q = 0$ となる．

(2) 「頂点が直線 $y = -x + 1$ 上にある」と頂点に関する条件が与えられている．放物線 $y = 2x^2$ を平行移動しているので，求める 2 次関数の x^2 の係数も 2 であることに注意すること．

解答

(1) 頂点が x 軸上にあるから，求める 2 次関数は，$y = a(x-p)^2$ と表される．

このグラフが 2 点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 27)$ を通るから，

$$ap^2 = 3 \cdots \text{(i)}, \quad a(6-p)^2 = 27 \cdots \text{(ii)}$$

(i)×9 と (ii) より，$9ap^2 = a(6-p)^2$

$a \neq 0$ であるから，$9p^2 = (6-p)^2$

したがって，$8p^2 + 12p - 36 = 0$

ゆえに，$(p+3)(2p-3) = 0$

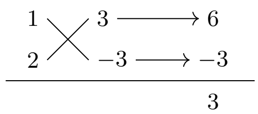
これを解いて，$p = -3,\ \frac{3}{2}$

(i) より，$p = -3$ のとき $a = \frac{1}{3}$，$p = \frac{3}{2}$ のとき $a = \frac{4}{3}$

よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}(x+3)^2,\ y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$

◀ 求める 2 次関数は $y = a(x-p)^2 + q$ と表される．頂点が x 軸上にあることから，$q = 0$ とする．

◀ 両辺を 4 で割ると，$2p^2 + 3p - 9 = 0$ となることから，たすき掛けを用いる．



(2) 放物線 $y = 2x^2$ を平行移動したもので，頂点が直線 $y = -x + 1$ 上にあるから，頂点の座標を $(p,\ -p+1)$ とすると，求める 2 次関数は，$y = 2(x-p)^2 - p + 1 \cdots$ (i) と表される．

この関数のグラフが点 $(1,\ 3)$ を通るから，$2(1-p)^2 - p + 1 = 3$

したがって，$2(1 - 2p + p^2) - p + 1 = 3$

ゆえに，$p(2p-5) = 0$

これを解いて，$p = 0,\ p = \frac{5}{2}$

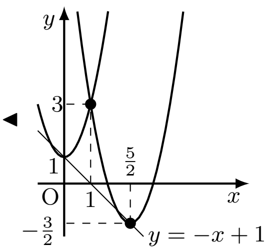
(i) より，$p = 0$ のとき，$y = 2(x-0)^2 - 0 + 1 = 2x^2 + 1$

また，$p = \frac{5}{2}$ のとき，$y = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} + 1 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$

よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y = 2x^2 + 1,\ y = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}}$

◀ 頂点 $(p,\ q)$ が直線 $y = -x + 1$ 上にある．よって，$q = -p + 1$ から，頂点の座標を $(p,\ -p+1)$ とすることができる．

◀



問題 I3.2.13 ★★★ 解答 p.299

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が x 軸上にあり，2 点 $(1,\ 4)$，$(-3,\ 36)$ を通る．

(2) 放物線 $y = 3x^2$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 9)$ を通り，頂点が直線 $y = 2x - 3$ 上にある．

節末問題 3.2 2 次関数の最大・最小と決定

節末 I3.2.1 ★★ 解答（節末）p.300

▶ 例題 I3.2.3

関数 $y=x^2-6x+k+3$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値の和が 0 であるとき，定数 k の値とそのときの最大値，最小値を求めよ．

数学 I 3.2

節末 I3.2.2 ★★★★ 解答（節末）p.301

▶ 例題 I3.2.6

2 次関数 $y=-2x^2+8x$ について，次の問いに答えよ．

(1) この関数のグラフの頂点，x 軸の共有点，y 軸の共有点の座標を求め，グラフをかけ．

(2) $a \leqq x \leqq a+1$ における関数の最大値が 6 であるような定数 a の値を求めよ．

節末 I3.2.3 ★★ 解答（節末）p.302

▶ 例題 I3.2.8

a を定数として，関数 $y=\left(x^2-4x\right)^2+2a\left(x^2-4x\right)+a+2$ の最小値を m とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) m を a の式で表せ．

(2) m を最大にする a の値を求めよ．

節末 I3.2.4 ★★★ 解答（節末）p.303

▶ 例題 I3.2.11 ▶ 例題 I3.2.12

放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，頂点の座標が $(3,\ 7)$ で，点 $(6,\ -5)$ を通る．このとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

節末 I3.2.5 ★★★ 解答（節末）p.303

$a>0,\ b>0,\ a+b=1$ のとき，a^3+b^3 の最小値を求めよ．

節末 I3.2.6 ★★★ 解答（節末）p.304

▶ 例題 I3.2.12

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が，$f(-2)=f(4)=0$ を満たし，その最大値が 9 であるとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

3.3　2 次方程式と 2 次不等式

3.3.1　2 次方程式の解法

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0 \cdots$ (i) の解は，左辺を因数分解して求めるか，解の公式を用いて求める．

(1) 2 次方程式 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の解は，$\boldsymbol{x=\alpha,\ \beta}$

(2) 2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

とくに，$b=2b'$ のとき，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，

$$\boldsymbol{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$$

◀ 俗に言う，「解の公式」である．導出例は次のようになる．

(i) において，左辺を平方完成すると，$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$

両辺を a で割り，式変形すると，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

これより，$b^2-4ac \geqq 0$ のときは，$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

すなわち，$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

なお，両辺に $4a$ を掛けるという技巧的な導出もあるが，2 次方程式だけにしか通用しない．平方完成による手法を押さえておくとよい．

3.3.2　2 次方程式の解の個数

b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式（discriminant）**という．

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，

$$b^2-4ac>0\ (D>0) \iff \text{異なる 2 つの実数解をもつ．}$$
$$b^2-4ac=0\ (D=0) \iff \text{1 つの実数解 (重解) をもつ．}$$
$$b^2-4ac<0\ (D<0) \iff \text{実数解をもたない．}$$

とくに，$b=2b'$ であるとき，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ の符号について，

$$b'^2-ac>0\ (D>0) \iff \text{異なる 2 つの実数解をもつ．}$$
$$b'^2-ac=0\ (D=0) \iff \text{1 つの実数解 (重解) をもつ．}$$
$$b'^2-ac<0\ (D<0) \iff \text{実数解をもたない．}$$

◀ D は判別式（discriminant）の頭文字である．

◀ 重解は，$x=-\frac{b}{2a}$

◀ $ax^2+2b'x+c=0$

◀ $D \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ．

3.3.3　2 次関数のグラフと x 軸の共有点

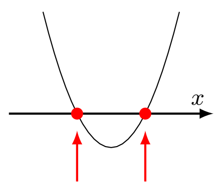
(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ において，$y=0$ とおいたものと考えることができる．2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である．

(2) (1) より，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と，$y=ax^2+bx+c$ のグラフの x 軸の共有点の個数は一致する．よって，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，次のようになる．

$$D>0 \iff x \text{ 軸と異なる 2 点で交わる．}$$
$$D=0 \iff x \text{ 軸に接する．}$$
$$D<0 \iff x \text{ 軸と共有点をもたない．}$$

◀ $a \neq 0$

◀ 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標 が $ax^2+bx+c=0$ の 解（実数解）となる．



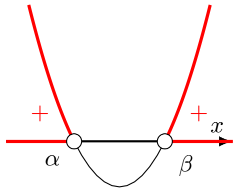
$ax^2+bx+c=0$ の解

3.3.4 2 次関数のグラフと 2 次不等式

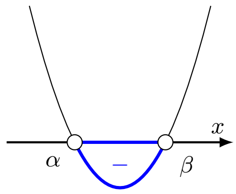
$a \neq 0$ のとき，次の形で表される不等式を，x についての **2 次不等式**という．

$$ax^2+bx+c>0,\quad ax^2+bx+c<0,$$
$$ax^2+bx+c \geqq 0,\quad ax^2+bx+c \leqq 0$$

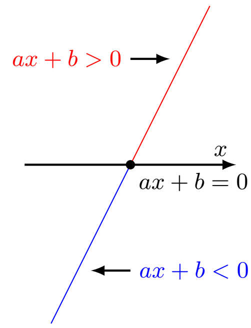
2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸より上側にある（$y>0$ となる）部分の x の値の範囲が解となる．



2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸より下側にある（$y<0$ となる）部分の x の値の範囲が解となる．

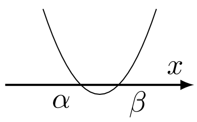
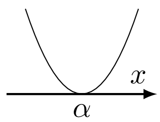
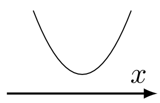


◀ 1 次関数 $y=ax+b$ の場合は，次のようになる．



3.3.5 2 次関数と方程式・不等式

2 次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c\,(a>0)$ のグラフと x 軸の位置関係は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$，$\alpha<\beta$ とすると，次のようになる．

判別式 D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=f(x)$ のグラフ			
グラフと x 軸	2 点で交わる	1 点で接する	共有点なし
$f(x)=0$ の解	2 解 $\alpha,\ \beta$	$x=\alpha$	なし
$f(x)>0$ の解	$x<\alpha,\ \beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$f(x) \geqq 0$ 解	$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$	すべての実数	すべての実数
$f(x)<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	なし	なし
$f(x) \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x=\alpha$	なし

◀ $a<0$ の場合は，両辺に -1 を掛けて（不等号の向きが変わるので注意すること），x^2 の係数を正にしてから，左の表で考えるとよい．

例題 I3.3.1　2 次方程式の解 1　★

次の 2 次方程式を解け．

(1) $5x^2-11x-4=0$　　(2) $3x^2-8x-5=0$

(3) $9x^2+6x+1=0$　　(4) $8x^2-14x+3=0$

解説動画

数学 I 3.3

考え方 2 次方程式を解くには，因数分解するか，解の公式を用いるとよい．なお，因数分解はすべての方程式で上手くできるとは限らないが，解の公式より楽に解けることがある．そこで，先に因数分解を考え，上手くできなければ解の公式を用いることを推奨する．

解答

(1) 解の公式より，

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot5\cdot(-4)}}{2\cdot5}=\frac{11\pm\sqrt{121+80}}{10}=\boldsymbol{\frac{11\pm\sqrt{201}}{10}}$$

◀ $a=5$，$b=-11$，$c=-4$ として，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

に代入する．

(2) 解の公式より，

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-3\cdot(-5)}}{3}=\frac{4\pm\sqrt{16+15}}{3}=\boldsymbol{\frac{4\pm\sqrt{31}}{3}}$$

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(3) 左辺を因数分解すると，$(3x+1)^2=0$

よって，$3x+1=0$ より，$x=\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$

◀ 解の公式を用いてもよい．

【別解】

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-9\cdot1}}{9}=\frac{-3\pm\sqrt{9-9}}{9}=\frac{-3\pm0}{9}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$$

◀ 2 つの解が重なったものと考えて，このような解を重解という．

(4) 左辺を因数分解すると，$(4x-1)(2x-3)=0$

したがって，$4x-1=0$ または $2x-3=0$

よって，$\boldsymbol{x=\frac{1}{4},\ \frac{3}{2}}$

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} 4 & \times & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & & -3 & \longrightarrow & -12 \\ \hline & & & & -14 \end{array}$$

【別解】

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-8\cdot3}}{8}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{8}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{8}=\frac{7\pm5}{8}$$

よって，$x=\boldsymbol{\frac{1}{4},\ \frac{3}{2}}$

解の公式

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0\ \text{の解は，}\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{\text{とくに，}ax^2+2b'x+c=0\ \text{の解は，}\ x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$$

問題 I3.3.1 ★　解答 p.305

次の 2 次方程式を解け．

(1) $4x^2-7x+2=0$　　(2) $x^2-8x-5=0$

(3) $16x^2+8x+1=0$　　(4) $6x^2-11x+3=0$

例題 I3.3.2　2 次方程式の解 2　★★

次の 2 次方程式を解け．

(1) $-0.5x^2+3x-1.5=0$　　(2) $\sqrt{2}x^2-8x+8\sqrt{2}=0$

(3) $(x-2)^2+4(x-2)-12=0$

解説動画

考え方　(1)，(2) は係数に小数や無理数が含まれており，そのまま解の公式を使うと計算に手間が掛かる．そこで，係数（とくに x^2 の係数）は，正の数や有理数といった簡単な形となるように式変形するとよい．

解答

(1) 両辺に -2 を掛けると，$x^2-6x+3=0$

よって，

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot 3}}{1}=\mathbf{3\pm\sqrt{6}}$$

◀ x^2 の係数が正となるように，-2 を掛ける．

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(2) 両辺に $\sqrt{2}$ を掛けると，$2x^2-8\sqrt{2}x+16=0$

したがって，$x^2-4\sqrt{2}x+8=0$

左辺を因数分解すると，$(x-2\sqrt{2})^2=0$

よって，$x=\mathbf{2\sqrt{2}}$

◀ x^2 の係数が有理数となるように，$\sqrt{2}$ を掛ける．

◀ $(2\sqrt{2})^2=8$

【別解】両辺に $\sqrt{2}$ を掛けると，$2x^2-8\sqrt{2}x+16=0$

したがって，$x^2-4\sqrt{2}x+8=0$

よって，

$$x=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{(-2\sqrt{2})^2-1\cdot 8}}{1}=\mathbf{2\sqrt{2}}$$

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(3) $X=x-2$ とおくと，$X^2+4X-12=0$

したがって，$(X+6)(X-2)=0$

ゆえに，$X=-6,\ 2$

すなわち，$x-2=-6,\ 2$

よって，$x=\mathbf{-4,\ 4}$

【別解】 $(x-2)^2+4(x-2)-12=0$ より，$\{(x-2)+6\}\{(x-2)-2\}=0$

したがって，$(x+4)(x-4)=0$

よって，$x=\mathbf{-4,\ 4}$

◀ 共通する部分を 1 つのまとまりと見る．

問題 I3.3.2 ★★　解答 p.306

次の 2 次方程式を解け．

(1) $-0.25x^2+2x-1=0$　　(2) $3\sqrt{3}x^2-12x+12\sqrt{3}=0$

(3) $(x+1)^2-6(x+1)+5=0$

例題 I3.3.3　方程式の解（係数が文字のとき）　★★★

次の方程式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax^2+(a+2)x+2=0$　　　(2) $(a^2-a)x^2=a-1$

解説動画

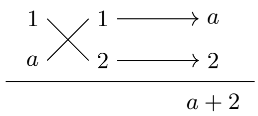
考え方 問題文では単に「方程式」となっていることから，2 次方程式であるとは限らない．最高次の項の係数が 0 のときを考えて，場合分けをして解けばよい．
(1) $a=0$ のとき，$0^2+(0+2)x+2=0$ となり，1 次方程式となる．$a\neq 0$ のとき，そのまま，$ax^2+(a+2)x+2=0$ となり，2 次方程式となる．
(2) (1) と同様に，最高次の項 x^2 の係数が 0 のときを考えて，場合分けをする．なお，$a-1=0$ の可能性があるので，両辺を単に $a-1$ で割ってしまわないように注意すること（場合分けを考える）．

解答

(1)　(i) $a=0$ のとき
方程式は，$2x+2=0$ より，$x=-1$
(ii) $a\neq 0$ のとき
$ax^2+(a+2)x+2=0$ より，$(x+1)(ax+2)=0$
したがって，$x=-1,\ -\frac{2}{a}$

◀ $a=0$ のとき，x^2 の項がなくなるので，x の 1 次方程式になる．

◀ たすき掛けを用いる．



よって，(i)，(ii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=0 \text{ のとき，}} & \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{a\neq 0 \text{ のとき，}} & \boldsymbol{x=-1,\ -\frac{2}{a}} \end{cases}$$

(2)　(i) $a=0$ のとき
方程式は，$0\cdot x^2=0-1$
これを満たす x は存在しないので，解なし
(ii) $a=1$ のとき
方程式は，$0\cdot x^2=0$
これは，x の値に関わらず成り立つ．
したがって，解はすべての実数
(iii) $a\neq 0,\ 1$ のとき
$a^2-a\neq 0$ から，両辺を a^2-a で割ると，$x^2=\frac{1}{a}$
（ア）$a>0$ のとき，$x=\pm\sqrt{\frac{1}{a}}=\pm\frac{\sqrt{a}}{a}$
（イ）$a<0$ のとき，解なし

◀ $a-1=0$ の可能性があり，両辺を単に $a-1$ で割ってしまうと，0 で割ってしまうことになる．そこで，場合分けを考える．

◀ $x^2=\frac{a-1}{a^2-a}=\frac{a-1}{a(a-1)}$
◀ $x^2=\frac{1}{a}$ を解く．

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a\leqq 0 \text{ のとき，}} & \textbf{解なし} \\ \boldsymbol{a=1 \text{ のとき，}} & \textbf{解はすべての実数} \\ \boldsymbol{0<a<1,\ 1<a \text{ のとき，}} & \boldsymbol{x=\pm\frac{\sqrt{a}}{a}} \end{cases}$$

問題 I3.3.3 ★★★　解答 p.307

次の方程式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax^2+(a+3)x+3=0$　　　(2) $(a^2-2a)x^2=a-2$

例題 I3.3.4 2 次方程式の係数決定 ★★

(1) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 3 と -2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

(2) 2 次方程式 $x^2+ax-32=0$ の解の 1 つが $x=a$ のとき，定数 a の値を求めよ．また，そのときの他の解を求めよ．

解説動画

考え方 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が α であるとき，$x=\alpha$ を代入すると，$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ が成り立つ．

解答

(1) $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 3 と -2 であるから，$x=3$ と $x=-2$ をそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} 3^2+a\cdot 3+b=0 \\ (-2)^2+a\cdot(-2)+b=0 \end{cases}$$

すなわち，$\begin{cases} 3a+b=-9\cdots\text{(i)} \\ -2a+b=-4\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

よって，(i)，(ii) を解いて，$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=-6}$

◀ 数学 II で学習する，解と係数の関係を用いても求められる．

【別解】 2 つの解が 3 と -2 であるから，もとの 2 次方程式は，$(x-3)(x+2)=0$

したがって，$x^2-x-6=0$

よって，$x^2+ax+b=0$ と係数を比較すると，$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=-6}$

◀ α，β を解にもつ 2 次方程式は，$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と表される．与えられた方程式の x^2 の係数が 1 であることから，$a=1$ である．

(2) $x=a$ が $x^2+ax-32=0$ の解であるから，$a^2+a\cdot a-32=0$

すなわち，$2a^2=32$ より，$a=\pm 4$

(i) $a=4$ のとき

方程式は，$x^2+4x-32=0$

したがって，$(x-4)(x+8)=0$

ゆえに，$x=4$，-8

したがって，他の解は，$x=-8$

(ii) $a=-4$ のとき

方程式は，$x^2-4x-32=0$

したがって，$(x-8)(x+4)=0$

ゆえに，$x=8$，-4

したがって，他の解は，$x=8$

よって，(i)，(ii) より，

$a=4$ のとき，　他の解は，$x=-8$

$a=-4$ のとき，他の解は，$x=8$

【余談】 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とする．このとき，解と係数の関係 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ が成り立つ．解と係数の関係を用いると，(1) は，$3+(-2)=-a$，$3\cdot(-2)=b$ となり，$a=-1$，$b=-6$ と簡単に a，b の値を求められる．

問題 I3.3.4 ★★ 解答 p.308

(1) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 4 と -5 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

(2) 2 次方程式 $x^2+ax-8=0$ の解の 1 つが $x=a$ のとき，定数 a の値を求めよ．また，そのときの他の解を求めよ．

例題 I3.3.5 実数解の個数と判別式 ★

次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ．

(1) $5x^2-x+2=0$　　(2) $x^2+2x-2=0$

(3) $3x^2-4=0$　　(4) $9x^2-30x+25=0$

解説動画

考え方　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，

$b^2-4ac>0$ $(D>0)$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ．

$b^2-4ac=0$ $(D=0)$ $\Longleftrightarrow$ 1 つの実数解 (重解) をもつ．

$b^2-4ac<0$ $(D<0)$ $\Longleftrightarrow$ 実数解をもたない．

とくに，$b=2b'$ であるとき，すなわち，$ax^2+2b'x+c=0$ のとき，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いると計算が楽になる（別解）．

解答

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-1)^2-4\cdot5\cdot2=-39$$

$D<0$ であるから，実数解の個数は，**0 個**

◀ $ax^2+bx+c=0$ において，判別式を D とすると，$D=b^2-4ac$

(2) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=2^2-4\cdot1\cdot(-2)=12$$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

◀ $ax^2+bx+c=0$ において $b=2b'$（x の係数が 2 の倍数）のとき，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい．

【別解】 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-2)=3$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

◀ $\frac{D}{4}=b'^2-ac$

(3) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=0^2-4\cdot3\cdot(-4)=48$$

◀ $3x^2+0\cdot x-4=0$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

(4) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-30)^2-4\cdot9\cdot25=900-900=0$$

◀ $9x^2-30x+25$ $=(3x-5)^2$

$D=0$ であるから，実数解の個数は，**1 個**

◀ 重解である．

【別解】 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，$\frac{D}{4}=(-15)^2-9\cdot25=0$

$D=0$ であるから，実数解の個数は，**1 個**

One Point

2 次方程式の実数解の個数は，判別式 D の符号を考える．

問題 I3.3.5 ★ 解答 p.309

次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ．

(1) $x^2-4x+1=0$　　(2) $4x^2+2x+3=0$

(3) $2x^2-6=0$　　(4) $16x^2-8x+1=0$

例題 I3.3.6 2 次方程式が実数解をもつ条件 1　★★

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．

(1) x についての 2 次方程式 $x^2-(k-3)x-3k+1=0$ が重解をもつような k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．

(2) x についての 2 次方程式 $x^2+2kx+k^2-3k+6=0$ の実数解の個数を調べよ．

解説動画

考え方 (1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつとき，その重解は，$x=-\frac{b}{2a}$ であることを用いる．

解答

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=\{-(k-3)\}^2-4\cdot1\cdot(-3k+1)=k^2+6k+5=(k+5)(k+1)$$

◀ $D=b^2-4ac$ を考える．x の係数は $-(k-3)$，定数項は $-3k+1$ より，$b=-(k-3)$，$c=-3k+1$

2 次方程式が重解をもつから，$D=0$

したがって，$k=-5,\ -1$

また，重解は，$x=-\frac{-(k-3)}{2\cdot1}=\frac{k-3}{2}$

よって，

$$\boldsymbol{k=-5\ \text{のとき，}\ \text{解は，}x=-4}$$
$$\boldsymbol{k=-1\ \text{のとき，}\ \text{解は，}x=-2}$$

◀ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の重解は，$x=-\frac{b}{2a}$ である．なお，重解は $x^2-(k-3)x-3k+1=0$ に，$k=-5,\ -1$ をそれぞれ代入することでも求めることができる．

(2) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(2k)^2-4\cdot1\cdot(k^2-3k+6)=12k-24$$

◀ $ax^2+bx+c=0$ における $b=2b'$（x の係数が 2 の倍数）のときであるので，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい．

よって，実数解の個数は，k の値によって次のようになる．

$$\boldsymbol{D>0\ \text{，すなわち，}\ k>2\ \text{のとき，}\ 2\ \text{個}}$$
$$\boldsymbol{D=0\ \text{，すなわち，}\ k=2\ \text{のとき，}\ 1\ \text{個}}$$
$$\boldsymbol{D<0\ \text{，すなわち，}\ k<2\ \text{のとき，}\ 0\ \text{個}}$$

2 次方程式の解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，

$D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ．

$D=0 \iff$ 1 つの実数解（重解）をもつ．

$D<0 \iff$ 実数解をもたない．

問題 I3.3.6 ★★　解答 p.310

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．

(1) x についての 2 次方程式 $x^2+2kx+3k+10=0$ が重解をもつような k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．

(2) x についての 2 次方程式 $x^2-2kx+k^2+4k-8=0$ の実数解の個数を調べよ．

例題 I3.3.7 2 次方程式が実数解をもつ条件 2 ★★

x についての 2 つの 2 次方程式 $3x^2+4x+k-3=0$, $x^2-(2k+3)x+k^2-2=0$ がともに実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ.

解説動画

考え方 「2 次方程式が実数解をもつ」とは，2 つの条件を合わせた，

$$\begin{cases} \text{異なる 2 つの実数解をもつ.} & \Longleftrightarrow \quad D>0 \\ \text{1 つの実数解（重解）をもつ.} & \Longleftrightarrow \quad D=0 \end{cases}$$

である．したがって，2 次方程式が実数解をもつ条件は，$D \geqq 0$ と表される.

解答

2 次方程式 $3x^2+4x+(k-3)=0$ の判別式を D_1 とすると，

$$D_1=4^2-4\cdot 3\cdot (k-3)=16-12k+36=52-12k$$

2 次方程式が実数解をもつから，$D_1 \geqq 0$
したがって，$52-12k \geqq 0$
ゆえに，

$$k \leqq \frac{13}{3} \cdots \text{(i)}$$

2 次方程式 $x^2-(2k+3)x+\left(k^2-2\right)=0$ の判別式を D_2 とすると，

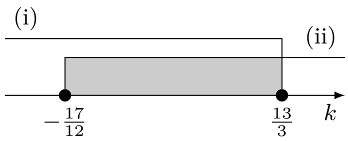
$$D_2=\{-(2k+3)\}^2-4\cdot 1\cdot \left(k^2-2\right)=4k^2+12k+9-4k^2+8=12k+17$$

2 次方程式が実数解をもつから，$D_2 \geqq 0$
したがって，$12k+17 \geqq 0$
ゆえに，

$$k \geqq -\frac{17}{12} \cdots \text{(ii)}$$

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，

$$\boldsymbol{-\frac{17}{12} \leqq k \leqq \frac{13}{3}}$$



◀ 2 つの判別式を考えるので，D_1，D_2 とする.

◀ 実数解をもつ条件は，$D>0$，$D=0$ を合わせた，$D \geqq 0$ である.

One Point

2 次方程式が実数解をもつ条件は，$D \geqq 0$

問題 I3.3.7 ★★ 解答 p.310

▶ 節末 I3.3.1

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2-2x-k+2=0$, $x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$ がともに実数解をもたないような定数 k の値の範囲を求めよ.

例題 I3.3.8 2 次方程式の共通解 ★★★

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2+(k-6)x-4=0$, $x^2-2x-k=0$ がただ 1 つの共通な実数解をもつとき，定数 k の値と，そのときの共通解を求めよ．

解説動画

考え方 ただ 1 つの共通解をもつので，それを α とおくと扱いやすい．それぞれの方程式に代入すると，α, k についての連立方程式と見ることができる．

【注意】「α とおく必要はないのではないか」という考え方もある．x のまま考えても構わないが，共通解の x であるか，共通解ではない x（方程式に含まれる未知数の x）であるかが混乱しやすい．そこで，共通解を α とおくことを推奨する．

解答

共通解を α として，2 つの 2 次方程式に $x=\alpha$ を代入すると，

$$\begin{cases} \alpha^2+(k-6)\alpha-4=0\cdots\text{(i)} \\ \alpha^2-2\alpha-k=0\cdots\text{(ii)} \end{cases}$$

(i)−(ii) より，$(k-4)\alpha+k-4=0$
したがって，$(k-4)(\alpha+1)=0$
ゆえに，$k=4$ または $\alpha=-1$

◀ 連立 1 次方程式のときのように，辺々を引くことで α, k についての連立方程式を解く．なお，(ii) より $k=\alpha^2-2\alpha$ を導いて，(i) に代入してもよいが，3 次方程式となり数学 I の範囲では解くことができない．

（ア）$k=4$ のとき
もとの 2 つの 2 次方程式は，ともに $x^2-2x-4=0$
よって，これを解くと，$x=1\pm\sqrt{5}$
これは，共通解がただ 1 つであることに反する．

◀ 共通な解が 2 つとなる．

（イ）$\alpha=-1$ のとき
(i) に代入すると，$(-1)^2+(k-6)\cdot(-1)-4=0$

◀ (i) か (ii) に代入する．

したがって，$k=3$
このとき，もとの 2 つの 2 次方程式は，$x^2-3x-4=0$ と $x^2-2x-3=0$ となり，解はそれぞれ，$x=-1,\ 4$ と $x=-1,\ 3$
したがって，2 つの方程式はただ 1 つの共通解 $x=-1$ をもつ．
よって，（ア），（イ）より，$\boldsymbol{k=3}$ **，共通解は，** $\boldsymbol{x=-1}$

◀ 解が 2 つとも一致していない（ただ 1 つの共通解である）ことを確認する．

【余談】解答では，2 つの方程式 $f(x)=0$, $g(x)=0$ の共通解を α とし，$\begin{cases} f(\alpha)=0\cdots\text{(i)} \\ g(\alpha)=0\cdots\text{(ii)} \end{cases}$ が成り立ち，(i)−(ii) より，$f(\alpha)-g(\alpha)=0$ を利用して，α の値を求めている．

このことから類推して，「2 つの方程式があり，それらの辺々を引き合わせてできた 1 次方程式の解が，2 つの方程式の共通解なのではないか」と考える人もいるかもしれないが，これは成り立たないことがわかる．例えば，2 つの方程式 $x^2-2x-8=0$, $x^2-3x-18=0$ について，共通解を α とおくと，$\begin{cases} \alpha^2-2\alpha-8=0\cdots\text{(i)} \\ \alpha^2-3\alpha-18=0\cdots\text{(ii)} \end{cases}$ が成り立ち，(i)−(ii) より，$\alpha+10=0$

よって，$\alpha=-10$ が成り立つが，(i)，(ii) を解くと，解はそれぞれ $x=-2,\ 4$ と $x=-3,\ 6$ となり，実際には共通解をもたないことがわかる．

問題 I3.3.8 ★★★ 解答 p.311

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2+(k+3)x+8=0$, $x^2+5x+4k=0$ が共通な実数解をもつとき，定数 k の値と，そのときの共通解を求めよ．

例題 I3.3.9　放物線と x 軸の共有点の座標　★

次の放物線は x 軸と共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y=-x^2+6x-9$　　(2) $y=x^2+2x-8$　　(3) $y=4x^2-5x+5$

解説動画

考え方 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの x 軸の共有点の x 座標は，2 次関数を $y=0$ とおいたときの 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である．

解答

(1) $-x^2+6x-9=0$ とすると，$x^2-6x+9=0$
したがって，$(x-3)^2=0$
ゆえに，$x=3$
よって，x 軸と**共有点を 1 個もち，その座標は，(3，0)**

> ◀ 判別式を D とすると，
> $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=0$
> よって，$D=0$ より，共有点は 1 個（重解）である．また，(3，0) は接点となる．

(2) $x^2+2x-8=0$ とすると，$(x-2)(x+4)=0$
したがって，$x=2,\ -4$
よって，x 軸と**共有点を 2 個もち，その座標は，(2，0)，(−4，0)**

> ◀ 判別式を D とすると，
> $D=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=36$
> よって，$D>0$ より，共有点は 2 個である（$\frac{D}{4}$ を用いてもよい）．

(3) $4x^2-5x+5=0$ とする．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

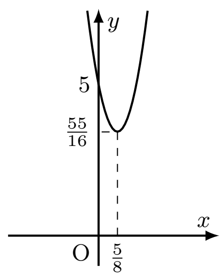
$$D=(-5)^2-4\cdot4\cdot5=-55$$

よって，$D<0$ であるから，グラフと x 軸は**共有点をもたない．**

【別解】

$$y=4x^2-5x+5=4\left\{\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2\right\}+5=4\left(x-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{55}{16}$$

◀



2 次関数のグラフは，下に凸の放物線で，頂点の y 座標は $\frac{55}{16}$ である．
よって，グラフと x 軸は**共有点をもたない．**

放物線と x 軸の共有点の個数

2 次関数を $y=0$ とおいた 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，

$D>0 \iff x$ 軸との共有点は 2 個（軸と異なる 2 点で交わる）
$D=0 \iff x$ 軸との共有点は 1 個（軸に接する）
$D<0 \iff x$ 軸との共有点は 0 個（軸と共有点をもたない）

問題 I3.3.9 ★　解答 p.312

次の放物線は x 軸と共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y=x^2-3x-10$　　(2) $y=-x^2+4x-4$　　(3) $y=3x^2-2x+6$

例題 I3.3.10　2 次関数のグラフと x 軸の位置関係　★★

(1) 2 次関数 $y = x^2 + 2kx - 3k + 4$ のグラフが，x 軸と接するような定数 k の値を求め，その接点の座標を求めよ．
(2) 2 次関数 $y = x^2 + 2kx + k^2 + 4k + 5$ のグラフが，x 軸と共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

解説動画

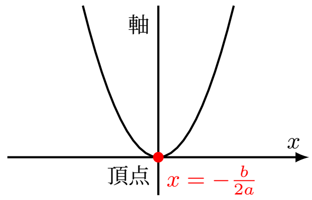
数学 I
3.3

考え方

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると，$D = b^2 - 4ac$（解答では $\frac{D}{4} = 0$ を用いている）であり，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフにおいて，

$$\text{グラフが } x \text{ 軸に接する} \iff D = b^2 - 4ac = 0$$

また，接点の x 座標は，グラフの頂点の x 座標 $x = -\frac{b}{2a}$ を用いて求められる．



(2) 「x 軸と共有点をもつ」とは $D > 0$ と $D = 0$ を合わせたものである．したがって，x 軸と共有点をもつ条件は，$D \geqq 0$ と表される（解答では $\frac{D}{4} \geqq 0$ を用いている）．

解答

(1) $x^2 + 2kx - 3k + 4 = 0$ とする．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = k^2 - 1 \cdot (-3k + 4) = k^2 + 3k - 4 = (k - 1)(k + 4)$$

◀ x 軸は直線 $y = 0$ であることから，$y = 0$ とおいた，$x^2 + 2kx - 3k + 4 = 0$ とする．

グラフが x 軸と接するから，$D = 0$
したがって，$(k + 4)(k - 1) = 0$
ゆえに，$k = -4,\ 1$
グラフの頂点の x 座標は，$x = -\frac{2k}{2 \cdot 1} = -k$ であるから，

$$k = -4 \text{ のとき，} x = 4 \text{ であり，} k = 1 \text{ のとき，} x = -1 \text{ である．}$$

◀ 頂点の座標は $x = -\frac{b}{2a}$ を用いて求められる．なお，k の値を $x^2 + 2kx - 3k + 4 = 0$ に代入して，方程式を解くことで x の値を求めてもよい（k を次のように場合分けする）．
$k = -4$ のとき
$x^2 + 2kx - 3k + 4$
$= x^2 - 8x + 16$
$= (x - 4)^2$
$k = 1$ のとき
$x^2 + 2kx - 3k + 4$
$= x^2 + 2x + 1$
$= (x + 1)^2$

よって，接点の座標は，

$k = -4$ のとき，　接点$(4,\ 0)$
$k = 1$ のとき，　接点$(-1,\ 0)$

(2) 共有点の x 座標は，$x^2 + 2kx + k^2 + 4k + 5 = 0$ の実数解である．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = k^2 - \left(k^2 + 4k + 5\right) = -4k - 5$$

グラフが x 軸と共有点をもつから，$D \geqq 0$
したがって，$-4k - 5 \geqq 0$
よって，$\boldsymbol{k \leqq -\frac{5}{4}}$

問題 I3.3.10 ★★　解答 p.313

(1) 2 次関数 $y = x^2 - 2kx + 4k - 3$ のグラフが，x 軸と接するような定数 k の値を求め，その接点の座標を求めよ．
(2) 2 次関数 $y = x^2 + 2kx + k^2 + 3k + 9$ のグラフが，x 軸と共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

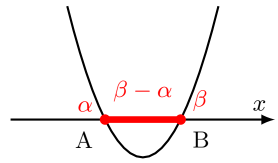
例題 I3.3.11　x 軸から切り取る線分の長さ　★★

(1) 2 次関数 $y=-3x^2-5x+5$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2+2x+2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが 4 であるとき，定数 k の値を求めよ．

解説動画

考え方　「x 軸から切り取る線分の長さ」とは，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸と異なる 2 点 A，B で交わるときの線分 AB の長さのことである．2 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，$\mathrm{AB}=\beta-\alpha$ である．



解答

(1) $-3x^2-5x+5=0$ とすると，$3x^2+5x-5=0$

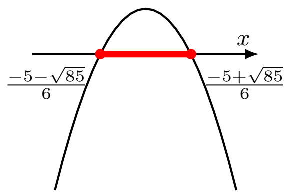
したがって，$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot(-5)}}{2\cdot3}=\frac{-5\pm\sqrt{25+60}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{85}}{6}$

よって，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは，

$$\frac{-5+\sqrt{85}}{6}-\frac{-5-\sqrt{85}}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{85}}{3}}$$

◀ 扱いやすさのために，x^2 の係数を正にする．

◀



(2) $x^2+2x+2k=0\cdots$(i) とする．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot2k=1-2k$$

グラフが x 軸と異なる 2 点で交わるから，$D>0$

したがって，$1-2k>0$ より，$k<\frac{1}{2}\cdots$(ii)

このとき，2 次方程式 (i) を解くと，$x=-1\pm\sqrt{1-2k}$

切り取る線分の長さが 4 であるから，

$$(-1+\sqrt{1-2k})-(-1-\sqrt{1-2k})=4$$

ゆえに，$\sqrt{1-2k}=2$

したがって，$1-2k=4$

これより，$k=-\frac{3}{2}$

これは，(ii) を満たす．

よって，$k=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$

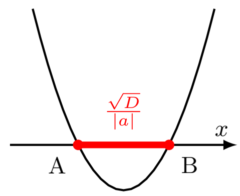
◀ x 軸と異なる 2 点で交わらなければ，線分ができない．

◀ $\sqrt{1-2k}>0$ より，$-1+\sqrt{1-2k}$ の方が $-1-\sqrt{1-2k}$ より大きい．

【余談】 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸と異なる 2 点 A，B で交わるとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であり，線分 AB の長さは，

$$\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

で表されることが知られている．



問題 I3.3.11 ★★　解答 p.314

(1) 2 次関数 $y=-2x^2+3x+4$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

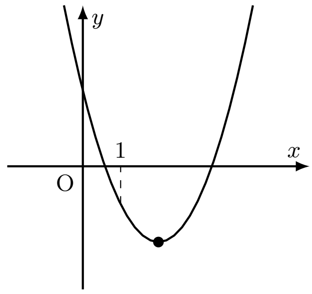
(2) 放物線 $y=-x^2+4x+2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが 6 であるとき，定数 k の値を求めよ．

例題 I3.3.12　2 次関数のグラフと係数の符号　★★

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようなとき，次の値の符号を調べよ．

(1) a　　(2) b　　(3) c

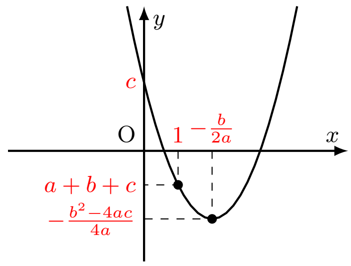
(4) $b^2 - 4ac$　　(5) $a + b + c$



解説動画

考え方

(1) a の符号 $\cdots$ 上に凸（$a < 0$）か，下に凸（$a > 0$）かを調べる．
(2) b の符号 $\cdots$ 軸は直線 $x = -\frac{b}{2a}$ であり，その位置を調べる．このとき，a の符号に注意すること．
(3) c の符号 $\cdots$ グラフと y 軸の共有点を調べる．$x = 0$ のとき，$y = c$ となる．
(4) $b^2 - 4ac$ の符号 $\cdots$ 判別式 $D = b^2 - 4ac$ より，グラフと x 軸の共有点の個数を調べる．なお，頂点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ から符号を調べてもよい．
(5) $a+b+c$ の符号 $\cdots$ $x = 1$ のときの y の値を調べる．$x = 1$ のとき，$y = a+b+c$ となる．



解答

(1) グラフは下に凸であるから，$\boldsymbol{a > 0}$

(2) 軸は直線 $x = -\frac{b}{2a}$
軸が y 軸より右側にあるから，$-\frac{b}{2a} > 0$
よって，(1) より，$a > 0$ であるから，$\boldsymbol{b < 0}$

◀ $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

◀ $-\frac{b}{2a} > 0$ から，$\frac{b}{a} < 0$ より，a と b は異符号である．

(3) y 軸との共有点は点 $(0,\ c)$
よって，グラフは y 軸と $y > 0$ の部分で交わっているから，$\boldsymbol{c > 0}$

◀ y 軸との共有点は，$y = ax^2 + bx + c$ に $x = 0$ を代入すると，

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

よって，点 $(0,\ c)$ である．

(4) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると，$D = b^2 - 4ac$
x 軸と異なる 2 点で交わっているから，$D > 0$
よって，$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$

◀ $D = b^2 - 4ac$

(5) $x = 1$ のとき，$y = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$
よって，グラフより，$x = 1$ のとき，$y < 0$ であるから，$\boldsymbol{a + b + c < 0}$

問題 I3.3.12 ★★　解答 p.315

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようなとき，次の値の符号を調べよ．ただし，$a < 0$ とする．

(1) a　　(2) b　　(3) c

(4) $b^2 - 4ac$　　(5) $a + b + c$

例題 I3.3.13　2 次の連立方程式　★★

次の連立方程式を解け．

(1) $\begin{cases} 4x-y=5 \\ x^2-4x-y=-2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2+y^2+2x-2y=6 \end{cases}$

解説動画

考え方 (1) は，1 次式を利用して 文字の消去 を考える．(2) は，$x^2-4xy+3y^2$ が因数分解できることに注目する．

解答

(1) $\begin{cases} 4x-y=5\cdots\text{(i)} \\ x^2-4x-y=-2\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

◀ y の係数が -1 であるので，y の方が文字を消去しやすい．

(i) より，$y=4x-5$

これを (ii) に代入すると，$x^2-4x-(4x-5)=-2$

整理すると，$x^2-8x+7=0$

したがって，$(x-1)(x-7)=0$

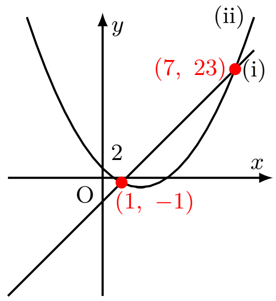
ゆえに，$x=1,\ 7$

$y=4x-5$ に代入すると，$x=1$ のとき，$y=4\cdot1-5=-1$

$x=7$ のとき，$y=4\cdot7-5=23$

よって，$(x,\ y)=\mathbf{(1,\ -1),\ (7,\ 23)}$

◀ なお，$(1,\ -1)$，$(7,\ 23)$ は，与えられた連立方程式 (i), (ii) を整理した $y=4x-5$（直線），$y=x^2-4x+2$（放物線）の交点を表している．



(2) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0\cdots\text{(i)} \\ x^2+y^2+2x-2y=6\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

(i) より，$(x-y)(x-3y)=0$

したがって，$x=y$ または $x=3y$

（ア）$x=y\cdots$(iii) のとき，(iii) を (ii) に代入して整理すると，$2y^2=6$

したがって，$y=\pm\sqrt{3}$

ゆえに，(iii) より，$y=\sqrt{3}$ のとき，$x=\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$ のとき，$x=-\sqrt{3}$

（イ）$x=3y\cdots$(iv) のとき，(iv) を (ii) に代入して整理すると，$10y^2+4y-6=0$

したがって，$(5y-3)(y+1)=0$ となり，$y=\frac{3}{5},\ -1$

ゆえに，(iv) より，$y=\frac{3}{5}$ のとき，$x=\frac{9}{5}$，$y=-1$ のとき，$x=-3$

よって，（ア），（イ）より，求める解は，

$$(x,\ y)=\mathbf{(\sqrt{3},\ \sqrt{3}),\ (-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}),\ \left(\frac{9}{5},\ \frac{3}{5}\right),\ (-3,\ -1)}$$

◀ なお，$y=x$，$y=\frac{x}{3}$ として場合分けをしても同じ結果が得られる．

問題 I3.3.13 ★★　解答 p.316

次の連立方程式を解け．

(1) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x^2-3x-y=-1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+3y-9=0 \\ x^2-y^2+x+y=0 \end{cases}$

例題 I3.3.14　放物線と直線の共有点の座標 1　★

次の放物線と直線は共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y=x^2+2x,\ y=-2x-3$　　(2) $y=-x^2+4,\ y=4x+8$

(3) $y=3x^2-4x+2,\ y=x-1$

解説動画

考え方　放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx+n \end{cases}$$

を解いて，その解 $(x,\ y)$ を導くことで求められる．とくに，y を消去して得られる 2 次方程式が重解をもつとき，放物線と直線は接する．また，y を消去して得られる 2 次方程式が実数解をもたないとき，放物線と直線は共有点をもたない．

解答

(1) $\begin{cases} y=x^2+2x & \cdots(\text{i}) \\ y=-2x-3 & \cdots(\text{ii}) \end{cases}$ とする．

(i) と (ii) から y を消去すると，$x^2+2x=-2x-3$

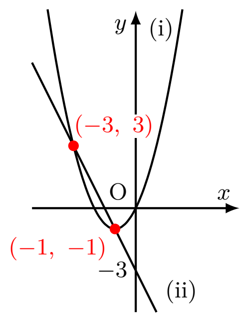
整理すると，$x^2+4x+3=0$

したがって，$(x+1)(x+3)=0$

ゆえに，$x=-1,\ -3$

(ii) より，$x=-1$ のとき，$y=-1$，$x=-3$ のとき，$y=3$

よって，**共有点を 2 個もち，その座標は，$(-1,\ -1)$，$(-3,\ 3)$**



(2) $\begin{cases} y=-x^2+4 & \cdots(\text{i}) \\ y=4x+8 & \cdots(\text{ii}) \end{cases}$ とする．

(i) と (ii) から y を消去すると，$-x^2+4=4x+8$

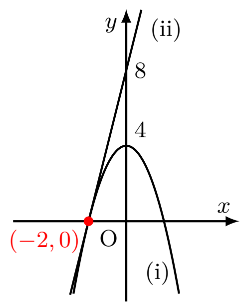
整理すると，$x^2+4x+4=0$

したがって，$(x+2)^2=0$

ゆえに，$x=-2$

(ii) より，$x=-2$ のとき，$y=0$

よって，**共有点を 1 個もち，その座標は，$(-2,\ 0)$**



(3) $\begin{cases} y=3x^2-4x+2 & \cdots(\text{i}) \\ y=x-1 & \cdots(\text{ii}) \end{cases}$ とする．

(i) と (ii) から y を消去すると，$3x^2-4x+2=x-1$

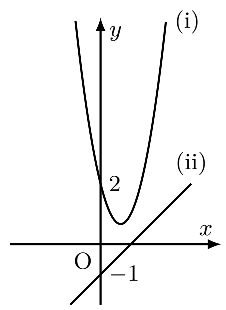
整理すると，$3x^2-5x+3=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot3=-11$$

したがって，$D<0$ であるから，この 2 次方程式は実数解をもたない．

よって，放物線 (i) と直線 (ii) は**共有点をもたない．**



問題 I3.3.14 ★　解答 p.317

次の 2 つの関数のグラフは共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y=x^2-4x+2,\ y=-x$　　(2) $y=-x^2+3x+2,\ y=4x+7$

(3) $y=x^2-6x+10,\ y=-x^2+2x+2$

例題 I3.3.15 放物線と直線の共有点の座標 2 ★★

次の放物線と直線の共有点の個数を調べよ．ただし，k を定数とする．

(1) 放物線 $y=3x^2+6x+4$，直線 $y=-3x+k$

(2) 放物線 $y=x^2-2kx+k^2+5$，直線 $y=2x+2$

解説動画

考え方 y を消去して導いた 2 次方程式の判別式を考えることで，共有点の個数を調べる．

解答

(1) $\begin{cases} y=3x^2+6x+4\cdots\text{(i)} \\ y=-3x+k\cdots\text{(ii)} \end{cases}$ とする．

(i) と (ii) から y を消去すると，$3x^2+6x+4=-3x+k$

整理すると，$3x^2+9x+4-k=0$

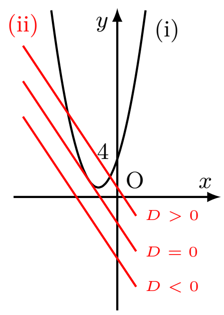
この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=9^2-4\cdot3\cdot(4-k)=81-12(4-k)=12k+33$$

よって，共有点の個数は，k の値によって次のようになる．

$$\mathbf{12k+33>0 \text{ のとき，すなわち，} k>-\frac{11}{4} \text{ のとき，} 2 \text{ 個}}$$
$$\mathbf{12k+33=0 \text{ のとき，すなわち，} k=-\frac{11}{4} \text{ のとき，} 1 \text{ 個}}$$
$$\mathbf{12k+33<0 \text{ のとき，すなわち，} k<-\frac{11}{4} \text{ のとき，} 0 \text{ 個}}$$

◀ k の値によって，直線 (ii) が変化する．



◀ 放物線と直線が接する $D=0$ のときであり，共有点を 1 個もつ（重解）.

(2) $\begin{cases} y=x^2-2kx+k^2+5\cdots\text{(i)} \\ y=2x+2\cdots\text{(ii)} \end{cases}$ とする．

(i) と (ii) から y を消去すると，$x^2-2kx+k^2+5=2x+2$

整理すると，$x^2-2(k+1)x+(k^2+3)=0$

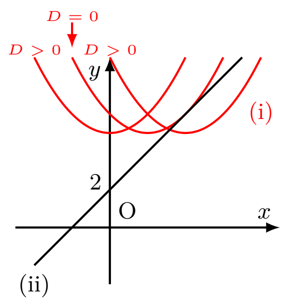
この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\cdot(k^2+3)=2k-2$$

よって，共有点の個数は，k の値によって次のようになる．

$$\mathbf{2k-2>0 \text{ のとき，すなわち，} k>1 \text{ のとき，} 2 \text{ 個}}$$
$$\mathbf{2k-2=0 \text{ のとき，すなわち，} k=1 \text{ のとき，} 1 \text{ 個}}$$
$$\mathbf{2k-2<0 \text{ のとき，すなわち，} k<1 \text{ のとき，} 0 \text{ 個}}$$

◀ k の値によって，放物線 (i) が変化する．



◀ 放物線と直線が接する．

問題 I3.3.15 ★★ 解答 p.318

▶ 章末 I3.2

次の放物線と直線の共有点の個数を調べよ．ただし，k を定数とする．

(1) 放物線 $y=2x^2+4x-3$，直線 $y=-2x+k$

(2) 放物線 $y=-x^2+3x+k+1$，直線 $y=-x+2$

One math

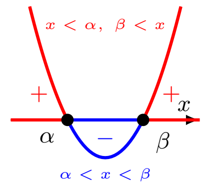
例題 I3.3.16 2 次不等式 1 ★

次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - 6x + 5 > 0$　　(2) $-2x^2 + 5x + 3 \geqq 0$　　(3) $x^2 - 5x + 2 < 0$

解説動画

考え方 2 次関数のグラフをかいて，グラフが x 軸より上側にある x の範囲や，下側にある x の範囲を求める．すると，x 軸の共有点から，不等式の解がわかる．なお，不等式を扱いやすくするために，x^2 の係数は正にするとよい．

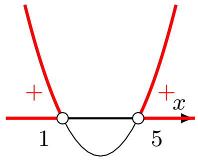


解答

(1) 左辺を因数分解すると，

$$(x-1)(x-5) > 0$$

よって，不等式の解は，$\boldsymbol{x < 1}$ **または** $\boldsymbol{5 < x}$



◀ $y = x^2 - 6x + 5$ は x 軸と $x = 1,\ 5$ で共有点をもつことがわかる．

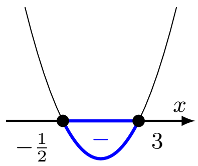
(2) 両辺に -1 を掛けて，

$$2x^2 - 5x - 3 \leqq 0$$

左辺を因数分解すると，

$$(2x+1)(x-3) \leqq 0$$

よって，不等式の解は，$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3}$

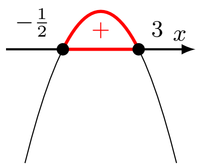


◀ 両辺に -1 を掛けると，不等式が扱いやすい形に変形できる．なお，不等号の向きが変わることに注意すること．

【別解】 左辺を因数分解すると，

$$-(2x+1)(x-3) \geqq 0$$

よって，$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3}$

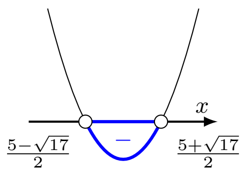


◀ $-2x^2 + 5x + 3 \geqq 0$ のグラフをかいて求めてもよい．

(3) $x^2 - 5x + 2 = 0$ を解くと，$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

よって，不等式の解は，

$$\boldsymbol{\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}}$$



◀ 解の公式を用いる．

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

【余談】 $A,\ B$ について，$AB > 0 \iff \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases}$ が成り立つ（$A,\ B$ は実数）．(1) において，$x-1$ と $x-5$ の符号をまとめると右の表のようになり，$x < 1$ または $5 < x$ で $(x-1)(x-5) > 0$ となることがわかる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

問題 I3.3.16 ★ 解答 p.319

次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - 8x + 12 > 0$　　(2) $x^2 - 3x + 1 > 0$　　(3) $-3x^2 + 5x + 2 \geqq 0$

例題 I3.3.17　2 次不等式 2　★

次の 2 次不等式を解け．

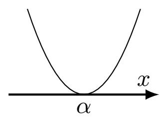
(1) $x^2-8x+16 \leqq 0$　　　(2) $-3x^2+6x-3<0$

(3) $x^2-2x+3>0$　　　(4) $-x^2+2x-4>0$

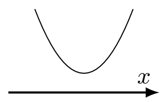
解説動画

考え方 2 次関数のグラフをかいて，不等式の解を求める．グラフと x 軸の共有点があるか否かを判断するには，2 次不等式の不等号を等号におき換えた，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D の符号を考えればよい．

$D=0$ のとき



$D<0$ のとき

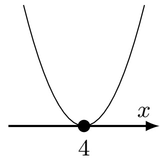


解答

(1) 左辺を因数分解すると，

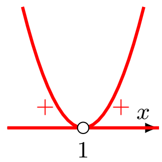
$$(x-4)^2 \leqq 0$$

よって，不等式の解は，$x=\mathbf{4}$



◀ 2 次関数 $y=x^2-8x+16$ は，$x=4$ のとき，$y=0$ であり，それ以外のときは $y>0$ となるから，$y \leqq 0$ となる x の値は $x=4$ のみである．

(2) $-3x^2+6x-3<0$ より，$3x^2-6x+3>0$
因数分解すると，$3(x-1)^2>0$
よって，不等式の解は，**1 以外のすべての実数**

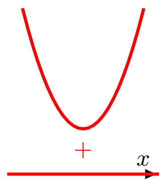


◀ 2 次関数 $y=3x^2-6x+3$ は，$x=1$ のとき，$y=0$ となるから，$x=1$ を除く．なお，$y=-3x^2+6x-3$ を考えてもよい．

(3) 2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 3=-2$$

よって，$D<0$ であるから，不等式の解は，**すべての実数**

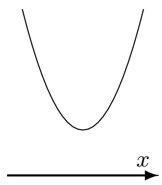


◀ $D<0$ より，グラフは x 軸と共有点をもたない．なお，グラフは常に $y>0$ が成り立っており，不等号の向きを混合しないように注意すること．

(4) $-x^2+2x-4>0$ より，$x^2-2x+4<0$
2 次方程式 $x^2-2x+4=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 4=-3$$

よって，$D<0$ であるから，不等式の **解はない**



◀ グラフが x 軸より下側となる部分がない．

問題 I3.3.17 ★　解答 p.320

次の 2 次不等式を解け．

(1) $-2x^2+4x-2<0$　　　(2) $x^2+4x+5>0$

(3) $x^2-6x+9 \leqq 0$　　　(4) $-x^2+4x-4>0$

例題 I3.3.18　連立 2 次不等式　★★

次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2+3x-10<0 \\ 3x^2+4x+1>0 \end{cases}$　　(2) $x^2-2 \leqq 6x \leqq x^2-x$

解説動画

数学 I
3.3

考え方 それぞれの不等式を解き，それらの共通範囲を求める．共通範囲を求めるには，連立 1 次不等式のときと同じように，数直線を用いて解を図示するとよい．

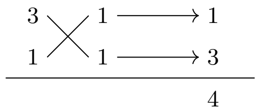
解答

(1) $x^2+3x-10<0$ より，$(x+5)(x-2)<0$

したがって，$-5<x<2 \cdots$(i)

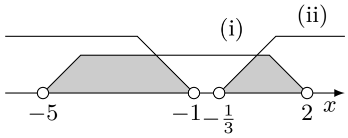
$3x^2+4x+1>0$ より，$(3x+1)(x+1)>0$

◀ たすき掛けを用いる．



したがって，$x<-1,\ -\frac{1}{3}<x \cdots$(ii)

(i)，(ii) の共通範囲は，右の図のようになる．



よって，$\boldsymbol{-5<x<-1,\ -\frac{1}{3}<x<2}$

(2) $x^2-2 \leqq 6x$ より，$x^2-6x-2 \leqq 0$

◀ $A \leqq B \leqq C$ は連立不等式

$$\begin{cases} A \leqq B \\ B \leqq C \end{cases}$$

と同じ意味である．

$x^2-6x-2=0$ を解くと，$x=3\pm\sqrt{11}$

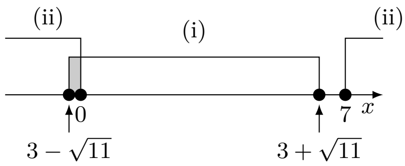
したがって，$3-\sqrt{11} \leqq x \leqq 3+\sqrt{11} \cdots$(i)

$6x \leqq x^2-x$ より，$x^2-7x \geqq 0$

因数分解すると，$x(x-7) \geqq 0$

したがって，$x \leqq 0,\ 7 \leqq x \cdots$(ii)

(i), (ii) の共通範囲は，右の図のようになる．



よって，$\boldsymbol{3-\sqrt{11} \leqq x \leqq 0}$

◀ $3^2<(\sqrt{11})^2<4^2$ より，$3<\sqrt{11}<4$ であることから，$3-\sqrt{11}<0,\ 3+\sqrt{11}<7$ がわかる．

One Point

数直線上の共通範囲が連立不等式の解となる．

問題 I3.3.18 ★★　解答 p.320

▶ 節末 I3.3.3

次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2+2x-3 \leqq 0 \\ 2x^2+3x+1>0 \end{cases}$　　(2) $2x-1 \leqq x^2-1 \leqq 2x+3$

例題 I3.3.19　文字係数の 2 次不等式　★★★

次の 2 次不等式を解け．ただし，a を定数とする．

(1) $x^2-(a+6)x+6a<0$　　　(2) $ax^2-4ax+3a>0$

解説動画

考え方

(1) グラフと x 軸の共有点を求め，共有点の x 座標の大小関係によって場合分けをして，2 次不等式を解く．

(2) a の値によって上に凸か下に凸かが変わるので，$a>0$, $a<0$ で場合分けをする．

解答

(1) $x^2-(a+6)x+6a<0$ より，$(x-a)(x-6)<0\cdots$(i)

$y=x^2-(a+6)x+6a$ とすると，このグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$x=a$, 6

◀ 2 つの解の大小関係を考えて，場合分けをする．（ア）a が 6 より大きいとき，（イ）a が 6 と等しいとき，（ウ）a が 6 より小さいときの 3 つの場合がある．

（ア）$a>6$ のとき

不等式 (i) の解は，$6<x<a$

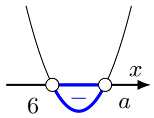
（イ）$a=6$ のとき

不等式 (i) の求める解はない

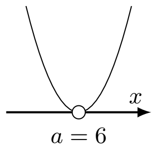
（ウ）$a<6$ のとき

不等式 (i) の解は，$a<x<6$

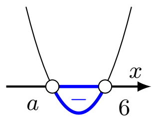
（ア）



（イ）



（ウ）



よって，（ア)〜（ウ）より，求める解は，

$$\begin{cases}\boldsymbol{a>6\ \text{のとき},\ 6<x<a}\\ \boldsymbol{a=6\ \text{のとき},\ \text{解はない}}\\ \boldsymbol{a<6\ \text{のとき},\ a<x<6}\end{cases}$$

(2) $ax^2-4ax+3a>0$ より，$a\left(x^2-4x+3\right)>0$

したがって，$a(x-1)(x-3)>0\cdots$(i)

$y=ax^2-4ax+3a$ とすると，このグラフと x 軸との共有点の x 座標は，$x=1$, 3

与えられた不等式は 2 次不等式であるから，$a\neq0$

◀ 問題文では「2 次不等式」となっていることから，$a\neq0$ である．なお，$a\neq0$ であることから，両辺を a で割っても求めることができるが，$a<0$ のときは不等号の向きが変わるので注意すること．

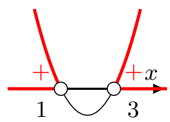
（ア）$a>0$ のとき

不等式 (i) の解は，$x<1$, $3<x$

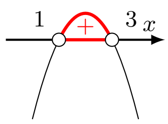
（イ）$a<0$ のとき

不等式 (i) の解は，$1<x<3$

（ア）



（イ）



よって，（ア)，（イ）より，求める解は，

$$\begin{cases}\boldsymbol{a>0\ \text{のとき},\ x<1,\ 3<x}\\ \boldsymbol{a<0\ \text{のとき},\ 1<x<3}\end{cases}$$

問題 I3.3.19 ★★★　解答 p.321

次の 2 次不等式を解け．ただし，a を定数とする．

(1) $x^2-4ax+3a^2>0$　　　(2) $ax^2-5ax+4a<0$

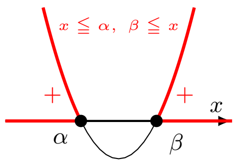
例題 I3.3.20 不等式の係数決定 ★★

2 次不等式 $ax^2+2x+b \geqq 0$ の解が $-2 \leqq x \leqq 3$ となるとき，定数 a，b の値を求めよ．

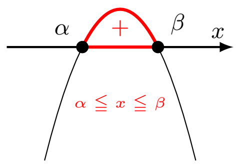
解説動画

$\boxed{\text{考え方}}$ $y=ax^2+2x+b$ として，2 次不等式の解を 2 次関数のグラフで考える．$y=ax^2+2x+b$ のグラフの上側にある部分の解は，$a>0$ のときと，$a<0$ のときで変わるので注意すること（ここでは，$a>0$ のときは不適である）．

$a>0$ のとき



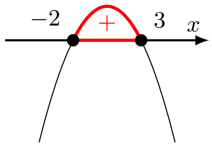
$a<0$ のとき



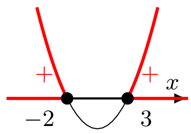
解答

$y=ax^2+2x+b \cdots$(i) とする．

$ax^2+2x+b \geqq 0$ の解が $-2 \leqq x \leqq 3$ となるのは，(i) のグラフが右の図のようになるときであるから，$a<0$



◀ $a>0$ のときは，解は $x \leqq -2$，$3 \leqq x$ の形になるので不適である．



このとき，解が $-2 \leqq x \leqq 3$ であるから，$y=ax^2+2x+b$ のグラフは x 軸と $x=-2$，3 で交わる．
したがって，2 次方程式 $ax^2+2x+b=0$ の解は，$x=-2$，3 となる．
ゆえに，$ax^2+2x+b=0$ に $x=-2$，3 をそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} 4a-4+b=0 \\ 9a+6+b=0 \end{cases}$$

これを解くと，$a=-2$，$b=12$ となり，$a<0$ を満たす．
よって，$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=12}$

【別解】 $-2 \leqq x \leqq 3$ を解にもつ 2 次不等式のうち，x^2 の係数が 1 のものは，$(x+2)(x-3) \leqq 0$ と表される．

◀ $\alpha<\beta$ のとき，$\alpha \leqq x \leqq \beta \Longleftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta) \leqq 0$

したがって，$x^2-x-6 \leqq 0 \cdots$(i)
$ax^2+2x+b \geqq 0 \cdots$(ii) の x の係数が 2 であるから，(i) の両辺に -2 を掛けて，

$$-2x^2+2x+12 \geqq 0$$

◀ 両辺に -2 を掛けたので，(i) の不等号の向きが変わり，(ii) の不等号の向きと一致する．

よって，(ii) と係数を比較すると，$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=12}$

問題 I3.3.20 ★★ 解答 p.322

2 次不等式 $2ax^2+bx+1 \leqq 0$ の解が $x \leqq -\frac{1}{2}$，$3 \leqq x$ となるとき，定数 a，b の値を求めよ．

例題 I3.3.21 2 次方程式が実数解をもつ条件 3 ★★★

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．

(1) x についての 2 次方程式 $3x^2 - kx + k + 2 = 0$ が実数解をもたないような k の値の範囲を求めよ．

(2) x についての方程式 $kx^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ の実数解の個数を求めよ．

解説動画

考え方 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数は，判別式を $D = b^2 - 4ac$ とすると，$D > 0$ のとき 2 個，$D = 0$ のとき 1 個，$D < 0$ のとき 0 個であることを利用する．

解答

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D = (-k)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (k+2) = k^2 - 12k - 24$$

2 次方程式が実数解をもたないから，$D < 0$

したがって，$k^2 - 12k - 24 < 0$

$k^2 - 12k - 24 = 0$ を解くと，$k = 6 \pm 2\sqrt{15}$

よって，$\boldsymbol{6 - 2\sqrt{15} < k < 6 + 2\sqrt{15}}$

◀ k についての 2 次不等式を解く．

(2) $kx^2 - 2(k-3)x + 4 = 0 \cdots$ (i) とする．

（ア）$k = 0$ のとき，(i) は $6x + 4 = 0$

これを解くと，$x = -\frac{2}{3}$ であり，このとき，実数解の個数は 1 個

（イ）$k \neq 0$ のとき，2 次方程式 (i) の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - k \cdot 4 = k^2 - 10k + 9 = (k-1)(k-9)$$

◀ 問題文では「方程式」となっていることから，x^2 の係数が 0 になる $k = 0$ のときを考える．$k = 0$ のときは 1 次方程式となることに注意すること．

$D > 0$ のとき，$(k-1)(k-9) > 0$

これを解くと，$k < 1$，$9 < k$

$k \neq 0$ より，$k < 0$，$0 < k < 1$，$9 < k$ であり，このとき，実数解の個数は 2 個

◀ $k \neq 0$ であることに注意すること．

$D = 0$ のとき，$(k-1)(k-9) = 0$

これを解くと，$k = 1$，9 であり，このとき，実数解の個数は 1 個

$D < 0$ のとき，$(k-1)(k-9) < 0$

これを解くと，$1 < k < 9$ であり，このとき，実数解の個数は 0 個

よって，（ア），（イ）より，求める k の値の範囲は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{k < 0,\ 0 < k < 1,\ 9 < k} \text{ のとき，} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k = 0,\ 1,\ 9} \text{ のとき，} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{1 < k < 9} \text{ のとき，} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

問題 I3.3.21 ★★★ 解答 p.323

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．

(1) x についての 2 次方程式 $4x^2 - kx + k - 3 = 0$ が実数解をもたないような k の値の範囲を求めよ．

(2) x についての方程式 $(k+3)x^2 + 2(k-1)x - 2 = 0$ の実数解の個数を求めよ．

例題 I3.3.22 すべての実数について成り立つ不等式 ★★★

次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ．

(1) すべての実数 x について，2 次不等式 $x^2+kx-k>0$ が成り立つ．

(2) 2 次不等式 $kx^2+(k+4)x+k>0$ が解をもたない．

解説動画

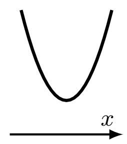
考え方 グラフが上に凸か下に凸かを調べ，求める条件を整理する．

$a \neq 0$ のとき，すべての実数 x について，

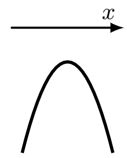
(i) $ax^2+bx+c>0 \iff \begin{cases} x^2 \text{ の係数 } a>0 \\ \text{判別式 } D<0 \end{cases}$

(ii) $ax^2+bx+c<0 \iff \begin{cases} x^2 \text{ の係数 } a<0 \\ \text{判別式 } D<0 \end{cases}$

(i)

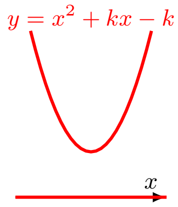


(ii)



解答

(1) $f(x)=x^2+kx-k$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，右の図のようになる．



よって，求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが常に上側にある，すなわち，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないことである．

$f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$$D=k^2-4\cdot1\cdot(-k)=k^2+4k=k(k+4)$$

グラフが x 軸と共有点をもたないから，$D<0$

◀ すべての実数 x について与えられた 2 次不等式が成り立つとき，グラフは下に凸で x 軸と共有点をもたない．よって，$a>0$，$D<0$ である．ここでは，x^2 の係数が正であるので，$a>0$ は成り立っていることから，$D<0$ を考える．

したがって，$k(k+4)<0$

ゆえに，$-4<k<0$

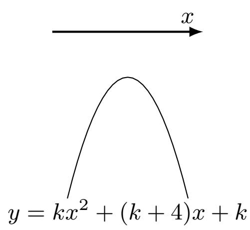
よって，求める k の値の範囲は，$\boldsymbol{-4<k<0}$

(2) $f(x)=kx^2+(k+4)x+k$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは放物線である．

与えられた不等式は 2 次不等式であるから，$k \neq 0$

◀ 問題文では「2 次不等式」となっていることから，$a \neq 0$ である．

求める条件は，$kx^2+(k+4)x+k>0$ が解をもたない，すなわち，すべての x について $kx^2+(k+4)x+k \leqq 0$ が成り立つことである．つまり，グラフは上に凸の放物線であり，x 軸と共有点をもたない，または x 軸と接することから，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める条件は



$k<0 \cdots$ (i) かつ $D \leqq 0$

◀ $k<0$ を忘れないように注意すること．

$$D=(k+4)^2-4k^2=-3k^2+8k+16=-(3k+4)(k-4)$$

したがって，$-(3k+4)(k-4) \leqq 0$

ゆえに，$k \leqq -\frac{4}{3}$，$4 \leqq k \cdots$ (ii)

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，$\boldsymbol{k \leqq -\frac{4}{3}}$

問題 I3.3.22 ★★★ 解答 p.324

次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ．

(1) すべての実数 x について，2 次不等式 $x^2+kx-2k>0$ が成り立つ．

(2) 2 次不等式 $kx^2-2\sqrt{2}x+k+1>0$ が解をもたない．

例題 I3.3.23　ある区間で常に成り立つ不等式　★★★

$0 \leqq x \leqq 8$ のすべての x の値に対して，不等式 $x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

解説動画

数学 I
3.3

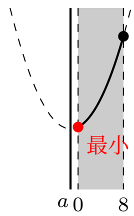
考え方 求める条件は，$0 \leqq x \leqq 8$ における $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ の最小値が正となることである．

解答

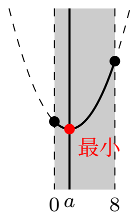
$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$ であるから，放物線 $y = f(x)$ の軸は直線 $x = a$

◀ 軸が区間より左側か，区間内か，右側かで場合分けをする．全部で 3 通りの場合分けとなる．

(i) $a < 0$ のとき
$f(x)$ は $x = 0$ で最小となり，最小値は $f(0) = a + 2$
したがって，$a + 2 > 0$
ゆえに，$a > -2$
これと $a < 0$ より，$-2 < a < 0$

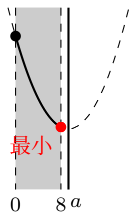


(ii) $0 \leqq a \leqq 8$ のとき
$f(x)$ は $x = a$ で最小となり，最小値は $f(a) = -a^2 + a + 2$
したがって，$-a^2 + a + 2 > 0$
ゆえに，$a^2 - a - 2 < 0$
したがって，$(a+1)(a-2) < 0$ であるから，$-1 < a < 2$
これと $0 \leqq a \leqq 8$ より，$0 \leqq a < 2$



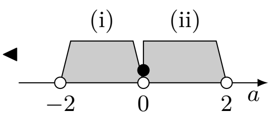
◀ 場合分けの条件である，$0 \leqq a \leqq 8$ を満たすか否かの確認を忘れないように注意すること．

(iii) $8 < a$ のとき
$f(x)$ は $x = 8$ で最小となり，最小値は $f(8) = -15a + 66$
したがって，$-15a + 66 > 0$ であるから，$a < \frac{22}{5}$
これは $8 < a$ を満たさない．



よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{-2 < a < 2}$

◀



$f(x)$ の符号がある区間内で一定である条件

区間内で $f(x) > 0 \Longleftrightarrow$ (区間内の $f(x)$ の最小値) > 0

区間内で $f(x) < 0 \Longleftrightarrow$ (区間内の $f(x)$ の最大値) < 0

問題 I3.3.23 ★★★ 解答 p.325

$-1 \leqq x \leqq 9$ のすべての x の値に対して，不等式 $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

例題 I3.3.24　2 次不等式が整数解をもつ条件　★★★

x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$，$x^2+x-6>0$ を満たす整数 x がちょうど 3 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

解説動画

考え方　a と 1 の大小関係に注目して，a の値によって場合分けをする．数直線を利用して，整数がちょうど 3 個存在するような a の範囲を考えるとよい．なお，a の範囲は等号を含むか否かをよく考えて注意すること．

解答

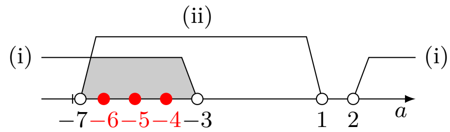
$x^2+x-6>0$ より，$(x+3)(x-2)>0$

したがって，$x<-3,\ 2<x\cdots$(i)

$x^2-(a+1)x+a<0$ より，$(x-1)(x-a)<0\cdots$(ii)

（ア）$a<1$ のとき，(ii) より，$a<x<1$

これと (i) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 3 個となるのは，右の図のようなときである．



したがって，$-7 \leqq a<-6$

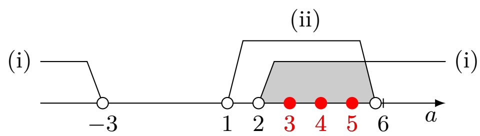
◀ 等号を含むか否かに注意すること．

（イ）$a=1$ のとき，(ii) は解なしで不適である．

◀ $a=1$ のとき，不等式は $(x-1)^2<0$ となり，これを満たす実数 x は存在しない．

（ウ）$a>1$ のとき，(ii) より，$1<x<a$

これと (i) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 3 個となるのは，右の図のようなときである．



したがって，$5<a \leqq 6$

◀ $5<a<6$ としないように注意すること．$a=6$ のとき，$2<x<6$ となり，解はちょうど 3，4，5 の 3 個となるから条件を満たす．

よって，(ア)〜(ウ) より，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{-7 \leqq a<-6,\ 5<a \leqq 6}$

One Point

a の値によって場合分けをして，等号を含むか否かをよく考える．

問題 I3.3.24 ★★★　解答 p.326

x についての不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$，$x^2-x-12>0$ を満たす整数 x がちょうど 3 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

例題 I3.3.25 方程式の解の存在範囲 1 ★★★

2 次方程式 $x^2-2ax+4a=0$ の異なる 2 つの実数解が，ともに 3 より大きくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

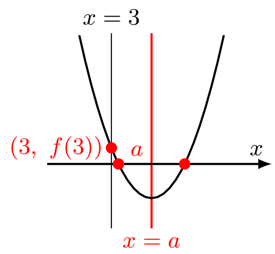
解説動画

考え方 $f(x)=x^2-2ax+4a$ とし，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D としたとき，「異なる 2 つの実数解がともに 3 より大きくなる」を満たす条件を考える．ここではグラフより，(i) $D>0$，(ii) 軸が $x>3$ の範囲にある，(iii) $f(3)>0$ を満たすように，定数 a の範囲を定める．

解答

$y=f(x)=x^2-2ax+4a$ とし，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とする．
$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である．

◀ 軸は $x=-\frac{b}{2a}$



$f(x)=0$ の異なる 2 つの実数解が，ともに 3 より大きくなるのは，$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．
したがって，求める条件は，(i) $D>0$，(ii) 軸が $x>3$ の範囲にある，(iii) $f(3)>0$ である．

◀ 判別式，軸，$f(3)$（端点）に注目する．

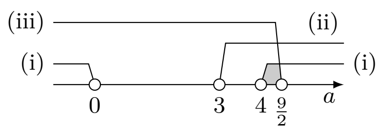
(i) $\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot 4a=a^2-4a=a(a-4)$ であり，$D>0$ から，

$$a(a-4)>0$$

◀ 判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 より小さくなる」という条件を用いても同じ結果が得られる．

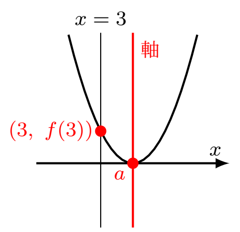
したがって，$a<0,\ 4<a$
(ii) 軸は直線 $x=a$ であるから，$a>3$
(iii) $f(3)=3^2-2a\cdot 3+4a=-2a+9$ であり，$f(3)>0$ より，$a<\frac{9}{2}$
よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{4<a<\frac{9}{2}}$$



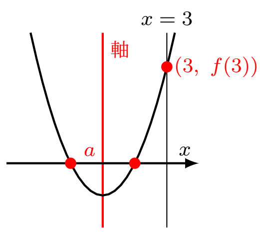
【注意】 (i)〜(iii) は，3 つのうち 1 つでも成り立たないと，次のように与えられた条件を満たさない例が挙げられる可能性があるので注意すること．

(ii)，(iii) が成り立つが，(i) が成り立たない．



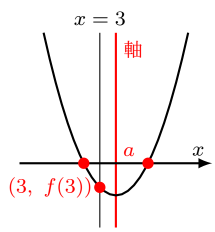
x 軸と共有点をもたない，または x 軸と接する例が挙げられる．

(i)，(iii) が成り立つが，(ii) が成り立たない．



異なる 2 つの実数解が，ともに 3 より小さくなる例が挙げられる．

(i)，(ii) が成り立つが，(iii) が成り立たない．



実数解が，3 より小さくなる，または 3 となる例が挙げられる．

問題 I3.3.25 ★★★ 解答 p.326

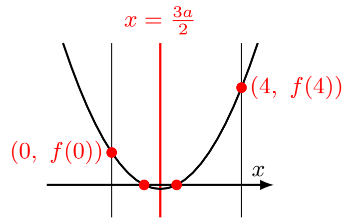
2 次方程式 $x^2-2ax-a+2=0$ の異なる 2 つの実数解が，ともに 2 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

例題 I3.3.26 方程式の解の存在範囲 2 ★★★

2 次方程式 $x^2 - 3ax + 2 = 0$ が，$0 < x < 4$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

解説動画

考え方 $f(x) = x^2 - 3ax + 2$ とし，グラフをかいて考える．
$f(x)$ のグラフが右の図のようになればよいので，(i) $D > 0$，(ii) 軸が $0 < x < 4$ の間にある，(iii) $f(0) > 0$，$f(4) > 0$ を満たすように，定数 a の範囲を定める．



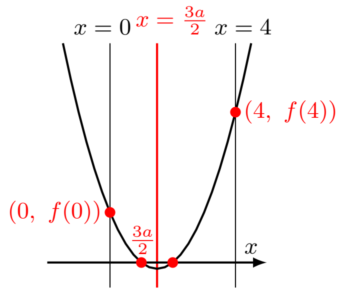
解答

$y = f(x) = x^2 - 3ax + 2$ とし，2 次方程式 $x^2 - 3ax + 2 = 0$ の判別式を D とする．

$y = f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は $x = \frac{3a}{2}$ である．

◀ 軸は $x = -\frac{b}{2a}$

$f(x) = 0$ が $0 < x < 4$ に異なる 2 つの実数解をもつのは，$y = f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．



したがって，求める条件は，(i) $D > 0$，(ii) 軸が $0 < x < 4$ の間にある，(iii) $f(0) > 0$，$f(4) > 0$ である．

◀ 判別式，軸，$f(0)$，$f(4)$（端点）に注目する．

(i) $D = (-3a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9a^2 - 8$ であり，$D > 0$ であるから，

$$9a^2 - 8 > 0$$

◀ 判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 より小さくなる」という条件を用いても同じ結果が得られる．

したがって，$a < -\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\frac{2\sqrt{2}}{3} < a$

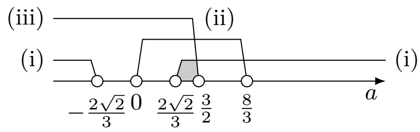
◀ $(a + \frac{2\sqrt{2}}{3})(a - \frac{2\sqrt{2}}{3}) > 0$ より，$a < -\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\frac{2\sqrt{2}}{3} < a$

(ii) 軸は直線 $x = \frac{3a}{2}$ であるから，$0 < \frac{3a}{2} < 4$ より，$0 < a < \frac{8}{3}$

(iii) $f(0) = 0^2 - 3a \cdot 0 + 2 = 2$，$f(4) = 4^2 - 3a \cdot 4 + 2 = -12a + 18$ であり，$f(0) > 0$ かつ $f(4) > 0$ より，$-12a + 18 > 0$

したがって，$a < \frac{3}{2}$

よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，



$$\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3} < a < \frac{3}{2}}$$

One Point

方程式の解の存在範囲は，判別式（頂点），軸，端点に注目する．

問題 I3.3.26 ★★★ 解答 p.327

2 次方程式 $x^2 - 4ax + 3 = 0$ が，$1 < x < 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

One math

例題 I3.3.27 方程式の解の存在範囲 3 ★★

2 次方程式 $x^2 - ax + 2a^2 - 11 = 0$ の異なる 2 つの実数解のうち，1 つは 3 より大きく，他の 1 つは 3 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

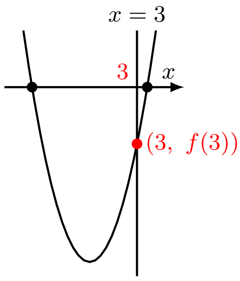
解説動画

考え方 $y = f(x) = x^2 - ax + 2a^2 - 11$ とすると，$D > 0$ を示す必要はなく，条件は $f(3) < 0$ を考えるのみでよい．下に凸の放物線は，その関数が負の値をとるとき，x 軸と異なる 2 点で交わることを利用する．

解答

$y = f(x) = x^2 - ax + 2a^2 - 11$ とする．

$y = f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線である．
$f(x) = 0$ が 異なる 2 つの実数解をもち，1 つは 3 より大きく，他の 1 つは 3 より小さくなるのは，$y = f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．
したがって，求める条件は，$f(3) < 0$ である．



$f(3) = 3^2 - a \cdot 3 + 2a^2 - 11 = 2a^2 - 3a - 2 = (2a + 1)(a - 2)$ より，

$$(2a + 1)(a - 2) < 0$$

よって，$-\frac{1}{2} < a < 2$

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 1 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & & -2 & \longrightarrow & -4 \\ \hline & & & & -3 \end{array}$$

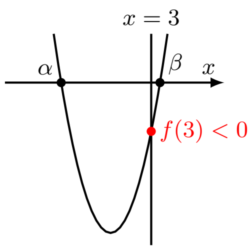
One Point

異なる 2 つの実数解のうち，1 つは p より大きく，他の 1 つは p より小さい場合は，

放物線が下に凸のとき，$f(p) < 0$
放物線が上に凸のとき，$f(p) > 0$

【注意】「条件は $f(3) < 0$ のみでよいのか，判別式や軸の条件は考えなくてもよいのか」と考える人もいるかもしれない．

例題では，$f(3) < 0$ より，$x = 3$ のときの y 座標は負である．このとき，右の図のように，下に凸の放物線は x 軸と異なる 2 点で交わる．また，2 つの異なる交点の x 座標を α，β $(\alpha < \beta)$ とすると，$f(3) < 0$ のとき，軸の位置に関係なく $\alpha < 3 < \beta$ となる．
よって，$f(3) < 0$ を満たすとき，判別式や軸の条件は考えなくてもよい．



問題 I3.3.27 ★★ 解答 p.327

2 次方程式 $x^2 - ax + 3a^2 - 20 = 0$ の異なる 2 つの実数解のうち，1 つは 4 より大きく，他の 1 つは 4 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

One math

例題 I3.3.28　方程式の解の存在範囲 4　★★★

2 次方程式 $ax^2-(a+2)x-a-5=0$ が，$-1<x<0$ の範囲に 1 つの解があり，$1<x<3$ の範囲に他の解があるような定数 a の値の範囲を定めよ．

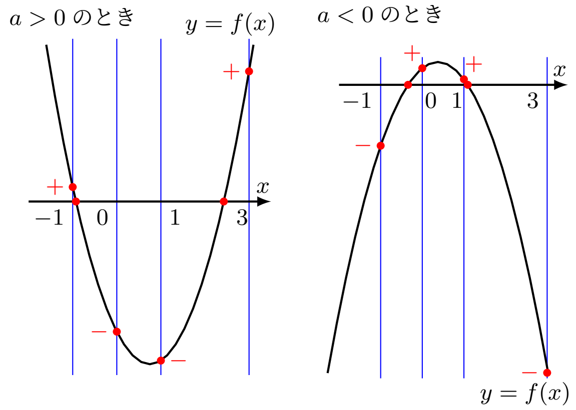
解説動画

考え方 $y=ax^2-(a+2)x-a-5$ とすると，求める条件を満たすためには，$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになればよい．よって，グラフの凹凸に関係なく，

$$f(-1)\cdot f(0)<0 \text{ かつ } f(1)\cdot f(3)<0$$

（$f(-1)$ と $f(0)$ が異符号かつ $f(1)$ と $f(3)$ が異符号）

となるときを求めればよい．



解答

$f(x)=ax^2-(a+2)x-a-5$ とする．

与えられた方程式は 2 次方程式であるから，$a\neq 0$

求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが $-1<x<0$，$1<x<3$ の範囲でそれぞれ x 軸と 1 点で交わることである．

すなわち，$f(-1)\cdot f(0)<0$ かつ $f(1)\cdot f(3)<0$

ここで，$f(-1)=a-3$，$f(0)=-a-5$，$f(1)=-a-7$，$f(3)=5a-11$

$f(-1)\cdot f(0)<0$ より，$(a-3)(-a-5)<0$

すなわち，$(a+5)(a-3)>0$

したがって，$a<-5$，$3<a\cdots$(i)

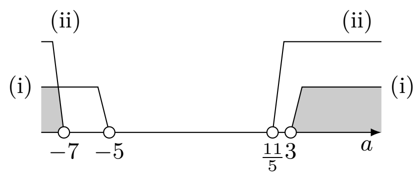
$f(1)\cdot f(3)<0$ より，$(-a-7)(5a-11)<0$

すなわち，$(a+7)(5a-11)>0$

したがって，$a<-7$，$\frac{11}{5}<a\cdots$(ii)

よって，(i)，(ii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{a<-7,\quad 3<a}$$



これは，$a\neq 0$ を満たす．

◀ グラフの凹凸に関係なく，$f(-1)\cdot f(0)<0$ かつ $f(1)\cdot f(3)<0$ が求める条件である．$a>0$，$a<0$ のときで場合分けをする必要はないので注意すること．

One Point

$f(p)\cdot f(q)<0$ のとき，p と q の間に解（交点）がある．

問題 I3.3.28 ★★★　解答 p.328

2 次方程式 $ax^2-(a+1)x-2=0$ が，$-1<x<1$ の範囲に 1 つの解があり，$3<x<5$ の範囲に他の解があるような定数 a の値の範囲を定めよ．

例題 I3.3.29　方程式の解の存在範囲 5　★★★★

2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+(a+3)=0$ が，$1<x<3$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

解説動画

考え方 次の 4 つの場合分けを考えて，a の値を定める．

(i) すべての解が $1<x<3$ にあるとき（x 軸と共有点をもつとき），判別式，軸，$f(1)$，$f(3)$（端点）の満たす条件を考える．

(ii) 2 つの解のうち一方のみが $1<x<3$ にあるとき，$f(1)\cdot f(3)<0$ を考える．

(iii) 1 つの解が $x=1$ のとき，他の解は $1<x<3$ の範囲にあるか否かを考える．

(iv) 1 つの解が $x=3$ のとき，他の解は $1<x<3$ の範囲にあるか否かを考える．

解答

$f(x)=x^2-2(a+1)x+(a+3)$ とする．

(i) すべての解が $1<x<3$ の範囲にあるとき

$y=f(x)$ のグラフが $1<x<3$ の範囲で x 軸と共有点をもつことから，求める条件は，次の（ア）〜（ウ）である．

（ア）x 軸と共有点をもつから，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D\geqq 0$ である．$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-1\cdot(a+3)=a^2+a-2=(a+2)(a-1)$ であり，$D\geqq 0$ であるから，$(a+2)(a-1)\geqq 0$

したがって，$a\leqq -2$，$1\leqq a$

（イ）$y=f(x)$ の軸は直線 $x=a+1$ であり，軸が $1<x<3$ の間にあるから，$0<a<2$

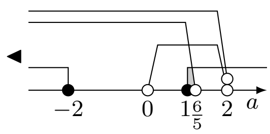
（ウ）$f(1)=-a+2$，$f(3)=-5a+6$ であるから，$f(1)>0$ より，$a<2$，$f(3)>0$ より，$a<\frac{6}{5}$

◀ 少なくとも 1 つ実数解をもつから，$y=f(x)$ のグラフが x 軸に接する場合，すなわち，$D=0$ の場合も含めて，$D\geqq 0$ となる．

◀ $1<a+1<3$ より，$0<a<2$

したがって，（ア）〜（ウ）より，$1\leqq a<\frac{6}{5}$

◀



(ii) 1 つの解が $1<x<3$，他の解が $x<1$，$3<x$ の範囲にあるとき

$f(1)\cdot f(3)<0$ が成り立つ．したがって，$(-a+2)(-5a+6)<0$，すなわち，$(a-2)(5a-6)<0$ である．ゆえに，$\frac{6}{5}<a<2$

◀ $f(1)>0$ かつ $f(3)<0$ または $f(1)<0$ かつ $f(3)>0$，すなわち，$f(1)\cdot f(3)<0$（$f(1)$ と $f(3)$ が異符号）

(iii) 1 つの解が $x=1$ のとき

$-a+2=0$ より，$a=2$ である．このとき，2 次方程式は，$x^2-6x+5=0$ となる．したがって，$(x-1)(x-5)=0$ より，$x=1$，5 である．ゆえに，$1<x<3$ の範囲に解はない．

(iv) 1 つの解が $x=3$ のとき

$-5a+6=0$ より，$a=\frac{6}{5}$ である．このとき，2 次方程式は，$x^2-\frac{22}{5}x+\frac{21}{5}=0$ となる．したがって，$(5x-7)(x-3)=0$ より，$x=\frac{7}{5}$，3

よって，(i)〜(iv) より，求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{1\leqq a<2}$

問題 I3.3.29 ★★★★ 解答 p.329

2 次方程式 $x^2-2ax+(a+2)=0$ が，$1<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

One math

例題 I3.3.30 2 次方程式が実数解をもつ条件 4 ★★★

2 つの 2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$，$x^2+ax+a^2+3a=0$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつ．

(2) 2 つの方程式の少なくとも一方が実数解をもつ．

(3) 2 つの方程式どちらか一方のみが実数解をもつ．

解説動画

考え方 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，実数解をもつとき，$D\geqq 0$ であることを利用する．

(1) 「ともに実数解をもつ」は，解の共通範囲である，$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$ を求めればよい．

(2) 「少なくとも一方」は，解を合わせた範囲である，$D_1\geqq 0$ または $D_2\geqq 0$ を求めればよい．

(3) 「どちらか一方」は，$D_1\geqq 0$，$D_2\geqq 0$ の一方のみが成り立つことであり，(2) から (1) を除いた範囲である．

解答

2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ の判別式を D_1 とすると，

$$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-1\cdot(a+2)=a^2-a-2=(a+1)(a-2)$$

2 次方程式 $x^2+ax+a^2+3a=0$ の判別式を D_2 とすると，

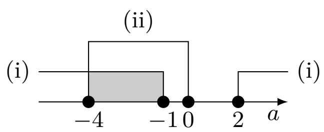
$$D_2=a^2-4\cdot 1\cdot(a^2+3a)=-3a^2-12a=-3a(a+4)$$

◀ 2 つの判別式を考えるので，D_1，D_2 とする．

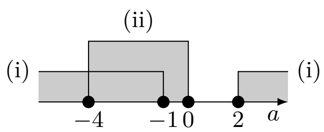
(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$ のときである．
$D_1\geqq 0$ であるから，$(a+1)(a-2)\geqq 0$
したがって，$a\leqq -1$，$2\leqq a\cdots$(i)

◀ 実数解をもつ条件は，$D>0$，$D=0$ を合わせた，$D\geqq 0$ である．

$D_2\geqq 0$ であるから，$-3a(a+4)\geqq 0$
ゆえに，$-4\leqq a\leqq 0\cdots$(ii)
よって,(i) と (ii) の共通範囲を求めると,$\boldsymbol{-4\leqq a\leqq -1}$

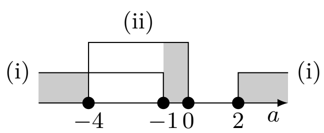


(2) 2 つの方程式の少なくとも一方が実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$ または $D_2\geqq 0$ のときである．
(i)，(ii) より，$\boldsymbol{a\leqq 0,\ 2\leqq a}$



◀ (i)，(ii) のどちらも実数解をもたないとき，すなわち，$D_1<0$ かつ $D_2<0$ を用いて，それ以外の範囲を考えることでも求めることができる．

(3) 2 つの方程式のどちらか一方のみが実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$，$D_2\geqq 0$ の一方のみが成り立つことである．
(i) と (ii) の一方のみが成り立つ a の値の範囲を求めると，$\boldsymbol{a<-4,\ -1<a\leqq 0,\ 2\leqq a}$



問題 I3.3.30 ★★★ 解答 p.330

2 つの 2 次方程式 $x^2-6x+a^2=0$，$x^2-2(a-1)x-a^2-10a+1=0$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつ．

(2) 2 つの方程式の少なくとも一方が実数解をもつ．

(3) 2 つの方程式のどちらか一方のみが実数解をもつ．

例題 I3.3.31 条件付きの 2 変数関数の最大・最小 2 ★★★

実数 x, y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$\frac{1}{2}x+y^2$ の最大値，最小値と，そのときの x, y の値を求めよ．

解説動画

考え方 変数が少ない方が扱いやすいため，文字の消去を考える．ここでは，x よりも y の方が消去しやすいので，$x^2+y^2=1$ を $y^2=1-x^2$ と変形し，$\frac{1}{2}x+y^2$ に代入する．すると，2 次関数の最大値，最小値を求める問題とすることができる．このとき，x の範囲に注意すること．(実数)$^2 \geqq 0$，すなわち，$y^2 \geqq 0$ から，x の範囲を求めることができる．

解答

$x^2+y^2=1$ より，$y^2=1-x^2 \cdots$ (i)

x, y は実数であるから $y^2 \geqq 0$ ，すなわち，$1-x^2 \geqq 0$

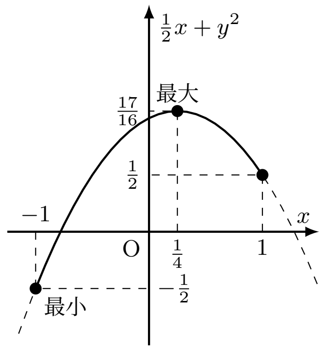
したがって，$x^2-1 \leqq 0$ であるから，$(x+1)(x-1) \leqq 0$

ゆえに，$-1 \leqq x \leqq 1$

$\frac{1}{2}x+y^2$ に (i) を代入すると，

◀ y が実数のとき，$y^2 \geqq 0$ であることを用いて，x の値の範囲を求める．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x+y^2 &= \frac{1}{2}x+\left(1-x^2\right)\\ &= -x^2+\frac{1}{2}x+1\\ &= -\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{16}\end{aligned}$$



グラフは右の図のようになる．

したがって，$x=\frac{1}{4}$ のとき，最大値 $\frac{17}{16}$，$x=-1$ のとき，最小値 $-\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{4}$ のとき，$y^2=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$ より，$y=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

$x=-1$ のとき，$y^2=1-(-1)^2=0$ より，$y=0$

よって，$\frac{1}{2}x+y^2$ は，

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{4},\ y=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}} \text{ のとき，最大値 } \boldsymbol{\frac{17}{16}}$$
$$\boldsymbol{x=-1,\ y=0} \text{ のとき，最小値 } \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

One Point

実数の条件 $y^2 \geqq 0$ を忘れないように注意すること．

問題 I3.3.31 ★★★ 解答 p.331

実数 x, y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$x+y^2$ の最大値，最小値と，そのときの x, y の値を求めよ．

例題 I3.3.32　条件なし 2 変数関数　★★★

次の関数の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ．
(1) x, y の関数 $P = x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3$ の最小値を求めよ．
(2) x, y の関数 $Q = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 3y + 8$ の最小値を求めよ．

解説動画

考え方 (1) は，次のような手順を考えればよい．
(i) x, y は互いに関係なく値を取る変数であるので，先に x の 2 次式と見て P を平方完成し，標準形 $a(x-p)^2 + q$ の形にする．
(ii) y の 2 次式である q をさらに平方完成し，標準形 $b(y-r)^2 + s$ の形にする．
(iii) $P = a(x-p)^2 + b(y-r)^2 + s$ ($a > 0$, $b > 0$, s は定数) の形から，P は $x - p = y - r = 0$ のとき，最小値 s をとる．
(2) は，xy の項があるが，同様の手順で $Q = a\{x - (by + c)\}^2 + d(y-r)^2 + s$ の形に変形すればよい．

解答

(1)
$$\begin{aligned} P &= x^2 + 6x + 2y^2 - 4y + 3 \\ &= (x+3)^2 - 3^2 + 2y^2 - 4y + 3 \\ &= (x+3)^2 + 2(y-1)^2 - 2\cdot 1^2 - 6 \\ &= (x+3)^2 + 2(y-1)^2 - 8 \end{aligned}$$

◀ 平方完成する．
◀ さらに平方完成する．

x, y は実数であるから，

$$(x+3)^2 \geqq 0, \quad (y-1)^2 \geqq 0$$

◀ a が実数のとき，$a^2 \geqq 0$ であり，等号が成り立つのは，$a = 0$ のときであることを用いる．

したがって，P は $x + 3 = 0$, $y - 1 = 0$ のとき最小となる．
よって，**$x = -3$, $y = 1$ のとき，最小値 -8**

(2)
$$\begin{aligned} Q &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 3y + 8 \\ &= x^2 - 2(y-2)x + 2y^2 - 3y + 8 \\ &= \{x - (y-2)\}^2 - (y-2)^2 + 2y^2 - 3y + 8 \\ &= (x - y + 2)^2 + y^2 + y + 4 \\ &= (x-y+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \\ &= (x-y+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \end{aligned}$$

x, y は実数であるから，

$$(x-y+2)^2 \geqq 0, \quad \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

◀ (実数)$^2 \geqq 0$

したがって，Q は $x - y + 2 = 0$, $y + \frac{1}{2} = 0$ のとき最小となる．
$x - y + 2 = 0$, $y + \frac{1}{2} = 0$ を解くと，$x = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

◀ x, y についての連立方程式を解く．

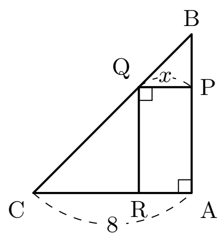
よって，**$x = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{15}{4}$**

問題 I3.3.32 ★★★　解答 p.332

次の関数の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ．
(1) x, y の関数 $P = x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 5$ の最小値を求めよ．
(2) x, y の関数 $Q = x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 4y + 7$ の最小値を求めよ．

例題 I3.3.33 2 次不等式の文章題 ★★

右の図のような直角二等辺三角形 ABC の辺上に頂点をもつ長方形 PQRA を作る．長方形の面積が 7 cm^2 以上 12 cm^2 以下となるときの x の値の範囲を求めよ．



解説動画

考え方 長方形の縦の長さを x を用いて表すと，長方形の面積は x の関数となる．辺の長さは正であることから，$x>0$，$8-x>0$ より，x の範囲は $0<x<8$ となる．

解答

$\mathrm{BP}=\mathrm{PQ}=x$ であるから，

$$\mathrm{PA}=\mathrm{BA}-\mathrm{BP}=8-x$$

$x>0$，$8-x>0$ であるから，$0<x<8\cdots$(i)

長方形 PQRA の面積は $x(8-x)$ cm^2 が 7 cm^2 以上 12 cm^2 であるから，

$$7 \leqq x(8-x) \leqq 12$$

$7 \leqq x(8-x)$ より，$x^2-8x+7 \leqq 0$

したがって，$(x-1)(x-7) \leqq 0$

ゆえに，$1 \leqq x \leqq 7\cdots$(ii)

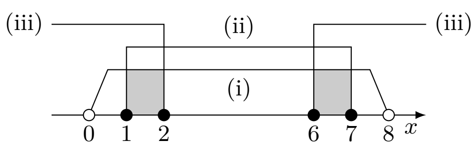
$x(8-x) \leqq 12$ より，$x^2-8x+12 \geqq 0$

したがって，$(x-2)(x-6) \geqq 0$

ゆえに，$x \leqq 2$，$6 \leqq x\cdots$(iii)

よって，(i)〜(iii) の共通範囲を求めると，

$$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 2,\quad 6 \leqq x \leqq 7}$$



◀ 直角二等辺三角形であるから，$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}=8$

◀ 辺の長さは正であるから，$x>0$，$8-x>0$

問題 I3.3.33 ★★ 解答 p.332

長さ 40 cm の針金を 2 つに分け，それぞれを折り曲げて正方形を 2 つ作る．2 つの正方形の面積の和が 52 cm^2 以上になるようにするには，針金をどのように切ればよいか．短い方の針金の長さの範囲を求めよ．

例題 I3.3.34 2 つの放物線の大小関係 1 ★★★★

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+2ax+9$，$g(x)=-x^2+6ax-9$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$

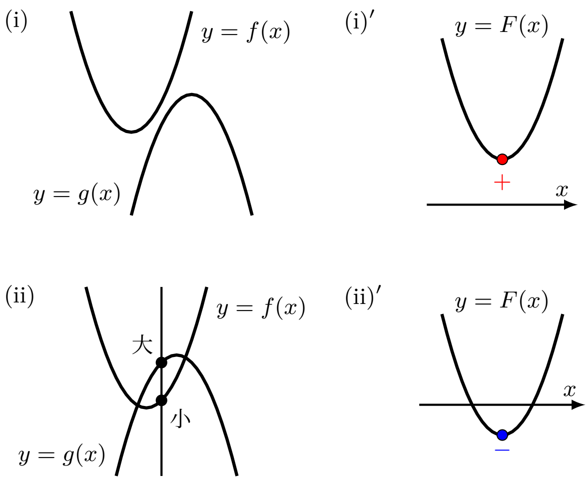
(2) ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$

解説動画

考え方 $y=f(x)$，$y=g(x)$ のそれぞれのグラフを考えるのではなく，$F(x)=f(x)-g(x)$ とし，$F(x)$ の条件を考えるとよい．$F(x)$ の条件として，$F(x)$ の最小値（判別式 D の符号でもよい）を考えることで，a の範囲が求められる．

(1)「すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$」$\cdots$(i) は「すべての実数 x に対して $F(x)>0$」$\cdots$(i)$'$ と同じである．

(2) 「ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$」$\cdots$(ii) は「ある実数 x に対して $F(x)<0$」$\cdots$(ii)$'$ と同じである．



解答

$F(x)=f(x)-g(x)$ とすると，

$$F(x)=2x^2-4ax+18=2(x-a)^2-2a^2+18$$

(1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つ条件は，すべての実数 x に対して $F(x)>0$，すなわち，($F(x)$ の最小値) >0 が成り立つことと同じである．

◀ 判別式の符号に注目して，$D<0$ を用いてもよい．

$F(x)$ は $x=a$ で最小値 $-2a^2+18$ をとるから，$-2a^2+18>0$

したがって，$(a+3)(a-3)<0$

よって，$\boldsymbol{-3<a<3}$

(2) ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つ条件は，ある実数 x に対して $F(x)<0$ ，すなわち，($F(x)$ の最小値) <0 が成り立つことと同じである．

◀ 判別式の符号に注目して，$D>0$ を用いてもよい．

したがって，$-2a^2+18<0$

ゆえに，$(a+3)(a-3)>0$

よって，$\boldsymbol{a<-3,\ 3<a}$

問題 I3.3.34 ★★★★ 解答 p.333

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+3ax+20$，$g(x)=-x^2+7ax-15$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$

(2) ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$

例題 I3.3.35　2 つの放物線の大小関係 2　★★★★

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+2x-2$, $g(x)=-x^2+2x+a+1$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1) $-2 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

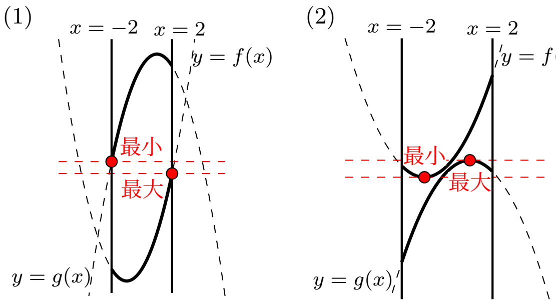
(2) $-2 \leqq x \leqq 2$ を満たすある実数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

解説動画

考え方 「すべての（ある）実数 x に対して $f(x)<g(x)$」と「すべての（ある）実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$」は意味が異なる．「すべての（ある）実数 x」は，$f(x)$ と $g(x)$ に同じ x の値を代入したときの大小関係を考えているのに対し，「すべての（ある）実数 x_1, x_2」は，$f(x)$ と $g(x)$ に異なる x の値を代入してもよいことに注意すること．なお，「すべての（ある）実数 x_1, x_2」の場合は，異なる x の値を考えるので，$F(x)=f(x)-g(x)$ とまとめることはできない．

(1)「すべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$」は，異なる x_1, x_2 をとったときも，点 $(x_1, f(x_1))$ は常に点 $(x_2, g(x_2))$ の下側にある．すなわち，($f(x)$ の最大値)< ($g(x)$ の最小値) が成り立つ．

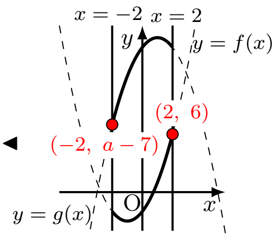
(2)「ある実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$」は，ある x_1, x_2 をとると，点 $(x_1, f(x_1))$ が点 $(x_2, g(x_2))$ の下側にある．すなわち，($f(x)$ の最小値)< ($g(x)$ の最大値) が成り立つ．



解答

$$f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3,$$
$$g(x)=-x^2+2x+a+1=-(x-1)^2+a+2$$

(1)$-2 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ条件は，$-2 \leqq x \leqq 2$ において，「($f(x)$ の最大値)< ($g(x)$ の最小値)」が成り立つときである．



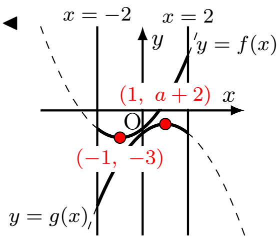
$-2 \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ の最大値は，$f(2)=6$, $g(x)$ の最小値は，$g(-2)=a-7$

◀ $f(2)=(2+1)^2-3=6$, $g(-2)=-(-2-1)^2+a+2=a-7$

したがって，$a-7>6$

よって，$\boldsymbol{a>13}$

(2)$-2 \leqq x \leqq 2$ を満たすある実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ条件は，$-2 \leqq x \leqq 2$ において，「($f(x)$ の最小値)< ($g(x)$ の最大値)」が成り立つときである．



$-2 \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ の最小値は，$f(-1)=-3$, $g(x)$ の最大値は，$g(1)=a+2$

したがって，$a+2>-3$

よって，$\boldsymbol{a>-5}$

問題 I3.3.35 ★★★★　解答 p.333

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2-4x+5$, $g(x)=-x^2+a-3$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1) $-1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

(2) $-1 \leqq x \leqq 3$ を満たすある実数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

例題 I3.3.36　絶対値記号を含む 2 次方程式（定数分離）　★★★

方程式 $|x^2+2x-3|=2x+a$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，a は定数とする．

解説動画

考え方　与えられた方程式は，$\begin{cases} y=|x^2+2x-3| \\ y=2x+a \end{cases}$ の連立方程式の y を消去した形と見ることができるが，このままでは共有点の個数を調べにくい．そこで，与えられた方程式を次のように式変形するとよい．

$$\left|x^2+2x-3\right|-2x=a \ (\text{定数}\,a\,\text{を分離した形})$$

このように分ける方法を，**定数分離**という．
定数分離を用いて，$y=|x^2+2x-3|-2x$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べることで，a の範囲を求めることができる．

解答

$|x^2+2x-3|=2x+a$ より，$f(x)=\left|x^2+2x-3\right|-2x$ とする．

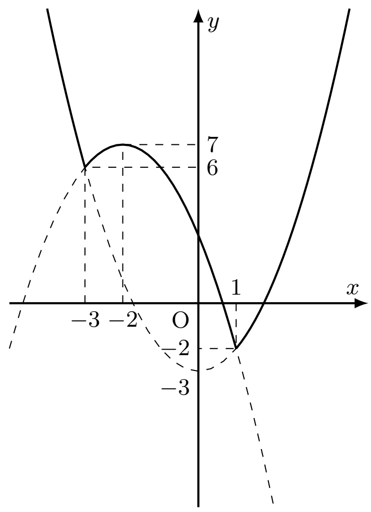
(i) $x^2+2x-3 \geqq 0$ のとき，すなわち，$(x+3)(x-1) \geqq 0$ より，$x \leqq -3,\ 1 \leqq x$ のとき

$$f(x)=x^2+2x-3-2x=x^2-3$$

(ii) $x^2+2x-3<0$ のとき，すなわち，$(x+3)(x-1)<0$ より，$-3<x<1$ のとき

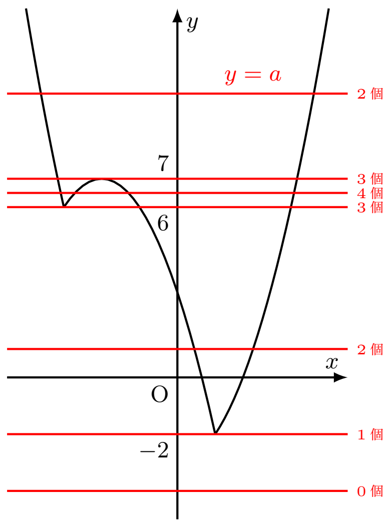
$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(x^2+2x-3\right)-2x \\ &= -x^2-4x+3 \\ &= -(x+2)^2+7 \end{aligned}$$

よって，(i)，(ii) より，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．

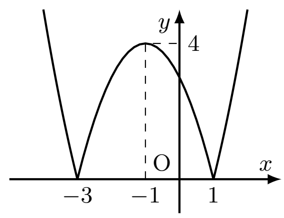


求める実数解の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数と一致するので，右の図より，

$a<-2$ のとき，**0 個**
$a=-2$ のとき，**1 個**
$-2<a<6$ のとき，**2 個**
$a=6$ のとき，**3 個**
$6<a<7$ のとき，**4 個**
$a=7$ のとき，**3 個**
$a>7$ のとき，**2 個**



◀ $y=|x^2+2x-3|$ のグラフは次のようになる．このグラフと直線 $y=2x+a$ の共有点を調べるよりも，解答のように定数分離した方が，共有点の個数を調べやすい．



◀ グラフをかき，$y=a$ を動かすことをイメージして，共有点の個数を調べる．

問題 I3.3.36 ★★★　解答 p.334　▶ 節末 I3.3.4

方程式 $|x^2-4x+3|=x+a$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，a は定数とする．

節末問題 3.3　2 次方程式と 2 次不等式

節末 I3.3.1 ★★　解答（節末）p.335

▶ 例題 I3.3.7

数学 I 3.3

2 次方程式 $x^2+4x+7a=0$，$2x^2-6x-a=0$ がともに実数解をもつ整数 a の個数を求めよ．

節末 I3.3.2 ★★★　解答（節末）p.335

実数 x，y が $x^2+y^2=13$ のもとで，$x-ay$ の最大値が 7 となるとき，定数 a の値を求めよ．

節末 I3.3.3 ★★★　解答（節末）p.336

▶ 例題 I3.3.18

(1) 不等式 $3x^4-7x^2+2>0$ を解け．

(2) 不等式 $\left(x^2-3x+2\right)^2-4\left(x^2-3x+2\right)+3 \leqq 0$ を解け．

節末 I3.3.4 ★★★★　解答（節末）p.337

▶ 例題 I3.3.36

a を定数とする．x についての方程式 $|(x-3)(x-5)|=ax-2a+\frac{1}{2}$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

節末 I3.3.5 ★★★　解答（節末）p.338

2 次不等式 $x^2-3x-4<|x-2|$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

章末問題 3 2 次関数

3.4 章末問題 3

章末 I3.1 ★★★ 解答（章末）p.339

実数 x，y が $x^2 - xy + y^2 + y - 5 = 0$ を満たすとき，y の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である．

数学 I 3.4

章末 I3.2 ★★ 解答（章末）p.339

▶ 例題 I3.3.15

2 つの放物線 $y = x^2 + 4$，$y = -x^2 + 4x$ の両方に接する直線の方程式を求めよ．

章末 I3.3 ★★★ 解答（章末）p.340

a，b は自然数で，2 次方程式 $x^2 + 2ax + 4a - 4b = 0$ が重解 α をもつとき，a，b，α の値を求めよ．

章末 I3.4 ★★★ 解答（章末）p.340

a，b を異なる実数とするとき，x に関する方程式 $(x - 3a)(x - 3b) - (3x - 4a - 5b) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつことを証明せよ．

章末 I3.5 ★★★ 解答（章末）p.341

方程式 $4x^2 + 7xy + 4y^2 = 15$ を満たす x，y に対して，$u = x + y$，$v = xy$ とおく．

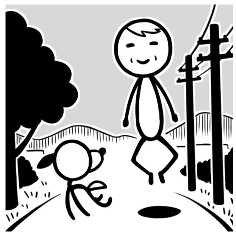
(1) $u^2 - 4v \geqq 0$ を示せ．

(2) u，v の間に成り立つ等式を求めよ．

(3) $k = u + v$ がとる値の範囲を求めよ

Column 2 ～ペンネームの由来と日本の数学者～

私のペンネームは「犬飼シムラ」です．この名前には二つの想いが込められています．著者の個人的な想いですが，一つは，犬が大好きでいつか飼いたいという願い（個人的な趣味です）．もう一つは，尊敬する数学者である志村（シムラ）五郎（1930-2019）への憧れからです．私のような凡人が志村五郎の名を借りるなんて烏滸がましいかもしれませんが，その名に込めた敬意と憧れを胸に数学の魅力を伝えたいと思い，このペンネームを選びました．

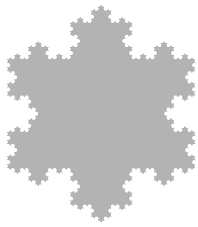


たまたま写り込んだ犬

高校時代，私が最初に心惹かれた数学者は岡潔（1901-1978）でした．特に，岡潔がジャンプしている有名な写真に，たまたま写り込んだ犬の姿に親しみを覚え，そこから岡潔に興味を持ち始めたのをよく覚えています．いきなり岡潔の数学の論文や専門的な文献を読むのは難しかったので，まずは彼のエッセイ集「春宵十話」を読みました．すると存外に面白く，深い感銘を受け，当時の私にとって数学を学ぶ大きなターニングポイントとなりました．数学という学問が単なる計算や理論の積み重ねではなく，哲学や人間観とも深く結びつくこともあるという考え方を知り，「学ぶ」ということそのものの意味を考えさせられました．

空を飛ぼうとする One ちゃん

また，この頃夢中になったのが，フラクタル図形の世界です．例えば，コッホ曲線から描かれる，空から降る雪の結晶のような図形には，数学的な理論と自然の美しさが見事に融合しており，高校生ながらにその神秘性に強く惹かれました．同じ形が拡大しても繰り返されるその幾何学的な構造は，「無限」という概念を身近に感じさせるものでした．数学を使ってこんなにも美しいものが表現できるのか，という驚きと感動は，今でも私の中で鮮明に残っています．



雪の結晶のようなフラクタル図形

大学では解析系のゼミに所属し，ルベーグ積分や関数解析など（数学 II 以降に学ぶ，微分・積分の内容を深めたようなものとイメージして下さい．ルベーグ積分ではフラクタル図形も測度論で学びます）を学ぶ一方で，代数系の分野にも興味を持つようになりました．その中で出会ったのが志村五郎となります．特に彼の一般向けの著作はどれも非常に面白く，数学の深遠さを伝えながらも読者を引き込む力がありました．それらの本は，数学を学び続ける人だけでなく，「数学ってなんだろう」と興味を持った読者にもおすすめしたいものばかりです．

私の数学の旅路は，岡潔から始まり，「春宵十話」に感動し，フラクタル図形の美しさに魅了され，解析系の学びを深めながら志村五郎への憧れへと続いています．そして今，これまでの経験を糧にしながら，自分自身の道を進み，教員として勤務しながら，数学の魅力を一般に伝えるという新しい挑戦をしています．ペンネーム「犬飼シムラ」は，そんな私の数学の歩みを象徴する名前でもあります．

このコラムを読んでいる皆さんも，数学にどこか難しさや遠さを感じているかもしれません．しかし，数学の世界にはさまざまな入り口があります．例えば，フラクタルの美しい図形を眺めたり，岡潔や志村五郎の本を読んで数学者たちの考えに触れることで（数学の知識がなくとも，読みやすいものもあります），新しい興味や視点を見つけられるかもしれません．極端な話，「この写真の犬可愛いなぁ」といった数学に関係ないところから興味を持ち出すのでも構わないと思います．数学は皆さんの様々な日常に溶け込んでおり，興味を持って学ぶことで皆さんの人生に彩りを与えてくれるはずです．このコラムをきっかけに，皆さんが数学の魅力に少しでも近づけることを願っています．

第 4 章　図形と計量

4 章：図形と計量（再生リスト）：

4　図形と計量

1 節 三角比の定義・性質（pp.152-170），2 節 正弦定理と余弦定理（pp.171-179），
3 節 図形の計量（pp.180-192）

数学 I
4.0

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.1.1	★		
I4.1.2	★★		
I4.1.3	★★★		
I4.1.4	★		
I4.1.5	★★		
I4.1.6	★		
I4.1.7	★★		
I4.1.8	★★★		
I4.1.9	★★★		
I4.1.10	★★		
I4.1.11	★★		
I4.1.12	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.1.13	★★★		
I4.1.14	★★★		
I4.1.15	★★★★		
I4.1.16	★★★★		
I4.2.1	★		
I4.2.2	★★		
I4.2.3	★★		
I4.2.4	★★		
I4.2.5	★★★		
I4.2.6	★★★		
I4.2.7	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.3.1	★★		
I4.3.2	★★		
I4.3.3	★★		
I4.3.4	★★		
I4.3.5	★★★		
I4.3.6	★★		
I4.3.7	★★		
I4.3.8	★★		
I4.3.9	★★★		
I4.3.10	★★★★		
I4.3.11	★★★		

節末問題 4.1，節末問題 4.2，節末問題 4.3

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.1.1	★★★		
I4.1.2	★★★		
I4.1.3	★★		
I4.1.4	★★★		
I4.1.5	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.2.1	★★		
I4.2.2	★★★		
I4.2.3	★★★		
I4.2.4	★★★		
I4.2.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.3.1	★★		
I4.3.2	★★★		
I4.3.3	★★★		
I4.3.4	★★★		
I4.3.5	★★★		

章末問題 4

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.1	★★		
I4.2	★★★★		
I4.3	★★★		
I4.4	★★★★		
I4.5	★★★		

チェック例

○ ··· 考え方を理解し，解くことができた．　△ ··· 理解が不十分である．　× ··· 解くことができなかった．

One math

4.1 三角比の定義・性質

4.1.1 三角比

(1) ∠A の辺の長さの比の値を ∠A の正弦，余弦，正接といい，これらをまとめて三角比という．

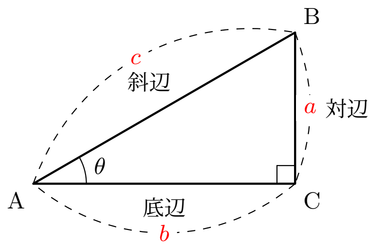
◀ 比 $a:b$ の比の値は，$\frac{a}{b}$

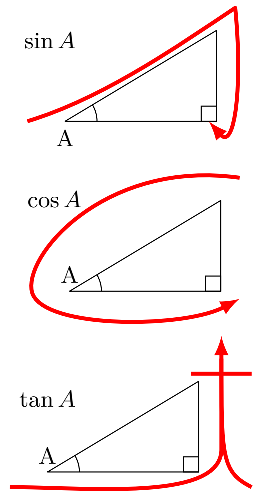
◀ $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ はそれぞれの頭文字 s, c, t の筆記体を利用すると覚えやすい．

$$\text{正弦 (sine)} : \sin A = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$$

$$\text{余弦 (cosine)} : \cos A = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$$

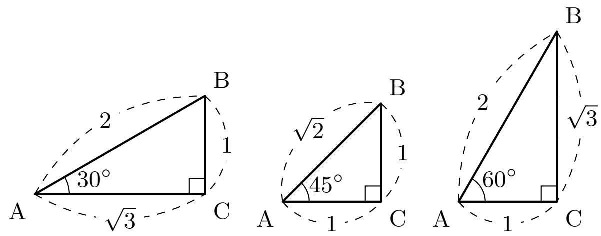
$$\text{正接 (tangent)} : \tan A = \frac{\text{対辺}}{\text{底辺}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$





(2) 有名な角（30°，45°，60°）の三角比

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

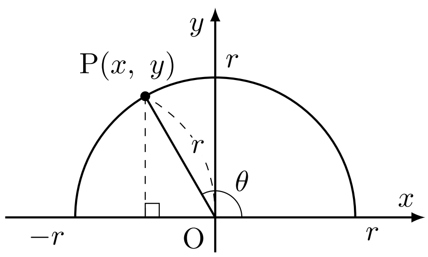


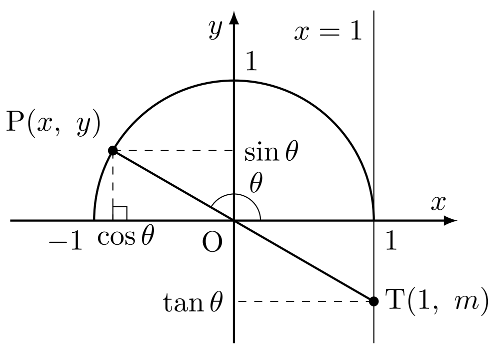
4.1.2 三角比の拡張

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，下の図において

◀ 数学 I では，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲内を考える．

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r}}, \quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r}}, \quad \boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}}$$





ただし，$\tan 90^\circ$ の値は定義されない．とくに，原点を中心とする半径が 1 の半円上において，

$$\boldsymbol{\sin\theta = y}, \quad \boldsymbol{\cos\theta = x}$$

◀ 半径 1 の半円を考えると，三角比が半径 r に関係なく，θ だけで値を定めることができる．また，半径 1 の円のことを単位円という．

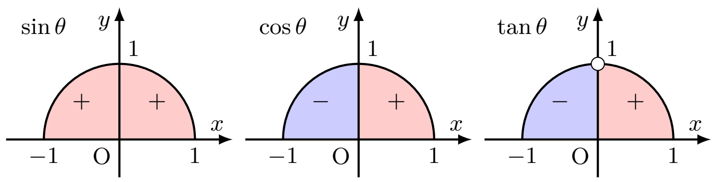
ここで，$-1 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ であるから $\boldsymbol{-1 \leqq \cos\theta \leqq 1}$，$\boldsymbol{0 \leqq \sin\theta \leqq 1}$ である．

また，直線 $x=1$ と，直線 OP の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると，$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1}}$

よって，$\boldsymbol{\tan\theta = m} \quad (\boldsymbol{\theta \neq 90^\circ})$

4.1.3 三角比の値と符号

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°
$\sin\theta$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos\theta$	1	$+$	0	$-$	-1
$\tan\theta$	0	$+$	——	$-$	0



4.1.4 三角比の相互関係

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}}$$

◀ $(\sin A)^2$,$(\cos A)^2$,$(\tan A)^2$ を，$\sin^2 A$, $\cos^2 A$, $\tan^2 A$ と記す．

4.1.5 有名な三角比の値

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	——	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4.1.6 余角・補角の三角比

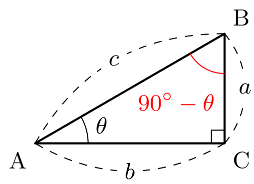
(1) $90^\circ - \theta$ （余角）の三角比 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta,$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta,$$
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta} \qquad (\theta \neq 0^\circ,\ \theta \neq 90^\circ)$$

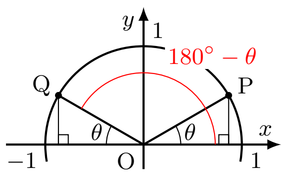
(2) $180^\circ - \theta$ （補角）の三角比 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,$$
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta,$$
$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta \qquad (\theta \neq 90^\circ)$$

◀ 余角の三角比

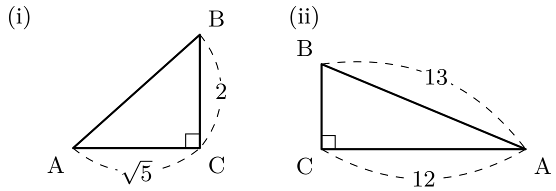


◀ 補角の三角比



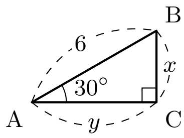
例題 I4.1.1 直角三角形の三角比 ★

(1) 右の図のような三角形において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．



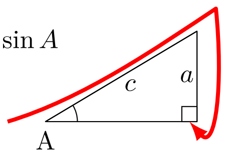
解説動画

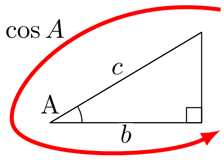
(2) 右の図のような三角形において，x，y の値を求めよ．

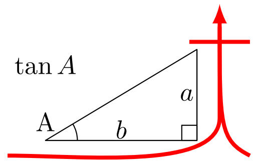


考え方 三角比の定義を利用する．

$\sin A=\frac{a}{c}$　　$\cos A=\frac{b}{c}$　　$\tan A=\frac{a}{b}$







解答

(1) (i) 三平方の定理より，$\mathrm{AB}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$

よって，

$$\sin A=\mathbf{\frac{2}{3}},\quad \cos A=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{3}},\quad \tan A=\mathbf{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

◀ $\tan A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ でもよい．

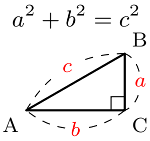
(ii) 三平方の定理より，$\mathrm{BC}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

よって，

$$\sin A=\mathbf{\frac{5}{13}},\quad \cos A=\mathbf{\frac{12}{13}},\quad \tan A=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

◀ 三平方の定理

$a^2+b^2=c^2$



(2) $\sin 30^\circ=\frac{x}{6}$ であるから，$x=6\sin 30^\circ=6\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{3}$

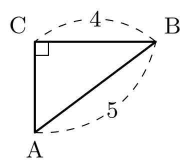
$\cos 30^\circ=\frac{y}{6}$ であるから，$y=6\cos 30^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3\sqrt{3}}$

◀ $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

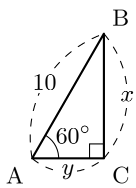
◀ $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

問題 I4.1.1 ★ 解答 p.342

(1) 右の図のような三角形において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．



(2) 右の図のような三角形において，x，y の値を求めよ．



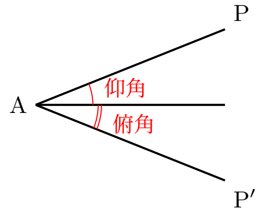
例題 I4.1.2 三角比を用いた測量 ★★

水平な道路をまっすぐに歩いている人が，あるホテルの頂点 P を見上げたところ，A 地点でその仰角が 45° であった．その後，A 地点から 20m 進んで B 地点に到達したとき，再び仰角を測ると 60° であった．この人の目の高さが地面から 1.5m であるとき，このホテルの高さを求めよ．

解説動画

考え方 与えられた値をもとに直角三角形をかき，三平方の定理や三角比の利用を考える．

【注意】 右の図のように，水平面とのなす角において，A を通る水平面より上側にあるものを仰角といい，下側にあるものを俯角という．



解答

右の図のように，A′，B′，C，C′，P とおき，

BC = B′C′ = x m，C′P = y m とする．

直角三角形 A′C′P において，

$$y = (20 + x)\tan 45^\circ$$

◀ $\tan 45^\circ = \frac{y}{20+x}$

したがって，$y = 20 + x \cdots$ (i)

◀ $\tan 45^\circ = 1$

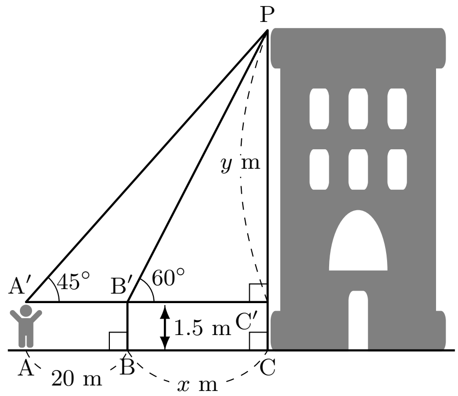
直角三角形 B′C′P において，

$$y = x\tan 60^\circ$$

◀ $\tan 60^\circ = \frac{y}{x}$

したがって，$y = \sqrt{3}x \cdots$ (ii)

◀ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$



(i)，(ii) より，$\sqrt{3}x = 20 + x$

$(\sqrt{3} - 1)x = 20$ より，$x = \frac{20}{\sqrt{3}-1} = 10(\sqrt{3} + 1)$

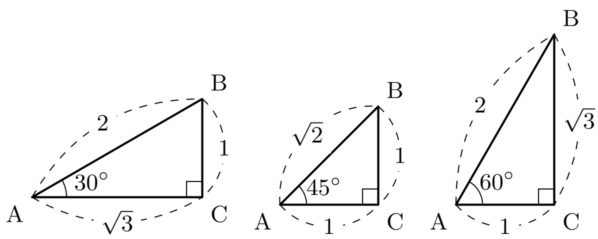
◀ $\dfrac{20}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{20(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{20(\sqrt{3}+1)}{2}$

これと (i) より，$y = 30 + 10\sqrt{3}$

ゆえに，PC $= y + 1.5 = 31.5 + 10\sqrt{3}$

よって，ホテルの高さは，$\mathbf{31.5 + 10\sqrt{3}}$ **(m)**

【注意】 例題において $\sqrt{3} = 1.732$ とし，ホテルの高さの小数第 2 位を四捨五入すると，$31.5 + 10\sqrt{3} \fallingdotseq 48.8$ となる（近似の記号 ≒ は ≈ と表すこともある）．例題では指示がなかったが，問題によっては「四捨五入して求めよ」など と指示がある場合があるので注意すること．また，右の図のような 30°，45°，60° の三角比は覚えて，自在に利用できるようになるとよい．



問題 I4.1.2 ★★ 解答 p.342

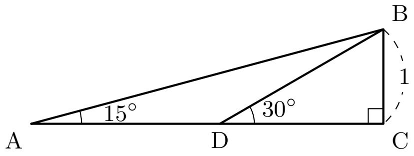
水平な道路をまっすぐに歩いている人が，あるビルの頂点 P を見上げたところ，A 地点でその仰角が 30° であった．その後，A 地点から 30m 進んで B 地点に到達したとき，再び仰角を測ると 45° であった．この人の目の高さが地面から 1.5m であるとき，このビルの高さを求めよ．

例題 I4.1.3 15° の三角比 ★★★

右の図のような直角三角形 ABC を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを求めよ．

(2) $\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\tan 15^\circ$ の値を求めよ．



解説動画

考え方 有名な角の直角三角形や二等辺三角形を用いて，辺の長さを求める．

【注意】 本書では，30° や 45° の倍数の角度 30°，45°，60°，90°，120°，135°，... を有名な角といい，その三角比を有名な三角比という．

解答

(1) $\angle\mathrm{CBD} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$ より，$\mathrm{CD} = \sqrt{3}$，$\mathrm{BD} = 2$

また，$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - (90^\circ + 15^\circ) = 75^\circ$ より，$\angle\mathrm{ABD} = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$

したがって，$\triangle\mathrm{ABD}$ は $\mathrm{AD} = \mathrm{BD}$ の二等辺三角形である．

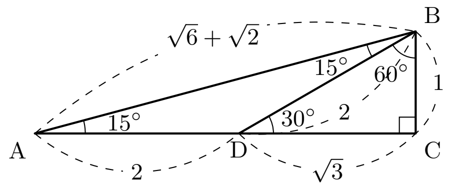
ゆえに，$\mathrm{CD} = \sqrt{3}$ より，$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} + \mathrm{CD} = 2 + \sqrt{3} \cdots$ (i)

◀ $\mathrm{BC} : \mathrm{BD} : \mathrm{CD} = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，三平方の定理より，

$$\mathrm{AB}^2 = (2 + \sqrt{3})^2 + 1^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

◀ $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$



よって，$\mathrm{AB} > 0$ より，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \boldsymbol{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdots \text{(ii)}$$

◀ 2 重根号を外す．
$\sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，(i)，(ii)，$\mathrm{BC} = 1$ より，

$$\sin 15^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \boldsymbol{2 - \sqrt{3}}$$

◀ $\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\tan 15^\circ$ の値は，分母を有理化した形がよく知られている．

◀ $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ で求めてもよい．

【余談】 覚えて利用するようなものではないが，30°，45°，60° といった有名な角以外にも，三角比の値として例えば右の表のようなものが知られている．例題のように直角三角形や二等辺三角形などを用いると，これらの三角比の値を図形的に求めることができる．なお，右の表に記されている 2 重根号は外すことができないので注意すること．

θ	15°	18°	22.5°	36°
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\tan\theta$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

θ	54°	67.5°	72°	75°
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$2+\sqrt{3}$

問題 I4.1.3 ★★★ 解答 p.343

▶ 節末 I4.1.1

二等辺三角形 ABC において $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$，$\mathrm{BC} = 1$，$\angle\mathrm{A} = 36^\circ$ とし，$\angle\mathrm{B}$ の二等分線と辺 AC の交点を D とするとき，次の値を求めよ．

(1) 辺 BD の長さ　　(2) 辺 AB の長さ　　(3) $\sin 18^\circ$

例題 I4.1.4 三角比の相互関係 1 ★

A は鋭角とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) $\sin A = \frac{5}{7}$ のとき，$\cos A$ と $\tan A$ の値を求めよ．
(2) $\tan A = 2$ のとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ．

解説動画

考え方 三角比の相互関係 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$，$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$，$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$ を利用する．このとき，A が鋭角であることに注意すること．

解答

(1) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より，

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

A は鋭角であるから，$\cos A > 0$
よって，$\cos A = \frac{\sqrt{24}}{7} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{7}}$
また，$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5}{7} \div \frac{2\sqrt{6}}{7} = \boldsymbol{\frac{5}{2\sqrt{6}}}$

◀ A が鋭角 $(0^\circ < A < 90^\circ)$ のとき，$\sin A > 0$，$\cos A > 0$，$\tan A > 0$ であることに注意すること．

(2) $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$ より，$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + 2^2 = 5$
したがって，$\cos^2 A = \frac{1}{5}$
A は鋭角であるから，$\cos A > 0$
よって，$\cos A = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$
また，$\sin A = \tan A \cos A = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

◀ $\cos A > 0$ より，$-\frac{1}{\sqrt{5}}$ は不適である．

◀ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ より，$\sin A = \tan A \cos A$

One Point

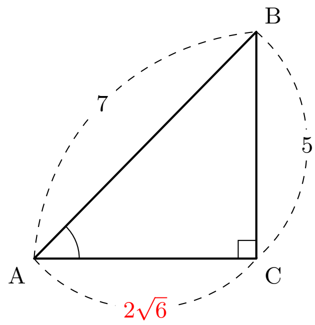
$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ のうち 1 つの値が与えられていれば，他の 2 つの値も求めることができる．

【余談】 与えられた条件をもとに，三角比の定義から直角三角形をかくことができる．これを利用して，例えば，(1) は次の別解のように解くこともできる．

【別解】 A が鋭角，$\sin A = \frac{5}{7}$ より，右の図のような直角三角形 ABC がかける．
三平方の定理より，

$$\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2} = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

よって，$\cos A = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{7}}$，$\tan A = \boldsymbol{\frac{5}{2\sqrt{6}}}$



(2) も同様に，$\tan A = \frac{2}{1}$ と考えて，直角三角形をかくことで解くこともできる．

問題 I4.1.4 ★ 解答 p.343 ▶ 節末 I4.1.2

A は鋭角とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) $\sin A = \frac{4}{5}$ のとき，$\cos A$ と $\tan A$ の値を求めよ．
(2) $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ．

例題 I4.1.5 余角・補角の三角比 ★★

(1) $\sin 50^\circ$, $\cos 130^\circ$ を 45° 以下の三角比で表せ．また，$\sin 40^\circ \cos 130^\circ + \sin 50^\circ \cos 140^\circ$ を簡単にせよ．
(2) △ABC の 3 つの内角 ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，等式 $\sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

解説動画

考え方

(1) $90^\circ - \theta$（余角）と $180^\circ - \theta$（補角）の三角比を用いると，すべて 40° の三角比に式変形することができる．
(2) 1 つの辺を式変形して（ここでは右辺），もう一方の辺と一致することを示す．A，B，C は △ABC の 3 つの内角であるから，$A + B + C = 180^\circ$ であることを利用すればよい．

解答

(1)

$$\sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \mathbf{\cos 40^\circ} \cdots \text{(i)},$$

◀ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

$$\cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ = -\cos(90^\circ - 40^\circ) = \mathbf{-\sin 40^\circ} \cdots \text{(ii)}$$

◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$，$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\cos 140^\circ = \cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ$ であるから，これと (i)，(ii) より，

◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$$\begin{aligned}&\sin 40^\circ \cos 130^\circ + \sin 50^\circ \cos 140^\circ \\ &= \sin 40^\circ(-\sin 40^\circ) + \cos 40^\circ(-\cos 40^\circ) \\ &= -\sin^2 40^\circ - \cos^2 40^\circ \\ &= -\left(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ\right) \\ &= \mathbf{-1}\end{aligned}$$

◀ すべて 40° の三角比に式変形する．

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $A + B + C = 180^\circ$ であるから，$A + B = 180^\circ - C$
したがって，$\frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$
ゆえに，$\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$
よって，等式は成り立つ． ■

◀ $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

余角・補角の三角比

(1) 余角の三角比 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$

$$\boldsymbol{\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta,\quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta,\quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}\ (\theta \neq 0^\circ,\ \theta \neq 90^\circ)}$$

(2) 補角の三角比 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

$$\boldsymbol{\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,\quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta,\quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta\ (\theta \neq 90^\circ)}$$

【余談】一般に，$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$，$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$，$\tan(90^\circ + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$ が成り立つ．

問題 I4.1.5 ★★ 解答 p.344

(1) $\sin 55^\circ$，$\cos 125^\circ$ を 45° 以下の三角比で表せ．また，$\sin 35^\circ \cos 125^\circ + \sin 55^\circ \cos 145^\circ$ を簡単にせよ．
(2) △ABC の 3 つの内角 ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，等式 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B+C}{2} = 1$ が成り立つことを証明せよ．

例題 I4.1.6　三角比を含む方程式 1　★

次の方程式を満たす θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

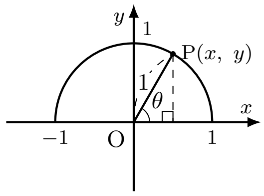
(1) $2\sin\theta - \sqrt{2} = 0$　　(2) $2\cos\theta - 1 = 0$　　(3) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

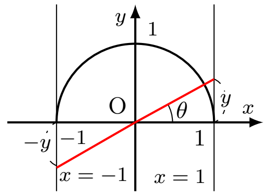
解説動画

考え方 原点を中心とする半径 1 の半円を利用して解く．半径 1 の半円を考えると，様々な問題が解きやすくなる．

$\sin\theta = \frac{y}{r}$，$\cos\theta = \frac{x}{r}$ において，それぞれ $r = 1$ のとき，$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$ となる．また，$\tan\theta = \frac{y}{x}$ において，$x = 1$ のとき，$\tan\theta = y$，$x = -1$ のとき，$\tan\theta = -y$ となる．

よって，$\sin\theta$ は半径 1 の半円上の点の y 座標，$\cos\theta$ は半径 1 の半円上の点の x 座標，$\tan\theta$ は直線 $x = 1$ 上における y 座標，または直線 $x = -1$ 上における y 座標を考えればよい．



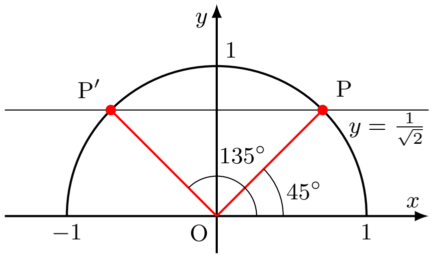


解答

(1) $2\sin\theta - \sqrt{2} = 0$ より，$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

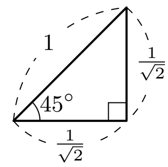
半径 1 の半円上で，y 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，右の図の 2 点 P，P′ である．

よって，$\theta =$ **45°，135°**



◀ $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

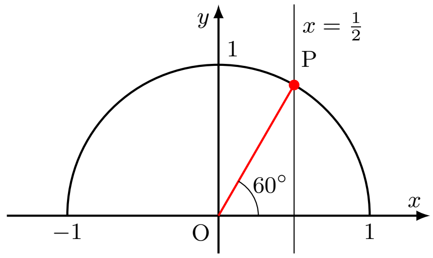
◀



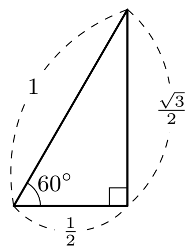
(2) $2\cos\theta - 1 = 0$ より，$\cos\theta = \frac{1}{2}$

半径 1 の半円上で，x 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の点 P である．

よって，$\theta =$ **60°**



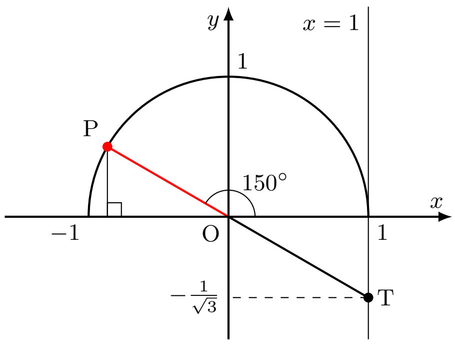
◀



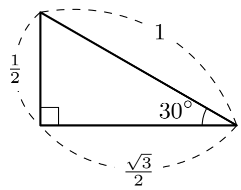
(3) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$ より，$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

直線 $x = 1$ 上で，y 座標が $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる点 T をとると，直線 OT と半径 1 の半円上の交点は右の図の点 P である．

よって，$\theta =$ **150°**



◀



One Point

$\sin\theta = k$ は y 座標，$\cos\theta = k$ は x 座標を考える．

$\tan\theta = k$ は直線 $x = 1$ 上における $y = k$ の点と原点を結ぶ直線の交点を考える．

問題 I4.1.6 ★　解答 p.345

▶ 節末 I4.1.3

次の方程式を満たす θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$　　(2) $2\cos\theta + 1 = 0$　　(3) $\tan\theta + 1 = 0$

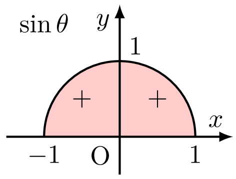
例題 I4.1.7 三角比の相互関係 2 ★★

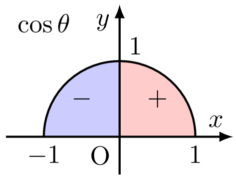
(1) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．ただし，$90° < \alpha < 180°$ とする．

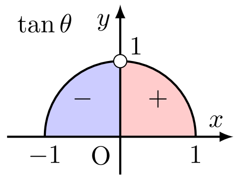
(2) $\tan\beta = -\frac{3}{4}$ のとき，$\sin\beta$，$\cos\beta$ の値を求めよ．ただし，$0° \leqq \beta \leqq 180°$ とする．

解説動画

考え方 三角比の相互関係を利用する．このとき，与えられた角度の条件をもとに，三角比の値の符号に注意すること．







解答

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より，

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

$90° < \alpha < 180°$ において，$\cos\alpha < 0$

◀ 符号に注意すること．

よって，$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\mathbf{\frac{12}{13}}$

また，$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} \div \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13} \times \left(-\frac{13}{12}\right) = -\mathbf{\frac{5}{12}}$

◀ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$

(2) $1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$ より，

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \tan^2\beta = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

したがって，$\cos^2\beta = \frac{16}{25}$

$\tan\beta = -\frac{3}{4} < 0$ より，$90° < \beta < 180°$ であるから，$\cos\beta < 0$

◀ $\cos\beta < 0$ より，$\frac{4}{5}$ は不適である．

よって，$\cos\beta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\mathbf{\frac{4}{5}}$

また，$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ より，$\sin\beta = \tan\beta\cdot\cos\beta = -\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \mathbf{\frac{3}{5}}$

◀ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

三角比の相互関係

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}}$$

問題 I4.1.7 ★★ 解答 p.345

(1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．ただし，$90° < \alpha < 180°$ とする．

(2) $\tan\beta = -2$ のとき，$\sin\beta$，$\cos\beta$ の値を求めよ．ただし，$0° \leqq \beta \leqq 180°$ とする．

例題 I4.1.8 三角比の式の値 ★★★

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(3) $\sin\theta-\cos\theta$

解説動画

考え方 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用できるように，式変形する．なお，(1)，(2) は $\sin\theta$，$\cos\theta$ の対称式である．

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ を利用する．

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を利用する．

(3) $(\sin\theta-\cos\theta)^2$ の値を利用する．このとき，$\sin\theta-\cos\theta$ の符号に注意すること．

数学 I 4.1

解答

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots$(i) の両辺を 2 乗すると，

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

したがって，$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

よって，$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}\cdots$(ii)

◀ 両辺を 2 乗して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta$ の形を作る．

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

(i)，(ii) を代入すると，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{8}}$

◀ a^3+b^3 $=(a+b)^3-3ab(a+b)$

【別解】

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)\left(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

◀ a^3+b^3 $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(i)，(ii) を代入すると，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{8}}$

(3) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$

(ii) を代入すると，$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，(ii) より，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

したがって，$\sin\theta-\cos\theta>0$

よって，$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

◀ $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}<0$ であり，$\sin\theta>0$ より，$\cos\theta<0$ よって，$-\cos\theta>0$ となり，$\sin\theta-\cos\theta>0$

One Point

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，式の値を求める．

問題 I4.1.8 ★★★ 解答 p.346

▶ 節末 I4.1.4 ▶ 章末 I4.1

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$　　(3) $\sin\theta+\cos\theta$

例題 I4.1.9 三角比を含む方程式 2　★★★

次の等式を満たす θ の値を求めよ．

(1) $2\cos^2\theta + 9\sin\theta - 6 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(2) $\sin\theta\tan\theta = -\frac{3}{2}$ $(90^\circ < \theta \leqq 180^\circ)$

解説動画

$\boxed{\text{考え方}}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ などを利用して，三角比の種類を減らす．例えば，(1) は $\sin\theta$，$\cos\theta$ の 2 種類の式であるから，種類を減らし，$\sin\theta$ の 1 種類の式にする．
また，三角比を文字におき換えると，式が見やすくなり，扱いやすくなることがあるので，慣れないうちはおき換えることを推奨する．このとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値の範囲から，おき換えた文字の範囲に注意すること．

解答

(1) $2\cos^2\theta + 9\sin\theta - 6 = 0$ より，$2\left(1-\sin^2\theta\right) + 9\sin\theta - 6 = 0$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

したがって，$2\sin^2\theta - 9\sin\theta + 4 = 0 \cdots \text{(i)}$

$\sin\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$0 \leqq t \leqq 1$

◀ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$

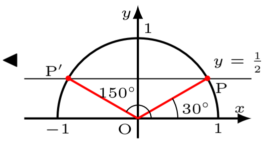
これを (i) に代入すると，$2t^2 - 9t + 4 = 0$

ゆえに，$(2t-1)(t-4) = 0$ より，$t = \frac{1}{2}$，4

◀ たすき掛けを用いる．

$0 \leqq t \leqq 1$ より，$t = \frac{1}{2}$

すなわち，$\sin\theta = \frac{1}{2}$

◀ 

よって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\theta = \mathbf{30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$

(2) $\sin\theta\tan\theta = -\frac{3}{2}$ より，$\sin\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{2}$

◀ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

整理すると，$2\sin^2\theta = -3\cos\theta$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

したがって，$2\left(1-\cos^2\theta\right) = -3\cos\theta$ より，$2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0 \cdots \text{(ii)}$

$\cos\theta = t$ とおくと，$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ より，$-1 \leqq t < 0$

◀ $90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-1 \leqq \cos\theta < 0$

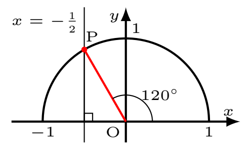
これを (ii) に代入すると，$2t^2 - 3t - 2 = 0$

ゆえに，$(2t+1)(t-2) = 0$ より，$t = -\frac{1}{2}$，2

◀ たすき掛けを用いる．

$-1 \leqq t < 0$ より，$t = -\frac{1}{2}$

すなわち，$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

◀ 

よって，$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ より，$\theta = \mathbf{120^\circ}$

One Point

おき換えた文字の値の範囲に注意すること．

問題 I4.1.9 ★★★ 解答 p.346

次の等式を満たす θ の値を求めよ．

(1) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(2) $2\cos^2\theta + 7\sin\theta - 5 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

例題 I4.1.10 2 直線のなす角 ★★

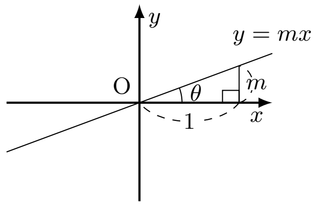
2 直線 $y=\sqrt{3}x+2\cdots$(i)，$y=-x+1\cdots$(ii) について，次の問いに答えよ．

(1) 直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を求めよ．

(2) 2 直線 (i)，(ii) のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を求めよ．

解説動画

考え方 直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きとのなす角が θ $(0^\circ<\theta<180^\circ,\ \theta\neq 90^\circ)$ のとき，$m=\tan\theta$ であることを利用できる．また，直線は平行移動しても傾きが変わらないことから，「直線 $y=mx+n$ と x 軸の正の向きとのなす角」は，「直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きとのなす角」を考えればよい．



解答

(1) 直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を α とすると，$\tan\alpha=\sqrt{3}$

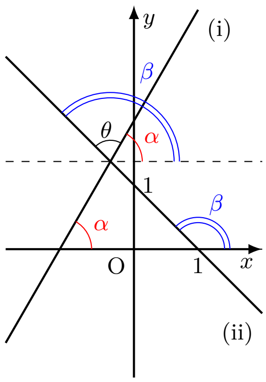
$0^\circ \leqq \alpha < 180^\circ$ より，$\alpha=\mathbf{60^\circ}$

(2) 直線 (ii) が x 軸の正の向きとのなす角を β とすると，$\tan\beta=-1$

$0^\circ \leqq \beta < 180^\circ$ より，$\beta=135^\circ$

右の図から，求める角 θ は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より，

$$\theta=\beta-\alpha=135^\circ-60^\circ=\mathbf{75^\circ}$$



◀ $y=\sqrt{3}x+2$ の傾きは，$y=\sqrt{3}x$ の傾きと同じで，$\sqrt{3}$ である．

◀ $y=-x+1$ の傾きは，$y=-x$ の傾きと同じで，-1 である．

◀ 求める角は，2 直線の図をかいて判断するとよい．

One Point

2 直線のなす角 θ は，傾きである $\tan\theta$ を用いる．

【注意】とくに断りがない場合は，2 直線のなす角 θ は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲内で答えることになっているので注意すること（例えば，(2) では丁寧に「なす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を求めよ」と断りがあった）．また，「直線と x 軸とのなす角」は，直線の $y \geqq 0$ の部分と x 軸とのなす角のことである．

問題 I4.1.10 ★★ 解答 p.347

▶ 節末 I4.1.5

2 直線 $x-\sqrt{3}y=0\cdots$(i)，$x+\sqrt{3}y=0\cdots$(ii) について，次の問いに答えよ．

(1) 直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を求めよ．

(2) 2 直線 (i)，(ii) のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を求めよ．

例題 I4.1.11 三角比を含む不等式 1　★★

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

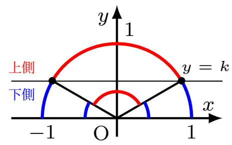
(1) $\sin\theta \geqq \frac{1}{2}$　　　　(2) $\cos\theta < -\frac{1}{2}$

解説動画

考え方 三角比を含む不等式を解くときは，不等号を等号におき換えて，三角比を含む方程式を解くことを考えるとよい．方程式の解から，半径 1 の半円を用いて不等式を満たす θ の範囲を求めることができる．

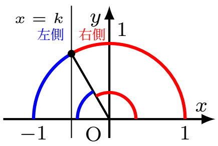
(1) $\sin\theta = k$ のとき，$\sin\theta$ は半円上の y 座標 であるから，右の図のように，直線 $y = k$ を考える．半円との関係に注目すると，半円上の点で $\sin\theta \geqq k$ であるから，$y = k$ より 上側である $y \geqq k$ となる θ の範囲を求めればよい．

(1)



(2) $\cos\theta = k$ のとき，$\cos\theta$ は半円上の x 座標 であるから，右の図のように，直線 $x = k$ を考える．半円との関係に注目すると，半円上の点で $\cos\theta < k$ であるから，$x = k$ より 左側である $x < k$ となる θ の範囲を求めればよい．

(2)

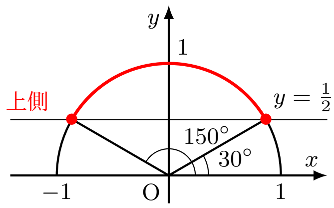


解答

(1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ より，$\theta = 30°,\ 150°$

よって，右の図より，$\sin\theta \geqq \frac{1}{2}$ となる θ の値の範囲は，

$$\mathbf{30° \leqq \theta \leqq 150°}$$



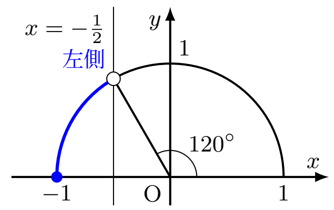
◀ 不等号を等号におき換えて，方程式を解く．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

(2) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ より，$\theta = 120°$

よって，右の図より，$\cos\theta < -\frac{1}{2}$ となる θ の値の範囲は，

$$\mathbf{120° < \theta \leqq 180°}$$



◀ 不等号を等号におき換えて，方程式を解く．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

One Point

三角比を含む不等式は，半径 1 の半円をかき，大小関係を考える．

問題 I4.1.11 ★★　解答 p.347

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1) $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(2) $\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

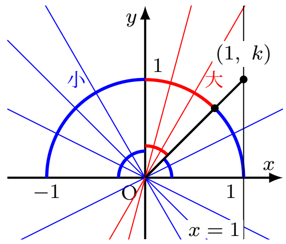
例題 I4.1.12 三角比を含む不等式 2 ★★

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1) $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$　　　　(2) $\tan\theta < 1$

解説動画

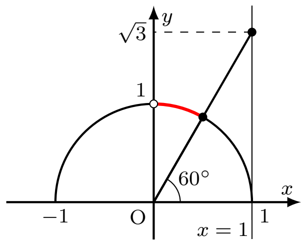
考え方 不等式を解くために，不等号を等号におき換える．
$\tan\theta = k$ のとき，$\tan\theta$ は $y = kx$ の傾き であるから，右の図のように，直線 $y = kx$ と直線 $x = 1$ を考える．半径 1 の半円との関係に注目し，$\tan\theta > k$ のとき，傾きが k より大きい範囲，$\tan\theta < k$ のとき，傾き k より小さい範囲 を求める．そして，k の範囲に対応する，θ の範囲を求めればよい．このとき，$\theta \neq 90°$ であることに注意すること．



解答

(1) $\tan\theta = \sqrt{3}$ より，$\theta = 60°$
よって，右の図より，$\tan\theta \geqq \sqrt{3}$ の値の範囲は，

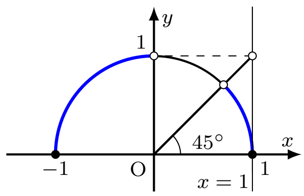
$$\boldsymbol{60° \leqq \theta < 90°}$$



◀ 不等号を等号におき換える．
◀ 傾きが $\sqrt{3}$ 以上となるような範囲を求める．
◀ $\theta \neq 90°$ であることに注意すること．

(2) $\tan\theta = 1$ より，$\theta = 45°$
よって，右の図より，$\tan\theta < 1$ の値の範囲は，

$$\boldsymbol{0° \leqq \theta < 45°,\quad 90° < \theta \leqq 180°}$$



◀ 不等号を等号におき換える．
◀ 傾きが 1 より小さい範囲を求める．
◀ $\theta \neq 90°$ であることに注意すること．

【注意】 $\tan\theta$ は $90°$ で定義されないので，直線の傾きは $0° \leqq \theta < 90°$ と $90° < \theta \leqq 180°$ に分けて考えることに注意すること．

問題 I4.1.12 ★★ 解答 p.348

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1) $\tan\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$　　　　(2) $\tan\theta > -1$

例題 I4.1.13　三角比を含む不等式 3　★★★

次の不等式を解け．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \geqq 0$　　　　(2) $8\cos^2\theta < 1 + 10\sin\theta$

解説動画

考え方 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$，$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であることに注意して，不等式を解く．(2) は，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，すなわち，$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を利用して，三角比の種類を減らす．

解答

(1) $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \geqq 0 \cdots$ (i) とする．

$\cos\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$-1 \leqq t \leqq 1 \cdots$ (ii)

◀ 見やすさと扱いやすさから，おき換えることを推奨しているが，おき換えずに考えてもよい．

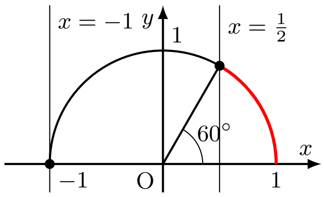
また，(i) の不等式は，$2t^2 + t - 1 \geqq 0$ より，$(t+1)(2t-1) \geqq 0$

したがって，$t \leqq -1$，$\frac{1}{2} \leqq t$

これと (ii) より，$t = -1$，$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$

すなわち，$\cos\theta = -1$，$\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$

よって，求める解は，$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ}$，$\boldsymbol{\theta = 180^\circ}$



(2) $8\cos^2\theta < 1 + 10\sin\theta$ より，$8\left(1 - \sin^2\theta\right) < 1 + 10\sin\theta$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

したがって，$8\sin^2\theta + 10\sin\theta - 7 > 0 \cdots$ (i)

$\sin\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$0 \leqq t \leqq 1 \cdots$ (ii)

また，(i) の不等式は，$8t^2 + 10t - 7 > 0$ より，$(4t+7)(2t-1) > 0$

◀ たすき掛けを用いる．

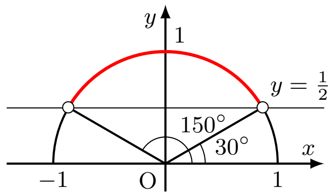
$4 \searrow\ 7 \longrightarrow 14$
$2 \nearrow\ -1 \longrightarrow -4$
$\quad\quad\quad\quad 10$

ゆえに，$t < -\frac{7}{4}$，$\frac{1}{2} < t$

これと (ii) より，$\frac{1}{2} < t \leqq 1$

すなわち，$\frac{1}{2} < \sin\theta \leqq 1$

よって，求める解は，$\boldsymbol{30^\circ < \theta < 150^\circ}$



One Point

三角比を含む方程式・不等式は三角比の種類を減らすとよい．

また，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$，$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であることに注意すること．

問題 I4.1.13 ★★★　解答 p.348

次の不等式を解け．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 > 0$　　　　(2) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 \geqq 0$

例題 I4.1.14 三角比を含む 2 次関数の最大・最小 ★★★

関数 $y=\sin^2\theta+\cos\theta-1$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

解説動画

考え方 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，三角比の種類を減らす．扱いやすさから，$\cos\theta=t$ などと文字を用いておくとよい．t の値の範囲を求め，2 次関数のグラフをかいて最大値と最小値を求める．

解答

$y=\sin^2\theta+\cos\theta-1=\left(1-\cos^2\theta\right)+\cos\theta-1=-\cos^2\theta+\cos\theta\cdots$(i)

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，

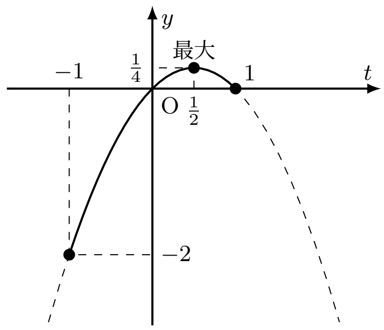
$$-1 \leqq t \leqq 1$$

◀ t の範囲を求める．

このとき，(i) に t を代入すると，

$$y=-t^2+t=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

◀ $-t^2+t$
$=-\left(t^2-t\right)$
$=-\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$



したがって，グラフは右の図のようになる．

ゆえに，y は $t=\frac{1}{2}$，すなわち，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{1}{4}$ をとり，$t=-1$，すなわち，$\cos\theta=-1$ のとき，最小値 -2 をとる．

◀ $t=-1$ の方が軸から遠いので，$t=-1$ で最小となる．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，$\theta=60^\circ$，$\cos\theta=-1$ のとき，$\theta=180^\circ$

よって，**$\theta=60^\circ$ のとき，最大値 $\frac{1}{4}$，$\theta=180^\circ$ のとき，最小値 -2**

One Point

三角比の種類を減らし，2 次関数のグラフを考える．

問題 I4.1.14 ★★★ 解答 p.349

関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

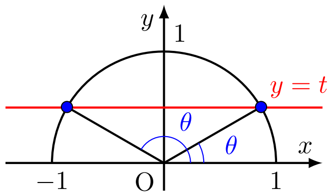
例題 I4.1.15 三角比を含む方程式の解の個数 1 ★★★★

方程式 $2\cos^2\theta+\sin\theta-a=0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

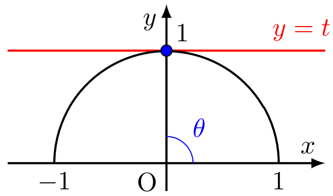
解説動画

考え方 先に，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，三角比の種類を減らす．次に，$\sin\theta=t$ とおいて，定数を分離し，$y=a$ と放物線 $y=-2t^2+t+2$ の共有点を考えればよい．このとき，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ $(\theta \neq 90^\circ)$ のとき，$\sin\theta=t$ $(0 \leqq t < 1)$ となる θ は 1 つの t に対して 2 個 存在し，$\theta=90^\circ$ のとき，$\sin\theta=t=1$ となる θ は 1 つの t に対して 1 個 存在することに注意すること．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ $(\theta \neq 90^\circ)$ のとき
1 つの t に対して，θ は 2 個 存在する．



$\theta=90^\circ$ のとき
1 つの t に対して，θ は 1 個 存在する．



解答

$\sin\theta=t$ とおくと，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，与えられた方程式は，

◀ $2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-a=0$ より，$-2\sin^2\theta+\sin\theta+2-a=0$

$$-2t^2+t+2-a=0\cdots(\text{i})$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，t の値の範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であり，$0 \leqq t < 1$ のとき，$\sin\theta=t$ を満たす θ の値は 2 個，$t=1$ のとき，$\sin\theta=1$ を満たす θ の値は 1 個である．

したがって，与えられた方程式を満たす θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で異なる 2 個の解をもつのは，(i) が $0 \leqq t < 1$ の範囲で解を 1 個もつときである．

◀ $t=1$ は含まないので注意すること．

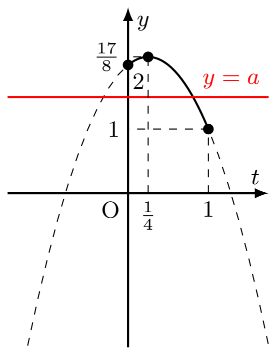
(i) を整理すると，$a=-2t^2+t+2$

ゆえに，$a=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}\cdots(\text{ii})$

(ii) の実数解の個数は，$y=a$ と $y=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ のグラフの共有点の個数と一致する．

◀ 定数を分離する．

よって，右の図より，$0 \leqq t < 1$ の範囲で解を 1 個もつ a の範囲は，



◀ $1 \leqq a < \frac{17}{8}$ のとき，共有点が 2 個存在し，それを満たす θ は 4 個存在する．

$$\boldsymbol{1<a<2,\quad a=\frac{17}{8}}$$

問題 I4.1.15 ★★★★ 解答 p.349

▶ 章末 I4.2

方程式 $3\sin^2\theta+\cos\theta-a=0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

例題 I4.1.16　三角比を含む方程式の解の個数 2　★★★★

方程式 $2\sin^2\theta - a\sin\theta + 1 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を満たす θ が異なる 4 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

解説動画

考え方 解の存在範囲は，判別式（頂点），軸，端点に注目して考える．$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq t < 1$ $(0^\circ \leqq \theta < 180^\circ)$ のとき，1 つの t に対して θ が 2 個存在することから，t が $0 \leqq t < 1$ において異なる 2 つの実数解をもつとき，4 個の解をもつことになることを利用する．

解答

$\sin\theta = t$ とおくと，与えられた方程式は，$2t^2 - at + 1 = 0$ となり，この 2 次方程式の判別式を D とする．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，t の値の範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であり，$0 \leqq t < 1$ のとき，$\sin\theta = t$ を満たす θ の値は 2 個であり，$t = 1$ のとき $\sin\theta = 1$ を満たす θ の値は 1 個である．

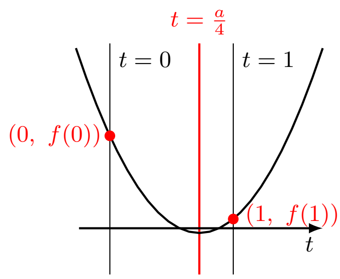
◀ おき換えた文字の範囲に注意すること．

したがって，与えられた方程式を満たす θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で異なる 4 個の解をもつのは，$2t^2 - at + 1 = 0$ が $0 \leqq t < 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつときである．

◀ $t = 1$ は含まないので注意すること．

ゆえに，求める条件は，$f(t) = 2t^2 - at + 1$ とすると，(i) $D > 0$，(ii) 軸が $0 < t < 1$ の間にある，(iii) $f(0) \geqq 0$，$f(1) > 0$ である．

◀ (i) のように判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 より小さくなる」という条件を用いても同じ結果が得られる．



(i) $D = a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = a^2 - 8$ であり，$D > 0$ であるから，

$$a^2 - 8 > 0$$

したがって，$a < -2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2} < a$

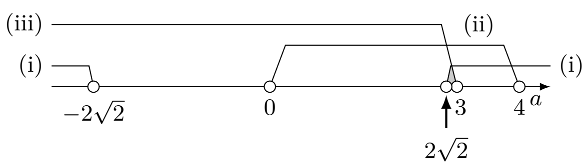
(ii) 軸は直線 $t = \frac{a}{4}$ であるから，$0 < \frac{a}{4} < 1$ より，$0 < a < 4$

(iii) $f(0) = 1$，$f(1) = -a + 3$ であり，$f(0) \geqq 0$ かつ $f(1) > 0$ より，$-a + 3 > 0$

したがって，$a < 3$

◀ $f(0) \geqq 0$ は常に成り立つ．

よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，



$$\boldsymbol{2\sqrt{2} < a < 3}$$

問題 I4.1.16 ★★★★　解答 p.350

▶ 章末 I4.2

方程式 $2\cos^2\theta + a\cos\theta + 1 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

節末問題 4.1 三角比の定義・性質

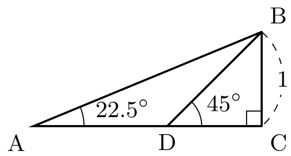
節末 I4.1.1 ★★★ 解答（節末）p.351

▶ 例題 I4.1.3

右の図のような直角三角形 ABC を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを求めよ．

(2) $\sin 22.5°$，$\cos 22.5°$，$\tan 22.5°$ の値を求めよ．



数学 I 4.1

節末 I4.1.2 ★★★ 解答（節末）p.352

▶ 例題 I4.1.4

鋭角 θ が $\tan\theta = \frac{5}{12}$ を満たすとき，$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ の値を求めよ．

節末 I4.1.3 ★★ 解答（節末）p.352

▶ 例題 I4.1.6

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ において，$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \cos\theta = 0$ を満たす θ の値を求めよ．

節末 I4.1.4 ★★★ 解答（節末）p.353

▶ 例題 I4.1.8

$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0° < \theta < 45°$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin\theta + \cos\theta$　(3) $\sin\theta - \cos\theta$　(4) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

節末 I4.1.5 ★★ 解答（節末）p.354

▶ 例題 I4.1.10

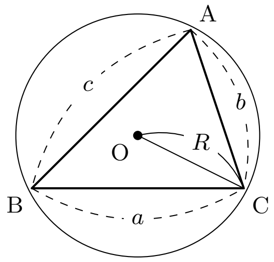
2 直線 $\sqrt{3}x + y = 0 \cdots$(i)，$ax + by + 2 = 0 \cdots$(ii) がある．直線 (ii) は点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を通り，2 直線 (i)，(ii) のなす角は $30°$ である．このとき，定数 a，b の値を求めよ．

4.2 正弦定理と余弦定理

4.2.1 正弦定理

三角形の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{2R}$$



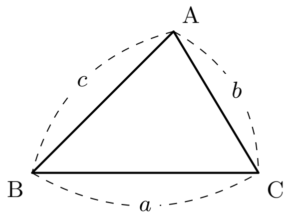
◀ $2R$ を無視すると，$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ という連比の形で表すことができる．

4.2.2 余弦定理

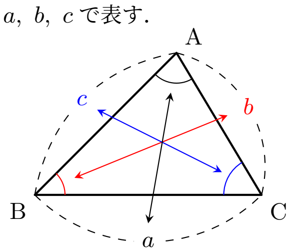
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

式を整理すると，次の等式が得られる．

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



◀ △ABC において，頂点 A，B，C に向かい合う辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c で表す．



4.2.3 角と辺の大小関係

△ABC において，AB $= c$，BC $= a$，CA $= b$ とする．ここで，∠A が鋭角，直角，鈍角であるとき，それぞれ，$\cos A > 0$，$\cos A = 0$，$\cos A < 0$ であることから，次の関係がいえる．

$$A \text{ が鋭角} \iff b^2 + c^2 > a^2,$$

$$A \text{ が直角} \iff b^2 + c^2 = a^2,$$

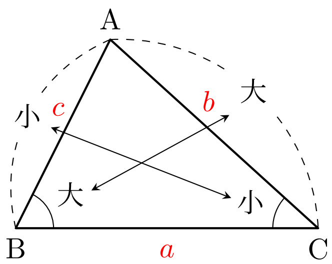
$$A \text{ が鈍角} \iff b^2 + c^2 < a^2$$

◀ 余弦定理と合わせて考えれば，関係を導くことができる．

◀ A が直角のときは，三平方の定理となる．

また，角の大小と辺の大小は一致する．すなわち，

$$A > B \iff a > b$$



例題 I4.2.1 **正弦定理** ★

△ABC において，次の値を求めよ．ただし，外接円の半径を R とする．

(1) $b=2$，$A=105^\circ$，$C=30^\circ$ のとき，c，R

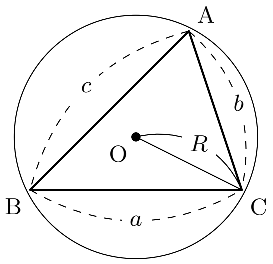
(2) $R=3$，$a=3\sqrt{2}$ のとき，A

解説動画

数学 I 4.2

考え方 正弦定理を利用する．このとき，与えられた辺や角に応じて，(i) の形や (ii) の形の等式を使うとよい．

$$\underbrace{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}}_{\text{(i)}}=\underbrace{\frac{c}{\sin C}=2R}_{\text{(ii)}}$$



(1) $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$\frac{c}{\sin C}=2R$ の等式を用いる．

(2) $\frac{a}{\sin A}=2R$ の等式を用いる．

解答

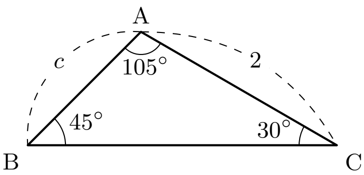
(1) $A+B+C=180^\circ$ であるから，$B=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$

◀ 三角形の内角の和は 180° である．

正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ}$$

◀ 正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ を用いる．両辺に $\sin 30^\circ$ を掛けると，$c=\frac{2}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 30^\circ$



よって，

$$c=\frac{2}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 30^\circ=2\div\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

◀ $c=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2}$

また，$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=2R$ より，

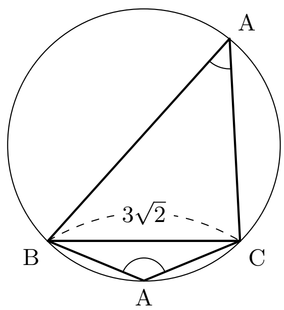
◀ 正弦定理 $\frac{c}{\sin C}=2R$ を用いる．

$$R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\div\frac{1}{2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

(2) 正弦定理より，

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin A}=2\cdot 3$$

◀ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=2R$ を用いる．



したがって，

$$\sin A=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって，$0^\circ<A<180^\circ$ より，$A=\boldsymbol{45^\circ，135^\circ}$

◀ 図のように，鋭角と鈍角の 2 つの場合がある．

正弦定理

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$

問題 I4.2.1 ★ 解答 p.355

△ABC において，次の値を求めよ．ただし，外接円の半径を R とする．

(1) $a=3$，$A=60^\circ$，$C=45^\circ$ のとき，c，R

(2) $R=1$，$a=\sqrt{3}$ のとき，A

例題 I4.2.2 余弦定理 ★★

△ABC において，次の値を求めよ．

(1) $b=5\sqrt{2},\ c=8,\ A=45^\circ$ のとき，a (2) $a=\sqrt{5},\ b=\sqrt{2},\ c=1$ のとき，A

(3) $a=2\sqrt{6},\ b=4,\ A=60^\circ$ のとき，c

解説動画

考え方 余弦定理を用いる．このとき，与えられた辺や角に応じて，(i) の形や (ii) の形の等式を使うとよい．

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を用いる．

(2) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ を用いる．

(3) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を用いる．

(i)
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
(ii)
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

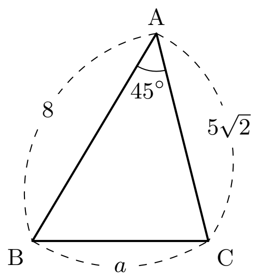
数学 I 4.2

解答

(1) 余弦定理より，

$$\begin{aligned}a^2&=(5\sqrt{2})^2+8^2-2\cdot5\sqrt{2}\cdot8\cdot\cos45^\circ\\&=50+64-80\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=114-80=34\end{aligned}$$

よって，$a>0$ より，$a=\boldsymbol{\sqrt{34}}$



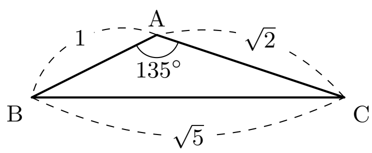
◀ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

◀ 辺の長さは正であるから，$a>0$

(2) 余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot1}\\&=\frac{2+1-5}{2\sqrt{2}}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって，$0^\circ<A<180^\circ$ であるから，$A=\mathbf{135^\circ}$



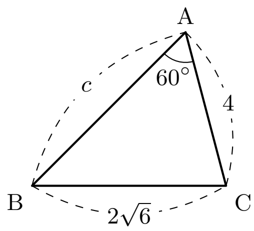
◀ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(3) 余弦定理より，$(2\sqrt{6})^2=4^2+c^2-2\cdot4\cdot c\cdot\cos60^\circ$

したがって，$c^2-4c-8=0$

これを解くと，$c=2\pm2\sqrt{3}$

よって，$c>0$ より，$c=\boldsymbol{2+2\sqrt{3}}$



◀ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

◀ 辺の長さは正であるから，$c>0$

余弦定理

$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C}$$

$$\boldsymbol{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

問題 I4.2.2 ★★ 解答 p.356

△ABC において，次の値を求めよ．

(1) $a=6,\ b=4,\ C=120^\circ$ のとき，c (2) $a=5,\ b=7,\ c=8$ のとき，B

(3) $a=2,\ c=\sqrt{6},\ C=60^\circ$ のとき，b

例題 I4.2.3 三角形の辺と角 1 ★★

次の場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

(1) $b=2\sqrt{3},\ c=3-\sqrt{3},\ A=120^\circ$　　(2) $a=\sqrt{2},\ b=2,\ c=\sqrt{3}-1$

解説動画

考え方 与えられた辺や角に応じて，余弦定理（正弦定理）を利用する．正弦定理，余弦定理のいずれかを使うかの判断は，与えられた辺や角を図示して考えるとよい．なお，一般に，2 つの角と 1 辺 が与えられているときは 正弦定理 を使い，3 辺 や 2 辺とその間の角 が与えられているときは 余弦定理 を使うとよい．

解答

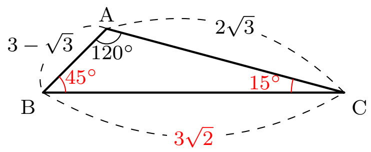
(1) 余弦定理より，

$$a^2=(2\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot\cos 120^\circ=18$$

したがって，$a>0$ であるから，$a=\sqrt{18}=\mathbf{3\sqrt{2}}$

余弦定理より，

$$\cos B=\frac{(3-\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



ゆえに，$B=\mathbf{45^\circ}$

よって，$C=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=\mathbf{15^\circ}$

◀ $C=180^\circ-(A+B)$

(2) 余弦定理より，

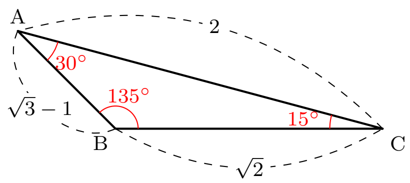
$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-1)}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\cdot 2(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\cdot 2(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

◀ $\cos B$ から考えてもよい．

したがって，$A=\mathbf{30^\circ}$

余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}\\&=\frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}\\&=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$



したがって，$B=\mathbf{135^\circ}$

よって，$C=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=\mathbf{15^\circ}$

◀ $C=180^\circ-(A+B)$

【余談】 例えば，(1) は a を求めた後に B を求めるのに，次のように正弦定理を用いてもよい．

正弦定理より，$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin B}$ であるから，$\sin B=\frac{2\sqrt{3}\sin 120^\circ}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$A=120^\circ$ より，$0^\circ<B<60^\circ$ である から，$B=45^\circ$ となり，$C=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

このように，与えられた辺や角によって，自在に正弦定理と余弦定理を扱うことができるようになるとよい．ただし，$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる B は 45°，135° などと，2 通りの可能性が導かれることもあるので，辺や角度の大小関係についての吟味を忘れないように注意すること．

問題 I4.2.3 ★★ 解答 p.357 ▶ 節末 I4.2.2

次の場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

(1) $b=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ c=2,\ A=135^\circ$　　(2) $a=2\sqrt{2},\ b=2,\ c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

例題 I4.2.4 三角形の辺と角 2 ★★

$\triangle$ABC において，$b = 2\sqrt{3}$，$c = 2$，$C = 30°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

解説動画

考え方 余弦定理を用いるとよい（正弦定理を用いた別解も考えられる）．三角形が 1 通りに定まらない場合であるので，場合分けをして考える．

解答

余弦定理より，$2^2 = a^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot a \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30°$

したがって，$a^2 - 6a + 8 = 0$

ゆえに，$(a-2)(a-4) = 0$

これを解くと，$a = 2,\ 4$

◀ いずれも $a > 0$ であるから，場合分けをして考える．

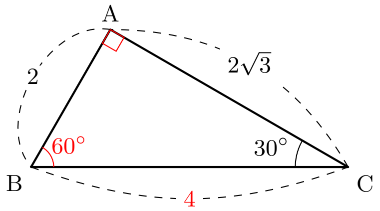
(i) $a = 4$ のとき

余弦定理より，$\cos A = \frac{(2\sqrt{3})^2+2^2-4^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2} = 0$

したがって，$A = 90°$

ゆえに，$B = 180° - (90° + 30°) = 60°$

◀ $B = 180° - (A + C)$



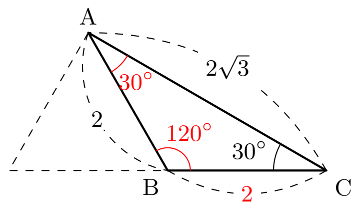
(ii) $a = 2$ のとき

余弦定理より，$\cos A = \frac{(2\sqrt{3})^2+2^2-2^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$A = 30°$

ゆえに，$B = 180° - (30° + 30°) = 120°$

◀ $B = 180° - (A + C)$



よって，(i)，(ii) より，$a = \mathbf{4}$，$A = \mathbf{90°}$，$B = \mathbf{60°}$ または $a = \mathbf{2}$，$A = \mathbf{30°}$，$B = \mathbf{120°}$

【別解】 正弦定理より，$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2}{\sin 30°}$ であるから，$\sin B = \sqrt{3} \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

◀ 有名な角の三角形となる．

したがって，$B = 60°,\ 120°$

(i) $B = 60°$ のとき，$A = 180° - (60° + 30°) = 90°$ であるから，$a = 4$

(ii) $B = 120°$ のとき，$A = 180° - (120° + 30°) = 30°$

$\triangle$ABC は，BA $=$ BC の二等辺三角形であるから，$a = 2$

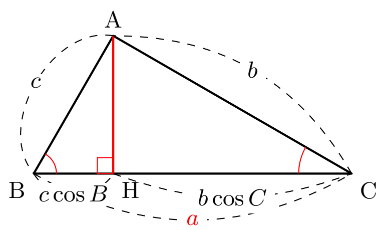
よって，(i)，(ii) より，$a = \mathbf{4}$，$A = \mathbf{90°}$，$B = \mathbf{60°}$ または $a = \mathbf{2}$，$A = \mathbf{30°}$，$B = \mathbf{120°}$

【余談】 正弦定理を用いた別解において，例題では有名な角の三角形や二等辺三角形であることを利用したが，利用できない問題もある．そのような場合は，余弦定理や三平方の定理を用いた解法も考えられるが，第 1 余弦定理（既習の余弦定理は第 2 余弦定理という）という定理が役に立つことがあるので下に紹介する．

第 1 余弦定理

$\triangle$ABC において，次のような関係式が成り立つ．

$$\boldsymbol{a = b\cos C + c\cos B,\ b = a\cos C + c\cos A,\ c = a\cos B + b\cos A}$$



問題 I4.2.4 ★★

解答 p.358

▶ 節末 I4.2.2

$\triangle$ABC において，$b = 2\sqrt{2}$，$c = 2$，$C = 30°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

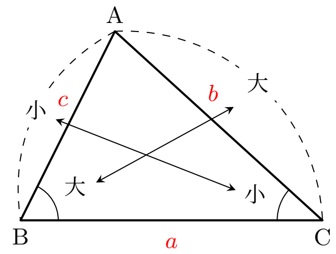
例題 I4.2.5 正弦定理と余弦定理の利用 ★★★

△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 8 : 7$ が成り立つとき，2 番目に大きい角の大きさを求めよ．

解説動画

考え方 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ より，$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ となることを利用する．
また，2 番目に大きい角は，角と辺の大小関係により，2 番目に長い辺の対角を考えればよい．

$$B > C \iff b > c, \quad B = C \iff b = c, \quad B < C \iff b < c$$



解答

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ より，

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

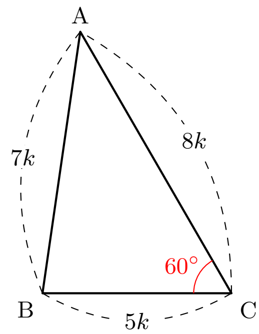
これと $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 8 : 7$ より，

$$a : b : c = 5 : 8 : 7$$

したがって，2 番目に長い辺は c であるから，C が 2 番目に大きい角である．
$a = 5k$，$b = 8k$，$c = 7k$ $(k > 0)$ とおくと，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{(5k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 8k} \\ &= \frac{25k^2 + 64k^2 - 49k^2}{80k^2} \\ &= \frac{40k^2}{80k^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0° < C < 180°$ より，$C = 60°$
よって，2 番目に大きい角の大きさは，**60°** である．



◀ k $(k > 0)$ として，

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{8} = \frac{c}{7} = k$$

とおくと，$a = 5k$，$b = 8k$，$c = 7k$
したがって，$b > c > a$ より，

$$B > C > A$$

よって，C が 2 番目に大きい角である．

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ より，} a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

【余談】 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ についての補足

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ より，$a = 2R\sin A$，$b = 2R\sin B$，$c = 2R\sin C$
よって，$a : b : c = 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C = \sin A : \sin B : \sin C$ が成り立つ．

問題 I4.2.5 ★★★ 解答 p.359

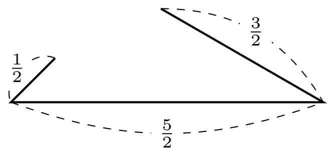
△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ が成り立つとき，最大の角の大きさを求めよ．

例題 I4.2.6 三角形の成立条件 ★★★

$\triangle$ABC において，AB $= x$，AC $= x+1$，BC $= x+2$ のとき，次の問いに答えよ．
(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．
(2) $\triangle$ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ．

解説動画

考え方 (1) は，例えば，3 辺の長さが $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$ であるとき，右の図のようになり三角形を作れない (辺の長さが足りない)．三角形ができるためには，$a+b>c$ が成り立たなければならない．なお，解答では余弦定理を用いたが，A が鈍角 $\Longleftrightarrow b^2+c^2<a^2$ を用いても同じ結果が得られる．



One Point

A が鋭角 $\Leftrightarrow \cos A>0 \Leftrightarrow b^2+c^2>a^2$，$A$ が直角 $\Leftrightarrow \cos A=0 \Leftrightarrow b^2+c^2=a^2$，$A$ が鈍角 $\Leftrightarrow \cos A<0 \Leftrightarrow b^2+c^2<a^2$

解答

(1) $x<x+1<x+2$ であるから，三角形が成立する条件より，

$$x+2<x+(x+1)$$

◀ 最大の辺の長さは，他の 2 辺の長さの和より小さい．

よって，x のとり得る値の範囲は，$\boldsymbol{x>1}\cdots$(i)

◀ 三角形の成立する条件が成り立つならば，3 辺の長さが正である条件は考えなくてよい．

(2) 辺 BC が最大の辺であるから，鈍角三角形となる条件は $A>90^\circ$，すなわち，$\cos A<0$ である．

◀ 鈍角になることができるのは，最大の角のみである．

余弦定理より，

$$\cos A=\frac{x^2+(x+1)^2-(x+2)^2}{2x(x+1)}<0$$

◀ (i) より，分母が正であるから，分子は負である．

したがって，$x^2+(x+1)^2-(x+2)^2<0$
整理すると，$x^2-2x-3<0$
ゆえに，$(x-3)(x+1)<0$
これを解くと，$-1<x<3\cdots$(ii)
よって，(i)，(ii) より，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{1<x<3}$

三角形が成立する条件

a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が成立する $\Longleftrightarrow a<b+c$ かつ $b<c+a$ かつ $c<a+b$
$\Longleftrightarrow |b-c|<a<b+c$
$\Longleftrightarrow$ (最大の辺の長さ) $<$ (他の 2 辺の長さの和)

【注意】 (1) では 3 辺の長さが正である条件を考えなかったが，一般に，$a<b+c\cdots$(i)，$b<c+a\cdots$(ii)，$c<a+b$ が成り立つとき，$a>0$，$b>0$，$c>0$ も成り立つ．
例えば，(i) と (ii) の辺々を足し合わせると，$a+b<a+b+2c$
よって，$0<2c$，すなわち，$c>0$ が成り立つ．同様に，$a>0$，$b>0$ も成り立つことがわかる．

問題 I4.2.6 ★★★ 解答 p.360　▶ 節末 I4.2.4

3 辺の長さが 2，3，x である三角形について，次の問いに答えよ．
(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．
(2) この三角形が鈍角三角形となるような x の値の範囲を求めよ．

例題 I4.2.7 三角形の形状の決定 ★★★

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か．

(1) $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2(A+B)$　　　　(2) $a\cos A + b\cos B = c\cos C$

解説動画

考え方 a, b, c, A, B, C のような辺や角についての等式が条件として与えられたとき，角より辺の方が扱いやすいことが多い．正弦定理や余弦定理を用いて，a, b, c を用いた 辺のみの式 にするとよい．

解答

(1) $\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$ より，与えられた式は，

◀ $A+B+C=180^\circ$

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \cdots \text{(i)}$$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

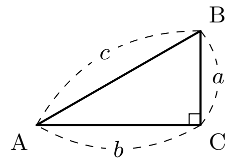
$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

(i) に代入すると，

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

したがって，$a^2+b^2=c^2$

よって，△ABC は，**$C=90^\circ$ の直角三角形**

◀ 

(2) $a\cos A + b\cos B = c\cos C \cdots \text{(i)}$ とする．

余弦定理より，

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

(i) に代入すると，

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

両辺に $2abc$ を掛けると，

$$a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) + b^2\left(c^2+a^2-b^2\right) = c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

整理すると，$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4 = 0$

したがって，$\left(a^2-b^2\right)^2 - \left(c^2\right)^2 = 0$

◀ $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$

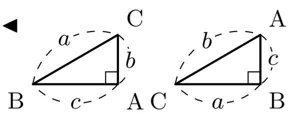
ゆえに，$\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)=0$

◀ $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

したがって，$a^2-b^2-c^2=0$ または $a^2-b^2+c^2=0$

すなわち，$a^2=b^2+c^2$ または $b^2=a^2+c^2$

よって，△ABC は，**$A=90^\circ$ または $B=90^\circ$ の直角三角形**

◀ 

問題 I4.2.7 ★★★ 解答 p.361

▶ 節末 I4.2.5

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か．

(1) $a\sin A = b\sin B$　　　　(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B$

節末問題 4.2 正弦定理と余弦定理

節末 I4.2.1 ★★ 解答（節末）p.362

△ABC の頂点 A，B，C の対辺をそれぞれ a，b，c とする．$C = 60^\circ$ のとき，$\frac{b}{c^2-a^2} + \frac{a}{c^2-b^2}$ の値を求めよ．

数学 I 4.2

節末 I4.2.2 ★★★ 解答（節末）p.362

▶ 例題 I4.2.3 ▶ 例題 I4.2.4

△ABC において，$b = 2$，$c = \sqrt{6}$，$B = 45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

節末 I4.2.3 ★★★ 解答（節末）p.363

△ABC において，$(b + c) : (c + a) : (a + b) = 4 : 5 : 6$，$R = \sqrt{3}$ が成り立つとき，$\cos A$，a，b，c を求めよ．

節末 I4.2.4 ★★★ 解答（節末）p.363

▶ 例題 I4.2.6

△ABC において，$\mathrm{AB} = x - 1$，$\mathrm{AC} = x$，$\mathrm{BC} = x + 1$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) △ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ．

(3) △ABC の 1 つの内角が 120° であるとき，x の値，外接円の半径を求めよ．

節末 I4.2.5 ★★★ 解答（節末）p.364

▶ 例題 I4.2.7

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か．

$$(a - b)\sin^2 C = a\sin^2 A - b\sin^2 B$$

4.3 図形の計量

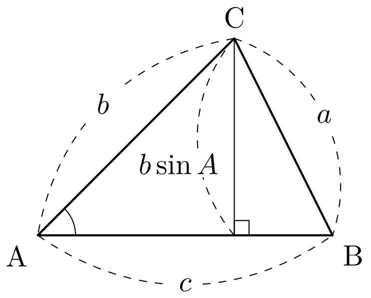
4.3.1 三角形の面積

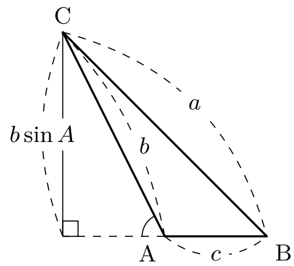
△ABC の面積を S とする．

(1) 2 辺とその間の角が与えられているとき，

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C}$$

◀ これは，鈍角のときも直角のときも成り立つ．





(2) ヘロンの公式

$$\boldsymbol{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)}$$

4.3.2 三角形の面積と内接円

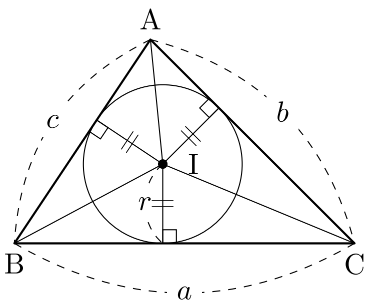
三角形の 3 辺に接する円を，その三角形の**内接円**という．

△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると，

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}(a+b+c)r}$$

◀ △ABC ＝ △IBC ＋ △ICA ＋ △IAB より，

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$



例題 I4.3.1 三角形の面積 ★★

次のような △ABC の面積 S を求めよ．

(1) $a=4,\ c=\sqrt{6},\ B=60^\circ$　　(2) $a=7,\ b=6,\ c=5$

解説動画

考え方 2 辺とその間の角が与えられているとき，三角形の面積の公式を用いることができる．

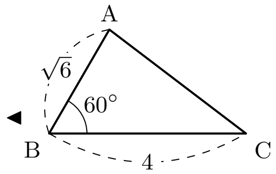
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

(2) 3 辺の長さが与えられていることから，余弦定理を用いて $\cos A$ を求め，求めた $\cos A$ と $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より，$\sin A$ を求める．すると，三角形の面積の公式 $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ を用いることができる．なお，別解のように，ヘロンの公式を用いても解くことができる．

解答

(1) 求める △ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{6}\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{18}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$



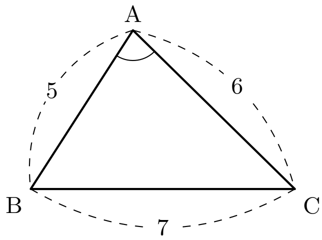
◀ $\cos B$，$\cos C$ を求めてもよい．

(2) 余弦定理より，$\cos A=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{1}{5}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$\sin A>0$ より，

◀ A は三角形の内角であるから，$0^\circ<A<180^\circ$ より，$\sin A>0$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$



よって，求める △ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\mathbf{6\sqrt{6}}$$

【別解】 ヘロンの公式より，$s=\frac{7+6+5}{2}=9$ であるから，

◀ ヘロンの公式は，辺の長さが整数であるときなどに利用しやすい．

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{9(9-7)(9-6)(9-5)}\\&=\sqrt{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\\&=\sqrt{216}=6\sqrt{6}\end{aligned}$$

よって，求める面積 S は，$S=\mathbf{6\sqrt{6}}$

三角形の面積の公式

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

ヘロンの公式 $\cdots\ S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

問題 I4.3.1 ★★ 解答 p.365

次のような △ABC の面積 S を求めよ．

(1) $a=5,\ c=\sqrt{10},\ B=45^\circ$　　(2) $a=7,\ b=5,\ c=8$

例題 I4.3.2 多角形の面積 ★★

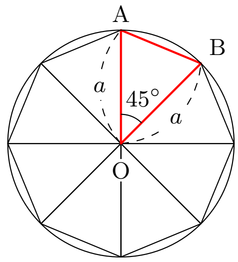
(1) 半径 a の円に内接する正八角形の面積 S を求めよ．
(2) 1 辺の長さが 1 の正十二角形の面積 S を求めよ．

解説動画

考え方 正多角形をいくつかの三角形に分割することを考える．例題の場合，対角線によって合同な三角形に分けるとよい．

解答

(1) 右の図のように，正八角形を対角線によって 8 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると，



$$\angle \mathrm{AOB} = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

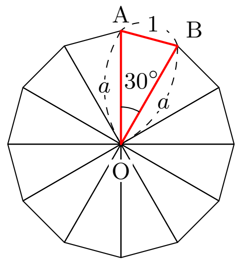
よって，求める面積 S は，

$$S = 8 \times \triangle \mathrm{OAB} = 8 \times \frac{1}{2}a^2 \sin 45^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{4}a^2 = \boldsymbol{2\sqrt{2}a^2}$$

◀ 一般に，半径 a の円に内接する正 n 角形の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}na^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

(2) 右の図のように，1 辺の長さが 1 の正十二角形を対角線によって 12 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると，



$$\angle \mathrm{AOB} = 360^\circ \div 12 = 30^\circ$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = a$ とすると，
$\triangle \mathrm{OAB}$ において，余弦定理より，

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 30^\circ$$

◀ $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cdot \cos \angle \mathrm{AOB}$

したがって，$1 = (2-\sqrt{3})a^2$
ゆえに，$a^2 = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$
よって，求める面積 S は，$S = 12 \times \triangle \mathrm{OAB} = 12 \times \frac{1}{2}a^2 \sin 30^\circ = \boldsymbol{6+3\sqrt{3}}$

◀ a の値まで求めなくてよい (a^2 のまま扱うとよい)．

One Point

正多角形は，合同な三角形に分割して考える．

問題 I4.3.2 ★★ 解答 p.366

▶ 節末 I4.3.1

(1) 1 辺の長さが 1 の正八角形の面積 S を求めよ．
(2) 半径 1 の円に内接する正十二角形の面積 S を求めよ．

例題 I4.3.3 三角形の内接円と外接円の半径 ★★

△ABC において，$a=3,\ b=\sqrt{5},\ c=2$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos B,\ \sin B$　(2) △ABC の面積 S

(3) △ABC の内接円の半径 r　(4) △ABC の外接円の半径 R

解説動画

数学 I 4.3

考え方

(1) 3 辺が与えられているので，余弦定理によって $\cos B$ を求める．

(2) 2 辺とその間の角が与えられているので，$S=\frac{1}{2}ca\sin B$ を用いる．

(3) △ABC の内接円の中心を I，半径を r とするとき，

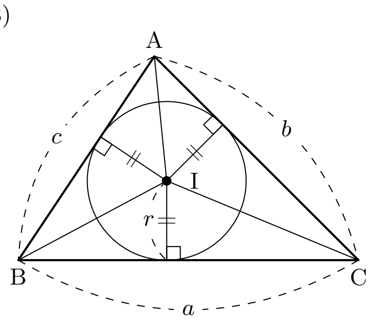
$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}$$

よって，$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

これと，(2) の結果を用いて半径 r を求める．

(4) 正弦定理を用いる．

(3)



解答

(1) 余弦定理より，$\cos B=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

◀ $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

また，$\sin B>0$ より，

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

◀ $\sin^2 B+\cos^2 B=1$

(2) 求める △ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

(3) (2)，$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より，

$$\sqrt{5}=\frac{1}{2}r(3+\sqrt{5}+2)$$

よって，

$$r=\frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}(5-\sqrt{5})}{20}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

◀ 分母を有理化する．

(4) 正弦定理より，

$$R=\frac{b}{2\sin B}=\sqrt{5}\div\left(2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

◀ $2R=\frac{b}{\sin B}$ より，$R=\dfrac{b}{2\sin B}$

よって，外接円の半径は，$R=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

問題 I4.3.3 ★★ 解答 p.367

▶ 節末 I4.3.2

△ABC において，$a=4,\ b=5,\ c=6$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos A,\ \sin A$　(2) △ABC の面積 S

(3) △ABC の内接円の半径 r　(4) △ABC の外接円の半径 R

例題 I4.3.4 円に内接する四角形 1 ★★

円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CD}=1$，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 対角線 AC の長さ　(2) AD の長さ　(3) 四角形 ABCD の面積

解説動画

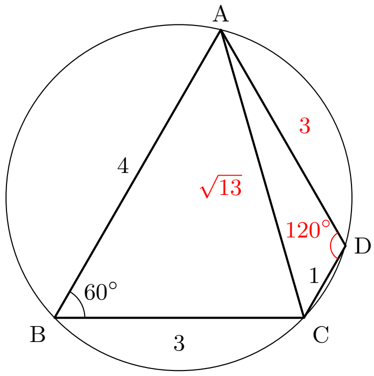
考え方

(1) 2 辺とその間の角が与えられているので，余弦定理を用いる．
(2) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であることを用いる．$B+D=180^\circ$ より，D を求めて，△ACD において余弦定理を用いる．
(3) 2 つの三角形 △ABC，△ACD に分けて，それぞれに対して三角形の面積の公式を用いる．

解答

(1) △ABC において，余弦定理より，$\mathrm{AC}^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cdot\cos60^\circ=13$

よって，$\mathrm{AC}>0$ より，$\mathrm{AC}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$



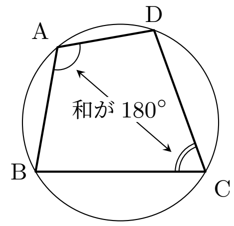
(2) 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$D=180^\circ-B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

したがって，△ACD において，余弦定理より，

$$(\sqrt{13})^2=1^2+\mathrm{AD}^2-2\cdot1\cdot\mathrm{AD}\cdot\cos120^\circ$$

◀



整理すると，$\mathrm{AD}^2+\mathrm{AD}-12=0$ より，$(\mathrm{AD}+4)(\mathrm{AD}-3)=0$
よって，$\mathrm{AD}>0$ より，$\mathrm{AD}=\boldsymbol{3}$

(3) 四角形 ABCD の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}\\&=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\cdot\sin120^\circ\\&=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}}\end{aligned}$$

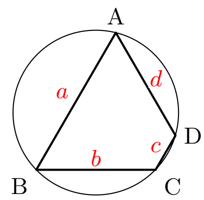
◀ 四角形の面積は，2 つの三角形の面積の和と考えられる．
◀ 2 辺の長さが a，b であり，その間の角が θ のとき，三角形の面積 S は，$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

【余談】覚えて利用するようなものではないが，円に内接する四角形の面積を求める公式として，次のようなブラマグプタの公式がある．ブラマグプタの公式は，$d=0$ のとき，ヘロンの公式と一致する．

ブラマグプタの公式

円に内接する四角形の 4 辺の長さを a，b，c，d とし，$2s=a+b+c+d$ とすると，四角形の面積 S は

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$



問題 I4.3.4 ★★ 解答 p.367

円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=8$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{CD}=4$，$\angle\mathrm{BCD}=120^\circ$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 対角線 BD の長さ　(2) AD の長さ　(3) 四角形 ABCD の面積

例題 I4.3.5 円に内接する四角形 2 ★★★

円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{CD}=3$，$\mathrm{DA}=2$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos B$　　(2) 四角形 ABCD の面積 S

解説動画

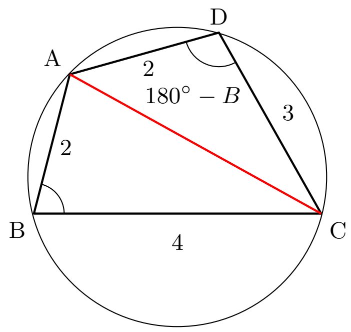
考え方 円に内接する四角形の対角の和は $180°$ であることを用いる．△ABC と △ACD に余弦定理をそれぞれ用いて，AC^2 を 2 通りに表す．また，$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$，$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ を用いて式変形する．

解答

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$D=180°-B$$

◀ $B+D=180°$



△ABC において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos B\\&=20-16\cos B\cdots\text{(i)}\end{aligned}$$

△ACD において，余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos(180°-B)=13+12\cos B\cdots\text{(ii)}$$

◀ $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

(i)，(ii) より，$20-16\cos B=13+12\cos B$

よって，$\cos B=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(2) $\sin B>0$ より，

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{16-1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

◀ $\sin^2 B+\cos^2 B=1$

また，$\sin D=\sin(180°-B)=\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$

◀ $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$

よって，求める四角形 ABCD の面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\sin B+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin D\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{15}}{4}}\end{aligned}$$

◀ 四角形の面積は，2 つの三角形の面積の和と考えられる．

問題 I4.3.5 ★★★ 解答 p.368

▶ 節末 I4.3.3

円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\mathrm{DA}=1$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos B$　　(2) 四角形 ABCD の面積 S

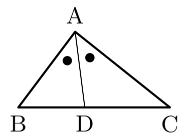
例題 I4.3.6 角の二等分線の長さ ★★

△ABC において，$AB=4$，$BC=8$，$CA=6$ とする．∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，∠B の二等分線が線分 AD と交わる点を I とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 線分 AD の長さ　　(2) 線分 AI の長さ

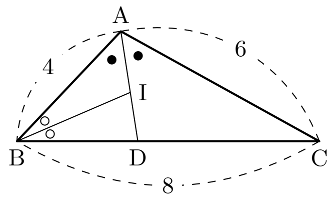
解説動画

考え方 角の二等分線の性質 $AB:AC=BD:DC$ を用いる（数学 A で学習する）．また，(1) は，△ABC と △ABD において余弦定理をそれぞれ用いて，AD の長さを求める．



解答

(1) △ABC において，線分 AD は ∠A の二等分線であるから，



$$BD:DC=AB:AC=4:6=2:3$$

$BC=8$ より，

$$BD=\frac{2}{2+3}BC=\frac{2}{5}\cdot 8=\frac{16}{5}$$

△ABC において，余弦定理より，

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4^2+8^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 8}=\frac{11}{16}$$

◀ 先に，$\cos B$ を求める．

△ABD において，余弦定理より，

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=4^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2-2\cdot 4\cdot\frac{16}{5}\cdot\frac{11}{16}=\frac{216}{25}$$

◀ 求めた $\cos B$ を用いて，AD の長さを求める．

よって，$AD>0$ より，$AD=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{6}}{5}}$

◀ 辺の長さは正であるから，$AD>0$

(2) △ABD において，線分 BI は ∠B の二等分線であるから，

$$AI:ID=AB:BD=4:\frac{16}{5}=5:4$$

よって，$AI=\frac{5}{5+4}AD=\frac{5}{9}\times\frac{6\sqrt{6}}{5}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

問題 I4.3.6 ★★ 解答 p.369

△ABC において，$AB=4$，$BC=6$，$CA=5$ とする．∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，∠B の二等分線が線分 AD と交わる点を I とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 線分 AD の長さ　　(2) 線分 AI の長さ

例題 I4.3.7 中線定理 ★★

(1) △ABC において，辺 BC の中点を M とする．このとき，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) AB = 4，BC = 8，CA = 5 である △ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AM の長さを求めよ．

解説動画

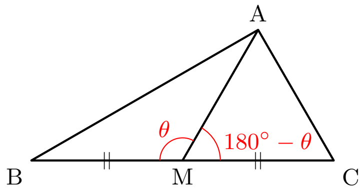
考え方 △ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，AM を**中線**といい，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$ を**中線定理**という（ハップスの中線定理ともいう）．$\angle\mathrm{AMB}=\theta$，$\angle\mathrm{AMC}=180^\circ-\theta$ とすると，$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ を利用して証明することができる．

解答

(1) $\angle\mathrm{AMB}=\theta$ とすると，$\angle\mathrm{AMC}=180^\circ-\theta$

△ABM において，余弦定理より，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2-2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos\theta\cdots\text{(i)}$$



△ACM において，余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2+2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{CM}\cdot\cos(180^\circ-\theta)\cdots\text{(ii)}$$

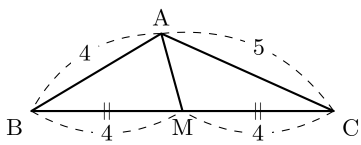
(i) と (ii) の辺々を足し合わせると，BM = CM より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2&=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)-2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\{\cos\theta+\cos(180^\circ-\theta)\}\\&=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)-2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}(\cos\theta-\cos\theta)\\&=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)\ \blacksquare\end{aligned}$$

◀ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

(2) $\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{AC}=5$ とすると，(1) より，

$$4^2+5^2=2\left(\mathrm{AM}^2+4^2\right)$$



したがって，$\mathrm{AM}^2=\frac{9}{2}$

よって，AM > 0 より，$\mathrm{AM}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{2}}}$

◀ 中線定理を用いると，楽に中線の長さを求めることができる．中線定理を用いずに，△ABC, △ABM でそれぞれ余弦定理を用いたり，三平方の定理を用いたりしてもよいが，計算に手間が掛かる．

問題 I4.3.7 ★★ 解答 p.369

AB = 5，BC = 10，CA = 6 である △ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AM の長さを求めよ．

例題 I4.3.8 空間図形の測量 ★★

水平な地面に垂直に立つ木があり，木の頂点を A，その真下の地面上の点を D とする．また，地面上で互いに 80 m 離れた 2 点 B，C を定め，$\angle$ABC，$\angle$ACB，$\angle$ACD を測定したところ，それぞれ 75°，60°，30° であった．このとき，木の高さ AD を求めよ．

解説動画

考え方 与えられた値を三角形の辺や角として考えると，空間図形が現れる．空間図形の問題は，平面図形を取り出して考えるとよい．与えられている辺や角に応じて，どの平面図形（三角形）に注目するかを考える．

解答

$\triangle$ABC において，

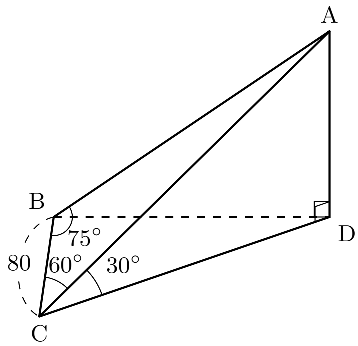
$$\angle \mathrm{BAC} = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

正弦定理より，

$$\frac{80}{\sin 45^\circ} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin 60^\circ}$$

したがって，

$$\mathrm{AB} = \frac{80}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ = 80 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{6}$$

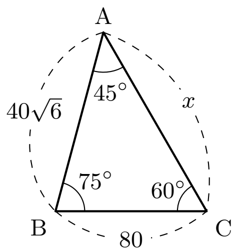


◀ $\angle$BAC $= 45^\circ$ に注目すると，AB の値を求めやすい（75° を扱わないで済む）．先に正弦定理を用いて AB の値を求め，次に余弦定理を用いて AC の値を求める．

AC $= x$ とすると，余弦定理より，

$$(40\sqrt{6})^2 = 80^2 + x^2 - 2 \cdot 80 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

◀ 平面図形を取り出して考えるとよい．また，扱いやすさのために AC を x とおいている．



ゆえに，$x^2 - 80x - 3200 = 0$

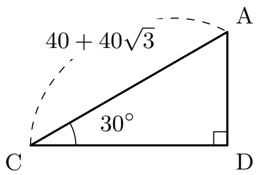
これを解くと，$x = 40 \pm 40\sqrt{3}$

したがって，$x > 0$ より，$x = 40 + 40\sqrt{3}$

すなわち，AC $= 40 + 40\sqrt{3}$

$\triangle$ACD おいて，

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AC} \cdot \sin 30^\circ = \left(40 + 40\sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = 20 + 20\sqrt{3}$$



◀ $\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}$

よって，木の高さは，AD $=$ $\mathbf{20 + 20\sqrt{3}}$ **(m)**

One Point

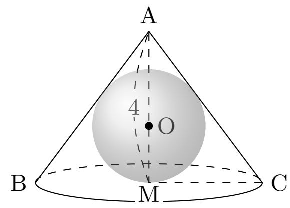
空間図形の問題は，平面図形を取り出して考える．

問題 I4.3.8 ★★　解答 p.370

水平な地面に垂直に立つ木があり，木の頂点を A，その真下の地面上の点を D とする．また，地面上で互いに 200 m 離れた 2 点 B，C を定め，$\angle$ABC，$\angle$ACB，$\angle$ACD を測定したところ，それぞれ 75°，60°，60° であった．このとき，木の高さ AD を求めよ．

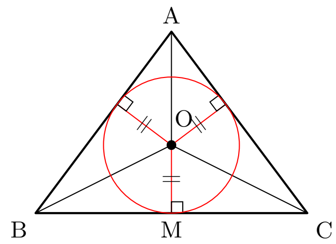
例題 I4.3.9 円錐に内接する球 ★★★

右の図のように，底面の半径 3，高さが 4 の直円錐があり，球 O と側面，底面の中心 M で接している．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 円錐の母線の長さを求めよ．
(2) 球 O の半径を求めよ．
(3) 球 O の体積 V と表面積 S を求めよ．



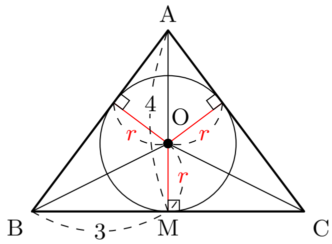
解説動画

考え方 円錐の頂点 A と底面の円の中心 M を通るように，円錐を切った平面図形の切断面を考える（平面図形を取り出す）．
(1) 右の図のような二等辺三角形 ABC（直円錐）において，辺 AB のような回転体の側面をつくる線分を母線という．
(2) 球の半径は △ABC の内接円の半径に一致することを利用する．
(3) 球の体積と表面積の公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，$S=4\pi r^2$ と (2) の結果を利用する．



解答

A と M を通る平面で円錐を切った切断面は，右の図のようになる．



(1) 求める母線の長さは，

$$\sqrt{\mathrm{BM}^2+\mathrm{AM}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

◀ 三平方の定理を用いる．

(2) 球 O の半径を r，△ABC の面積を S' とすると，

$$S'=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\frac{1}{2}r(6+2\cdot5)=8r$$

◀ $S'=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$S'=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4=12$ であるから，$8r=12$

◀ $S'=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM}$

よって，$r=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

(3) (2) より，$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}\pi}$，$S=4\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\boldsymbol{9\pi}$

◀ 球の体積は $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，表面積は $S=4\pi r^2$

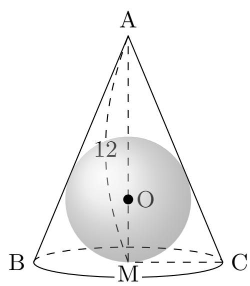
One Point

考えやすい平面で，切断面を考える．

問題 I4.3.9 ★★★ 解答 p.371

▶ 節末 I4.3.5

右の図のように，底面の半径 5，高さが 12 の直円錐があり，球 O と側面，底面の中心 M で接している．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 円錐の母線の長さを求めよ．
(2) 球 O の半径を求めよ．
(3) 球 O の体積 V と表面積 S を求めよ．



例題 I4.3.10 正四面体の計量 ★★★★

1 辺の長さが a の正四面体 OABC において，辺 BC の中点を M とし，$\angle\mathrm{OMA}=\theta$ とする．また，頂点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos\theta$　　(2) 正四面体の体積 V

(3) 正四面体の内接球の半径 r　　(4) 正四面体の外接球の半径 R

解説動画

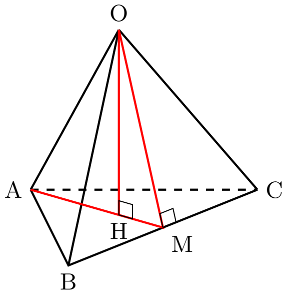
考え方 平面図形を取り出して考える．また，図形の対称性を考えて，その性質を利用して値を求めるとよい．(3) は，内接球の中心を I とし，OI, AI, BI, CI で正四面体を三角錐に分割すると，それぞれの 三角錐の高さが内接球の半径になる ことを利用する．(4) は，対称性から， 内接球の中心と外接球の中心が一致する ことを利用する．

解答

(1)△OBC，△ABC は 1 辺の長さ a の正三角形であるから，$\mathrm{OM}=\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

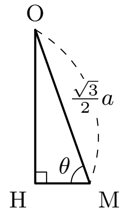
△OAM において，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$



(2)

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



△OMH において，$\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

△ABC の面積を S とすると，$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

よって，$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}$

(3) 内接球の中心を I とすると，

$$\begin{aligned}V&=(\text{三角錐 IOAB})+(\text{三角錐 IOAC})+(\text{三角錐 IOBC})+(\text{三角錐 IABC})\\&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot r+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAC}\cdot r+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot r+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot r\\&=\frac{1}{3}(\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ABC})r=\frac{1}{3}\cdot 4Sr\end{aligned}$$

よって，(1)，(2) より，$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r$ であるから，$r=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{12}a}$

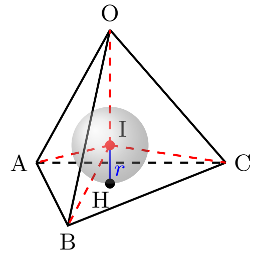
(4) 図形の対称性より，内接球の中心と外接球の中心は一致する．

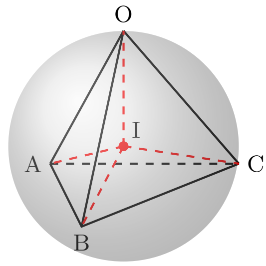
また，内接球の中心 I は OH 上にあるから，$\mathrm{OH}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$\mathrm{IH}=r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$

したがって，$\mathrm{IH}=\frac{1}{4}\mathrm{OH}$ となり，I は OH を $3:1$ に内分する点になる．

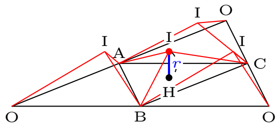
よって，$R=\mathrm{IO}=\frac{3}{4}\mathrm{OH}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}a}$

◀ (1)，(2) を用いて，(3)，(4) は下の図のような内接球，外接球の半径を求める．

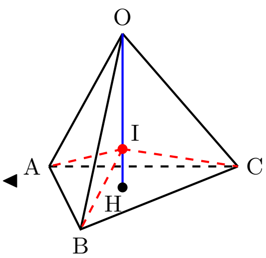




◀ 正四面体 OABC を三角錐に分割すると，4 つの三角錐の高さは内接球の半径になる．



◀



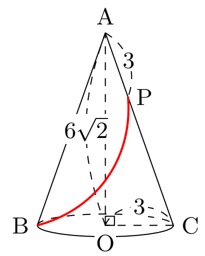
問題 I4.3.10 ★★★★ 解答 p.371

▶ 章末 I4.5

四面体 ABCD において，△BCD は 1 辺の長さが 4 の正三角形であり，$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADC}=90^\circ,\mathrm{AD}=2$ である．このとき，頂点 D から平面 ABC に下ろした垂線 DH の長さを求めよ．

例題 I4.3.11 空間図形における最短距離 ★★★

底面の中心が O で半径が 3，高さが $6\sqrt{2}$ の直円錐がある．直円錐の頂点を A，底面の直径の両端を B，C とし，線分 AC 上に AP = 3 となる点 P をとる．側面上において，点 B から点 P までに至る最短距離を求めよ．



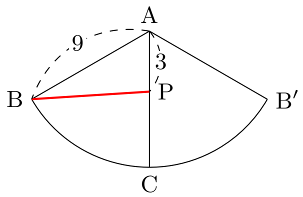
解説動画

数学 I
4.3

考え方 直円錐の側面が曲面であることから，そのまま考えようとしても最短距離を求めにくい．そこで，展開図を用いて，平面図形を取り出して考える．2 点 B，P の最短距離は，展開図における2 点を結ぶ線分の長さとなることから，線分 BP の長さを求めればよい．

解答

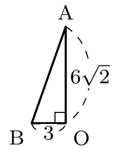
側面を直線 AB に沿って切り開いた展開図は，右の図のように，中心 A，半径 AB の扇形となる．



三角形 ABO において，BO = 3，AO = $6\sqrt{2}$ より，

$$AB = \sqrt{3^2 + (6\sqrt{2})^2} = 9$$

◀ 三平方の定理を用いる．



求める最短距離の長さは，展開図において，線分 BP の長さである．

弧 BCB′ の長さは，$2\pi \cdot 3 = 6\pi$

◀ 弧 BCB′ の長さは，底面の円の円周に等しい．

扇形の半径は 9 であるから，中心角 ∠BAB′ は，

$$\angle BAB' = 360^\circ \times \frac{6\pi}{2\pi \cdot 9} = 120^\circ$$

したがって，$\angle BAC = 60^\circ$

◀ $\angle BAC = \angle BAP = 60^\circ$

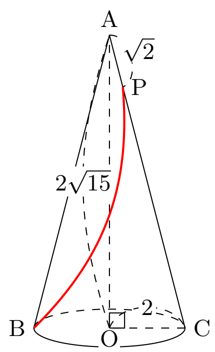
△ABP において，余弦定理より，

$$BP^2 = 9^2 + 3^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 90 - 54 \cdot \frac{1}{2} = 63$$

よって，BP > 0 より，BP = $\mathbf{3\sqrt{7}}$

問題 I4.3.11 ★★★ 解答 p.372

底面の中心が O で半径が 2，高さが $2\sqrt{15}$ の直円錐がある．直円錐の頂点を A，底面の直径の両端を B，C とし，線分 AC 上に AP = $\sqrt{2}$ となる点 P をとる．側面上において，点 B から点 P までに至る最短距離を求めよ．



節末問題 4.3 図形の計量

節末 I4.3.1 ★★ 解答（節末）p.373

▶ 例題 I4.3.2

半径 a の円に内接する正 n 角形の面積，および外接する正 n 角形の面積を，それぞれ a と n を用いて表せ．

節末 I4.3.2 ★★★ 解答（節末）p.374

▶ 例題 I4.3.3

$\triangle$ABC において，$\dfrac{\sin A}{13} = \dfrac{\sin B}{8} = \dfrac{\sin C}{7}$ が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ．

(2) $\triangle$ABC の内接円の半径が 1 のとき，$\triangle$ABC の面積，$\triangle$ABC の外接円の半径を求めよ．

節末 I4.3.3 ★★★ 解答（節末）p.375

▶ 例題 I4.3.5

円に内接する四角形 ABCD がある．$\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \sqrt{3}$, $\mathrm{DA} = 2$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{BAD}$ と対角線 BD の長さを求めよ．

(2) 2 つの対角線 AC と BD の交点を E とする．BE : ED と BE の長さを求めよ．

節末 I4.3.4 ★★★ 解答（節末）p.376

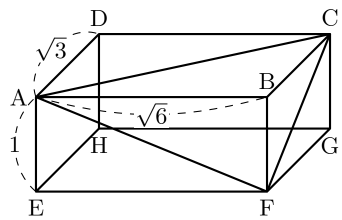
$\mathrm{AB} = \sqrt{6}$，$\mathrm{AD} = \sqrt{3}$，$\mathrm{AE} = 1$ である右の図のような直方体 ABCD − EFGH がある．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\angle\mathrm{ACF}$

(2) $\triangle$ACF の面積

(3) 四面体 BAFC の体積

(4) B から平面 AFC に下ろした垂線の長さ



節末 I4.3.5 ★★★ 解答（節末）p.376

▶ 例題 I4.3.9

底面の半径 $\sqrt{5}$ の直円錐に半径 1 の球が内接している．このとき，この直円錐の体積を求めよ．

章末問題 4 図形と計量

4.4 章末問題 4

章末 I4.1 ★★ 解答（章末）p.377

▶ 例題 I4.1.8

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\tan^3\theta + \frac{1}{\tan^3\theta}$ の値を求めよ．

章末 I4.2 ★★★★ 解答（章末）p.377

▶ 例題 I4.1.15 ▶ 例題 I4.1.16

数学 I 4.4

$\sin^2\theta + 2a\cos\theta - 3 = 0$ が $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲に解をもつための定数 a の値の範囲を求めよ．

章末 I4.3 ★★★ 解答（章末）p.378

三角形 ABC の辺 BC を $8:5$ に内分する点を D とする．$\mathrm{AB}=7$，$\mathrm{AC}=5\sqrt{3}$，$\mathrm{AD}=5$ であるとき，次の値を求めよ．

(1) $\angle\mathrm{ADB}$ の大きさ　　(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積

章末 I4.4 ★★★★ 解答（章末）p.379

1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC がある．辺 AB，AC 上に，それぞれ頂点とは異なる点 D，E を，$\mathrm{AD}=\mathrm{CE}$ を満たすようにとる．また，四角形 DBCE の面積を S とする．

(1) DE の長さの最小値を求めよ．

(2) 面積 S の最小値とそのときの AD の長さを求めよ．

章末 I4.5 ★★★ 解答（章末）p.380

▶ 例題 I4.3.10

1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD について，辺 BC 上に $\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=1:2$ となるように点 E をとり，辺 CD の中点を M，$\angle\mathrm{EAM}=\theta$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos\theta$　　(2) $\triangle\mathrm{AEM}$ の面積 S

Column 3 〜解説動画の視聴のすすめ〜

本書と YouTube チャンネル「Onemath」を活用するためのコツをお伝えします．例題の解説動画を視聴することで，より効率よく学習を進められます．動画を活用し，自分のペースで理解を深めてみてください．

【動画を流し見して全体像をつかむ】

YouTube チャンネル「Onemath」で提供されている解説動画を気軽に流し見してみましょう．習った（学んだ）内容を見ても良いですし，これから習う（学ぶ）単元の内容の様子見でも構いません．雰囲気や内容をざっと確認することで，全体像がつかむことができますし，動画を見ることによってより記憶を定着させることができます．

解説動画は One ちゃんの声？

【コメント欄で疑問を解決する】

動画ごとのコメント欄は，他の学習者と交流したり疑問を質問したりするための便利な場です．「この解説のこの部分がわからない」など，具体的な質問を投稿すれば，他の視聴者や著者からアドバイスをもらえるかもしれません．どんどんコメント欄で簡易的やり取りをして，気軽に意見や質問を行い，学びを広げましょう．

コメント欄で疑問を解決

【苦手な問題はお気に入り登録】

復習が必要な問題や特に難しいと感じた解説動画には，YouTube のお気に入り登録の機能を活用しましょう．気になるポイントをすぐに見返せるように整理しておくことで，効率的に弱点を克服できます．

【チャンネルの再生リストをフル活用】

チャンネル内の再生リストは，分野ごとや学習のレベルに応じて整理されています．自分のレベルや目標に合わせて再生リストを順番に視聴しましょう．

【視聴履歴を復習ツールとして利用】

YouTube の視聴履歴を復習ツールとして使うのも便利です．過去に見た動画を振り返り，理解が不十分だった内容や忘れがちなポイントを重点的に再確認することで，より効率的に知識を蓄積できます．

繰り返し見て記憶を定着

【学んだ内容をアウトプットして理解を深める】

解説動画を視聴してある程度理解できたら，ぜひ自分の言葉で説明し直してみましょう．ノートやアプリに要点をまとめたり，SNS（気軽に投稿してください）や友人に「こんなふうに理解したよ」と共有するだけでも，アウトプットの過程でと自分の理解度を客観的に把握できます．複数人で学んでいる場合は，お互いに解説したり問題を出し合ったりすると，さらに理解が深まります．動画をただ受け身で眺めるのではなく，自分なりの言葉で表現することで，記憶と理解をグッと強固にする効果があります．ぜひ積極的に試してみてください．

これらのアイディアを取り入れることで，本書と YouTube チャンネルの相乗効果を最大限に引き出し，楽しく効率的に学習を進められるでしょう．ぜひ，毎日の学習習慣に組み込んでみてください！

第 5 章　データの分析

5 章：データの分析（再生リスト）：

5　データの分析

1 節 データの整理と分析（pp.196-214）

例題（問題）一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I5.1.1	★		
I5.1.2	★		
I5.1.3	★		
I5.1.4	★★		
I5.1.5	★★		
I5.1.6	★★		
I5.1.7	★★		
I5.1.8	★★		
I5.1.9	★★		
I5.1.10	★★		
I5.1.11	★★		
I5.1.12	★		
I5.1.13	★★		
I5.1.14	★★		

節末問題 5.1

番号	難易度	1 回目	2 回目
I5.1.1	★★		
I5.1.2	★★		
I5.1.3	★★		

章末問題 5

番号	難易度	1 回目	2 回目
I5.1	★★		
I5.2	★★		
I5.3	★★★		
I5.4	★★★		
I5.5	★★★		

チェック例

○ · · · 考え方を理解し，解くことができた．　△ · · · 理解が不十分である．　× · · · 解くことができなかった．

5.1 データの整理と分析

5.1.1 データの整理

(1) **変量** $\cdots$ ある特性を数量的に表したもののこと．

(2) **データ** $\cdots$ 調査や実験などから得られた変量の観測値や測定値をまとめたもののこと．

(3) **度数分布表** $\cdots$ データの区間を設定し，その区間に入るデータの値の個数を表したもののこと．

(4) **階級** $\cdots$ 度数分布表で設定される区間のこと．区間の幅を**階級の幅**，階級の中央の値を**階級値**という．

(5) **度数** $\cdots$ 各階級に含まれる値の個数のこと．

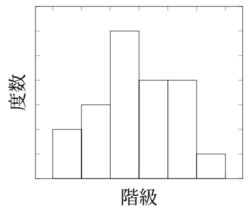
(6) **相対度数** $\cdots$ 各階級における度数の全体に対する割合のこと．

(7) **累積度数** $\cdots$ 各階級に対し，最初の階級からその階級までの度数を合計したもののこと．

(8) **累積相対度数** $\cdots$ 最初の階級からその階級までの相対度数を合計したもののこと．

(9) **ヒストグラム**

度数分布表をもとに，縦軸に度数をとり，各階級の度数を柱状のグラフで表したもののこと．



◀ 階級の幅を狭くすると，与えられた元のデータに近い度数分布を得ることができるが，その分だけデータの全体の分布の特徴を把握することが難しくなる．逆に，階級の幅を広くすると，データの全体の特徴を把握しやすくなるが，その分だけ分布の詳細な部分を理解することが難しくなる．

数学 I 5.1

5.1.2 データにおける代表値

(1) **平均値** $\cdots$ 変量 x のとる値が n 個で，その値が，x_1，x_2，$\ldots$，x_n であるとき，それらの総和を n で割った値を平均値といい，$\overline{x}$ で表す．

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

◀ $(\text{平均値}) = \frac{(\text{データの値の総和})}{(\text{データの値の個数})}$

(2) **中央値（メジアン）** $\cdots$ 変量 x の n 個の値を小さい方から順に並べたとき，中央に位置する値のこと．

◀ 同じ値が重複する場合も，省略せずにすべて並べる．

(3) **最頻値（モード）** $\cdots$ データの値の中で，度数が最も大きい値のこと．

5.1.3　四分位数

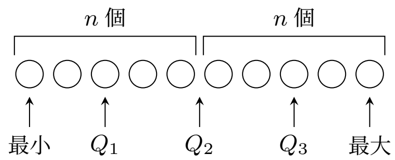
データを大きさの順に並べて, 4 等分に位置する 3 つの値のことを**四分位数**という．

第 1 四分位数 Q_1 $\cdots$ 最小値を含む n 個のデータの中央値のこと．

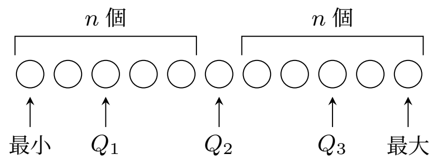
第 2 四分位数 Q_2 $\cdots$ 中央値のこと．

第 3 四分位数 Q_3 $\cdots$ 最大値を含む n 個のデータの中央値のこと．

データの個数が偶数（$2n$）個の場合



データの個数が奇数（$2n+1$）個の場合



◀ 最小値，第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数，最大値の 5 つの値をまとめて 5 数要約という．

5.1.4　箱ひげ図

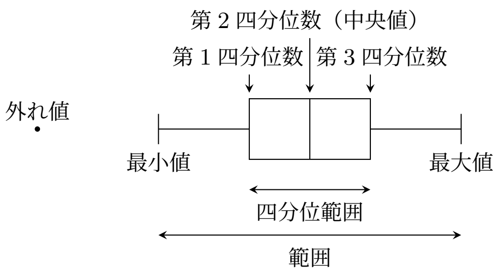
(1) **範囲** ＝ 最大値 − 最小値

(2) **四分位範囲** ＝ 第 3 四分位数 − 第 1 四分位数

(3) **四分位偏差** ＝ 四分位範囲 ÷2

(4) 5 数要約（最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値）を表すグラフを**箱ひげ図**という．

(5) **外れ値** $\cdots$ 他の値から極端にかけ離れた値のこと．外れ値の目安は，第 1 四分位数から小さい方（または第 3 四分位数から大きい方）へ四分位範囲の 1.5 倍以上離れていることである．



◀ 箱ひげ図上で，平均値を ＋ で表すこともある．また，箱ひげ図を 90° 回転させて，縦向きに示すこともある．

5.1.5　分散と標準偏差

変数 x についてのデータの値が n 個の値 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ であり，$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の平均値を $\overline{x}$ とする．

◀ $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

(1) **偏差** $\cdots$ 各データの値から平均値を引いた値のこと．

(2) **偏差平方** $\cdots$ 偏差を 2 乗した値のこと．

(3) **分散 s^2** $\cdots$ 偏差平方の平均値のこと．

(4) **標準偏差 s** $\cdots$ 分散の正の平方根のこと．

(5)

$$\text{分散}\qquad s^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$$

$$\text{標準偏差}\qquad s = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

◀ s は標準偏差（standard deviation）の頭文字である．なお，SD や σ と表すこともある．

分散は，$\boldsymbol{s^2 = (x^2}$ **の平均値**$\boldsymbol{) - (x}$ **の平均値**$\boldsymbol{)^2}$ により求めることもできる．

数学 I
5.1

One math

5.1.6 変量の変換

変量 x のデータに基づき $y=ax+b$ によって新たな変量 y のデータが得られるとき，x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$，分散をそれぞれ ${s_x}^2$，${s_y}^2$，標準偏差をそれぞれ s_x，s_y とすると

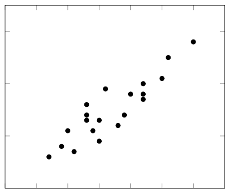
◀ a，b は定数とする．

$$\overline{y}=a\overline{x}+b,\quad {s_y}^2=a^2{s_x}^2,\quad s_y=|a|s_x$$

このように，関係式 $y=ax+b$ により変量 x を別の変量 y に変換することを，**変量の変換**という．

5.1.7 データの相関

対応する 2 つの変量 x，y があり，x，y はそれぞれ n 個の値 x_1，x_2，$\ldots$，x_n および y_1，y_2，$\ldots$，y_n をとり，その平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とする．



(1) **散布図** $\cdots$ 平面上に，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\ldots$，$(x_n,\ y_n)$ を座標とする点をとった図のこと．

(2) **相関** $\cdots$ 対応する 2 つの変量 x，y の間において，一方が増加するときに他方も増加（または他方が減少）する傾向が見られる場合，この 2 つの変量 x，y の間には**正の相関関係（減少する場合は負の相関関係）**があるという．散布図において，データの分布が直線に近づくほど**相関関係が強い**といい，広く散らばるほど**相関関係が弱い**という．

◀ 正の相関がある（負の相関がある）ということもある．なお，そのどちらにも当てはまらないとき，相関関係がない（相関がない）という．

(3) **共分散** $\cdots$ 2 つの変量 x，y のそれぞれの偏差の積の平均値のこと．

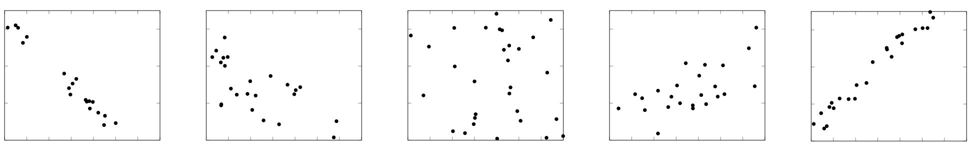
$$\boldsymbol{s_{xy}=\frac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\right\}}$$

(4) **相関係数** $\cdots$ 共分散を 2 つの変量 x と y の標準偏差で割った値のこと．

◀ $\dfrac{(x\text{と}y\text{の共分散})}{(x\text{の標準偏差})\times(y\text{の標準偏差})}$

$$\begin{aligned}r&=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\\&=\frac{\dfrac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\right\}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right\}}\sqrt{\dfrac{1}{n}\left\{(y_1-\overline{y})^2+\cdots+(y_n-\overline{y})^2\right\}}}\\&=\frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{\sqrt{\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right\}\left\{(y_1-\overline{y})^2+\cdots+(y_n-\overline{y})^2\right\}}}\end{aligned}$$

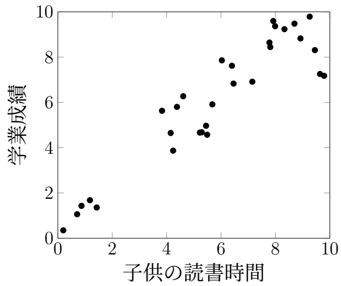
相関係数 r は常に $\boldsymbol{-1\leqq r\leqq 1}$ を満たし，正の相関関係が強いほど相関係数は 1 に近づき，負の相関関係が強いほど相関係数は -1 に近づく．



$r=-1$ 負の相関が強い　　$r=0$　　正の相関が強い $r=1$

5.1.8 相関関係と因果関係

ある調査で，子供の読書時間と学業成績の間に正の相関関係（相関係数 0.85）が見られたとする．この 2 つのデータの間には正の相関関係が認められる．しかし，読書が直接成績を向上させるのか，または成績が良い子供が読書を好むのかは明確ではない．親の教育レベルや家庭の教育環境など，他の要因も影響しているかもしれない．



◀ 因果関係が認められるとは断定できない．

一方が原因となりもう一方が結果となるような関係を**因果関係**という．一般に，上の例からもわかるように，2 つのデータの間に相関があるからといって，必ずしも因果関係があるとはいえない．

5.1.9 仮説検定

(1) **仮説検定の考え方**

得られたデータをもとにして母集団に対する仮説を立て，それが正しいかどうかを判断する統計的手法を**仮説検定**という．

(2) **仮説検定の手順**

ある主張が正しいかどうか判断するための仮説検定は，次のような手順で行う．

[1] 正しいかどうか判断したい主張に対し，その主張に反する仮説を立てる．

[2] 立てた仮説のもとで，得られたデータがどの程度の確率で起こるかを求める．

[3] 仮説が正しいかどうかをもとに，主張が正しいかどうかを判断する．

◀ 正しいかどうか判断したい主張を対立仮説といい，それに反する仮定として立てた主張を帰無仮説という（数学 B で学習する）．

5.1.10 統計的探求プロセス

実社会では，多様な社会問題に応じて，統計的手法を用いた問題解決が行われている．そのときには，次のような**統計的探求プロセス**を考えることが大切である．

[1] 問題の発見 $\cdots$ 解決が必要な事項を明確にし，統計で扱える問題を設定する．

[2] 調査の計画 $\cdots$ 設定された問題に対して，集めるべきデータとその集める方法を考える．

[3] データの収集 $\cdots$ 計画に従いデータを集め，表やグラフなどに整理する．

[4] 分析 $\cdots$ 目的やデータの種類に応じてグラフにまとめたり，データに関する数値を計算したりして，特徴や傾向を把握する．

[5] 結論 $\cdots$ 見出した特徴や傾向から結論をまとめ，さらなる課題や改善点を見いだす．

◀ 実社会のデータは一般的に大量であり，手で計算を行うと対処しきれないことがほとんどである．そのような大量のデータを扱うときは，コンピュータなどの情報機器を用いて計算を行うとよい．

例題 I5.1.1 度数分布表，ヒストグラム ★

次のデータは，ある月の A 市の毎日の降水量の記録である．

5.7,	12.1,	3.1,	9.4,	7.6,	0.3,	2.5,	4.5,	0.0,	6.2,
0.5,	8.0,	0.0,	4.7,	1.5,	3.8,	5.1,	7.2,	6.4,	6.4,
3.2,	2.6,	1.0,	8.8,	5.9,	0.0,	2.1,	1.0,	3.1,	6.5 (mm)

解説動画

(1) 階級の幅を 2 mm として，度数分布表を作成せよ．ただし，階級は 0 mm から区切り始めるものとする．

(2) (1) で作った度数分布表をもとにヒストグラムをかけ．

考え方

(1) 各階級に入るデータの数を数え，度数分布表を作成する．

(2) (1) の度数分布表をもとに，柱状のヒストグラムで各階級の度数を表す．

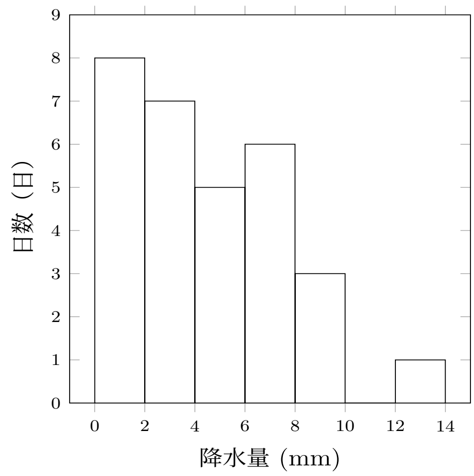
数学 I 5.1

解答

(1)

階級 (mm)	度数
0 以上 2 未満	8
2 ～4	7
4 ～6	5
6 ～8	6
8 ～10	3
10 ～12	0
12 ～14	1
計	30

(2)



◀ 0mm 以上 2mm 未満から考え，7 個の階級に分ける．

問題 I5.1.1 ★ 解答 p.381

次のデータは，ある月の A 市の毎日の降水量の記録である．

3.5,	7.2,	2.1,	9.1,	6.1,	4.3,	2.9,	3.7,	5.8,	0.0,
2.1,	8.4,	0.7,	1.2,	5.0,	4.9,	3.3,	6.7,	7.8,	2.5,
1.0,	6.2,	1.6,	4.0,	2.3,	0.8,	3.9,	1.5,	0.0,	5.5 (mm)

(1) 階級の幅を 2 mm として，度数分布表を作成せよ．ただし，階級は 0 mm から区切り始めるものとする．

(2) (1) で作った度数分布表をもとにヒストグラムをかけ．

例題 I5.1.2 平均値，中央値 ★

次のデータは，運動部 5 人，文化部 6 人の 1 日の運動時間の記録である．

運動部：1.5，2.0，2.5，1.0，3.0（時間）　　文化部：0.5，1.0，0.0，0.5，1.5，2.0（時間）

(1) 運動部のデータの平均値と文化部のデータの平均値をそれぞれ求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．

(2) 運動部と文化部を合わせた 11 人のデータの平均値を求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．

(3) 運動部のデータの中央値と文化部のデータの中央値をそれぞれ求めよ．

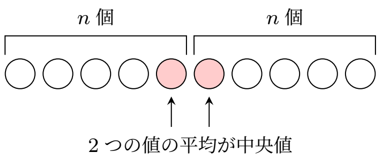
解説動画

考え方

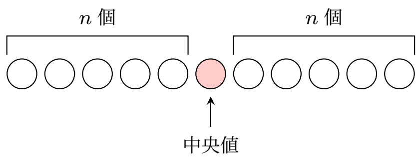
(1) $(\text{平均値}) = \frac{(\text{データの値の総和})}{(\text{データの値の個数})}$ であることを利用する．

(3) データの値を小さい（大きい）方から順に並べたとき，中央の位置にある値が中央値である．

データの個数が偶数（$2n$）個の場合



データの個数が奇数（$2n+1$）個の場合



解答

(1) 運動部の平均値は，$\frac{1.5+2.0+2.5+1.0+3.0}{5} = \frac{10}{5} = \mathbf{2.0}$ **(時間)**

文化部の平均値は，$\frac{0.5+1.0+0.0+0.5+1.5+2.0}{6} = \frac{5.5}{6} \fallingdotseq \mathbf{0.92}$ **(時間)**

◀ $(\text{平均値}) = \frac{(\text{データの値の総和})}{(\text{データの値の個数})}$

(2) 運動部と文化部を合わせた 11 人のデータの平均値は，

$$\frac{10+5.5}{11} = \frac{15.5}{11} \fallingdotseq \mathbf{1.41}\ \textbf{(時間)}$$

◀ (1) より，運動部のデータの総和は 10，文化部のデータの総和は 5.5 である．

(3) 運動部のデータの中央値は，データを小さい順に並べると，

$$1.0,\ 1.5,\ 2.0,\ 2.5,\ 3.0$$

◀ データの個数が奇数個（5 個）である．

よって，運動部の中央値は **2.0** 時間

文化部のデータの中央値は，データを小さい順に並べると，

$$0.0,\ 0.5,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0$$

◀ データの個数が偶数個 (6 個) である．

よって，中央値は 3 番目の値と 4 番目の値の平均値であるから，$\frac{0.5+1.0}{2} = \mathbf{0.75}$ **(時間)**

問題 I5.1.2 ★ 解答 p.381

次のデータは，A クラス 6 人，B クラス 5 人の 10 点満点のテストの得点である．

A クラス：7，8，6，9，5，8（点）　　B クラス：4，5，6，7，3 （点）

(1) A クラスのデータの平均値と B クラスのデータの平均値をそれぞれ求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．

(2) A クラスと B クラスを合わせた 11 人のデータの平均値を求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．

(3) A クラスのデータの中央値と B クラスのデータの中央値をそれぞれ求めよ．

例題 I5.1.3 平均値の値 ★

右の表は，ある家庭の 10 日間の 1 日の水道使用量（整数）の記録である．
(1) このデータの平均値の最小値と最大値を求めよ．
(2) 10 日間の水道使用量の平均は 453（L）であり，各日の水道使用量は x，710，620，565，525，450，430，360，315，270 (L) であった．x の値を求めよ．

使用量の階級（L）	日数
200 以上 300 未満	2
300 ～ 400	2
400 ～ 500	2
500 ～ 600	2
600 ～ 700	1
700 ～ 800	1
計	10

解説動画

考え方 (1) データの平均値の最大値（最小値）は，データのそれぞれの値が各階級の最大値（最小値）をとったときの平均値である．

解答

(1) データの平均値が最小となるのは，データのそれぞれの値が各階級の最小の値となるときであるから，

$$\frac{1}{10}(200\times2+300\times2+400\times2+500\times2+600\times1+700\times1)=410$$

よって，平均値の **最小値は，410 (L)**
データの平均値が最大となるのは，データのそれぞれの値が各階級の最大の値となるときであるから，

$$\frac{1}{10}(299\times2+399\times2+499\times2+599\times2+699\times1+799\times1)=509$$

◀ 使用量は整数であるから，例えば 200 以上 300 未満の階級において，最大の値（最大値）は 299 である．

よって，平均値の **最大値は，509 (L)**
【別解】データの平均値が最大となるのは，データのそれぞれの値が最小の値より 99L だけ大きいときであるから，平均使用量も 99L 高くなり，$410+99=$ **509 (L)**
(2) 合計使用量を考えると，

$$x+710+620+565+525+450+430+360+315+270=453\times10$$

したがって，$x+4245=4530$
よって，$x=$ **285**

問題 I5.1.3 ★ 解答 p.382

右の表は，ある家庭の 10 日間の 1 日の電気使用量（整数）の記録である．
(1) このデータの平均値の最小値と最大値を求めよ．
(2) 10 日間の電気使用量の平均は 12（kWh）であり，各日の電気使用量は x，18，15，13，12，10，10，8，7，6 (kWh) であった．x の値を求めよ．

使用量の階級（kWh）	日数
5 以上 10 未満	3
10 ～ 15	4
15 ～ 20	3
計	10

数学 I 5.1

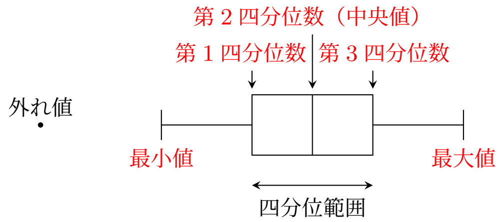
例題 I5.1.4 四分位数と箱ひげ図 ★★

次のデータは，ある人が過去 12 ヶ月間に記録した 1 ヶ月の歩数（万歩）である．このデータの箱ひげ図をかけ．ただし，外れ値がある場合は，外れ値を示して箱ひげ図をかけ．

2.3，2.8，2.5，3.4，2.9，4.2，3.7，3.0，4.6，4.8，5.0，7.5 (万歩)

解説動画

考え方 外れ値の目安は，第 1 四分位数から小さい方，もしくは第 3 四分位数から大きい方へ四分位範囲の 1.5 倍以上離れていることである．箱ひげ図をかくために，5 数要約（最小値，第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数，最大値）と四分位範囲を調べる．



解答

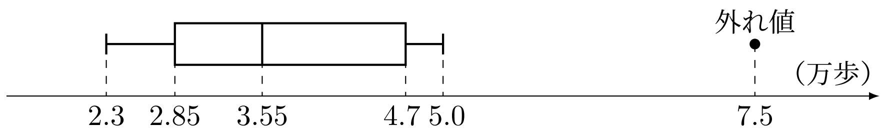
与えられたデータを小さい順に並べると，次のようになる．

2.3，2.5，2.8，2.9，3.0，3.4，3.7，4.2，4.6，4.8，5.0，7.5

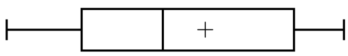
したがって，最大値は 7.5 万歩，最小値は 2.3 万歩
第 1 四分位数は，$Q_1 = \frac{2.8+2.9}{2} = 2.85$ (万歩)
第 2 四分位数（中央値）は，$Q_2 = \frac{3.4+3.7}{2} = 3.55$ (万歩)
第 3 四分位数は，$Q_3 = \frac{4.6+4.8}{2} = 4.7$ (万歩)
四分位範囲は，$Q_3 - Q_1 = 4.7 - 2.85 = 1.85$ (万歩)
ここで，$1.85 \times 1.5 = 2.775$ より，外れ値の目安は，$2.85 - 2.775 = 0.075$ より，0.075 以下か，$4.7 + 2.775 = 7.475$ より，7.475 以上のデータである．
ゆえに，7.5 は外れ値となる．
よって，箱ひげ図は次のようになる．

◀ 四分位範囲の 1.5 倍以上離れているか否かで判断する．

◀ 外れ値を除いた最大の値が最大値となる．また，求めた 5 数要約はそのまま示す．



【余談】箱ひげ図に平均点をかき入れる場合は，右の図のように「+」をかき入れる．



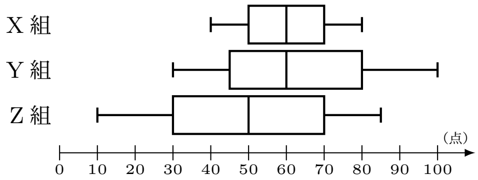
問題 I5.1.4 ★★ 解答 p.382

次のデータは，ある学生が過去 12 ヶ月間に記録した月ごとの読書冊数である．このデータの箱ひげ図をかけ．ただし，外れ値がある場合は，外れ値を示して箱ひげ図をかけ．

13，15，14，17，16，19，18，20，21，23，25，32 (冊)

例題 I5.1.5 箱ひげ図の読み取り ★★

右の図は，生徒数がいずれも 30 人の X 組，Y 組，Z 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．



解説動画

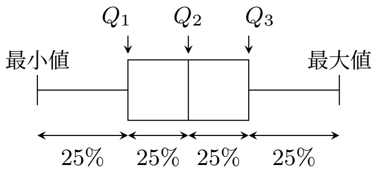
(1) 上位 8 人の散らばりが最も大きい組はどれか．

(2) 55 点以下の生徒が 15 人以上いる組はどれか．

(3) 65 点をとった生徒が上位から 10 番目，35 点をとった生徒が上位から 20 番目であった組はどれか．

(4) 全体の散らばりが最も小さい組はどれか．

考え方 箱ひげ図からは，データの最大値，最小値，四分位数 Q_1，Q_2，Q_3 を読み取ることができる（箱ひげ図はデータの傾向を大雑把に見ることができる）．また，箱ひげ図の長さから散らばり具合を判断することができる．



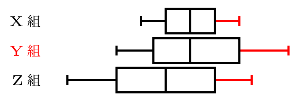
数学 I
5.1

解答

各組の生徒数は 30 人であるから，中央値は点数の低い方から 15 番目と 16 番目の得点の平均値である．また，第 1 四分位数は点数の低い方から 8 番目，第 3 四分位数は点数の高い方から 8 番目の得点である．

(1) 上位 8 人の散らばりが最も大きい，つまり，箱ひげ図の第 3 四分位数から最大値までが最も長い組であるから，**Y 組**

◀ 長さから散らばり具合を判断することができる．



(2) 生徒 15 人は，各組の生徒数 30 人の 50%（半分）に相当する．つまり，中央値が 55 点以下の組であるから，**Z 組**

(3) 上位から 10 番目は中央値 Q_2 と第 3 四分位数 Q_3 の間に位置し，上位から 20 番目は第 1 四分位数 Q_1 と中央値 Q_2 の間に位置する．箱ひげ図が，$Q_1 < 35 < Q_2 < 65 < Q_3$ となっている組であるから，**Z 組**

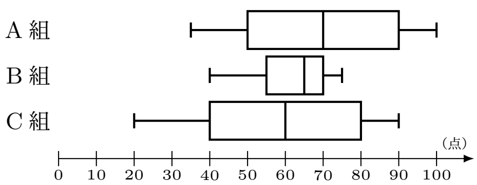
(4)全体の散らばりは，範囲で決まるから，全体の散らばりが最も小さい，つまり，全体が最も短い組であるから，**X 組**

◀ 範囲の大小から散らばりを考えることができる．

問題 I5.1.5 ★★ 解答 p.383

▶ 節末 I5.1.1

右の図は，生徒数がいずれも 36 人の A 組，B 組，C 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．



(1) 上位 9 人の散らばりが最も小さい組はどれか．

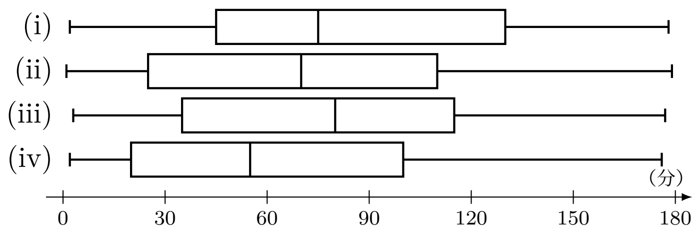
(2) 70 点以上の生徒が 18 人以上いる組はどれか．

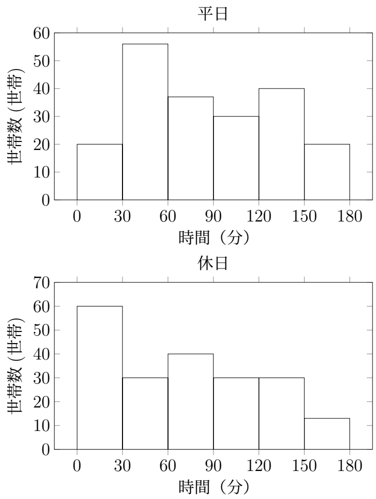
(3) 75 点をとった生徒が上位から 14 番目，45 点をとった生徒が上位から 23 番目であった組はどれか．

(4) 全体の散らばりが最も大きい組はどれか．

例題 I5.1.6 ヒストグラムと箱ひげ図 ★★

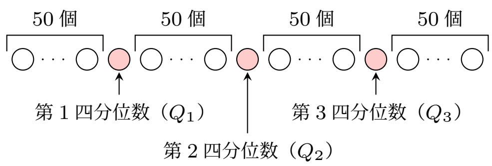
右のヒストグラムは，ある地域の 203 世帯について，ある電化製品の前日の電力使用時間（分）を調査した結果である．平日，休日の電力使用時間に対応する箱ひげ図を，左下の (i)〜(iv) からそれぞれ 1 つずつ選べ．





解説動画

考え方 ヒストグラムから，データの最大値，最小値，四分位数 (Q_1，Q_2，Q_3) を読み取り，読み取った内容を満たしている箱ひげ図を選ぶ．右の図のように，51 番目，102 番目，153 番目の値がそれぞれ第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数であることがわかる．



解答

世帯数は 203 世帯であるから，データの値を小さい順に並べたとき，51 番目の値が第 1 四分位数，102 番目の値が第 2 四分位数，153 番目の値が第 3 四分位数である．ヒストグラムより，51 番目，102 番目，153 番目の値が含まれる階級は次のようになる．

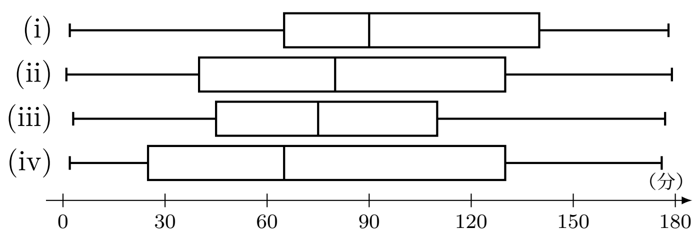
◀ ヒストグラムから 51 番目，102 番目，153 番目の値の階級を読み取る．

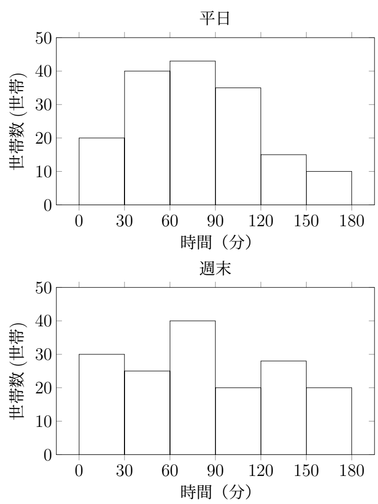
	最小値	51 番目の値	102 番目の値	153 番目の値	最大値
平日	0 〜 30	30 〜 60	60 〜 90	120 〜 150	150 〜 180
休日	0 〜 30	0 〜 30	60 〜 90	90 〜 120	150 〜 180

よって，平日，休日の電力使用時間の箱ひげ図はそれぞれ **平日は (i)，休日は (ii)**

問題 I5.1.6 ★★ 解答 p.384

右のヒストグラムは，ある地域の 163 世帯について，ある電化製品の週末の電力使用時間（分）を調査した結果である．平日，週末の電力使用時間に対応する箱ひげ図を，左下の (i)〜(iv) からそれぞれ 1 つずつ選べ．





例題 I5.1.7 分散と標準偏差 ★★

下の表は A，B の 2 つの倉庫で 1 日あたりの荷物の搬入量（単位: 箱）を 10 日間調査した結果である．

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 倉庫の搬入量 (箱)	4	6	5	3	7	5	6	5	4	5
B 倉庫の搬入量 (箱)	3	5	4	3	4	5	4	3	5	4

解説動画

(1) A 倉庫，B 倉庫それぞれの搬入量の平均値 $\overline{a}$，$\overline{b}$，分散 ${s_a}^2$，${s_b}^2$，標準偏差 s_a，s_b を求めよ．ただし，$\sqrt{2}=1.41$，$\sqrt{3}=1.73$，$\sqrt{5}=2.24$ とし，標準偏差は小数第 2 位を四捨五入して答えよ．

(2) (1) から，A 倉庫，B 倉庫の 2 つの倉庫の搬入量の散らばりはどちらが大きいか．

考え方

(1) 変量 x のデータが n 個で，その値が，x_1，x_2，…，x_n であるとき，平均値を $\overline{x}$ とする．このとき，分散 $s^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}\cdots$(i) と標準偏差 $s=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$ を求める．

なお，分散は，$s^2=(x^2$ の平均値$)-(x$ の平均値$)^2\cdots$(ii) により求めることもできる．x の平均値が整数ではないときは，(i) ではなく (ii) を用いた方が計算が楽になることが多い．

(2) 標準偏差（分散）が大きいほど，データの散らばりも大きくなることを利用する．

解答

(1)
$$\overline{a}=\frac{1}{10}(4+6+5+3+7+5+6+5+4+5)=\mathbf{5\ (箱)}$$

◀ 平均値は整数である．

$$\begin{aligned}{s_a}^2=&\frac{1}{10}\{(4-5)^2+(6-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2+(7-5)^2\\&+(5-5)^2+(6-5)^2+(5-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2\}\\=&\mathbf{1.2}\end{aligned}$$

◀ $s^2=(x^2$ の平均値$)-(x$ の平均値$)^2$ を用いて求めてもよい．

$$s_a=\sqrt{1.2}=\frac{\sqrt{120}}{10}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{5}\fallingdotseq\mathbf{1.1\ (箱)}$$

$$\overline{b}=\frac{1}{10}(3+5+4+3+4+5+4+3+5+4)=\mathbf{4\ (箱)}$$

$$\begin{aligned}{s_b}^2=&\frac{1}{10}\{(3-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2\\&+(5-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2\}\\=&\mathbf{0.6}\end{aligned}$$

$$s_b=\sqrt{0.6}=\frac{\sqrt{60}}{10}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{5}\fallingdotseq\mathbf{0.8\ (箱)}$$

(2) $s_a>s_b$ より，**A 倉庫の方が搬入量の散らばりが大きい．**

問題 I5.1.7 ★★ 解答 p.385

下の表は A，B の 2 つの倉庫で 1 日あたりの荷物の搬入量（単位: 箱）を 10 日間調査した結果である．

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 倉庫の搬入量 (箱)	8	6	6	7	7	8	8	7	6	7
B 倉庫の搬入量 (箱)	5	4	5	6	4	5	5	7	4	5

(1) A 倉庫，B 倉庫それぞれの搬入量の平均値 $\overline{a}$，$\overline{b}$，分散 ${s_a}^2$，${s_b}^2$，標準偏差 s_a，s_b を求めよ．ただし，$\sqrt{3}=1.73$，$\sqrt{5}=2.24$ とし，標準偏差は小数第 2 位を四捨五入して答えよ．

(2) (1) から，A 倉庫，B 倉庫の 2 つの倉庫の搬入量の散らばりはどちらが大きいか．

例題 I5.1.8 データの値の決定 ★★

右の表は会社 A と会社 B の 4 日間における商品の販売数のデータである．
(1) 会社 A の販売数の平均値と分散を求めよ．
(2) 会社 B の 1 日目から 4 日目までの販売数の平均値は 10 個，分散は 8 であるとき，会社 B の販売数 a，b を求めよ．ただし，$a<b$ とする．

日数	会社 A	会社 B
1	4	a
2	7	14
3	6	10
4	5	b

解説動画

考え方 データ x_1，x_2，$\ldots$，x_n の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 とすると，

$$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$$

つまり，分散は，$s^2=(x^2$ の平均値$)-(x$ の平均値$)^2$ により求めることができる．x の平均値が整数ではないときは，偏差を 2 乗した値の平均 $s^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$ で求めようとすると，計算に手間が掛かるので注意すること．

解答

(1) 会社 A の販売数の平均値は，

$$\frac{1}{4}(4+7+6+5)=\mathbf{5.5}\ \textbf{(個)}$$

会社 A の販売数の分散は，

$$\frac{1}{4}\left(4^2+7^2+6^2+5^2\right)-5.5^2=31.5-30.25=\mathbf{1.25}$$

◀ $s^2=(x^2$ の平均値$)-(x$ の平均値$)^2$ を用いて求めている．なお，
$\frac{1}{4}\{(4-5.5)^2+(7-5.5)^2+\cdots\}$
と偏差を 2 乗した値を考えて求めてもよいが，計算に手間が掛かる．

(2) 平均値が 10 個であるから，

$$\frac{1}{4}(a+14+10+b)=10$$

したがって，$a+b=16\cdots$(i)
分散が 8 であるから，

$$\frac{1}{4}\left\{(a-10)^2+(14-10)^2+(10-10)^2+(b-10)^2\right\}=8$$

ゆえに，$(a-10)^2+(b-10)^2=16\cdots$(ii)
(i) より，$b=16-a$ を (ii) に代入すると，$a^2-16a+60=0$
よって，$a=6$，10
これを (i) に代入すると，$a<b$ より，$a=\mathbf{6}$，$b=\mathbf{10}$

◀ b を代入して展開し，整理する．

問題 I5.1.8 ★★ 解答 p.386

▶ 章末 I5.1 ▶ 章末 I5.2

右の表はクラス A とクラス B の 4 日間における生徒の読書ページ数のデータである．
(1) クラス A の読書ページ数の平均値と分散を求めよ．
(2) クラス B の 1 日目から 4 日目までの読書ページ数の平均値は 12 ページ，分散は 30.5 であるとき，クラス B の読書ページ数 a，b を求めよ．ただし，$a<b$ とする．

日数	クラス A	クラス B
1	5	a
2	8	16
3	7	12
4	6	b

例題 I5.1.9 データの修正 ★★

次のデータは，ある店舗のある月ごとの売上個数を並べたものである．

20，21，19，25，30，20，32，35，24，27，25，22 （個）

(1) このデータの平均値を求めよ．
(2) このデータに誤りが見つかり，正しくは 22 個が 27 個，35 個が 30 個であった．この誤りを修正すると，平均値，分散は，修正前から増加するか，減少するか，変化しないかを答えよ．

解説動画

考え方 (2) は，分散は偏差を 2 乗した値の平均であるので，計算せずに（分散の値を具体的に導かずに）答えを導くことができる．修正前のデータと修正後のデータのみを比較し，偏差の 2 乗の和を考えればよい．

解答

(1) $\frac{1}{12}(20+21+19+25+30+20+32+35+24+27+25+22)=$ **25 (個)**
(2) $22+35=27+30$ であるから，データの総和は変わらず，平均値は修正前と同じである．
よって，修正後の平均値は**変化しない．**
また，修正前の 2 つのデータの偏差の 2 乗の和は，

$$(22-25)^2+(35-25)^2=109$$

修正後の 2 つのデータの偏差の 2 乗の和は，

$$(27-25)^2+(30-25)^2=29$$

よって，偏差の 2 乗の総和は減少するため，分散は修正前より**減少する．**

◀ 平均値が修正前と修正後で一致しているから，修正していない 10 ヶ月分のデータは，偏差の 2 乗の値に変化はない．

問題 I5.1.9 ★★ 解答 p.387　▶ 節末 I5.1.2

次のデータは，あるクラスの 12 人の生徒があるテストで得た点数を並べたものである．

80，85，90，88，76，94，89，92，81，84，87，80 （点）

(1) このデータの平均値を求めよ．
(2) このデータに誤りが見つかり，正しくは 92 点が 88 点，94 点が 98 点であった．この誤りを修正すると，平均値，分散は，修正前から増加するか，減少するか，変化しないかを答えよ．

例題 I5.1.10 変量の変換 ★★

変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ が $\overline{x}=30$，分散 ${s_x}^2=20$ であるとする．このとき，次の式によって得られる変量 y のデータについて，平均値 $\overline{y}$，分散 ${s_y}^2$，標準偏差 s_y を求めよ．ただし，$\sqrt{5}=2.24$ とし，標準偏差は小数第 2 位を四捨五入して，小数第 1 位まで求めよ．

(1) $y=x+10$　(2) $y=4x$　(3) $y=-3x+4$　(4) $y=\frac{x-30}{2\sqrt{5}}$

解説動画

考え方 a，b は定数とする．変量 x のデータから $y=ax+b$ によって変量 y のデータが得られるとき，x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$，分散をそれぞれ ${s_x}^2$，${s_y}^2$，標準偏差をそれぞれ s_x，s_y とすると，次の表のようにまとめられる．

変量	平均値	分散	標準偏差
x	$\overline{x}$	${s_x}^2$	s_x
$y=ax+b$	$\overline{y}=a\overline{x}+b$	${s_y}^2=a^2{s_x}^2$	$s_y=\lvert a\rvert s_x$

平均値 $\overline{y}=a\overline{x}+b$，分散 ${s_y}^2=a^2{s_x}^2$，標準偏差 $s_y=|a|s_x$ を利用して，それぞれの値を求める．

数学 I 5.1

解答

(1) $\overline{y}=\overline{x}+10=30+10=\mathbf{40}$

${s_y}^2=1^2\times{s_x}^2=\mathbf{20}$

$s_y=1\times s_x=\sqrt{20}=2\sqrt{5}=4.48 \fallingdotseq \mathbf{4.5}$

(2) $\overline{y}=4\overline{x}=4\times 30=\mathbf{120}$

${s_y}^2=4^2\times{s_x}^2=16\times 20=\mathbf{320}$

$s_y=4\times s_x=4\times\sqrt{20}=8\sqrt{5}=17.92 \fallingdotseq \mathbf{17.9}$

(3) $\overline{y}=-3\overline{x}+4=-3\times 30+4=-90+4=\mathbf{-86}$

${s_y}^2=(-3)^2\times{s_x}^2=9\times 20=\mathbf{180}$

$s_y=|-3|\times s_x=3\times\sqrt{20}=6\sqrt{5}=13.44 \fallingdotseq \mathbf{13.4}$

(4) $\overline{y}=\dfrac{\overline{x}-30}{2\sqrt{5}}=\dfrac{30-30}{2\sqrt{5}}=\mathbf{0}$

${s_y}^2=\dfrac{{s_x}^2}{(2\sqrt{5})^2}=\dfrac{20}{20}=\mathbf{1}$

$s_y=\dfrac{s_x}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}=\mathbf{1}$

◀ 標準偏差 s_y は，分散 ${s_y}^2$ より求めてもよい．
例：(1) ${s_y}^2=20$ より，
$s_y=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
(2) ${s_y}^2=320$ より，
$s_y=\sqrt{320}=8\sqrt{5}$

◀ (4) は変量 x を平均値が 0，標準偏差が 1 となるように標準化したものである（下の余談を参照）．

【余談】 c $(c\neq 0)$ を定数とする．変量の変換 $z=\frac{x-x_0}{c}$ を考えると，$z=\frac{1}{c}x-\frac{x_0}{c}$ であるから，平均値 $\overline{z}$ は，$\overline{z}=\frac{1}{c}\overline{x}-\frac{x_0}{c}=\frac{\overline{x}-x_0}{c}$ となる．また，標準偏差 s_z は，$s_z=\left|\frac{1}{c}\right|s_x$ となる．

ここで，$x_0=\overline{x}$，$c=s_x$ とすると，$\overline{z}=\frac{\overline{x}-\overline{x}}{s_x}=0$，$s_z=\left|\frac{1}{s_x}\right|s_x=1$ となる．

このようにして得られた z を x の**標準化**という．標準化は，複数のデータの平均値や散らばり具合を揃えることに利用される．また，ここでは扱わないが，標準化に関する概念として偏差値がよく知られている．

問題 I5.1.10 ★★ 解答 p.387　▶ 章末 I5.3 ▶ 章末 I5.4

変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ が $\overline{x}=50$，分散 ${s_x}^2=36$ であるとする．このとき，次の式によって得られる変量 y のデータについて，平均値 $\overline{y}$，分散 ${s_y}^2$，標準偏差 s_y を求めよ．

(1) $y=x-20$　(2) $y=3x$　(3) $y=-2x+10$　(4) $y=\frac{x-50}{6}$

例題 I5.1.11 仮平均を利用したデータの平均値，分散 ★★

次のような変量 x のデータがある．

650，720，690，680，710，730，680，660，690，710

(1) $y = x - 700$ とおくことにより，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ．
(2) $z = \frac{x-700}{10}$ とおくことにより，変量 x のデータの分散を求めよ．

解説動画

考え方

(1) y のデータの平均値を $\overline{y}$ とすると，$\overline{y} = \overline{x} - 700$，すなわち，$\overline{x} = \overline{y} + 700$ であることを利用する．直接 $\overline{x} = \frac{1}{10}(650 + 720 + \cdots + 710)$ を計算するより，平均値を楽に求めることができる．このような平均値の計算を簡単にするためにとった 700 のような値のことを**仮平均**という．仮平均を自分で設定する場合，平均値に近いと予想される値をとるとよい（計算が楽になる）．
(2) x，z のデータの分散をそれぞれ ${s_x}^2, {s_z}^2$ とすると，$z = \frac{x-700}{10}$ より，${s_x}^2 = 10^2{s_z}^2$ である．先に変量 x のそれぞれの値に対応する変量 z の値を求め，${s_z}^2$ を計算する．

数学 I 5.1

解答

(1) y のデータの平均値を $\overline{y}$ とすると，

$$\overline{y} = \frac{1}{10}\{-50 + 20 - 10 - 20 + 10 + 30 - 20 - 40 - 10 + 10\} = -8$$

◀ $\overline{x} = \frac{1}{10}(650 + \cdots + 710)$ を用いても平均値は求められるが，計算に手間が掛かる．

よって，$\overline{x}$ は，

$$\overline{x} = \overline{y} + 700 = -8 + 700 = \mathbf{692}$$

(2) $z = \frac{x-700}{10}$ とおくと，z，z^2 の値は次のようになる．

x	650	720	690	680	710	730	680	660	690	710	計
y	-50	20	-10	-20	10	30	-20	-40	-10	10	-80
z	-5	2	-1	-2	1	3	-2	-4	-1	1	-8
z^2	25	4	1	4	1	9	4	16	1	1	66

したがって，z のデータの分散は，z のデータの平均値を $\overline{z}$ とすると，

$$\overline{z^2} - (\overline{z})^2 = \frac{66}{10} - \left(\frac{-8}{10}\right)^2 = 5.96$$

◀ 分散は，(z^2 の平均値) − (z の平均値)^2 で求めることができる．

よって，x のデータの分散は，

$$10^2 \times 5.96 = 100 \times 5.96 = \mathbf{596}$$

◀ ${s_x}^2 = 10^2{s_z}^2$

問題 I5.1.11 ★★ 解答 p.388

次のような変量 x のデータがある．このとき，次の問いに答えよ．

550，620，590，570，610，630，560，580，590，600

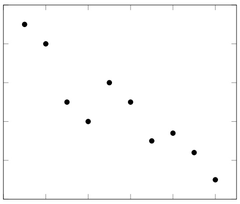
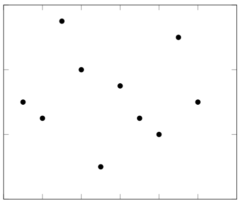
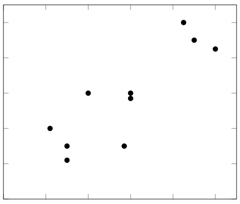
(1) $y = x - 600$ とおくことにより，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ．
(2) $z = \frac{x-600}{10}$ とおくことにより，変量 x のデータの分散を求めよ．

One math

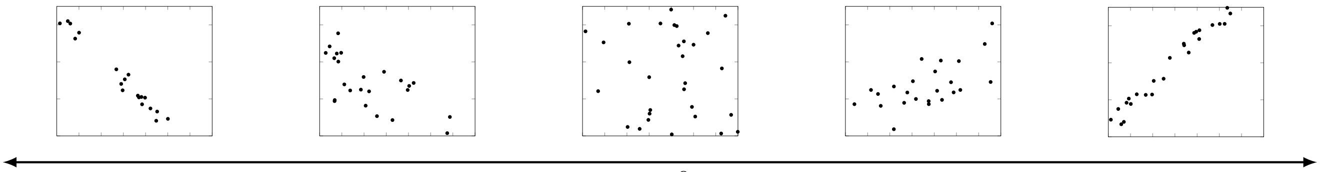
例題 I5.1.12 散布図と相関関係 ★

10 名の社員に対して，2 つの指標 X，Y でパフォーマンス評価を行ったところ，指標 X の評価値の分散は $\frac{47}{7}$，指標 Y の評価値の分散は $\frac{47}{7}$ で，X と Y の評価値の共分散は $\frac{40}{7}$ であった．このとき，X と Y の評価値の相関係数を求めよ．また，X と Y の評価値として対応する散布図を次の (i)〜(iii) から選べ．

解説動画

(i)

(ii)

(iii)


考え方 相関係数 r を用いることで，散布図の傾向がわかり，対応するものを判断することができる．



$r=-1$ 負の相関が強い　　$r=0$　　正の相関が強い $r=1$

解答

X の評価値の分散が $\frac{47}{7}$ より，標準偏差は，$\sqrt{\frac{47}{7}}$
Y の評価値の分散が $\frac{47}{7}$ より，標準偏差は，$\sqrt{\frac{47}{7}}$
X と Y の評価値の共分散が $\frac{40}{7}$ より，求める相関係数は，

$$\frac{\frac{40}{7}}{\sqrt{\frac{47}{7}}\times\sqrt{\frac{47}{7}}}=\mathbf{\frac{40}{47}}$$

また，相関係数は正で，正の相関があるため，**散布図は (iii)**

◀ x と y の相関係数は，$\frac{(x \text{と} y \text{の共分散})}{(x \text{の標準偏差})\times(y \text{の標準偏差})}$

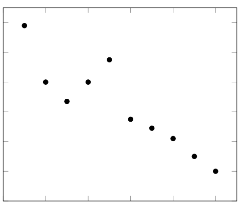
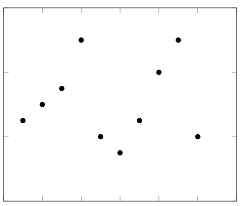
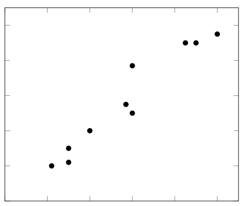
◀ 正の相関関係があるとき，散布図は右上がりの分布となる．

One Point

散布図の点が右上がりに分布 → 正の相関関係
散布図の点が右下がりに分布 → 負の相関関係
どちらの傾向も見られない → 相関関係がない

問題 I5.1.12 ★ 解答 p.388

あるクラスの 10 名の生徒について，2 つの指標 X，Y でテスト結果を評価した．指標 X の評価値の分散は $\frac{33}{4}$，指標 Y の評価値の分散は $\frac{33}{4}$ で，X と Y の評価値の共分散は $-\frac{15}{2}$ であった．このとき，X と Y の評価値の相関係数を求めよ．また，X と Y の評価値として対応する散布図を次の (i)〜(iii) から選べ．

(i)

(ii)

(iii)


例題 I5.1.13 相関係数の計算 ★★

次の表は，5 名の生徒 A，B，C，D，E の読書時間 x（時間）とレポートの評価 y（点）を測定した結果である．このとき，x と y の相関係数 r を求めよ．

	A	B	C	D	E
読書時間 x（時間）	8	8	10	6	8
評価 y（点）	5	6	10	4	10

解説動画

考え方 x，y のデータの標準偏差をそれぞれ s_x，s_y とし，x と y の共分散を s_{xy} とするとき，次のように相関係数 r は共分散を x と y の標準偏差で割った値で表される．

$$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=\frac{\frac{1}{n}\{(x-\overline{x})(y-\overline{y})\text{ の和}\}}{\sqrt{\frac{1}{n}\left\{(x-\overline{x})^2\text{ の和}\right\}}\sqrt{\frac{1}{n}\left\{(y-\overline{y})^2\text{ の和}\right\}}}=\frac{\{(x-\overline{x})(y-\overline{y})\text{ の和}\}}{\sqrt{\{(x-\overline{x})^2\text{ の和}\}\times\{(y-\overline{y})^2\text{ の和}\}}}$$

このとき，下の解答のように表を作成して計算するとよい．

解答

x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(8+8+10+6+8)=8\text{ (時間)},$$
$$\overline{y}=\frac{1}{5}(5+6+10+4+10)=7\text{ (点)}$$

したがって，下のような表が得られる．

◀ 表を用いるとよい．

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	8	5	0	-2	0	4	0
B	8	6	0	-1	0	1	0
C	10	10	2	3	4	9	6
D	6	4	-2	-3	4	9	6
E	8	10	0	3	0	9	0
計	40	35	0	0	8	32	12

よって，相関係数 r は，

$$r=\frac{12}{\sqrt{8\times32}}=\frac{12}{\sqrt{256}}=\frac{12}{16}=\mathbf{0.75}$$

◀ $r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$

問題 I5.1.13 ★★ 解答 p.389

▶ 章末 I5.5

次の表は，5 名の生徒 A，B，C，D，E の運動時間 x（時間）と体力テストの点数 y（点）を測定した結果である．このとき，x と y の相関係数 r を求めよ．

	A	B	C	D	E
運動時間 x（時間）	8	6	8	5	8
点数 y（点）	10	12	15	10	13

例題 I5.1.14 仮説検定の考え方 ★★

ある企業が発売しているサービスを改良し，20 人に対しアンケートをとったところ，16 人が「サービスが向上した」と回答した．この結果から，サービスは向上したと判断してよいか．仮説検定により，基準となる確率を 0.05 として考察せよ．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 20 回投げて，表が出た回数を記録する実験を 200 セット行ったところ次の表のようになったとして，この結果を用いよ．

解説動画

表が出た回数	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	計
度数	1	3	6	12	16	23	25	31	27	21	16	9	6	3	1	200

考え方 正しいかどうかを判断したい仮説に対して，その主張に反する仮説を立てる．仮説のもとでの確率は例題のように，コイン投げなどの実験結果を利用して求めることがある．なお，仮説検定において仮説が正しくないと判断することを，仮説を**棄却する**という．

解答

「サービスが向上した」と判断してよいかを考察するために，これに反する「サービスが向上したとはいえない」，すなわち，「サービスが向上した結果が得られたのは偶然である」という仮説を立てる．このとき，公正なコインの実験結果から，表が出た回数が 16 回以上である場合の相対度数は，

◀ コインを投げたときの表裏がそれぞれ出る確率と同様に考えることができる．

$$\frac{3+1}{200}=\frac{4}{200}=0.02$$

よって，これは 0.05 より小さいから，仮説は正しくなかったと考えられ，仮説は棄却される．すなわち，**サービスが向上したと判断してよい．**

◀ 基準となる確率との大小を比較する．ここでは $0.02<0.05$ から，仮説を棄却する．

【注意】例題では仮説を棄却したが，仮説が棄却されなかったからといって，「サービスが向上したとはいえない」ことを正しいと認めるわけではないので注意すること．仮説が棄却されなかったときは，「サービスが向上した」と「サービスが向上したとはいえない」のどちらが正しいかを判断できなかったことのみがいえる．

問題 I5.1.14 ★★ 解答 p.389

▶ 節末 I5.1.3

ある商品に新機能を追加し，20 人に対しアンケートをとったところ，15 人が「新機能が役立つ」と回答した．この結果から，新機能が役立つと判断してよいか．仮説検定により，基準となる確率を 0.05 として考察せよ．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 20 回投げて，表が出た回数を記録する実験を 200 セット行ったところ次の表のようになったとして，この結果を用いよ．

表が出た回数	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	計
度数	1	2	6	12	16	23	25	31	27	21	16	8	6	3	2	1	200

節末問題 5.1 データの整理と分析

節末 I5.1.1 ★★ 解答（節末）p.390

▶ 例題 I5.1.5

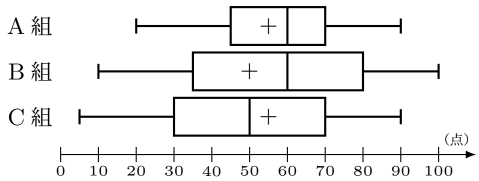
右の図は，生徒数がいずれも 40 人の A 組，B 組，C 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．次の (i)〜(iv) の記述のうち，適切ではないものを答えよ．

(i) B 組の合計得点は A 組の合計得点より小さい．

(ii) A 組と B 組において，得点が 60 点以上の人数は同じである．

(iii) B 組で得点が 50 点以上の人数は 20 人以上である．

(iv) B 組の生徒が，A 組，B 組，C 組全体の最高得点をとっている．



節末 I5.1.2 ★★ 解答（節末）p.390

▶ 例題 I5.1.9

10 人の社員に対して作業時間を記録した．記録したところ，作業時間の平均値は 20 ，分散は 4.5 であった．しかし，この 10 人のうち 2 人の作業時間が右の表のように修正された．修正後の 10 人の作業時間の平均値と分散を求めよ．

社員	修正前	修正後
A	18	22
B	17	23

節末 I5.1.3 ★★ 解答（節末）p.391

▶ 例題 I5.1.14

ある地域で A 地区と B 地区の 2 か所のうちどちらかに新しい公園を建設する案があり，住民投票の結果，B 地区を支持した住民が 60 人中 43 人であった．一般に，B 地区の方が住民にとって望ましい建設地であると判断してよいであろうか．もし A 地区と B 地区を何も考えずに選ぶ場合，それぞれが選ばれる確率は 0.5 とし，起こる割合が 5% 以下であればほとんど起こりえないと判断するものとする．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 60 枚投げて，表が出た枚数を記録する実験を 1000 セット行ったところ右の表のようになったとして，この結果を用いよ．

表の枚数	回数
0 ～ 30	540
31	99
32	91
33	86
34	54
35	43
36	32
37	20
38	11
39	8
40	6
41	4
42	3
43	2
44	1
45	0
46	0

章末問題 5 データの分析

5.2 章末問題 5

章末 I5.1 ★★ 解答（章末）p.392 ▶ 例題 I5.1.8

任意の連続する 4 個の自然数の分散 s^2 を求めよ．

章末 I5.2 ★★ 解答（章末）p.392 ▶ 例題 I5.1.8

変量 x についてのデータの値が p，q，r，s，t であるとする．データ p，q，r の平均値が 12 ，分散が 4 であり，データ s，t の平均値が 10 ，分散が 2 であるとするとき，変量 x の次の値を求めよ．

(1) 平均値　　(2) 分散

数学 I 5.2

章末 I5.3 ★★★ 解答（章末）p.393 ▶ 例題 I5.1.10

ある実験で得られた n 個の測定値 x_1，x_2，x_3，$\ldots$，x_n の平均が m，分散が σ^2 である．p，q $(p>0,\ q>0)$ を正の定数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+(x_3-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2$ を最小にする x の値を求めよ．

(2) x_1+p，x_2+p，x_3+p，$\ldots$，x_n+p の平均値および分散を求めよ．

(3) qx_1，qx_2，qx_3，$\ldots$，qx_n の平均値および分散を求めよ．

章末 I5.4 ★★★ 解答（章末）p.394 ▶ 例題 I5.1.10

ある学校で，120 人の生徒が定期テストを受験した．得点の平均値が m 点，標準偏差が s 点である試験において，得点が x 点である受験者の偏差値は $50+\frac{10(x-m)}{s}$ で与えられる．A さんのこのテストの得点は 78 点であり，偏差値は 58 であった．また，このテストの得点の平均値は 66 点であった．

(1) 120 人の生徒の得点の標準偏差を求めよ．

(2) 後日，この定期テストを新たに 60 人が受験し，受験者数は合計で 180 人となった．その結果，試験の得点の平均値が 67 点となり，A さんの偏差値は 55 となった．新たに受験した 60 人の受験者の得点について，平均値と標準偏差をそれぞれ求めよ．

章末 I5.5 ★★★ 解答（章末）p.395 ▶ 例題 I5.1.13

右の表は，ある数学クラスの学生 10 人がそれぞれ試験 A（代数）と試験 B（幾何）の得点を 0，1，2 の 3 段階で評価したときの得点を，2 次元の度数分布表にまとめたものである．試験 A の得点 x と試験 B の得点 y の相関係数 r を小数第 3 位まで求めよ．ただし，$\sqrt{70}=8.3666$ とする．

A\B	0	1	2	計
0	2	2	0	4
1	0	1	1	2
2	0	1	3	4
計	2	4	4	10

6 略解

6.1 問題，節末・章末問題の略解

図やグラフ，表，証明などは省略しています．問題，節末・章末問題の略解を載せています．

問題 1.1

I1.1.1 (1) $-3x^3+3x^2-2x-4$　次数は 3，定数項は -4
(2) b に着目：次数は 3，定数項は $7a^2-6a-3$
a と b に着目：次数は 3，定数項は -3

I1.1.2 (1) $5x^2-3x-4$
(2) $-x^2-5x+10$
(3) $-14x+23$
(4) $25x^2-x-43$

I1.1.3 (1) $48x^4y^5$　(2) $10a^3bc^2-15ab^2c^2+20abc^3$
(3) $x^3+x^2-19x+21$　(4) $3x^5-x^4-2x^3+17x^2-13x+20$

I1.1.4 (1) x^2+6x+9　(2) k^2-4k+4
(3) x^2-4y^2　(4) $x^2-7xy+10y^2$
(5) $12a^2+10ab+2b^2$　(6) $4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4zx$

I1.1.5 (1) $x^3+9x^2+27x+27$
(2) $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$
(3) $27x^3-8$　(4) $125a^3+8b^3$
(5) $x^6-27x^4+243x^2-729$　(6) x^6-64

I1.1.6 (1) $x^2+4xy+4y^2+2x+4y-15$
(2) $16a^2-9b^2+6bc-c^2$
(3) $p^2+q^2-r^2-s^2+2pq+2rs$

I1.1.7 (1) $x^4-4x^3-19x^2+46x+120$
(2) x^8-72x^4-729　(3) $m^6-2m^3n^3+n^6$

I1.1.8 (1) $4xy^2(x^2+2x+3y)$　(2) $(a-1)(b-1)$
(3) $(x-7)^2$　(4) $m(5m-2)^2$
(5) $4(2y-1)(y+1)$　(6) $(x+2)(x+5)$

I1.1.9 (1) $(x+1)(2x+3)$　(2) $(x-3)(4x+1)$
(3) $(2x+3y)(3x+2y)$

I1.1.10 (1) $(x-3)(x^2+3x+9)$
(2) $(3m+2n)(9m^2-6mn+4n^2)$
(3) $(x-2)^3$　(4) $(x-4)(x-1)(x+1)$

I1.1.11 (1) $(3x+1)(3x+y-1)$
(2) $(x^2+2x+y+4)(x+y-2)$　(3) $(y+z)(x-y-z)$

I1.1.12 (1) $(x+y-3)(x+3y+1)$
(2) $(x+2y+1)(3x+5y-4)$

I1.1.13 (1) $(x+3y-2)(x+3y-3)$
(2) $(x^2-2x-4)(x-1)^2$　(3) $x(x+5)(x^2+5x-2)$

I1.1.14 (1) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
(2) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

I1.1.15 (1) $(p+q-1)(p^2+q^2-pq+p+q+1)$
(2) $3(x-y)(y-z)(z-x)$

I1.1.16 (1) $(x+3)(x-3)(x^2-2)$
(2) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
(3) $(x^2+2xy-2y^2)(x^2-2xy-2y^2)$

節末 1.1

$\boxed{\text{I1.1.1}}$ $7x^2+6x-3$

$\boxed{\text{I1.1.2}}$ x^4の係数：-3　x^3の係数：11

$\boxed{\text{I1.1.3}}$ (1) $x^6+x^4-x^2-1$
(2) $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$\boxed{\text{I1.1.4}}$ (1) $(x+2)(y+1)(x+2y-1)$
(2) $8xy(x^2+y^2)$
(3) $(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)$
(4) $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$
(5) $(a+1)(a-2)(a^2-a+1)(a^2+2a+4)$
(6) $(x+1)^2(x+5)^2$

$\boxed{\text{I1.1.5}}$ (1) $3(y-z)(z-x)(x+y-2z)$
(2) $(2x^2+3xy+4y^2)(2x^2-3xy+4y^2)$

問題 1.2

I1.2.1
(1) (i) $\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$
(ii) $\frac{5}{12}=0.41\dot{6}$
(iii) $\frac{7}{15}=0.4\dot{6}$
(2) (i) $0.\dot{4}=\frac{4}{9}$　(ii) $0.\dot{3}\dot{6}=\frac{4}{11}$

I1.2.2 (1) $3\sqrt{3}$　(2) 4　(3) $4\sqrt{14}$　(4) $9+2\sqrt{35}$

I1.2.3 (1) $\sqrt{3}$　(2) $\frac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}$
(3) $5\sqrt{2}-2\sqrt{11}$　(4) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

I1.2.4 (1) $2-\sqrt{3}$　(2) $3+\sqrt{3}$
(3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$　(4) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$

I1.2.5 (1) 8　(2) 1　(3) 62　(4) 488　(5) 3842

I1.2.6 (1) 11　(2) $\pm\sqrt{13}$　(3) $\pm 10\sqrt{13}$　(4) 1298

I1.2.7 (1) $-\frac{1}{2}$　(2) 7　(3) 12

I1.2.8 (1) 0　(2) $\frac{97+56\sqrt{3}}{16}$

I1.2.9 (1) $a=2,\ b=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$　(2) $a+\frac{1}{b}=4+\sqrt{7}$

節末 1.2

$\boxed{\text{I1.2.1}}$ $\frac{10}{121}$

I1.2.2 $-3x-1$

I1.2.3 9

I1.2.4 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}$

I1.2.5 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

I1.2.6 $-\frac{11}{2}$

I1.2.7 (1) 1 (2) $-2+2\sqrt{11}$ (3) 4 (4) $2\sqrt{11}-6$

問題 1.3

I1.3.1 (1) $-1<x+2<4$ (2) $-9<3x<6$
(3) $-4<x+y<6$ (4) $-7<x-y<3$
(5) $-17<3x-2y<8$

I1.3.2 (1) $x<-\frac{5}{2}$ (2) $x>\frac{18}{5}$ (3) $x \geqq -\frac{7}{4}$

I1.3.3 (1) $x \geqq 8$ (2) $-\frac{1}{3} \leqq x < 2$ (3) 解なし

I1.3.4 (1) $x=1,2,3,4,5$ (2) $4 \leqq a < 5$

I1.3.5 (1) 16 個 (2) 21，22，23，24

I1.3.6 (1) $a>0$ のとき，$x>-\frac{2}{a}$
$a=0$ のとき，すべての実数
$a<0$ のとき，$x<-\frac{2}{a}$
(2) $a>1$ のとき，$x \leqq a$
$a=1$ のとき，すべての実数
$a<1$ のとき，$x \geqq a$

I1.3.7 (1) $x=1,\ -5$ (2) $1 \leqq x \leqq 9$
(3) $x<-3,\ x>1$

I1.3.8 (1) $x=1$ (2) $x \leqq -3$ または $-1 \leqq x \leqq 3$

節末 1.3

I1.3.1 (1) $a<\frac{3}{4}$ (2) $0 \leqq a < \frac{1}{4}$

I1.3.2 $x=56,\ 64$

I1.3.3 (1) 20 km 以下 (2) 250 g 以上 500 g 以下

I1.3.4 (1) $a>0$ のとき，$x>\frac{b}{a}$
$a=0,\ b<0$ のとき，すべての実数
$a=0,\ b \geqq 0$ のとき，解なし
$a<0$ のとき，$x<\frac{b}{a}$
(2) $a+b>0$ のとき，$x \leqq a-b$
$a+b=0$ のとき，すべての実数
$a+b<0$ のとき，$x \geqq a-b$

I1.3.5 (1) $x=5,\ -1$ (2) $x=1,\ -1$

I1.3.6 (1) $x>\frac{3}{5}$ (2) $\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{13}{2}$ (3) $x=\frac{3}{2}$

章末 1

I1.1 $8xz$

I1.2 (1) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
(2) $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

I1.3 -3

I1.4 $a=-2,\ b=6$

I1.5 $\begin{cases} 3a & (1 \leqq a) \\ a+2 & \left(-\frac{1}{2} \leqq a < 1\right) \\ -3a & \left(a < -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

数学 I 6.1

問題 2.1

I2.1.1 (1) (i) $7 \in A$ (ii) $12 \notin A$
(2) (i) $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ (ii) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
(3) (i) $A \subset B$ (ii) $A = B$

I2.1.2 (1) $\{5,\ 9\}$ (2) $\{1,\ 6,\ 12\}$
(3) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}$
(4) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}$ (5) $\{5,\ 9\}$

I2.1.3 (1) $\{\, x \mid x \leqq -2\}$ (2) $\{\, x \mid x < -4\}$
(3) $\{\, x \mid x < -4,\ x \geqq -3\}$

I2.1.4 $a = 4$

I2.1.5 (1) $\{2\}$ (2) $\{1,\ 2,\ 14\}$
(3) $\{1,\ 2,\ 14\}$ (4) $\{1,\ 2,\ 7,\ 10,\ 14\}$

I2.1.6 (1) 略 (2) 略

I2.1.7 (1) 偽，反例：$x = -4$
(2) 偽，反例：$x = 1\ y = 1$ (3) 真
(4) 偽，反例：$x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{2}$

I2.1.8 (1) 偽 (2) 真

I2.1.9 (1) (ii) (2) (i)

I2.1.10 (1) $x < 0$ または $x \geqq 5$
(2) $x = 1$ または $x = 2$ (3) $x \neq 0$ かつ $x \neq 2$
(4) $x \neq 1$ かつ $y \neq 1$

I2.1.11 (1) 命題：真 否定：偽
(2) 命題：偽 否定：真

I2.1.12 (1) 逆：偽 裏：偽 対偶：真
(2) 逆：偽 裏：偽 対偶: 真

I2.1.13 (1) 略 (2) 略

I2.1.14 略

I2.1.15 (1) 略 (2) 略

I2.1.16 (1) 略 (2) $a = 4,\ b = 1$

節末 2.1

I2.1.1 $\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}$

I2.1.2 (1) $0 < a < \sqrt{6} - 1$ (2) $4 \leqq a < 5$

I2.1.3 (1) 真 (2) 偽，反例：$x^2 - x = 1$
(3) 偽，反例：$x = \sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}$

I2.1.4 (1) (ii) (2) (iii) (3) (iv)

I2.1.5 略

I2.1.6 略

章末 2

I2.1 略

I2.2 (1) 真 (2) 偽，反例：$a = 3,\ b = 3$ (3) 真

I2.3 略

I2.4 略

I2.5 略

問題 3.1

I3.1.1 (1) 19 (2) $\frac{31}{2}$ (3) $36a^2-3a+5$
(4) $16a^2+14a+8$ (5) $4a^4-9a^2+10$

I3.1.2 (1) 略 値域：$-1 \leqq y \leqq 9$ (2) 略 値域：$0 \leqq y \leqq 4$

I3.1.3 $(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\right),\ \left(-\frac{3}{2},\ \frac{13}{2}\right)$

I3.1.4 (1) 略 軸：y 軸 頂点：$(0,\ 3)$
(2) 略 軸：$x=2$ 頂点：$(2,\ 0)$
(3) 略 軸：$x=-1$ 頂点：$(-1,\ -4)$

I3.1.5 (1) 略 軸：$x=-2$ 頂点：$(-2,\ -5)$
(2) 略 軸：$x=3$ 頂点：$(3,\ 1)$

I3.1.6 $y=x^2-10x+18$ または $y=(x-5)^2-7$

I3.1.7 (1) x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動
(2) $y=-2x^2+13x-28$

I3.1.8 (1) $y=x^2-4x+5$ (2) $y=-x^2-4x-5$
(3) $y=x^2+4x+5$

I3.1.9 $a=-1,\ b=-10,\ c=-9$

I3.1.10 (1) 略 (2) 略

I3.1.11 略

I3.1.12 $-5 \leqq x \leqq -3$

節末 3.1

I3.1.1 $27a^4-36a^3+42a^2-20a+10$

I3.1.2 $a=-\frac{4}{3},\ b=-14$

I3.1.3 $a=3,\ b=-12,\ c=8$

I3.1.4 $y=-(x-5)^2+7$

I3.1.5 (1) $x=4$ のとき，最小値 4
(2) $x=5$ のとき，最小値 5

問題 3.2

I3.2.1 (1) 最大値 5，最小値はない
(2) 最小値 -5，最大値はない

I3.2.2 (1) 最小値 1，最大値はない (2) 最大値 5，最小値 1

I3.2.3 $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right),\ \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$

I3.2.4

(1) $\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき，} & x=a \text{ で最小値 } a^2-4a+6 \\ 2 \leqq a \text{ のとき，} & x=2 \text{ で最小値 } 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0<a<6 \text{ のとき，} & x=0 \text{ で最小値 } -8 \\ a=6 \text{ のとき，} & x=0,\ 6 \text{ で最小値 } -8 \\ 6<a \text{ のとき，} & x=a \text{ で最小値 } -a^2+6a-8 \end{cases}$

I3.2.5

(1) $\begin{cases} a<\frac{3}{2} \text{ のとき，} & x=3 \text{ で最大値 } -6a+12 \\ a=\frac{3}{2} \text{ のとき，} & x=0,\ 3 \text{ で最大値 } 3 \\ \frac{3}{2}<a \text{ のとき，} & x=0 \text{ で最大値 } 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a<1 \text{ のとき，} & x=1 \text{ で最小値 } -2a+6 \\ 1 \leqq a \leqq 4 \text{ のとき，} & x=a \text{ で最小値 } -a^2+5 \\ 4<a \text{ のとき，} & x=4 \text{ で最小値 } -8a+21 \end{cases}$

I3.2.6

(1) $\begin{cases} a<-1 \text{ のとき，} & x=a+2 \text{ で最小値 } a^2+2a+3 \\ -1 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき，} & x=1 \text{ で最小値 } 2 \\ 1<a \text{ のとき，} & x=a \text{ で最小値 } a^2-2a+3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a<1 \text{ のとき，} & x=a \text{ で最大値 } a^2-4a+5 \\ a=1 \text{ のとき，} & x=1,\ 3 \text{ で最大値 } 2 \\ a>1 \text{ のとき，} & x=a+2 \text{ で最大値 } a^2+1 \end{cases}$

I3.2.7 (1) $M=-a^2+3a+6$ (2) 最小値 -4

I3.2.8 (1) $t \geqq -4$ (2) $x=1,\ 3$ のとき，最小値 -9

I3.2.9 (1) 最小値 $\frac{18}{5}$ (2) 最大値 36

I3.2.10 斜辺の長さが $5\sqrt{2}$，直角を挟む 2 辺の長さがともに 5 の直角二等辺三角形

I3.2.11 (1) $y=\frac{1}{3}(x+2)^2+3$ (2) $y=-3(x-2)^2+8$

I3.2.12 (1) $y=-x^2+4x+4$ (2) $y=2(x+1)(x-4)$

I3.2.13 (1) $y=4x^2,\ y=(x-3)^2$
(2) $y=3x^2-3,\ y=3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$

節末 3.2

I3.2.1 $k=-2$，最大値 8，最小値 -8

I3.2.2 (1) 頂点 $(2,8)$，x 軸との交点 $(0,0)$，$(4,0)$，
y 軸との交点 $(0,0)$ (2) $a=0,\ 3$

I3.2.3 (1) $m=\begin{cases} -7a+18 & (a>4) \\ -a^2+a+2 & (a \leqq 4) \end{cases}$ (2) $a=\frac{1}{2}$

I3.2.4 $a=-\frac{4}{3},\ b=8,\ c=-5$

I3.2.5 最小値 $\frac{1}{4}$

I3.2.6 $a=-1,\ b=2,\ c=8$

問題 3.3

I3.3.1 (1) $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}$ (2) $x=4\pm\sqrt{21}$
(3) $x=-\frac{1}{4}$ (4) $x=\frac{1}{3},\ \frac{3}{2}$

I3.3.2 (1) $x=4\pm2\sqrt{3}$ (2) $x=2\sqrt{3}$ (3) $x=4,\ 0$

I3.3.3 (1) $a=0$ のとき，$x=-1$
$a \neq 0$ のとき，$x=-1,\ -\frac{3}{a}$
(2) $a \leqq 0$ のとき，解なし
$a=2$ のとき，すべての実数
$0<a<2,\ 2<a$ のとき $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$

数学 I
6.1

I3.3.4 (1) $a=1,\ b=-20$
(2) $a=2$ のとき，$x=-4$
$a=-2$ のとき，$x=4$

I3.3.5 (1) 2 個 (2) 0 個 (3) 2 個 (4) 1 個

I3.3.6 (1) $k=5$ のとき，$x=-5$
$k=-2$ のとき，$x=2$
(2) $k<2$ のとき，2 個
$k=2$ のとき，1 個
$k>2$ のとき，0 個

I3.3.7 $-\frac{7}{4}<k<1$

I3.3.8 $k=-9,\ x=4$

I3.3.9 (1) 共有点を 2 個もち，その座標は，$(5,\ 0)$，$(-2,\ 0)$
(2) 共有点を 1 個もち，その座標は，$(2,\ 0)$
(3) 共有点をもたない．

I3.3.10 (1) $k=3$ のとき，$(3,\ 0)$
$k=1$ のとき，$(1,\ 0)$
(2) $k \leqq -3$

I3.3.11 (1) $\frac{\sqrt{41}}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$

I3.3.12 (1) $a<0$ (2) $b>0$ (3) $c>0$
(4) $b^2-4ac>0$ (5) $a+b+c>0$

I3.3.13 (1) $(1,\ -1)$，$(5,\ 11)$
(2) $(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2})$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ 2)$

I3.3.14 (1) 共有点を 2 個もち，その座標は，$(2,\ -2)$，$(1,\ -1)$
(2) 共有点をもたない．
(3) 共有点を 1 個もち，その座標は，$(2,\ 2)$

I3.3.15 (1) $k>-\frac{15}{2}$ のとき，2 個
$k=-\frac{15}{2}$ のとき，1 個
$k<-\frac{15}{2}$ のとき，0 個
(2) $k>-3$ のとき，2 個
$k=-3$ のとき，1 個
$k<-3$ のとき，0 個

I3.3.16 (1) $x<2,\ 6<x$ (2) $x<\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x$
(3) $-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 2$

I3.3.17 (1) 1 以外のすべての実数 (2) すべての実数
(3) $x=3$ (4) 解なし

I3.3.18 (1) $-3 \leqq x<-1,\ -\frac{1}{2}<x \leqq 1$
(2) $1-\sqrt{5} \leqq x \leqq 0,\ 2 \leqq x \leqq 1+\sqrt{5}$

I3.3.19 (1) $a>0$ のとき，$x<a,\ 3a<x$
$a=0$ のとき，$x \neq 0$
$a<0$ のとき，$x<3a,\ a<x$
(2) $a>0$ のとき，$1<x<4$
$a<0$ のとき，$x<1,\ x>4$

I3.3.20 $a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{5}{3}$

I3.3.21 (1) $4<k<12$
(2) $k<-3,\ -3<k<-1,\ 5<k$ のとき，2 個
$k=-3,\ k=-1,\ k=5$ のとき，1 個
$-1<k<5$ のとき，0 個

I3.3.22 (1) $-8<k<0$ (2) $k \leqq -2$

I3.3.23 $-\frac{7}{3}<a<3$

I3.3.24 $-7 \leqq a<-6,\ 7<a \leqq 8$

I3.3.25 $a<-2,\ 1<a<\frac{6}{5}$

I3.3.26 $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$

I3.3.27 $-\frac{2}{3}<a<2$

I3.3.28 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{6}$

I3.3.29 $2 \leqq a<3$

I3.3.30 (1) $0 \leqq a \leqq 3$ (2) $a \leqq -4,\ -3 \leqq a$
(3) $a \leqq -4,\ -3 \leqq a<0,\ 3<3$

I3.3.31 $x=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$
$x=-1,\ y=0$ のとき，最小値 -1

I3.3.32 (1) $x=2,\ y=-\frac{1}{3}$ のとき，最小値 $\frac{2}{3}$
(2) $x=6,\ y=-2$ のとき，最小値 -1

I3.3.33 0 cm より長く，16 cm 以下であればよい．

I3.3.34 (1) $-\frac{\sqrt{70}}{2}<a<\frac{\sqrt{70}}{2}$ (2) $a<-\frac{\sqrt{70}}{2},\ a>\frac{\sqrt{70}}{2}$

I3.3.35 (1) $a>22$ (2) $a>4$

I3.3.36 $a<-3$ のとき，0 個
$a=-3$ のとき，1 個
$-3<a<-\frac{3}{4}$ のとき，2 個
$a=-\frac{3}{4}$ のとき，3 個
$-\frac{3}{4}<a<-1$ のとき，4 個
$a=-1$ のとき，3 個
$a>-1$ のとき，2 個

節末 3.3

I3.3.1 5 個

I3.3.2 $a=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$

I3.3.3 (1) $x<-\sqrt{2},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{2}<x$
(2) $\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

I3.3.4 $-\frac{1}{6}<a<4-\sqrt{14}$

I3.3.5 $1-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{6}$

章末 3

I3.1 最大値は 2，最小値は $-\frac{10}{3}$

I3.2 $y=4,\ y=4x$

I3.3 $a=2,\ b=1,\ \alpha=-2$

I3.4 略

I3.5 (1) 略 (2) $4u^2-v=15$ (3) $-\frac{241}{16} \leqq k \leqq 3$

問題 4.1

I4.1.1 (1) $\sin A = \frac{4}{5}$，$\cos A = \frac{3}{5}$，$\tan A = \frac{4}{3}$
(2) $x = 5\sqrt{3}$，$y = 5$

I4.1.2 $16.5 + 15\sqrt{3}$ (m)

I4.1.3 (1) $\mathrm{BD} = 1$ (2) $\mathrm{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (3) $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

I4.1.4 (1) $\cos A = \frac{3}{5}$，$\tan A = \frac{4}{3}$
(2) $\sin A = \frac{1}{3}$，$\cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

I4.1.5 (1) $\sin 55° = \cos 35°$，$\cos 125° = -\sin 35°$，
$\sin 35° \cos 125° + \sin 55° \cos 145° = -1$
(2) 略

I4.1.6 (1) $\theta = 30°$，$150°$ (2) $\theta = 120°$ (3) $\theta = 135°$

I4.1.7 (1) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$
(2) $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

I4.1.8 (1) $\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$ (2) $\sin^3\theta - \cos^3\theta = \frac{11}{16}$
(3) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

I4.1.9 (1) $\theta = 60°$ (2) $\theta = 30°$，$150°$

I4.1.10 (1) $30°$ (2) $60°$

I4.1.11 (1) $60° < \theta < 120°$ (2) $135° \leqq \theta \leqq 180°$

I4.1.12 (1) $90° < \theta \leqq 150°$
(2) $0° \leqq \theta < 90°$，$135° < \theta \leqq 180°$

I4.1.13 (1) $60° < \theta < 90°$
(2) $0° \leqq \theta \leqq 30°$，$150° \leqq \theta \leqq 180°$，$\theta = 90°$

I4.1.14 $\theta = 120°$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$
$\theta = 0°$ のとき，最小値 -1

I4.1.15 $1 \leqq a < \frac{37}{12}$

I4.1.16 $-3 \leqq a < -2\sqrt{2}$

節末 4.1

I4.1.1 (1) $\mathrm{AB} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$
(2) $\sin 22.5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\cos 22.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，$\tan 22.5° = \sqrt{2} - 1$

I4.1.2 $\frac{26}{5}$

I4.1.3 $\theta = 120°$

I4.1.4 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

I4.1.5 $a = 2$，$b = 0$ または $a = -1$，$b = -\sqrt{3}$

問題 4.2

I4.2.1 (1) $c = \sqrt{6}$，$R = \sqrt{3}$ (2) $A = 60°$，$120°$

I4.2.2 (1) $c = \sqrt{76}$ (2) $B = 60°$ (3) $b = 1 + \sqrt{3}$

I4.2.3 (1) $a = 2\sqrt{2}$，$C = 30°$，$B = 15°$
(2) $A = 45°$，$B = 30°$，$C = 105°$

I4.2.4 $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$，$A = 105°$，$B = 45°$ または $a = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，$A = 15°$，$B = 135°$

I4.2.5 $C = 120°$

I4.2.6 (1) $1 < x < 5$ (2) $1 < x < \sqrt{5}$，$\sqrt{13} < x < 5$

I4.2.7 (1) $\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ の二等辺三角形
(2) $\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ の二等辺三角形または $C = 90°$ の直角三角形

節末 4.2

I4.2.1 0

I4.2.2 $A = 75°$，$C = 60°$，$a = \sqrt{3}+1$ または $A = 15°$，$C = 120°$，$a = \sqrt{3} - 1$

I4.2.3 $\cos A = -\frac{1}{2}$，$a = 3$，$b = \frac{15}{7}$，$c = \frac{9}{7}$

I4.2.4 (1) $x > 2$ (2) $2 < x < 4$ (3) $x = \frac{5}{2}$，$R = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

I4.2.5 $\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ の二等辺三角形または $C = 120°$ の三角形

問題 4.3

I4.3.1 (1) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (2) $10\sqrt{3}$

I4.3.2 (1) $2 + 2\sqrt{2}$ (2) 3

I4.3.3 (1) $\cos A = \frac{3}{4}$，$\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$ (2) $\frac{15\sqrt{7}}{4}$
(3) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (4) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

I4.3.4 (1) $4\sqrt{3}$ (2) 4 (3) $12\sqrt{3}$

I4.3.5 (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) 2

I4.3.6 (1) $\frac{10}{3}$ (2) 2

I4.3.7 $\frac{\sqrt{22}}{2}$

I4.3.8 $50\sqrt{3} + 150$ (m)

I4.3.9 (1) 13 (2) $\frac{10}{3}$ (3) $V = \frac{4000}{81}\pi$，$S = \frac{400}{9}\pi$

I4.3.10 $\sqrt{3}$

I4.3.11 $5\sqrt{2}$

節末 4.3

I4.3.1 内接する正 n 角形の面積：$\frac{1}{2}na^2\sin\left(\frac{360°}{n}\right)$
外接する正 n 角形の面積：$na^2\tan\left(\frac{180°}{n}\right)$

I4.3.2 (1) $\cos A = -\frac{1}{2}$，$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(2) $S = \frac{14\sqrt{3}}{3}$，$R = \frac{13}{3}$

I4.3.3 (1) $\cos\angle\mathrm{BAD} = \frac{7}{18}$，$\mathrm{BD} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
(2) $\mathrm{BE} : \mathrm{ED} = 3 : 2$，$\mathrm{BE} = \sqrt{3}$

I4.3.4 (1) $60°$ (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

I4.3.5 $\frac{25\pi}{6}$

章末 4

I4.1 $-\frac{65}{8}$

(I4.2) $a \leqq -\frac{3}{2}$

(I4.3) (1) 60°　(2) $\frac{65\sqrt{3}}{4}$

(I4.4) (1) 最小値 $\frac{3}{2}$
(2) $\mathrm{AD} = \frac{3}{2}$ のとき，最小値 $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$

(I4.5) (1) $\frac{\sqrt{21}}{6}$　(2) $\frac{3\sqrt{35}}{2}$

問題 5.1

I5.1.1 (1) 略　(2) 略

I5.1.2 (1) A クラスの平均値は 7.17，B クラスの平均値は 5
(2) 全体の平均値は 6.18
(3) A クラスの中央値は 7.5，B クラスの中央値は 5

I5.1.3 (1) 平均値の最小値は 10，最大値は 14
(2) $x = 21$

I5.1.4 略

I5.1.5 (1) B 組　(2) A 組　(3) C 組　(4) C 組

I5.1.6 平日は (iii)，週末は (ii)

I5.1.7 (1) $\overline{a} = 7$，$s_a^2 = 0.6$，$s_a \fallingdotseq 0.8$，
$\overline{b} = 5$，$s_b^2 = 0.8$，$s_b \fallingdotseq 0.9$
(2) B 倉庫

I5.1.8 (1) 平均値 6.5　分散：1.25
(2) $a = 3$，$b = 17$

I5.1.9 (1) 85.5
(2) 平均値は変化しない．分散は増加する

I5.1.10 (1) $\overline{y} = 30$，$s_y^2 = 36$，$s_y = 6$
(2) $\overline{y} = 150$，$s_y^2 = 324$，$s_y = 18$
(3) $\overline{y} = -90$，$s_y^2 = 144$，$s_y = 12$
(4) $\overline{y} = 0$，$s_y^2 = 1$，$s_y = 1$

I5.1.11 (1) 590　(2) 600

I5.1.12 相関係数は $-\frac{10}{11}$，散布図は (i)

I5.1.13 0.5

I5.1.14 新機能が役立つとは判断できない

節末 5.1

I5.1.1 (ii)

I5.1.2 平均値：21　分散：3.5

I5.1.3 B 地区の方が望ましい建設地であると判断してよい．

章末 5

(I5.1) 1.25

(I5.2) (1) 11.2　(2) 4.16

(I5.3) (1) $x = m$ のとき，最小値をとる．
(2) 平均値 $m + p$，分散 σ^2　(3) 平均値 qm，分散 $q^2\sigma^2$

(I5.4) (1) 15　(2) 平均値 69　標準偏差 $2\sqrt{249}$

(I5.5) 0.747

数学 I 6.1

第 II 部

解答

目次（解答）

数と式（解答）

式の展開と因数分解（解答）

解答 I1.1.1 ★ 問題 p.16

問題文

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$5+x^4-3x^3+2x-4x+3x^2-9-x^4$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．

$$4b^2-3ab^2+ab-6a+7a^2-3+2b^3,\quad [b],\ [a\text{ と }b]$$

(1)　$5+x^4-3x^3+2x-4x+3x^2-9-x^4$

$=(x^4-x^4)+(-3x^3)+(3x^2)+(2x-4x)+(5-9)$

$=\boldsymbol{-3x^3+3x^2-2x-4}$

よって，**次数は 3，定数項は -4**

◀ 同類項をまとめ，降べきの順（次数の高い順）に整理する．

◀ $-3x^3$ より，最も高い次数は 3 である．

(2) b に着目すると，

$$\begin{aligned}4b^2-3ab^2+ab-6a+7a^2-3+2b^3&=(4-3a)b^2+ab+2b^3+7a^2-6a-3\\&=2b^3+(4-3a)b^2+ab+7a^2-6a-3\end{aligned}$$

よって，b に着目したとき，**次数は 3**，**定数項は $7a^2-6a-3$**

◀ 着目した文字以外の文字を定数として考える．

また，a と b に着目すると，

$$4b^2-3ab^2+ab-6a+7a^2-3+2b^3=2b^3-3ab^2+ab+7a^2+4b^2-6a-3$$

よって，a と b に着目したとき，**次数は 3**，**定数項は -3**

◀ b^3 があるため，最も高い次数は 3 である（次数は掛け合わせた文字の総数）．

解答 1.1

One math

解答 I1.1.2 ★★ 問題 p.17

問題文

$A=2x^2-4x+3$，$B=3x^2+x-7$ について，次の式を計算せよ．

(1) $A+B$　(2) $A-B$

(3) $3A-2B$　(4) $4(A+B)-(2A-3B)$

(1)
$$\begin{aligned} A+B &= (2x^2-4x+3)+(3x^2+x-7) \\ &= (2x^2+3x^2)+(-4x+x)+(3-7) \\ &= \boldsymbol{5x^2-3x-4} \end{aligned}$$

◀ 同類項をまとめて計算する．

(2)
$$\begin{aligned} A-B &= (2x^2-4x+3)-(3x^2+x-7) \\ &= 2x^2-4x+3-3x^2-x+7 \\ &= (2x^2-3x^2)+(-4x-x)+(3+7) \\ &= \boldsymbol{-x^2-5x+10} \end{aligned}$$

◀ $-(3x^2+x-7)$ は括弧を外すと，各項の係数の符号が変わる（分配法則）．

(3)
$$\begin{aligned} 3A-2B &= 3(2x^2-4x+3)-2(3x^2+x-7) \\ &= 6x^2-12x+9-6x^2-2x+14 \\ &= (6x^2-6x^2)+(-12x-2x)+(9+14) \\ &= \boldsymbol{-14x+23} \end{aligned}$$

◀ この行は省略してもよい．

(4) $4(A+B)-(2A-3B)$
$$\begin{aligned} &=4A+4B-2A+3B \\ &=2A+7B \\ &=2(2x^2-4x+3)+7(3x^2+x-7) \\ &=4x^2-8x+6+21x^2+7x-49 \\ &=\boldsymbol{25x^2-x-43} \end{aligned}$$

◀ A，B について整理する．

解答 I1.1.3 ★　問題 p.18

問題文
次の計算をせよ．

(1) $3x^2y \times (-4xy^2)^2$　(2) $5abc^2(2a^2 - 3b + 4c)$

(3) $(x-3)(x^2+4x-7)$　(4) $(x^3-2x+5)(3x^2-x+4)$

(1) $3x^2y \times (-4xy^2)^2 = 3x^2y \times (-4)^2x^2(y^2)^2 = 3x^2y \times 16x^2y^4$
$= 3 \cdot 16x^{2+2}y^{1+4} = \boldsymbol{48x^4y^5}$

(2) $5abc^2(2a^2 - 3b + 4c) = 5abc^2 \cdot 2a^2 + 5abc^2 \cdot (-3b) + 5abc^2 \cdot 4c$
$= \boldsymbol{10a^3bc^2 - 15ab^2c^2 + 20abc^3}$

(3) $(x-3)(x^2+4x-7) = x(x^2+4x-7) - 3(x^2+4x-7)$
$= x^3 + 4x^2 - 7x - 3x^2 - 12x + 21$
$= \boldsymbol{x^3 + x^2 - 19x + 21}$

(4) $(x^3-2x+5)(3x^2-x+4)$
$=x^3(3x^2-x+4) - 2x(3x^2-x+4) + 5(3x^2-x+4)$
$=3x^5 - x^4 + 4x^3 - 6x^3 + 2x^2 - 8x + 15x^2 - 5x + 20$
$=\boldsymbol{3x^5 - x^4 - 2x^3 + 17x^2 - 13x + 20}$

◀ $(-4xy^2)^2$ を先に計算する．
◀ 係数の積，文字の積をそれぞれ計算する．
◀ $A(B+C) = AB + AC$ より，次のことがいえる．
$A(B+C+D) = AB+AC+AD$
◀ $(A+B)(C+D+E)$
$= AC + AD + AE$
$+ BC + BD + BE$
◀ 降べきの順に整理する．

解答 I1.1.4 ★　問題 p.19

問題文
次の式を展開せよ．

(1) $(x+3)^2$　(2) $(k-2)^2$　(3) $(x+2y)(x-2y)$

(4) $(x-2y)(x-5y)$　(5) $(4a+2b)(3a+b)$　(6) $(2x-y-z)^2$

(1) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = \boldsymbol{x^2 + 6x + 9}$

(2) $(k-2)^2 = k^2 - 2 \cdot k \cdot 2 + 2^2 = \boldsymbol{k^2 - 4k + 4}$

(3) $(x+2y)(x-2y) = x^2 - (2y)^2 = \boldsymbol{x^2 - 4y^2}$

(4) $(x-2y)(x-5y) = x^2 + \{(-2y)+(-5y)\}x + (-2y)\cdot(-5y) = \boldsymbol{x^2 - 7xy + 10y^2}$

(5) $(4a+2b)(3a+b) = 4 \cdot 3a^2 + (4 \cdot b + 2b \cdot 3)a + 2b \cdot b = \boldsymbol{12a^2 + 10ab + 2b^2}$

(6) $(2x-y-z)^2 = \{2x + (-y) + (-z)\}^2$
$= (2x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2$
$+ 2 \cdot (2x) \cdot (-y) + 2 \cdot (-y) \cdot (-z) + 2 \cdot (-z) \cdot (2x)$
$= \boldsymbol{4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4zx}$

【別解】 $(2x-y-z)^2 = \{(2x-y) - z\}^2 = (2x-y)^2 - 2(2x-y)z + z^2$
$= \left(4x^2 - 4xy + y^2\right) - 4xz + 2yz + z^2$
$= \boldsymbol{4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4zx}$

◀ $(a+b)^2$
$=a^2 + 2ab + b^2$
◀ $(a-b)^2$
$=a^2 - 2ab + b^2$
◀ $(a+b)(a-b)$
$=a^2 - b^2$
◀ $(x+a)(x+b)$
$=x^2 + (a+b)x + ab$
◀ $(ax+b)(cx+d)$
$= acx^2 + (ad+bc)x + bd$
◀ $(a+b+c)^2$
$=a^2 + b^2 + c^2$
$+ 2ab + 2bc + 2ca$
◀ $2x - y = A$ とおくと，
$(A-z)^2 = A^2 - 2Az + z^2$
◀ 輪環の順に整理するとよい．

解答 1.1

One math

解答 I1.1.5 ★★　問題 p.20

問題文

次の式を展開せよ．

(1) $(x+3)^3$　(2) $(2x-5y)^3$

(3) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$　(4) $(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2)$

(5) $(x-3)^3(x+3)^3$　(6) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

(1) $$(x+3)^3 = x^3+3x^2\cdot 3+3x\cdot 3^2+3^3 = \boldsymbol{x^3+9x^2+27x+27}$$

◀ $(a+b)^3$ $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $$(2x-5y)^3 = (2x)^3-3(2x)^2\cdot 5y+3\cdot 2x\cdot(5y)^2-(5y)^3 = \boldsymbol{8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3}$$

◀ $(a-b)^3$ $=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $$\begin{aligned}(3x-2)(9x^2+6x+4) &= (3x-2)\{(3x)^2+3x\cdot 2+2^2\}\\ &= (3x)^3-2^3\\ &= \boldsymbol{27x^3-8}\end{aligned}$$

◀ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $=a^3+b^3$

(4) $$\begin{aligned}(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2) &= (5a+2b)\{(5a)^2-5a\cdot 2b+(2b)^2\}\\ &= (5a)^3+(2b)^3\\ &= \boldsymbol{125a^3+8b^3}\end{aligned}$$

◀ $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $=a^3-b^3$

(5) $$\begin{aligned}(x-3)^3(x+3)^3 &= \{(x-3)(x+3)\}^3\\ &= (x^2-9)^3\\ &= (x^2)^3-3(x^2)^2\cdot 9+3x^2\cdot 9^2-9^3\\ &= \boldsymbol{x^6-27x^4+243x^2-729}\end{aligned}$$

◀ 先に 3 次の乗法公式を用いて展開してもよいが，計算に手間が掛かる．そこで，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の利用を考える．

(6) $$\begin{aligned}&(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)\\ =&(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)\\ =&(x^3+8)(x^3-8)\\ =&\boldsymbol{x^6-64}\end{aligned}$$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

解答 1.1

One math

解答 I1.1.6 ★★　問題 p.21

問題文

次の式を展開せよ．

(1) $(x+2y-3)(x+2y+5)$　(2) $(4a-3b+c)(4a+3b-c)$

(3) $(p+q-r+s)(p+q+r-s)$

(1)　$(x+2y-3)(x+2y+5)$

$=\{(x+2y)-3\}\{(x+2y)+5\}$

$=(x+2y)^2+2(x+2y)-15$

$=\boldsymbol{x^2+4xy+4y^2+2x+4y-15}$

◀ $x+2y=A$ とおくと，

$(A-3)(A+5)$

$=A^2+2A-15$

(2)　$(4a-3b+c)(4a+3b-c)$

$=\{4a+(-3b+c)\}\{4a-(-3b+c)\}$

$=(4a)^2-(-3b+c)^2$

$=16a^2-\left(9b^2-6bc+c^2\right)$

$=\boldsymbol{16a^2-9b^2+6bc-c^2}$

◀ $-(3b-c)$ とくくると，共通する部分が $3b-c$ となる．

◀ $3b-c=A$ とおくと，

$(4a+A)(4a-A)$

$=16a^2-A^2$

(3)　$(p+q-r+s)(p+q+r-s)$

$=\{(p+q)+(r-s)\}\{(p+q)-(r-s)\}$

$=(p+q)^2-(r-s)^2$

$=\left(p^2+2pq+q^2\right)-\left(r^2-2rs+s^2\right)$

$=\boldsymbol{p^2+q^2-r^2-s^2+2pq+2rs}$

◀ $p+q-r+s$

$=(p+q)+(r-s)$

◀ $p+q=A$，$r-s=B$ とおくと，$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

解答 I1.1.7 ★★ 問題 p.22

問題文

次の式を展開せよ．

(1) $(x-4)(x-5)(x+2)(x+3)$　(2) $(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)\left(x^4+9\right)$

(3) $(m-n)^2\left(m^2+mn+n^2\right)^2$

(1)
$$\begin{aligned}&(x-4)(x-5)(x+2)(x+3)\\=&(x-4)(x+2)\times(x-5)(x+3)\\=&\left(x^2-2x-8\right)\left(x^2-2x-15\right)\\=&\left\{\left(x^2-2x\right)-8\right\}\left\{\left(x^2-2x\right)-15\right\}\\=&\left(x^2-2x\right)^2-23\left(x^2-2x\right)+120\\=&x^4-4x^3+4x^2-23x^2+46x+120\\=&\boldsymbol{x^4-4x^3-19x^2+46x+120}\end{aligned}$$

◀ 共通する部分が見つかるように，組み合わせを工夫する．

$(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)$

◀ $x^2-2x=A$ とおくと，

$(A-8)(A-15)$

$=A^2-23A+120$

(2)
$$\begin{aligned}&(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)\left(x^4+9\right)\\=&\left(x^2-9\right)\left(x^2+9\right)\left(x^4+9\right)\\=&\left(x^4-81\right)\left(x^4+9\right)\\=&x^8+9x^4-81x^4-729\\=&\boldsymbol{x^8-72x^4-729}\end{aligned}$$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を利用して，$(x-3)(x+3)$ を先に計算する．

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を再度利用する．

(3)
$$\begin{aligned}&(m-n)^2\left(m^2+mn+n^2\right)^2\\=&\left\{(m-n)\left(m^2+mn+n^2\right)\right\}^2\\=&\left(m^3-n^3\right)^2\\=&\boldsymbol{m^6-2m^3n^3+n^6}\end{aligned}$$

◀ $A^2B^2=(AB)^2$

解答 I1.1.8 ★ 問題 p.23

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $4x^3y^2+8x^2y^2+12xy^3$　(2) $ab-b-a+1$　(3) $x^2-14x+49$

(4) $25m^3-20m^2+4m$　(5) $9y^2-(y-2)^2$　(6) $x^2+7x+10$

(1) $4x^3y^2+8x^2y^2+12xy^3=\boldsymbol{4xy^2(x^2+2x+3y)}$

◀ 4，8，12 の最大公約数は 4 である．

(2) $ab-b-a+1=(a-1)b-(a-1)=\boldsymbol{(a-1)(b-1)}$

◀ b について整理すると，共通因数 $a-1$ が見つかる．

(3) $x^2-14x+49=x^2-2\cdot x\cdot 7+7^2=\boldsymbol{(x-7)^2}$

◀ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(4)
$$\begin{aligned}25m^3-20m^2+4m&=m(25m^2-20m+4)\\&=m\{(5m)^2-2\cdot 5m\cdot 2+2^2\}\\&\boldsymbol{m(5m-2)^2}\end{aligned}$$

◀ 先に m をくくり出す．

(5)
$$\begin{aligned}9y^2-(y-2)^2&=\{3y+(y-2)\}\{3y-(y-2)\}\\&=(3y+y-2)(3y-y+2)\\&=(4y-2)(2y+2)\\&=\boldsymbol{4(2y-1)(y+1)}\end{aligned}$$

◀ 括弧を外すときは符号に注意すること．

(6) $x^2+7x+10=x^2+(2+5)x+5\cdot 2=\boldsymbol{(x+2)(x+5)}$

◀ 和が 7，積が 10 になる数を探す．

解答 I1.1.9 ★　問題 p.24

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $2x^2+5x+3$　　(2) $4x^2-11x-3$　　(3) $6x^2+13xy+6y^2$

(1) $2x^2+5x+3=\boldsymbol{(x+1)(2x+3)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

(2) $4x^2-11x-3=\boldsymbol{(x-3)(4x+1)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -3 & \rightarrow & -12 \\ 4 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & & -11 \end{array}$$

(3) $6x^2+13xy+6y^2=\boldsymbol{(2x+3y)(3x+2y)}$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 3y & \longrightarrow & 9y \\ 3 & & 2y & \longrightarrow & 4y \\ \hline & & & & 13y \end{array}$$

◀ y を忘れないように注意すること．

解答 I1.1.10 ★★　問題 p.25

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) x^3-27　　(2) $27m^3+8n^3$

(3) $x^3-6x^2+12x-8$　　(4) x^3-4x^2-x+4

(1)
$$\begin{aligned} x^3-27 &= x^3-3^3 \\ &= (x-3)\{x^2+x\cdot 3+3^2\} \\ &= \boldsymbol{(x-3)(x^2+3x+9)} \end{aligned}$$

◀ a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2)
$$\begin{aligned} 27m^3+8n^3 &= (3m)^3+(2n)^3 \\ &= (3m+2n)\{(3m)^2-3m\cdot 2n+(2n)^2\} \\ &= \boldsymbol{(3m+2n)(9m^2-6mn+4n^2)} \end{aligned}$$

◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) $x^3-6x^2+12x-8=\boldsymbol{(x-2)^3}$

◀ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$=(a-b)^3$

【別解】
$$\begin{aligned} x^3-6x^2+12x-8 &= (x^3-8)+(-6x^2+12x) \\ &= (x-2)(x^2+2x+4)-6x(x-2) \\ &= (x-2)\{x^2+2x+4-6x\} \\ &= (x-2)(x^2-4x+4) \\ &= (x-2)(x-2)^2 \\ &= \boldsymbol{(x-2)^3} \end{aligned}$$

◀ 組み合わせを工夫する．

◀ $x^3-8=x^3-2^3$

◀ $x-2$ をくくり出す．

(4)
$$\begin{aligned} x^3-4x^2-x+4 &= (x^3-4x^2)-(x-4) \\ &= x^2(x-4)-1(x-4) \\ &= (x-4)(x^2-1) \\ &= \boldsymbol{(x-4)(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

◀ $x-4$ をくくり出す．

解答 I1.1.11 ★★ 問題 p.26

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $9x^2+3xy+y-1$　(2) $x^3+x^2y+3xy+y^2+2y-8$

(3) $xy+xz-y^2-z^2-2yz$

(1) $$9x^2+3xy+y-1=(3x+1)y+9x^2-1$$
$$=(3x+1)y+(3x+1)(3x-1)$$
$$=\boldsymbol{(3x+1)(3x+y-1)}$$

◀ y について整理する．

◀ $3x+1$ をくくり出す．

(2) $$x^3+x^2y+3xy+y^2+2y-8$$
$$=y^2+(x^2+3x+2)y+(x^3-8)$$
$$=y^2+(x^2+3x+2)y+(x-2)(x^2+2x+4)$$
$$=\left\{y+(x^2+2x+4)\right\}\left\{y+(x-2)\right\}$$
$$=\boldsymbol{(x^2+2x+y+4)(x+y-2)}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & x^2+2x+4 & \to & x^2+2x+4 \\ 1 & & x-2 & \longrightarrow & x-2 \\ \hline & & & & x^2+3x+2 \end{array}$$

◀ y について整理する．

◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
を用いて因数分解する．さらに，全体を y の 2 次式と考えて，たすき掛けを用いて因数分解する．

(3) $$xy+xz-y^2-z^2-2yz$$
$$=(y+z)x-(y^2+2yz+z^2)$$
$$=(y+z)x-(y+z)^2$$
$$=(y+z)\{x-(y+z)\}$$
$$=\boldsymbol{(y+z)(x-y-z)}$$

◀ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

解答 I1.1.12 ★★ 問題 p.27

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2+4xy+3y^2-2x-8y-3$　(2) $3x^2+11xy+10y^2-x-3y-4$

(1) $$x^2+4xy+3y^2-2x-8y-3$$
$$=x^2+(4y-2)x+\left(3y^2-8y-3\right)$$
$$=x^2+(4y-2)x+(y-3)(3y+1)\cdots\text{(i)}$$
$$=\{x+(y-3)\}\{x+(3y+1)\}\cdots\text{(ii)}$$
$$=\boldsymbol{(x+y-3)(x+3y+1)}$$

◀ 先に，(i) のように $10y^2-3y-4$ をたすき掛けを用いて因数分解する．次に，(ii) のように全体を x の 2 次式と考えて，たすき掛けを用いて因数分解する．

(i)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & & -8 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y-3 & \longrightarrow & y-3 \\ 1 & & 3y+1 & \longrightarrow & 3y+1 \\ \hline & & & & 4y-2 \end{array}$$

(2) $$3x^2+11xy+10y^2-x-3y-4$$
$$=3x^2+(11y-1)x+(10y^2-3y-4)$$
$$=3x^2+(11y-1)x+(2y+1)(5y-4)\cdots\text{(i)}$$
$$=\{x+(2y+1)\}\{3x+(5y-4)\}\cdots\text{(ii)}$$
$$=\boldsymbol{(x+2y+1)(3x+5y-4)}$$

◀ y について整理して，因数分解してもよい．

(i)
$$\begin{array}{ccccc} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 1 & \longrightarrow & 5 \\ 5 & & -4 & \longrightarrow & -8 \\ \hline & & & & -3 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 2y+1 & \longrightarrow & 6y+3 \\ 3 & & 5y-4 & \longrightarrow & 5y-4 \\ \hline & & & & 11y-1 \end{array}$$

解答 1.1

解答 I1.1.13 ★★ 問題 p.28

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $(x+3y)^2-5(x+3y)+6$　　(2) $\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-3\right)-4$

(3) $(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)+24$

(1)　$(x+3y)^2-5(x+3y)+6$

$=\{(x+3y)-2\}\{(x+3y)-3\}$

$=\boldsymbol{(x+3y-2)(x+3y-3)}$

◀ $x+3y=A$ とおくと，

A^2-5A+6
$=(A-2)(A-3)$

(2)　$\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-3\right)-4$

$=\left(x^2-2x\right)\left\{\left(x^2-2x\right)-3\right\}-4$

$=\left(x^2-2x\right)^2-3\left(x^2-2x\right)-4$

$=\left\{\left(x^2-2x\right)-4\right\}\left\{\left(x^2-2x\right)+1\right\}$

$=\left(x^2-2x-4\right)\left(x^2-2x+1\right)$

$=\boldsymbol{\left(x^2-2x-4\right)(x-1)^2}$

◀ $x^2-2x=A$ とおくと，

$A(A-3)-4$
$=A^2-3A-4$
$=(A-4)(A+1)$

(3)　$(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)+24$

$=(x-1)(x+6)\times(x+1)(x+4)+24$

$=\left(x^2+5x-6\right)\left(x^2+5x+4\right)+24$

$=\left\{\left(x^2+5x\right)-6\right\}\left\{\left(x^2+5x\right)+4\right\}+24$

$=\left(x^2+5x\right)^2-2\left(x^2+5x\right)$

$=\left(x^2+5x\right)\left\{\left(x^2+5x\right)-2\right\}$

$=\boldsymbol{x(x+5)\left(x^2+5x-2\right)}$

◀ 共通する部分が現れるように，組み合わせを工夫する．

(　)(　)(　)(　)

◀ $x^2+5x=A$ とおくと，

$(A-6)(A+4)+24$
$=A^2-2A$
$=A(A-2)$

解答 1.1

解答 I1.1.14 ★★ 問題 p.29

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$　　(2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$$
\begin{aligned}
&=\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}(b+c)+abc\\
&=(b+c)a^2+\left\{(b+c)^2+bc\right\}a+(b+c)bc\\
&=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}\\
&=\boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & b+c & \longrightarrow & (b+c)^2\\
b+c & & bc & \longrightarrow & bc\\
\hline
 & & & & (b+c)^2+bc
\end{array}
$$

◀ a について整理する．

◀ たすき掛けを用いて因数分解する．

(2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$$
\begin{aligned}
&=a^2b-ab^2+bc(b-c)+ac^2-a^2c\\
&=(b-c)a^2-\left(b^2-c^2\right)a+bc(b-c)\\
&=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\\
&=(b-c)\left\{a^2-(b+c)a+bc\right\}\\
&=(b-c)(a-b)(a-c)\\
&=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}
$$

◀ a について整理する．

◀ $b-c$ をくくり出す．

◀ このままでも正答であるが，輪環の順に整理するとよい．

解答 I1.1.15 ★★★ 問題 p.30

解答 1.1

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $p^3+q^3+3pq-1$　　(2) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

(1) $p^3+q^3+(-1)^3+3pq$

$$
\begin{aligned}
&=p^3+q^3+(-1)^3-3p\cdot q\cdot(-1)\\
&=\{p+q+(-1)\}\{p^2+q^2+(-1)^2-p\cdot q-q\cdot(-1)-(-1)\cdot p\}\\
&=\boldsymbol{(p+q-1)(p^2+q^2-pq+p+q+1)}
\end{aligned}
$$

(2) $x-y=a,\ y-z=b,\ z-x=c$ とおく．
$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$ より，

$$
\begin{aligned}
&(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\\
&=a^3+b^3+c^3\\
&=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc\\
&=3abc\\
&=\boldsymbol{3(x-y)(y-z)(z-x)}
\end{aligned}
$$

◀ $a+b+c=0$

解答 I1.1.16 ★★★ 問題 p.31

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) x^4-11x^2+18　(2) x^4+4x^2+16　(3) $x^4-8x^2y^2+4y^4$

(1) $x^4-11x^2+18=(x^2-9)(x^2-2)=\boldsymbol{(x+3)(x-3)(x^2-2)}$

◀ $x^2=A$ とおくと，$A^2-11A+18=(A-9)(A-2)$

(2)
$$\begin{aligned} x^4+4x^2+16&=(x^4+8x^2+16)-4x^2\\ &=(x^2+4)^2-(2x)^2\\ &=\{(x^2+4)+2x\}\{(x^2+4)-2x\}\\ &=\boldsymbol{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)} \end{aligned}$$

◀ x^4 と定数項 16 より，$(x^2+4)^2$ または$(x^2-4)^2$ を作ることを考える．

(3)
$$\begin{aligned} x^4-8x^2y^2+4y^4&=(x^4-4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2\\ &=(x^2-2y^2)^2-4x^2y^2\\ &=\{(x^2-2y^2)+2xy\}\{(x^2-2y^2)-2xy\}\\ &=\boldsymbol{(x^2+2xy-2y^2)(x^2-2xy-2y^2)} \end{aligned}$$

◀ x^4 と $4y^4$ より，$(x^2+2y^2)^2$ または$(x^2-2y^2)^2$ を作ることを考える．

解答 1.1

解答（節末）I1.1.1 ★ 節末 p.32

問題文
ある多項式に $5x^2-3x+1$ を加えるところを誤って引いたので，答えが $-3x^2+12x-5$ になった．正しい答えを求めよ．

多項式を P とおくと，$P-\left(5x^2-3x+1\right)=-3x^2+12x-5$
したがって，$P=-3x^2+12x-5+\left(5x^2-3x+1\right)=2x^2+9x-4$
よって，正しい答えは，

$$\begin{aligned} P+\left(5x^2-3x+1\right) &= 2x^2+9x-4+5x^2-3x+1 \\ &= \mathbf{7x^2+6x-3} \end{aligned}$$

◀ 先に P を求める．

解答（節末）I1.1.2 ★★ 節末 p.32

問題文
$\left(x^3-4x^2+2x+3\right)\left(x^3+x^2-x+2\right)$ の展開式において，x^5 と x^3 の係数を求めよ．

x^5 の項を計算すると，$x^3\cdot x^2+(-4x^2)\cdot x^3=(1-4)x^5=-3x^5$
よって，x^5 の係数は $\mathbf{-3}$
x^3 の項を計算すると，

$$x^3\cdot 2+(-4x^2)\cdot(-x)+(2x)\cdot x^2+3\cdot x^3=11x^3$$

よって，x^3 の係数は **11**

◀ 直接すべての項を展開してもよいが，計算に手間が掛かる．そこで，掛けて x^5，x^3 になるものだけを取り出して考える．

解答（節末）I1.1.3 ★★ 節末 p.32

問題文
次の式を展開せよ．
(1) $\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+x-1\right)$　(2) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

(1)
$$\begin{aligned} &\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+x-1\right) \\ =&\left\{\left(x^3+x\right)+\left(x^2+1\right)\right\}\left\{\left(x^3+x\right)-\left(x^2+1\right)\right\} \\ =&\left(x^3+x\right)^2-\left(x^2+1\right)^2 \\ =&\left(x^6+2x^4+x^2\right)-\left(x^4+2x^2+1\right) \\ =&x^6+2x^4+x^2-x^4-2x^2-1 \\ =&\mathbf{x^6+x^4-x^2-1} \end{aligned}$$

◀ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(2)
$$\begin{aligned} &(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \\ =&\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\times\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\} \\ =&\left\{(b+c)^2-a^2\right\}\left\{a^2-(b-c)^2\right\} \\ =&-a^4+\left\{(b+c)^2+(b-c)^2\right\}a^2-(b+c)^2(b-c)^2 \\ =&-a^4+2\left(b^2+c^2\right)a^2-\left(b^2-c^2\right)^2 \\ =&-a^4+2a^2b^2+2c^2a^2-b^4+2b^2c^2-c^4 \\ =&\mathbf{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2} \end{aligned}$$

◀ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

◀ 輪環の順に整理するとよい．

解答 1.1

One math

解答（節末）I1.1.4 ★★　節末 p.32

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2y+2xy^2+x^2+4y^2+3xy+x+2y-2$　(2) $(x+y)^4-(x-y)^4$

(3) $(x+y)^3+z^3$　(4) x^6-1

(5) a^6-7a^3-8　(6) $\left(x^2+6x+3\right)\left(x^2+6x+7\right)+4$

(1)
$$\begin{aligned} & x^2y+2xy^2+x^2+4y^2+3xy+x+2y-2 \\ =&(y+1)x^2+\left(2y^2+3y+1\right)x+4y^2+2y-2 \\ =&(y+1)x^2+(y+1)(2y+1)x+2(y+1)(2y-1) \\ =&(y+1)\left\{x^2+(2y+1)x+2(2y-1)\right\} \\ =&(y+1)(x+2)\{x+(2y-1)\} \\ =&\boldsymbol{(x+2)(y+1)(x+2y-1)} \end{aligned}$$

◀ 先に，(i) のように 2 をくくり出して，$2y^2+y-1$ をたすき掛けを用いて因数分解する．次に，(ii) のように波括弧内の全体を x の 2 次式と考えて，たすき掛けを用いて因数分解する．

(i)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline & & & & 1 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \longrightarrow & 2 \\ 1 & & 2y-1 & \longrightarrow & 2y-1 \\ \hline & & & & 2y+1 \end{array}$$

(2)
$$\begin{aligned} & (x+y)^4-(x-y)^4 \\ =&\left\{(x+y)^2+(x-y)^2\right\}\left\{(x+y)^2-(x-y)^2\right\} \\ =&\left(x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2\right) \\ & \times\{(x+y)+(x-y)\}\{(x+y)-(x-y)\} \\ =&\left(2x^2+2y^2\right)(2x)(2y)=\boldsymbol{8xy\left(x^2+y^2\right)} \end{aligned}$$

◀ $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

(3)
$$\begin{aligned} (x+y)^3+z^3 &=\{(x+y)+z\}\left\{(x+y)^2-(x+y)\cdot z+z^2\right\} \\ &=\boldsymbol{(x+y+z)\left(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2\right)} \end{aligned}$$

◀ $x+y=A$ とおくと，
$$\begin{aligned} & A^3+z^3 \\ =&(A+z)(A^2-Az+z^2) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x^6-1 &=\left(x^3\right)^2-1^2 \\ &=\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right) \\ &=\boldsymbol{(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x+1)\left(x^2-x+1\right)} \end{aligned}$$

◀ $x^3=A$ とおくと，
$$A^2-1=(A+1)(A-1)$$
なお，$x^2=A$ とおいて，3 次の乗法公式を用いてもよい．

(5)
$$\begin{aligned} & a^6-7a^3-8 \\ =&\left(a^3+1\right)\left(a^3-8\right) \\ =&(a+1)\left(a^2-a+1\right)(a-2)\left(a^2+2a+4\right) \\ =&\boldsymbol{(a+1)(a-2)\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+2a+4\right)} \end{aligned}$$

◀ $a^3=A$ とおくと，
$$\begin{aligned} & A^2-7A-8 \\ =&(A+1)(A-8) \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} & \left(x^2+6x+3\right)\left(x^2+6x+7\right)+4 \\ =&\left\{\left(x^2+6x\right)+3\right\}\left\{\left(x^2+6x\right)+7\right\}+4 \\ =&\left(x^2+6x\right)^2+10\left(x^2+6x\right)+25=\left(x^2+6x+5\right)^2 \\ =&\{(x+1)(x+5)\}^2=\boldsymbol{(x+1)^2(x+5)^2} \end{aligned}$$

解答（節末）I1.1.5 ★★★ 節末 p.32

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$　(2) $4x^4+7x^2y^2+16y^4$

(1) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$

$= (x-z)^3+(y-z)^3+(-x-y+2z)^3$

◀ $-(x+y-2z)^3$ $=(-x-y+2z)^3$

$x-z=a$，$y-z=b$，$-x-y+2z=c$ とおくと，$a+b+c=0$ より，

$$\begin{aligned}&(x-z)^3+(y-z)^3+(-x-y+2z)^3=a^3+b^3+c^3\\&=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc\\&=3abc\\&=3(x-z)(y-z)(-x-y+2z)\\&=\boldsymbol{3(y-z)(z-x)(x+y-2z)}\end{aligned}$$

◀ $a+b+c=0$

(2)
$$\begin{aligned}4x^4+7x^2y^2+16y^4&=\left(4x^4+16x^2y^2+16y^4\right)-9x^2y^2\\&=4\left(x^4+4x^2y^2+4y^4\right)-(3xy)^2\\&=4\left(x^2+2y^2\right)^2-(3xy)^2\\&=\left\{2\left(x^2+2y^2\right)+3xy\right\}\left\{2\left(x^2+2y^2\right)-3xy\right\}\\&=\boldsymbol{\left(2x^2+3xy+4y^2\right)\left(2x^2-3xy+4y^2\right)}\end{aligned}$$

◀ $4x^4$ と $16y^4$ より，$(2x^2+2y^2)^2$ または $(2x^2-2y^2)$ を作ることを考える．

実数（解答）

解答 I1.2.1 ★ 問題 p.35

問題文

(1) 次の分数を小数の形に直し，循環小数の表し方で書け．

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{12}$ (iii) $\frac{7}{15}$

(2) 次の循環小数を分数の形で表せ．

(i) $0.\dot{4}$ (ii) $0.\dot{3}\dot{6}$

(1) (i) $\dfrac{2}{7} = 0.285714285714\ldots = \mathbf{0.\dot{2}8571\dot{4}}$

(ii) $\dfrac{5}{12} = 0.41666\ldots = \mathbf{0.41\dot{6}}$

(iii) $\dfrac{7}{15} = 0.46666\ldots = \mathbf{0.4\dot{6}}$

(2) (i) $x = 0.\dot{4}$ とおく．右のように計算して，

$$9x = 4$$

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 4.44\ldots \\ - & x = & 0.44\ldots \\ \hline & 9x = & 4 \end{array}$$

よって，$x = \mathbf{\frac{4}{9}}$

◀ 循環する部分が 1 桁であるので，両辺を 10^1 $(= 10)$ 倍する．

(ii) $x = 0.\dot{3}\dot{6}$ とおく．右のように計算して，

$$99x = 36$$

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 36.363\ldots \\ - & x = & 0.363\ldots \\ \hline & 99x = & 36 \end{array}$$

よって，$x = \frac{36}{99} = \mathbf{\frac{4}{11}}$

◀ 循環する部分が 2 桁であるので，両辺を 10^2 $(= 100)$ 倍する．

解答 I1.2.2 ★ 問題 p.36

問題文

次の式を計算せよ．

(1) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{27}$ (2) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

(3) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$ (4) $(\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{3})$

(1) $$\begin{aligned} 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{27} &= 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - 2\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{3^3} \\ &= 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = \mathbf{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

◀ 素因数分解し，根号内を小さい数にする．

(2) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2 = 6 - 2 = \mathbf{4}$

◀ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(3) $$\begin{aligned} (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 &= (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &\quad - \{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2\} \\ &= 7 + 2\sqrt{14} + 2 - (7 - 2\sqrt{14} + 2) = \mathbf{4\sqrt{14}} \end{aligned}$$

◀ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $(a > 0,\ b > 0)$

(4) $$\begin{aligned} (\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{3}) &= (\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 5 + 2\sqrt{35} + 7 - 3 = \mathbf{9 + 2\sqrt{35}} \end{aligned}$$

◀ $(\sqrt{5} + \sqrt{7}) = A$ とおくと，$(A + \sqrt{3})(A - \sqrt{3}) = A^2 - 3$

解答 I1.2.3 ★★ 問題 p.37

問題文

次の式の分母を有理化して簡単にせよ．

(1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$　(2) $\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

(3) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$　(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

◀ 分母，分子に $\sqrt{3}$ を掛ける．

【別解】 $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}}$

◀ $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2=4$

(3)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}&=\frac{\sqrt{10}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}-\frac{2(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}\\&=\frac{\sqrt{50}+2\sqrt{10}}{5-4}-\frac{2(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{11-10}\\&=5\sqrt{2}+2\sqrt{10}-2(\sqrt{11}+\sqrt{10})\\&=\boldsymbol{5\sqrt{2}-2\sqrt{11}}\end{aligned}$$

◀ 第 1 項と第 2 項の分母，分子にそれぞれ，$\sqrt{5}+2$，$\sqrt{11}+\sqrt{10}$ を掛ける．

(4)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}&=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}\\&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}\\&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\\&=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}\\&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}\end{aligned}$$

◀ $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$ より，$(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$ と項を分けて，$(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}$ を掛ける．

◀ 更に分母を有理化する．

解答 I1.2.4 ★★ 問題 p.38

問題文

次の 2 重根号を簡単な形にせよ．

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$　(2) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$

(3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}$　(4) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}$

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\times 3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

◀ $\sqrt{3}-2$ は誤りであるので注意すること．

(2) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{(9+3)+2\sqrt{9\times 3}}=\mathbf{3+\sqrt{3}}$

◀ $6\sqrt{3}=2\times 3\sqrt{3}$
$=3\sqrt{3^2\cdot 3}=3\sqrt{27}$

(3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}=\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{(7+3)-2\sqrt{7\times 3}}=\mathbf{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

◀ $\sqrt{84}=\sqrt{2^2\cdot 21}=2\sqrt{21}$

(4)
$$\sqrt{8+3\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{16+2\sqrt{63}}{2}}=\frac{\sqrt{(9+7)+2\sqrt{9\times 7}}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{9}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}}$$

◀ $\frac{\sqrt{8+3\sqrt{7}}}{1}$ の分母，分子に $\sqrt{2}$ を掛ける．

解答 I1.2.5 ★★★ 問題 p.39

問題文

$x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $x+y$　(2) xy　(3) x^2+y^2　(4) x^3+y^3　(5) x^4+y^4

(1)
$$x+y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(5-2\sqrt{15}+3)+(5+2\sqrt{15}+3)}{5-3}=\mathbf{8}$$

◀ $x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4-\sqrt{15}$，$y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=4+\sqrt{15}$ のように，x，y のそれぞれの分母を有理化してから，$x+y$，xy の値を計算してもよい．

(2) $xy=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\mathbf{1}$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot 1=64-2=\mathbf{62}$

◀ (1)，(2) で求めた $x+y=8$，$xy=1$ を利用する．

(4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8^3-3\cdot 1\cdot 8=512-24=\mathbf{488}$

【別解】 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=8\cdot(62-1)=\mathbf{488}$

◀ a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(5) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=62^2-2\cdot 1^2=3844-2=\mathbf{3842}$

◀ $(x^2+y^2)^2$
$=x^4+2x^2y^2+y^4$

解答 1.2

One math

解答 I1.2.6 ★★ 問題 p.40

問題文

$x - \frac{1}{x} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$　(2) $x + \frac{1}{x}$　(3) $x^3 + \frac{1}{x^3}$　(4) $x^6 + \frac{1}{x^6}$

(1) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \dfrac{1}{x} = 3^2 + 2 = \mathbf{11}$

◀ $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$

【別解】 $x - \dfrac{1}{x} = 3$ の両辺を 2 乗すると，$x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2} = 9$

よって，$x^2 + \frac{1}{x^2} = \mathbf{11}$

(2) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = 11 + 2 = 13$

よって，$x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{\mathbf{13}}$

◀ (1) の結果より，

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 11$

(3)
$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left\{x^2 - x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right\} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) \\ &= \pm\sqrt{13}(11 - 1) = \pm\mathbf{10}\sqrt{\mathbf{13}} \end{aligned}$$

◀ $x^3 + y^3$

$= (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

◀ $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ を用いて求めてもよい．

(4)
$$\begin{aligned} x^6 + \frac{1}{x^6} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 11^3 - 3 \cdot 11 = \mathbf{1298} \end{aligned}$$

◀ $x^3 + y^3$

$= (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

【別解】 $x^6 + \dfrac{1}{x^6} = \left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)^2 - 2 = (\pm 10\sqrt{13})^2 - 2 = 1300 - 2 = \mathbf{1298}$

◀ $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

解答 1.2

解答 I1.2.7 ★★★ 問題 p.41

問題文

$x + y + z = 3$，$xy + yz + zx = 1$，$xyz = -2$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の式の値を求めよ．

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$　(2) $x^2 + y^2 + z^2$　(3) $x^3 + y^3 + z^3$

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz}{x \cdot yz} + \frac{zx}{y \cdot zx} + \frac{xy}{z \cdot xy} = \frac{yz+zx+xy}{xyz} = \frac{1}{-2} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= 3^2 - 2 \cdot 1 \\ &= 9 - 2 = \mathbf{7} \end{aligned}$$

◀ $(x+y+z)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2$

$+ 2(xy + yz + zx)$

(3)
$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) + 3xyz \\ &= (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right) + 3xyz \\ &= 3 \cdot (7 - 1) + 3 \cdot (-2) = \mathbf{12} \end{aligned}$$

解答 I1.2.8 ★★★ 問題 p.42

問題文

$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $2\alpha^2-2\alpha-1$ (2) α^8

(1) $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ より，$2\alpha-1=\sqrt{3}$

◀ 右辺を根号のみの形にする．

両辺を 2 乗すると，$(2\alpha-1)^2=(\sqrt{3})^2$

したがって，$4\alpha^2-4\alpha-2=0$

よって，$\boldsymbol{2\alpha^2-2\alpha-1=0}$

(2) (1) より，$\alpha^2=\alpha+\frac{1}{2}$

$\alpha^8=\left(\alpha^4\right)^2$ であるから，

$$\alpha^4=\left(\alpha^2\right)^2=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2=\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+\alpha+\frac{1}{4}=2\alpha+\frac{3}{4}$$

◀ $\alpha^2=\alpha+\frac{1}{2}$ を用いて，次数を下げる．なお，解答では α^8 に $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ を代入しているが，α^4 に $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ を代入して，その結果を 2 乗することで α^8 を求めてもよい．

したがって，

$$\alpha^8=\left(\alpha^4\right)^2=\left(2\alpha+\frac{3}{4}\right)^2=4\alpha^2+3\alpha+\frac{9}{16}=4\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+3\alpha+\frac{9}{16}=7\alpha+\frac{41}{16}$$

よって，

$$\alpha^8=7\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{41}{16}=\frac{56(1+\sqrt{3})+41}{16}=\boldsymbol{\frac{97+56\sqrt{3}}{16}}$$

解答 I1.2.9 ★★★ 問題 p.43

問題文

$\frac{3}{4-\sqrt{7}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．

(1) a，b の値を求めよ． (2) $a+\frac{1}{b}$ の値を求めよ．

(1) $\dfrac{3}{4-\sqrt{7}}=\dfrac{3(4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$

◀ 分母を有理化する．

$2<\sqrt{7}<3$ であるから，$6<4+\sqrt{7}<7$

◀ $2^2<7<3^2$ より，$2<\sqrt{7}<3$

したがって，$\frac{6}{3}<\frac{4+\sqrt{7}}{3}<\frac{7}{3}$

◀ $\frac{6}{3}=2\ldots$，$\frac{7}{3}=2.333\ldots$

ゆえに，$a=\boldsymbol{2}$

よって，

$$b=\frac{4+\sqrt{7}}{3}-a=\frac{4+\sqrt{7}}{3}-2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}-2}{3}}$$

◀ 小数部分は，

(もとの数) − (整数部分)

で求められる．

(2) (1) より，

$$a+\frac{1}{b}=2+1\div\left(\frac{\sqrt{7}-2}{3}\right)=2+\frac{3}{\sqrt{7}-2}=2+\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\boldsymbol{4+\sqrt{7}}$$

解答 1.2

One math

解答（節末）I1.2.1 ★ 節末 p.44

問題文

循環小数の積 $0.\dot{1}\dot{5}\times 0.\dot{5}\dot{4}$ を，1 つの既約分数で表せ．

$x=0.\dot{1}\dot{5}$ とおくと，$100x=15.1515\ldots$
したがって，$100x-x=15$
これより，$x=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$

◀ $0.\dot{1}\dot{5}$ を既約分数で表す．

また，$y=0.\dot{5}\dot{4}\ldots$ とおくと $100y=54.5454\ldots$
したがって，$100y-y=54$
これより，$y=\frac{54}{99}=\frac{6}{11}$

◀ $0.\dot{5}\dot{4}$ を既約分数で表す．

よって，

$$0.\dot{1}\dot{5}\times 0.\dot{5}\dot{4}=xy=\frac{5}{33}\cdot\frac{6}{11}=\frac{30}{363}=\boldsymbol{\frac{10}{121}}$$

解答（節末）I1.2.2 ★★ 節末 p.44

問題文

$\frac{3}{4}<x<\frac{5}{6}$ のとき，$\sqrt{16x^2-24x+9}-\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{36x^2-60x+25}$ を簡単にせよ．

$$\begin{aligned}&\sqrt{16x^2-24x+9}-\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{36x^2-60x+25}\\=&\sqrt{(4x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(6x-5)^2}\end{aligned}$$

$\frac{3}{4}<x<\frac{5}{6}$ のとき，$4x-3>0$，$x+3>0$，$6x-5<0$ であるから，

$$\begin{aligned}&\sqrt{16x^2-24x+9}-\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{36x^2-60x+25}\\=&(4x-3)-(x+3)+\{-(6x-5)\}\\=&\boldsymbol{-3x-1}\end{aligned}$$

◀ $\sqrt{a^2}=|a|$ を利用する．

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqq 0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

解答（節末）I1.2.3 ★★ 節末 p.44

問題文

次の式を計算せよ．

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

与えられた式の各項を有理化すると，

$$S=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

◀ 例えば $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}$ は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\\=&\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})}\\=&\sqrt{2}-\sqrt{1}\end{aligned}$$

となる．他の項も同様に分母の有理化を行う．

となり，途中の項が打ち消し合うから，

$$S=-\sqrt{1}+\sqrt{100}$$

よって，

$$S=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=\boldsymbol{9}$$

解答（節末）I1.2.4 ★★ 節末 p.44

問題文

次の式の分母を有理化して計算せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}\\
=&\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}\\
&+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}\\
=&\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}\\
=&\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\\
=&\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{6}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}}
\end{aligned}$$

◀ $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$ であることに着目して，第 1 項と第 2 項の分母を有理化する．

【別解】

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{-6-2\sqrt{15}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}+3}=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{15}-3)}{(\sqrt{15}+3)(\sqrt{15}-3)}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}}$$

◀ 第 1 項と第 2 項の分母を通分する．

◀ 分母，分子に $\sqrt{15}-3$ を掛けて，分母を有理化する．

解答 1.2

解答（節末）I1.2.5 ★★ 節末 p.44

問題文

次の式を簡単な形にせよ．

$$\sqrt{4+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times 1}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1$$

◀ 先に，$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ を簡単な形にする．和が 4，積が 3 になる 2 つの数は，3 と 1 である．

よって，

$$\begin{aligned}
\sqrt{4+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}&=\sqrt{4+4(\sqrt{3}+1)}\\
&=\sqrt{4+4\sqrt{3}+4}\\
&=\sqrt{8+4\sqrt{3}}\\
&=\sqrt{(6+2)+2\sqrt{6\times 2}}\\
&=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}\\
&=\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

◀ $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$ を簡単な形にする．$4\sqrt{3}=2\sqrt{12}$ であり，和が 8，積が 12 になる 2 つの数は，6 と 2 である．

解答（節末）I1.2.6 ★★★ 節末 p.44

問題文

実数 a, b, c が $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=14$, $abc=-2$ を満たすとき,$(a+b)(b+c)(c+a)$ の値を求めよ.

$a+b+c=3\cdots$(i) より，

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=(3-c)(3-a)(3-b)\\&=27-9a-9b-9c+3ab+3bc+3ca-abc\\&=27-9(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc\cdots\text{(ii)}\end{aligned}$$

◀ (i) を移項して, $a+b=3-c$, $b+c=3-a$, $c+a=3-b$

また，$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ より，

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\\&=\frac{3^2-14}{2}=\frac{9-14}{2}=-\frac{5}{2}\cdots\text{(iii)}\end{aligned}$$

よって，$abc=-2$，(i)，(iii) を (ii) に代入すると，

$$(a+b)(b+c)(c+a)=27-9\cdot3+3\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-(-2)=\boldsymbol{-\frac{11}{2}}$$

解答（節末）I1.2.7 ★★★ 節末 p.44

問題文

$\frac{1}{4-\sqrt{11}}$ の整数部分を a，小数部分を b とし，$10b$ の整数部分を c，小数部分を d とするとき，次の値を求めよ.

(1) a　(2) $10b$　(3) c　(4) d

(1)

$$\frac{1}{4-\sqrt{11}}=\frac{4+\sqrt{11}}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}=\frac{4+\sqrt{11}}{5}$$

◀ 分母を有理化する.

$3<\sqrt{11}<4$ であるから，$7<4+\sqrt{11}<8$

◀ $3^2<11<4^2$ より，$3<\sqrt{11}<4$

したがって，$\frac{7}{5}<\frac{4+\sqrt{11}}{5}<\frac{8}{5}$

◀ $\frac{7}{5}=1.4$, $\frac{8}{5}=1.6$

よって，$a=\mathbf{1}$

(2) $a+b=\frac{4+\sqrt{11}}{5}$ であるから，

$$b=\frac{4+\sqrt{11}}{5}-a=\frac{4+\sqrt{11}}{5}-1=\frac{-1+\sqrt{11}}{5}$$

◀ 小数部分は，

(もとの数) − (整数部分)

で求められる.

よって，$10b=10\cdot\frac{-1+\sqrt{11}}{5}=2(-1+\sqrt{11})=\boldsymbol{-2+2\sqrt{11}}$

(3) (2) より，$10b=-2+2\sqrt{11}=2\sqrt{11}-2$

ここで，$6<2\sqrt{11}<7$ であるから，$4<2\sqrt{11}-2<5$

◀ $6^2<(2\sqrt{11})^2<7^2$ より，$6<2\sqrt{11}<7$

よって，$c=\mathbf{4}$

(4) $10b=c+d$ より，$c+d=2\sqrt{11}-2$

よって，$d=(2\sqrt{11}-2)-c=(2\sqrt{11}-2)-4=\boldsymbol{2\sqrt{11}-6}$

◀ (もとの数)

=(整数部分) + (小数部分)

解答 1.2

1 次不等式（解答）

解答 I1.3.1 ★★ 問題 p.46

問題文

$-3 < x < 2$，$-1 < y < 4$ のとき，次の式のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $x+2$　(2) $3x$　(3) $x+y$　(4) $x-y$　(5) $3x-2y$

(1) $-3 < x < 2$ の各辺に 2 を加えると，$\boldsymbol{-1 < x+2 < 4}$

◀ $a < b \Rightarrow a+c < b+c$

(2) $-3 < x < 2$ の各辺に 3 を掛けると，$\boldsymbol{-9 < 3x < 6}$

◀ $c > 0$，$a < b \Rightarrow ac < bc$

(3) $-3 < x < 2$ の各辺に y を加えると，$-3+y < x+y < 2+y$

◀ $-3 < x < 2$，$-1 < y < 4$ の各辺を足し合わせて，$-4 < x+y < 6$ としてもよい．

$-1 < y$ より，$-3+(-1) < -3+y$

また，$y < 4$ より，$2+y < 2+4$

したがって，$-4 < x+y$，$x+y < 6$

よって，$\boldsymbol{-4 < x+y < 6}$

(4) $-1 < y < 4$ の各辺に -1 を掛けると，$1 > -y > -4$

◀ 不等式の両辺に負の数を掛けるときは，不等号の向きが変わる．

すなわち，$-4 < -y < 1$

したがって，$-3 < x < 2$，$-4 < -y < 1$ より，$-3+(-4) < x+(-y) < 2+1$

よって，$\boldsymbol{-7 < x-y < 3}$

(5) (2) より，$-9 < 3x < 6$

$-1 < y < 4$ の各辺に -2 を掛けると，$2 > -2y > -8$

◀ 不等号の向きが変わる．

すなわち，$-8 < -2y < 2$

したがって，$-9 < 3x < 6$，$-8 < -2y < 2$ より，$-9+(-8) < 3x+(-2y) < 6+2$

よって，$\boldsymbol{-17 < 3x-2y < 8}$

解答 I1.3.2 ★ 問題 p.47

問題文

次の 1 次不等式を解け．

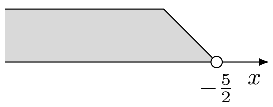
(1) $5x+1 < 3x-4$　(2) $4(2x-3) > 3(x+2)$　(3) $\frac{2x+3}{4} - \frac{x-1}{6} \geqq \frac{1}{3}$

(1) 移項すると，$5x-3x < -4-1$

◀ 移項すると符号が変わる．

整理すると，$2x < -5$

よって，$\boldsymbol{x < -\frac{5}{2}}$

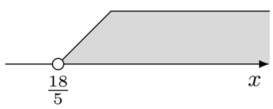


(2) 展開すると，$8x-12 > 3x+6$

移項すると，$8x-3x > 6+12$

整理すると，$5x > 18$

よって，$\boldsymbol{x > \frac{18}{5}}$



(3) 両辺に 12 を掛けると，$3(2x+3)-2(x-1) \geqq 4$

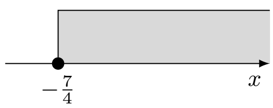
◀ 不等式の両辺に，4，6，3 の最小公倍数 12 を掛ける．

展開すると，$6x+9-2x+2 \geqq 4$

整理すると，$4x+11 \geqq 4$

移項すると，$4x \geqq -7$

よって，$\boldsymbol{x \geqq -\frac{7}{4}}$



解答 I1.3.3 ★ 問題 p.48

問題文

次の不等式，連立 1 次不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 4x-1>2x+3 \\ 2x+5 \leqq 3(x-1) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+4 \geqq 3-x \\ x-2<0 \end{cases}$

(3) $2x+1 \leqq 3x-4 < -4x-7$

(1) $4x-1>2x+3$ より，$2x>4$

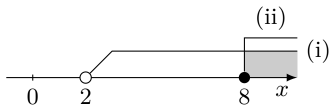
したがって，$x>2 \cdots$(i)

また，$2x+5 \leqq 3(x-1)$ より，$2x+5 \leqq 3x-3$

移項すると，$-x \leqq -8$

したがって，$x \geqq 8 \cdots$(ii)

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，$\boldsymbol{x \geqq 8}$



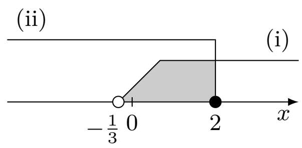
(2) $2x+4 \geqq 3-x$ より，$3x \geqq -1$

したがって，$x \geqq -\frac{1}{3} \cdots$(i)

また，$x-2<0$ より，$x<2 \cdots$(ii)

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，

$$\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leqq x < 2}$$



(3) $2x+1 \leqq 3x-4 < -4x-7$ より，$\begin{cases} 2x+1 \leqq 3x-4 \\ 3x-4 < -4x-7 \end{cases}$

$2x+1 \leqq 3x-4$ より，$-x \leqq -5$

したがって，$x \geqq 5 \cdots$(i)

また，$3x-4<-4x-7$ より，$7x<-3$

したがって，$x<-\frac{3}{7} \cdots$(ii)

(i) と (ii) の共通範囲はない．

よって，**解なし**

◀ 共通範囲がないので解なしと答える．

解答 1.3

One math

解答 I1.3.4 ★★ 問題 p.49

問題文

(1) 不等式 $3x-1<2x+5$ を満たす自然数 x の値をすべて求めよ．

(2) 次の連立不等式を満たす整数 x がちょうど 2 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

$$\begin{cases} 3x+a<4x \\ 3x>4x-7 \end{cases}$$

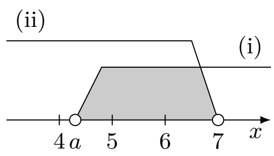
(1) 与えられた不等式より，$x<6$
したがって，x は自然数であるから，$\boldsymbol{x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}$

◀ 6 は含まない．

(2) $3x+a<4x$ を解くと，$-x<-a$ より，$x>a$ $\cdots$(i)
$3x>4x-7$ を解くと，$-x>-7$ より，$x<7$ $\cdots$(ii)

◀ $A<B<C$ より，$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$

(i)，(ii) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 2 個となるのは右の図のような場合である．
よって，$\boldsymbol{4 \leqq a<5}$



◀ 数直線を用いるとよい．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

解答 I1.3.5 ★★ 問題 p.50

問題文

(1) 1 個 100 円のペンと 1 個 180 円のノートを合わせて 20 個買い，200 円のケースに入れて息子に渡したい．文具代とケース代の合計金額を 3500 円以下にするとき，ノートは最大で何個まで買うことができるか．
(2) 連続する 4 つの整数の和が 90 以上になるもののうち，その和が最小となる 4 つの数を求めよ．

(1) ノートを x 個買うとすると，ペンは $(20-x)$ 個買うことになる．このとき，文具代とケース代の合計金額は，$100(20-x)+180x+200$ （円）
これが 3500 円以下であるから，$100(20-x)+180x+200 \leqq 3500$
整理すると，$80x \leqq 1300$
したがって，$x \leqq \frac{1300}{80}=16.25$
これを満たす最大の整数 x は $x=16$ である．
よって，ノートは **16 個**まで買うことができる．

◀ 求めるものを x とおく．

◀ x は整数であるので注意すること．

(2) 連続する 4 つの整数は，一番小さい数を x とおくと，x，$x+1$，$x+2$，$x+3$ と表すことができる．このとき，

$$\begin{aligned} x+(x+1)+(x+2)+(x+3) &\geqq 90 \\ 4x+6 &\geqq 90 \\ x &\geqq \frac{84}{4}=21 \end{aligned}$$

したがって，連続する 4 つの整数の和が 90 以上になる最小の整数 x は 21 である．
よって，求める 4 つの数は，**21，22，23，24**

解答 1.3

解答 I1.3.6 ★★★ 問題 p.51

問題文

a を定数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) x の不等式 $ax+2>0$ を解け．　(2) x の不等式 $(a-1)x \leqq a^2-a$ を解け．

(1) $ax+2>0$ より，$ax>-2$

(i) $a>0$ のとき，$x>-\frac{2}{a}$

(ii) $a=0$ のとき，不等式は $0\cdot x>-2$

したがって，解はすべての実数

(iii) $a<0$ のとき，不等式は $x<-\frac{2}{a}$

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} a>0 & \text{のとき，} & x>-\frac{2}{a} \\ a=0 & \text{のとき，} & \text{すべての実数} \\ a<0 & \text{のとき，} & x<-\frac{2}{a} \end{cases}$$

◀ x がどのような値でも，$0>-2$ が成り立つので，すべての実数 x について成り立つ．

◀ $a<0$ より，負の数 a で割るので，不等号の向きが変わる．

(2) $(a-1)x \leqq a^2-a$ より，$(a-1)x \leqq a(a-1)$

(i) $a-1>0$ すなわち，$a>1$ のとき，$x \leqq a$

(ii) $a-1=0$ すなわち，$a=1$ のとき，$0\cdot x \leqq 0$

これを満たす x の値はすべての実数．したがって，解は**すべての実数**

(iii) $a-1<0$ すなわち，$a<1$ のとき，$x \geqq a$

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} a>1 & \text{のとき，} & x \leqq a \\ a=1 & \text{のとき，} & \text{すべての実数} \\ a<1 & \text{のとき，} & x \geqq a \end{cases}$$

◀ $0 \leqq 0$ はすべての x で成り立つ．

◀ $a<1$ より，負の数 $a-1$ で割るので，不等号の向きが変わる．

解答 I1.3.7 ★★ 問題 p.52

問題文

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x+2|=3$　(2) $|x-5| \leqq 4$　(3) $|x+1|>2$

(1) $|x+2|=3$ より，$x+2=\pm 3$

よって，$\boldsymbol{x=1,\ -5}$

◀ $x+2=X$ とおくと，$|X|=3$
よって，$X=\pm 3$

(2) $|x-5| \leqq 4$ より，$-4 \leqq x-5 \leqq 4$

よって，$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 9}$

◀ $x-5=X$ とおくと，$|X| \leqq 4$
よって，$-4 \leqq X \leqq 4$

(3) $|x+1|>2$ より，$x+1<-2,\ 2<x+1$

よって，$\boldsymbol{x<-3,\ x>1}$

◀ $x+1=X$ とおくと，$|X|>2$
よって，$X<-2,\ 2<X$

解答 1.3

One math

解答 I1.3.8 ★★★ 問題 p.53

問題文

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x+2|=3x$　　(2) $|x+2|-|x-1| \geqq x$

(1) (i) $x+2 \geqq 0$，すなわち，$x \geqq -2$ のとき

$x+2=3x$ より，$2x=2$

したがって，$x=1$

これは，$x \geqq -2$ を満たす．

(ii) $x+2<0$，すなわち，$x<-2$ のとき

$-(x+2)=3x$ より，$-x-2=3x$

したがって，$-4x=2$ より，$x=-\frac{1}{2}$

これは，$x<-2$ を満たさない．

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{x=1}$

◀ $x+2=X$ とおくと，

$$|X|=\begin{cases} X & (X \geqq 0) \\ -X & (X<0) \end{cases}$$

であるので，X が 0 以上のときと負のときで場合分けをする．

◀ 求めた x の値が x の条件を満たす否かを調べる．

(2) (i) $x \geqq 1$ のとき

$x+2-(x-1) \geqq x$ より，$x \leqq 3$

したがって，$x \geqq 1$ より，$1 \leqq x \leqq 3$

(ii) $-2 \leqq x<1$ のとき

$(x+2)+(x-1) \geqq x$ より，$x \geqq -1$

したがって，$-2 \leqq x<1$ より，$-1 \leqq x<1$

(iii) $x<-2$ のとき

$-(x+2)+(x-1) \geqq x$ より，$x \leqq -3$

したがって，$x<-2$ より，$x \leqq -3$

よって，(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{x \leqq -3}$ **または** $\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 3}$

◀ $x \geqq 1$ のとき，$|x+2|=x+2$，$|x-1|=x-1$

◀ $-2 \leqq x<1$ のとき，$|x+2|=x+2$，$|x-1|=-(x-1)$

◀ $x<-2$ のとき，$|x+2|=-(x+2)$，$|x-1|=-(x-1)$

解答（節末）I1.3.1 ★★ 節末 p.54

問題文

連立不等式 $\begin{cases} x > 4a-3 \\ 3x-2 > 8(x-1) \end{cases}$ の解について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 解に 0 が含まれる．

(2) 解に含まれる整数がちょうど 4 個存在する．

$x > 4a-3 \cdots$ (i) とする．

$3x-2 > 8(x-1)$ より，$3x-2 > 8x-8$

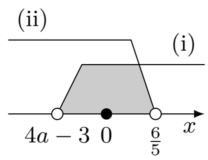
よって，$x < \frac{6}{5} \cdots$ (ii)

(1) $x=0$ は (ii) に含まれるから，$x=0$ が (i) の解に含まれる範囲を考える．

このとき，$4a-3<0$

よって，$\boldsymbol{a < \frac{3}{4}}$

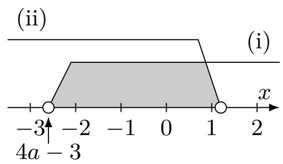
◀



(2) (i)，(ii) を同時に満たす整数が存在するから，(i) と (ii) に共通範囲があり，

$$4a-3 < x < \frac{6}{5}$$

$\frac{6}{5} = 1.2$ であるから，(i)，(ii) より，不等式を満たす整数がちょうど 4 個となるのは右の図の場合である．



したがって，$-3 \leqq 4a-3 < -2$

ゆえに，$0 \leqq 4a < 1$

よって，$\boldsymbol{0 \leqq a < \frac{1}{4}}$

◀ 等号を含むか否かに注意すること．例えば $4a-3=-3$ のとき，共通範囲の不等式は $-3 < x < \frac{6}{5}$ となり，解に含まれる整数は 4 つとなる．

解答
1.3

解答（節末）I1.3.2 ★★ 節末 p.54

問題文

整数 x は 4 の倍数であり，x を 15 で割ったところ，割り切れなかった．そこで $\frac{x}{15}$ を計算し，その小数第 1 位を四捨五入したところ，4 になった．このとき，整数 x をすべて求めよ．

$\frac{x}{15}$ の小数第 1 位を四捨五入すると 4 となることから，

$$3.5 \leqq \frac{x}{15} < 4.5$$

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

各辺を 15 倍すると，$52.5 \leqq x < 67.5$

よって，この範囲にある 15 で割り切れない 4 の倍数を求めると，

$$x = \boldsymbol{56,\ 64}$$

◀ 60 は 4 の倍数である．

解答（節末）I1.3.3 ★★ 節末 p.54

問題文

(1) 駅から自宅までの道のりは 30 km である．この道のりを，初めは時速 5 km で歩き，途中からは時速 10 km で走ると，掛かった時間は 5 時間以内であった．時速 5 km で歩いた道のりはどれほどであるか．
(2) 7% の食塩水と 10% の食塩水がある．7% の食塩水 500 g と 10% の食塩水を何 g か混ぜ合わせて，8% 以上 8.5% 以下の食塩水を作りたい．10% の食塩水を何 g 以上何 g 以下混ぜればよいか．

(1) 時速 5 km で歩いた道のりを x km とすると，歩いた時間は，$\frac{x}{5}$ （時間）
また，時速 10 km で走った道のりを $(30-x)$ km とすると，走った時間は，$\frac{30-x}{10}$（時間）
これらを合わせて 5 時間以内であるから，

$$\frac{x}{5}+\frac{30-x}{10} \leqq 5$$

両辺に 10 を掛けると，

$$\begin{aligned} 2x+30-x &\leqq 50 \\ x &\leqq 20 \end{aligned}$$

よって，時速 5 km で歩いた道のりは，**20 km 以下** である．

(2) 10% の食塩水を x g 混ぜるとする．
7% の食塩水 500 g に含まれる食塩の量は，$500 \times 0.07 = 35$ (g)
10% の食塩水 x g に含まれる食塩の量は，$0.10x$ (g)
7% の食塩水 500 g に 10% の食塩水を x g 混ぜると，食塩水の量は $(500+x)$ g となるから，その濃度が 8% 以上 8.5% 以下になるための条件は，

$$8 \leqq \frac{35+0.10x}{500+x} \times 100 \leqq 8.5$$

各辺に $500+x$ を掛けて，

$$8(500+x) \leqq 3500+10x \leqq 8.5(500+x)$$

ゆえに，$4000+8x \leqq 3500+10x \leqq 4250+8.5x$
$4000+8x \leqq 3500+10x$ より，$2x \geqq 500$
すなわち，$x \geqq 250 \cdots$(i)
$3500+10x \leqq 4250+8.5x$ より，$1.5x \leqq 750$
すなわち，$x \leqq 500 \cdots$(ii)
(i)，(ii) より，$250 \leqq x \leqq 500$
よって，10% の食塩水を **250 g 以上 500 g 以下** だけ混ぜればよい．

◀ 求めるものを x とおく．

◀ (時間) $=\frac{(道のり)}{(速さ)}$

◀ 求めるものを x とおく．

◀ (食塩の質量) =(食塩水の質量) × (濃度)

◀ (濃度) $=\frac{(食塩の質量)}{(食塩水の質量)}$

◀ $500+x$ は正であるので，不等号の向きは変わらず，1 次不等式の形に変形することができる．

解答（節末）I1.3.4 ★★★ 節末 p.54

問題文

次の不等式を解け．ただし，a，b は定数とする．

(1) $ax > b$　　(2) $(a+b)x \leqq a^2 - b^2$

(1) (i) $a > 0$ のとき

両辺を a で割ると，$x > \frac{b}{a}$

(ii) $a = 0$ のとき

$0 \cdot x > b$ となるから，

（ア）$b < 0$ のとき，解はすべての実数

（イ）$b \geqq 0$ のとき，解なし

(iii) $a < 0$ のとき

両辺を a で割ると $x < \frac{b}{a}$

◀ $a < 0$ より，不等号の向きが変わる．

◀ b の符号によって，さらに b の場合分けが必要となる．

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 0} \ \textbf{のとき，} & \boldsymbol{x > \frac{b}{a}} \\ \boldsymbol{a = 0} \ \textbf{のとき，} & \boldsymbol{b < 0} \ \textbf{ならば解はすべての実数} \\ & \boldsymbol{b \geqq 0} \ \textbf{ならば解なし} \\ \boldsymbol{a < 0} \ \textbf{のとき，} & \boldsymbol{x < \frac{b}{a}} \end{cases}$$

(2) $(a+b)x \leqq a^2 - b^2$ より，$(a+b)x \leqq (a+b)(a-b)$

(i) $a+b > 0$ のとき

両辺を $a+b$ で割ると $x \leqq a-b$

(ii) $a+b = 0$ のとき

不等式は，$0 \cdot x \leqq 0$ となり，x の値に関わらず成り立つ．

したがって，解はすべての実数

(iii) $a+b < 0$ のとき

両辺を $a+b$ で割ると $x \geqq a-b$

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+b > 0} \ \textbf{のとき，} & \boldsymbol{x \leqq a-b} \\ \boldsymbol{a+b = 0} \ \textbf{のとき，} & \textbf{解はすべての実数} \\ \boldsymbol{a+b < 0} \ \textbf{のとき，} & \boldsymbol{x \geqq a-b} \end{cases}$$

解答 1.3

One math

解答（節末）I1.3.5 ★★★ 節末 p.54

問題文

次の方程式，不等式を解け．

(1) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=6$　(2) $x^2+|x+3|+|x-2|=6$

(1) 方程式の左辺を変形すると，$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=6$

すなわち，$|x-1|+|x-3|=6$

◀ $\sqrt{a^2}=|a|$ を利用する．

(i) $x \geqq 3$ のとき

$(x-1)+(x-3)=6$ より，$x=5$

これは $x \geqq 3$ を満たす．

(ii) $1 \leqq x < 3$ のとき

$$(x-1)-(x-3)=6$$

これは，$2=6$ となり，不適である．

(iii) $x<1$ のとき

$-(x-1)-(x-3)=6$ より，$x=-1$

これは $x<1$ を満たす．

◀ $|\ |$ 内の式について，$x-1=0$ の解は $x=1$ であり，$x-3=0$ の解は $x=3$ となる．これより，$x<1$，$1 \leqq x < 3$，$3 \leqq x$ の場合に分ける．

よって，(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{x=5,\ -1}$

(2) (i) $2 \leqq x$ のとき

$x^2+(x+3)+(x-2)=6$ より，$x^2+2x-5=0$

これを解くと，$x=-1\pm\sqrt{6}$

これらのうち，$2 \leqq x$ を満たすものはない．

◀ $2^2<(\sqrt{6})^2<3^2$ より，$2<\sqrt{6}<3$

(ii) $-3 \leqq x < 2$ のとき

$x^2+(x+3)-(x-2)=6$ より，$x^2=1$

これを解くと，$x=1,\ -1$

これらは，$-3 \leqq x < 2$ を満たす．

(iii) $x<-3$ のとき

$x^2-(x+3)-(x-2)=6$ より，$x^2-2x-7=0$

これを解くと，$x=1\pm2\sqrt{2}$

これらのうち，$x<-3$ を満たすものはない．

◀ $2^2<(2\sqrt{2})^2<3^2$ より，$2<2\sqrt{2}<3$

よって，(i)〜(iii) から，求める解は $\boldsymbol{x=1,\ -1}$

解答 1.3

解答（節末）I1.3.6 ★★★ 節末 p.54

問題文

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|2x-3|<3x$　(2) $|x-3|+|x-5| \leqq 5$

(3) $||x-2|+4|=3x$

(1) (i) $2x-3 \geqq 0$，すなわち，$x \geqq \frac{3}{2}$ のとき

$2x-3<3x$ より，$x>-3$

したがって，$x \geqq \frac{3}{2}$ より，$\frac{3}{2} \leqq x$

(ii) $2x-3<0$，すなわち，$x<\frac{3}{2}$ のとき

$-(2x-3)<3x$ より，$5x>3$

したがって，$x>\frac{3}{5}$

ゆえに，$x<\frac{3}{2}$ より，$\frac{3}{5}<x<\frac{3}{2}$

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{\frac{3}{5}<x}$

(2) (i) $x \geqq 5$ のとき

◀ $x \geqq 5$ のとき，$|x-3|=x-3$，$|x-5|=x-5$

$(x-3)+(x-5) \leqq 5$ より，$x \leqq \frac{13}{2}$

したがって，$x \geqq 5$ より，$5 \leqq x \leqq \frac{13}{2}$

(ii) $3 \leqq x<5$ のとき

◀ $3 \leqq x<5$ のとき，$|x-3|=x-3$，$|x-5|=-(x-5)$

$(x-3)-(x-5) \leqq 5$ より，$2 \leqq 5$ となり，これは成り立っている．

したがって，$3 \leqq x<5$

(iii) $x<3$ のとき

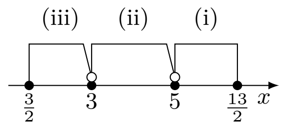
◀ $x<3$ のとき，$|x-3|=-(x-3)$，$|x-5|=-(x-5)$

$-(x-3)-(x-5) \leqq 5$ より，$x \geqq \frac{3}{2}$

したがって，$x<3$ より，$\frac{3}{2} \leqq x<3$

よって，(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{13}{2}}$

◀ (i)〜(iii) の範囲を数直線で表すと次のようになる．



(3)

$$
\begin{aligned}
||x-2|+4| &= \begin{cases} |x-2+4| & (x \geqq 2) \\ |-(x-2)+4| & (x<2) \end{cases} \\
&= \begin{cases} |x+2| & (x \geqq 2) \\ |-x+6| & (x<2) \end{cases} \\
&= \begin{cases} x+2 & (x \geqq 2) \\ -x+6 & (x<2) \end{cases}
\end{aligned}
$$

◀ 先に，$x-2$ の絶対値記号を外し，$x-2 \geqq 0$ と $x-2<0$ で場合分けをする．

◀ $x \geqq 2$ のとき，$x+2>0$
$x<2$ のとき，$-x+6>0$

(i) $x \geqq 2$ のとき

$x+2=3x$ より，$x=\frac{2}{2}=1$

これは，$x \geqq 2$ を満たさない．

(ii) $x<2$ のとき

$-x+6=3x$ より，$6=4x$ より，$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

これは，$x<2$ を満たす．

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

章末問題 1（解答）

解答（章末）I1.1 ★★ 章末 p.55

問題文

次の式を展開せよ.

$$(x+y+z)^2-(y+z-x)^2+(z+x-y)^2-(x+y-z)^2$$

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^2-(y+z-x)^2+(z+x-y)^2-(x+y-z)^2\\
=&\{(x+y+z)+(y+z-x)\}\{(x+y+z)-(y+z-x)\}\\
&+\{(z+x-y)+(x+y-z)\}\{(z+x-y)-(x+y-z)\}\\
=&2(y+z)\cdot 2x+2x\cdot 2(z-y)\\
=&4xy+4xz+4xz-4xy=\boldsymbol{8xz}
\end{aligned}$$

◀ $A^2-B^2+C^2-D^2$
$=(A+B)(A-B)$
$+(C+D)(C-D)$

解答（章末）I1.2 ★★★★ 章末 p.55

問題文

次の式を因数分解せよ.

(1) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$　　(2) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

(1)
$$\begin{aligned}
&a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\\
=&(b-c)a^3-\left(b^3-c^3\right)a+bc\left(b^2-c^2\right)\\
=&(b-c)\left\{a^3-\left(b^2+bc+c^2\right)a+bc(b+c)\right\}\\
=&(b-c)\left\{(c-a)b^2+c(c-a)b-a\left(c^2-a^2\right)\right\}\\
=&(b-c)(c-a)\left\{b^2+c\cdot b-a(c+a)\right\}\\
=&(b-c)(c-a)\left\{(b-a)c+\left(b^2-a^2\right)\right\}\\
=&(b-c)(c-a)(b-a)\{c+(b+a)\}\\
=&\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}
\end{aligned}$$

◀ a について整理する.

◀ $b-c$ をくくり出す.

◀ 波括弧内を b について整理する.

◀ $c-a$ をくくり出す.

◀ 波括弧内を c について整理する.

◀ $b-a$ をくくり出す.

(2)
$$\begin{aligned}
&a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2\\
=&a^4-2\left(b^2+c^2\right)a^2+b^4-2b^2c^2+c^4\\
=&a^4-2\left(b^2+c^2\right)a^2+\left(b^2-c^2\right)^2\\
=&a^4-2\left(b^2+c^2\right)a^2+\{(b+c)(b-c)\}^2\\
=&a^4-\left\{(b+c)^2+(b-c)^2\right\}a^2+(b+c)^2(b-c)^2\\
=&\left\{a^2-(b+c)^2\right\}\left\{a^2-(b-c)^2\right\}\\
=&\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\\
=&\boldsymbol{(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)}
\end{aligned}$$

◀ a について整理する.

◀ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

◀ 次の式は公式として覚えてもよい.
$(x+y)^2+(x-y)^2$
$=2\left(x^2+y^2\right)$

One math

解答（章末）I1.3 ★★★ 章末 p.55

問題文

$x+y+z=0$ のとき，$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ の値を求めよ．

$x+y+z=0$ より，$z=-(x+y)$

これより，与えられた式を z について整理すると，

$$\begin{aligned}
&x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)z+\frac{x+y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\\
&=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)+\frac{x+y}{-(x+y)}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\\
&=-\left(1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1\right)-1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\mathbf{-3}
\end{aligned}$$

【別解】 $x+y+z=0$ より，$y+z=-x$，$z+x=-y$，$x+y=-z$

よって，

$$\begin{aligned}
&x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\\
&=\frac{-x}{x}+\frac{-y}{y}+\frac{-z}{z}=\mathbf{-3}
\end{aligned}$$

◀ 展開して，分母が同じものをまとめる．

解答（章末）I1.4 ★★★ 章末 p.55

問題文

不等式 $|ax+2|\leqq b$ の解が $-2\leqq x\leqq 4$ のとき a，b の値を求めよ．

$|ax+2|\leqq b$ より，$-b\leqq ax+2\leqq b$

よって，$-b-2\leqq ax\leqq b-2$

◀ $|x|<a$ $(a>0)$ の解は，$-a<x<a$

(i) $a>0$ のとき

$\frac{-b-2}{a}\leqq x\leqq\frac{b-2}{a}$ より，$\frac{-b-2}{a}=-2$，$\frac{b-2}{a}=4$

これを解いて，$a=-2$，$b=-6$

これは，$a>0$ を満たさないので不適である．

◀ $\frac{-b-2}{a}=-2$，$\frac{b-2}{a}=4$ の各辺を足し合わせるなどして，連立させて a の値を求める．

(ii) $a=0$ のとき

このとき，解は $-2\leqq x\leqq 4$ とはならないので不適である．

(iii) $a<0$ のとき

$\frac{b-2}{a}\leqq x\leqq\frac{-b-2}{a}$ より，$\frac{b-2}{a}=-2$，$\frac{-b-2}{a}=4$

これを解いて，$a=-2$，$b=6$

これは，$a<0$ を満たす．

◀ $\frac{b-2}{a}=-2$，$\frac{-b-2}{a}=4$ の各辺を足し合わせるなどして，連立させて a の値を求める．

(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=6}$

解答（章末）I1.5 ★★ 章末 p.55

問題文

$x=2a-1$ のとき，$\sqrt{x^2+8a}+\sqrt{a^2-x}$ を簡単にせよ．

$x=2a-1$ を与えられた式に代入すると，

$$\begin{aligned}&\sqrt{(2a-1)^2+8a}+\sqrt{a^2-(2a-1)}\\&=\sqrt{4a^2+4a+1}+\sqrt{a^2-2a+1}\\&=\sqrt{(2a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}\\&=|2a+1|+|a-1|\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}|2a+1|+|a-1|&=\begin{cases}(2a+1)+(a-1) & (1\leqq a)\\(2a+1)-(a-1) & \left(-\frac{1}{2}\leqq a<1\right)\\-(2a+1)-(a-1) & (a<-\frac{1}{2})\end{cases}\\&=\begin{cases}\boldsymbol{3a} & (\boldsymbol{1\leqq a})\\\boldsymbol{a+2} & \left(\boldsymbol{-\frac{1}{2}\leqq a<1}\right)\\\boldsymbol{-3a} & (\boldsymbol{a<-\frac{1}{2}})\end{cases}\end{aligned}$$

◀ | | 内の式について，$2a+1=0$ の解は $a=-\frac{1}{2}$ であり，$a-1=0$ の解は $a=1$ となる．これより，$a<-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}\leqq a<1$，$1\leqq a$ の場合に分ける．

集合と命題（解答）

集合と論理（解答）

解答 I2.1.1 ★ 問題 p.61

問題文

(1) $A=\{x\mid x$ は 20 以下の奇数$\}$ とする．次の $\boxed{}$ の中に，$\in$ または $\notin$ のいずれか適するものを書き入れよ．

(i) $7\ \boxed{}\ A$　　(ii) $12\ \boxed{}\ A$

(2) 次の集合を要素を書き並べて表せ．

(i) 16 の正の約数全体の集合　　(ii) $\{x\mid -5\leqq x<3,\ x$ は整数$\}$

(3) 次の 2 つの集合 A，B の間に成り立つ包含関係をいえ．

(i) $A=\{4n+1\mid 0\leqq n\leqq 1,\ n$ は整数$\}$，$B=\{2n-1\mid -1\leqq n\leqq 3,\ n$ は整数$\}$

(ii) $A=\{2n+1\mid n=0,\ 1\}$，$B=\{x\mid (x-1)(x-3)=0,\ x$ は整数$\}$

(1) (i) 7 は 20 以下の奇数であるから，$\boldsymbol{7\in A}$

(ii) 12 は 20 以下の奇数ではないから，$\boldsymbol{12\notin A}$

(2) (i) $\boldsymbol{\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}}$

(ii) $\boldsymbol{\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}}$

(3) (i) $A=\{4\cdot 0+1,\ 4\cdot 1+1\}=\{1,\ 5\}$，

$$B=\{2\cdot(-1)-1,\ 2\cdot 0-1,\ 2\cdot 1-1,\ 2\cdot 2-1,\ 2\cdot 3-1\}$$
$$=\{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5\}$$

よって，$\boldsymbol{A\subset B}$

◀ 例えば，B の要素 -3 は A に属さないから，$B\subset A$ ではない．

(ii) $A=\{2\cdot 0+1,\ 2\cdot 1+1\}=\{1,\ 3\}$

また，$(x-1)(x-3)=0$ を解くと，$x=1,\ 3$

したがって，$B=\{1,\ 3\}$

よって，$\boldsymbol{A=B}$

解答 2.1

One math

解答 I2.1.2 ★ 問題 p.62

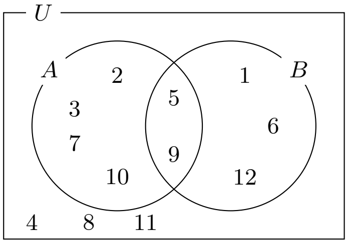
問題文

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A, B を $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$, $B=\{1,\ 5,\ 6,\ 9,\ 12\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

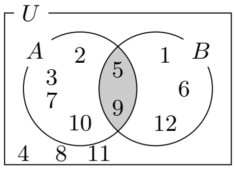
(1) $A\cap B$　　(2) $\overline{A}\cap B$　　(3) $\overline{A\cap B}$

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(5) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$

与えられた条件をもとに，U, A, B をベン図で表すと，下の図のようになる．

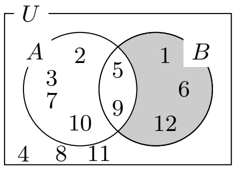


(1) $A\cap B$ は，A と B の共通部分であるから，

◀ 

$$A\cap B=\{\mathbf{5,\ 9}\}$$

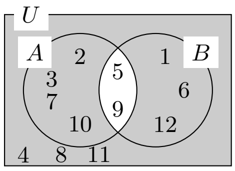
(2) $\overline{A}\cap B$ は B の要素のうち，$A\cap B$ の要素ではないものであるから，

◀ 

$$\overline{A}\cap B=\{\mathbf{1,\ 6,\ 12}\}$$

(3) $\overline{A\cap B}$ は，$A\cap B$ の補集合である．

よって，(1) より，

◀ 

$$\overline{A\cap B}=\{\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12}\}$$

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$ は, $\overline{A}$ と $\overline{B}$ の和集合である．

$\overline{A}=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 11,\ 12\}$, $\overline{B}=\{2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11\}$ より，

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\{\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12}\}$$

(5) ド・モルガンの法則より，$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B$ となり，$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$ は，A と B の共通部分である．

◀ $\overline{(\overline{A})}=A$, $\overline{(\overline{B})}=B$

よって，(1) より，

$$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B=\{\mathbf{5,\ 9}\}$$

◀ U から $\overline{A}\cup\overline{B}$ を除いたものである．

解答 2.1

解答 I2.1.3 ★★ 問題 p.63

問題文

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A=\{x \mid x+3<0\}$, $B=\{x \mid |x+3| \leqq 1\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap \overline{B}$　　(3) $\overline{A \cap B}$

$x+3<0$ より，$x<-3$

よって，$A=\{x \mid x<-3\}$

$|x+3| \leqq 1$ より，$-1 \leqq x+3 \leqq 1$

すなわち，$-4 \leqq x \leqq -2$

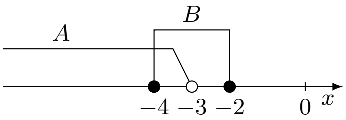
よって，$B=\{x \mid -4 \leqq x \leqq -2\}$

◀ 集合 A, B の条件を表す不等式を解く．

◀ $|x| \leqq a$ （$a>0$） の解は，$-a \leqq x \leqq a$

(1) 右の数直線より，

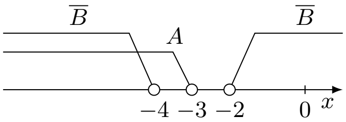
$$A \cup B = \boldsymbol{\{x \mid x \leqq -2\}}$$



◀ $A \cap B$ は共通部分である．

(2) $\overline{B}=\{x \mid x<-4,\ -2<x\}$ であるから，右の数直線より，

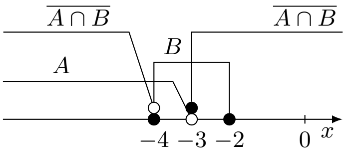
$$A \cap \overline{B} = \boldsymbol{\{x \mid x<-4\}}$$



◀ 端点を含むか否かをよく考える．

(3) 右の数直線より，$A \cap B=\{x \mid -4 \leqq x<-3\}$ であるから，

$$\overline{A \cap B} = \boldsymbol{\{x \mid x<-4,\ -3 \leqq x\}}$$



解答 2.1

One math

解答 I2.1.4 ★★★ 問題 p.64

問題文

$U=\{x \mid x$ は実数$\}$ を全体集合とする．U の部分集合

$$A=\left\{3,\ a+2,\ a^2-a-11\right\},\quad B=\left\{3,\ 7,\ a^2-15,\ a^2-3a+4\right\}$$

とする．$A\cap B=\{1,\ 3\}$ であるとき，定数 a の値を求めよ．

$A\cap B=\{1,\ 3\}$ より，$1\in A$ であるから，$a+2=1$ または $a^2-a-11=1$

(i) $a+2=1$，すなわち，$a=-1$ のとき

$$A=\{-9,\ 1,\ 3\},\quad B=\{-14,\ 3,\ 7,\ 8\}$$

◀ $a=-1$ のとき，$a^2-a-11=(-1)^2-(-1)-11=-9$
a^2-15，a^2-3a+4 も同様に計算すると，それぞれ -14，8 となる．

したがって，$1\notin B$ となるから，不適である．

(ii) $a^2-a-11=1$，すなわち，$a^2-a-12=0$ のとき

$$(a+3)(a-4)=0$$

したがって $a=-3,\ 4$

（ア）$a=4$ のとき

$$A=\{1,\ 3,\ 6\},\quad B=\{1,\ 3,\ 7,\ 8\}$$

◀ $a=4$ のとき，$a+2=4+2=6$
a^2-15，a^2-3a+4 も同様に計算すると，それぞれ 1，8 となる．

したがって，$A\cap B=\{1,\ 3\}$ となるから，条件に適する．

（イ）$a=-3$ のとき

$$A=\{-1,\ 1,\ 3\},\quad B=\{-6,\ 3,\ 7,\ 22\}$$

◀ $a=-3$ のとき，$a+2=(-3)+2=-1$
a^2-15，a^2-3a+4 も同様に計算すると，それぞれ -6，22 となる．

したがって，$1\notin B$ となるから，不適である．

よって，(i)，(ii) より，求める a の値は $a=\mathbf{4}$

解答 I2.1.5 ★★ 問題 p.65

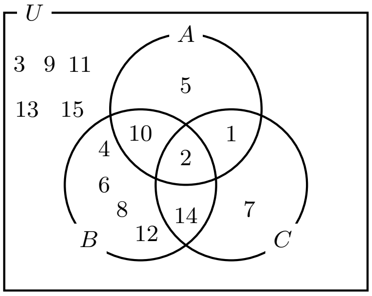
問題文

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A，B，C を $A=\{n \mid n$ は 10 の正の約数$\}$，$B=\{n \mid n$ は偶数$\}$，$C=\{n \mid n$ は 14 の正の約数$\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B\cap C$　　(2) $(A\cup B)\cap C$

(3) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$　　(4) $\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap\overline{C})}$

$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$，$C=\{1,\ 2,\ 7,\ 14\}$ であり，与えられた条件をもとに，U，A，B，C をベン図で表すと．下の図のようになる．



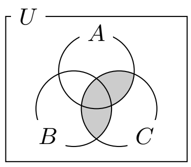
(1) $A\cap B\cap C$ は，A，B，C の共通部分であるから，

$$A\cap B\cap C=\mathbf{\{2\}}$$

(2) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$ より，

$$(A\cup B)\cap C=\mathbf{\{1,\ 2,\ 14\}}$$

◀ $(A\cup B)\cap C$



(3) $A\cap C=\{1,\ 2\}$，$B\cap C=\{2,\ 14\}$ より，

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\mathbf{\{1,\ 2,\ 14\}}$$

◀ (2)，(3) の結果より，
$(A\cup B)\cap C$
$=(A\cap C)\cup(A\cap C)$

(4) ド・モルガンの法則より，

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap\overline{C})}&=\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})}\cap\overline{(\overline{B}\cap\overline{C})}\\&=(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{C}})\cap(\overline{\overline{B}}\cup\overline{\overline{C}})\\&=(A\cup C)\cap(B\cup C)\\&=(A\cap B)\cup C\\&=\mathbf{\{1,\ 2,\ 7,\ 10,\ 14\}}\end{aligned}$$

解答 2.1

解答 I2.1.6 ★★★★ 問題 p.66

問題文

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

(1) $A = \{6x+5 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3x-1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ であるとき，$A \subset B$

(2) $A = \{5x+2y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4x+3y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$ であるとき，$A = B$

(1) $\alpha \in A$ とすると，$\alpha = 6x+5$ $(x \in \mathbb{Z})$ と表すことができる．
このとき，$\alpha = 6(x+1)-1 = 3\cdot 2(x+1)-1$
$2(x+1) = y$ とおくと，$\alpha = 3y-1$ $(y \in \mathbb{Z})$
したがって，$\alpha \in B$
よって，$\alpha \in A$ ならば $\alpha \in B$ が成り立つから，$A \subset B$ ■

◀ $\alpha \in B$ を示すために，$6n+5$ を $3\times$ (整数) -1 の形で表す．

(2) (i) $\alpha \in A$ とすると，$\alpha = 5x+2y$ $(x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z})$ と表すことができる．
$5 = 4\times 2 + 3\times(-1)$, $2 = 4\times(-1)+3\times 2$ より，

$$\alpha = \{4\times2+3\times(-1)\}x+\{4\times(-1)+3\times2\}y = 4(2x-y)+3(-x+2y)$$

$x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ より，$2x-y \in \mathbb{Z}$, $-x+2y \in \mathbb{Z}$ であるから，$\alpha \in B$
したがって，$A \subset B$ が成り立つ．

(ii) $\beta \in B$ とすると，$\beta = 4x+3y$ $(x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z})$ と表すことができる．
$4 = 5\times 0 + 2\times 2$, $3 = 5\times 1 + 2\times(-1)$ より，

$$\beta = \{5\times 0+2\times 2\}x+\{5\times 1+2\times(-1)\}y = 5y+2(2x-y)$$

$x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ より，$2x-y \in \mathbb{Z}$ であるから，$\beta \in A$
したがって，$B \subset A$ が成り立つ．

よって，(i), (ii) より，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるから，$A = B$ が成り立つ． ■

解答 I2.1.7 ★ 問題 p.67

問題文

次の命題の真偽を調べよ．また，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x^2=16$ ならば，$x=4$

(2) $x-y=0$ ならば，$x=y=0$

(3) $x^2+y^2=0$ ならば，$x=y=0$

(4) xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である．

(1) $x=-4$ のとき，$x^2=16$ であるが，$x=4$ ではない．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{x=-4}$

◀ $x^2=16$ を解くと，$x=4,\ -4$

(2) $x=1$，$y=1$ のとき，$x-y=0$ であるが，$x=y=0$ ではない．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{y=1}$

(3) $x^2\geqq 0$，$y^2\geqq 0$ であるから，$x^2+y^2=0$ ならば，$x^2=0$ かつ $y^2=0$
したがって，$x=y=0$
よって，命題は**真**である．

(4) $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき，$xy=2$ であるが，x，y は無理数である．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{x=\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{y=\sqrt{2}}$

◀ 2 は有理数である．

解答 I2.1.8 ★ 問題 p.68

問題文

次の命題の真偽を，集合の考えを用いて調べよ．

(1) n を自然数とする．n が 1 桁の正の奇数ならば，n は 15 の正の約数である．

(2) 実数 x について，$|x|<3$ ならば，$x>-4$

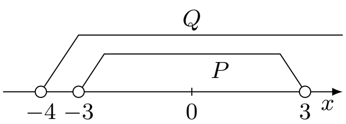
(1) $P=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$Q=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$ とおくと，$7\notin Q$ であるから，$P\subset Q$ は成り立たない．
よって，命題は**偽**である．

◀ 7，9 が反例である．

(2) $P=\{x\mid |x|<3\}$，$Q=\{x\mid x>-4\}$ とおく．
$|x|<3$ より，$-3<x<3$

◀ $|x|<a$（$a>0$）の解は，$-a<x<a$

P，Q を数直線上に表すと，右の図のようになる．
したがって，$P\subset Q$ が成り立つ．



よって，命題は**真**である．

解答 I2.1.9 ★★ 問題 p.69

問題文

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x=2$ は，$x^2<10$ であるための $\boxed{}$．

(2) $x+y>10$ は，$x>5$ かつ $y>5$ であるための $\boxed{}$．

(i) 必要条件であるが十分条件ではない　(ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

(1) 「$x=2 \Longrightarrow x^2<10$」は，真である．

◀ $2^2<10$

「$x^2<10 \Longrightarrow x=2$」は，偽である．反例は，$x=3$

◀ $3^2<10$

よって，**(ii) 十分条件であるが必要条件ではない**

(2) 「$x+y>10 \Longrightarrow x>5$ かつ $y>5$」は，偽である．反例は，$x=10$，$y=1$

「$x>5$ かつ $y>5 \Longrightarrow x+y>10$」は，真である．

よって，**(i) 必要条件であるが十分条件ではない**

解答 I2.1.10 ★ 問題 p.70

問題文

次の条件の否定を述べよ．ただし，x，y を実数とする．

(1) $0 \leqq x<5$　(2) x は 1 でも 2 でもない

(3) $x=0$ または $x=2$　(4) x，y の少なくとも一方は 1 である．

(1) 「$0 \leqq x<5$」は，「$x \geqq 0$ かつ $x<5$」のことである．

よって，否定は，「$\boldsymbol{x<0}$ **または** $\boldsymbol{x \geqq 5}$」

(2) 「x は 1 でも 2 でもない」は，「$x \neq 1$ かつ $x \neq 2$」のことである．

よって，否定は，「$\boldsymbol{x=1}$ **または** $\boldsymbol{x=2}$」

◀ x は 1 または 2 である．

(3) 否定は，「$\boldsymbol{x \neq 0}$ **かつ** $\boldsymbol{x \neq 2}$」

(4) 「x，y の少なくとも一方は 1 である」は「$x=1$ または $y=1$」のことである．

よって，否定は，「$\boldsymbol{x \neq 1}$ **かつ** $\boldsymbol{y \neq 1}$」

◀ x も y も 1 ではない．

解答 I2.1.11 ★★★ 問題 p.71

問題文

次の命題の否定を述べよ．また，もとの命題とその否定の真偽を答えよ．
(1) ある整数 k について，$k^2 = 3k$
(2) 任意の実数 x，y について，$(x+y)^2 > x^2 + y^2$

(1) 否定は，「**すべての整数 $\boldsymbol{k}$ について，$\boldsymbol{k^2 \neq 3k}$**」
これは，$k = 3$ のとき，$k^2 = 3k$ であるから，$k^2 \neq 3k$ は成り立たない．
◀ $k = 0$ も反例である．
よって，否定は**偽**である．
また，もとの命題は $k = 3$ のとき，$k^2 = 3k$ であるから，**真**である．
(2) 否定は，「**ある実数 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ について，$\boldsymbol{(x+y)^2 \leqq x^2 + y^2}$**」
これは，$x = 0$，$y = 0$ のとき，$(x+y)^2 = x^2 + y^2 = 0$
よって，否定は**真**である．
また，もとの命題は，$x = 1$，$y = -1$ とすると，$(x+y)^2 = (1-1)^2 = 0$ であり，$x^2 + y^2 = 2$ である．
よって，**偽**である．

解答 I2.1.12 ★ 問題 p.72

問題文

次の命題の逆，裏，対偶を述べよ．また，それらの真偽を調べよ．ただし，x，y は実数とする．
(1) $x = -3$ ならば，$x^2 = 9$
(2) $x + y > 2$ ならば，x，y の少なくとも 1 つは 1 より大きい．

(1) 逆は，「**$\boldsymbol{x^2 = 9}$ ならば，$\boldsymbol{x = -3}$**」
これは，**偽**である．反例は，$x = 3$
裏は，「**$\boldsymbol{x \neq -3}$ ならば，$\boldsymbol{x^2 \neq 9}$**」
これは，**偽**である．反例は，$x = 3$
◀ 裏の反例は，逆の反例と同じものでよい．
対偶は，「**$\boldsymbol{x^2 \neq 9}$ ならば，$\boldsymbol{x \neq -3}$**」
これは，もとの命題が真 $\left(x = -3\ \text{ならば，}\ x^2 = 9\right)$ であるから，**真**である．

(2) 逆は，「**$\boldsymbol{x > 1}$ または $\boldsymbol{y > 1}$ ならば，$\boldsymbol{x + y > 2}$**」
これは，**偽**である．反例は，$x = 2$，$y = -1$
裏は，「**$\boldsymbol{x + y \leqq 2}$ ならば，$\boldsymbol{x \leqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \leqq 1}$**」
これは，**偽**である．反例は，$x = 2$，$y = -1$
対偶は，「**$\boldsymbol{x \leqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \leqq 1}$ ならば，$\boldsymbol{x + y \leqq 2}$**」
◀ $x \leqq 1$ かつ $y \leqq 1$ より，辺々を足し合わせると，$x+y \leqq 2$
これは，明らかに成り立つから，**真**である．

解答 I2.1.13 ★★ 問題 p.73

問題文

次の命題を証明せよ．ただし，a，b を整数とする．
(1) a^3 が偶数ならば，a は偶数である．
(2) a^2+b^2 が奇数ならば，積 ab は偶数である．

(1) もとの命題の対偶「a が奇数ならば，a^3 は奇数である」を証明する．
a は奇数であるとき，整数 k を用いて $a=2k+1$ と表せるから，

◀ $a=2k-1$ としてもよい．

$$a^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1=2\left(4k^3+6k^2+3k\right)+1$$

k は整数より，$4k^3+6k^2+3k$ も整数であるから，a^3 は奇数である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

◀ $4k^3+6k^2+3k$ が整数であることを記すように注意すること．

(2) もとの命題の対偶「積 ab が奇数ならば，a^2+b^2 は偶数である」を証明する．
ab は奇数であるとき，a，b はともに奇数であり，整数 k，l を用いて $a=2k+1$，$b=2l+1$ と表せるから，

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(2k+1)^2+(2l+1)^2\\&=4k^2+4k+1+4l^2+4l+1\\&=2\left(2k^2+2k+2l^2+2l+1\right)\end{aligned}$$

k，l は整数より，$2k^2+2l^2+2k+2l+1$ も整数であるから，a^2+b^2 は偶数である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

解答 I2.1.14 ★★★ 問題 p.74

問題文

次の命題を証明せよ．ただし，a，b，c は整数とする．

$a^2+b^2+c^2$ が偶数ならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数である．

もとの命題の対偶「a，b，c がすべて奇数ならば，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である」を証明する．a，b，c がすべて奇数であるとき，整数 l，m，n を用いて $a=2l+1$，$b=2m+1$，$c=2n+1$ と表せるから，

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(2l+1)^2+(2m+1)^2+(2n+1)^2\\&=2\left(2l^2+2m^2+2n^2+2l+2m+2n+1\right)+1\end{aligned}$$

◀ $2\times$（整数）$+1$ の形になるように，式変形する．

$2l^2+2m^2+2n^2+2l+2m+2n+1$ は整数であるから，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

解答 I2.1.15 ★★ 問題 p.75

問題文

(1) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．
(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを用いて，$\sqrt{3}-1$ が無理数であることを証明せよ．

(1) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{3}=\frac{m}{n}\ (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数})$$

と表される．
このとき，$\sqrt{3}n=m$
両辺を 2 乗すると，$3n^2=m^2\cdots$(i)
$3n^2$ は 3 の倍数であるから，m^2 も 3 の倍数である．
したがって，m は 3 の倍数となる．
$m=3k$ (k は整数) とおくと，(i) より $3n^2=(3k)^2$
すなわち，$n^2=3k^2$
$3k^2$ は 3 の倍数であるから，n^2 は 3 の倍数である．
したがって，n は 3 の倍数となる．
ゆえに，m，n はともに 3 の倍数となり，互いに素であることに矛盾する．
よって，$\sqrt{3}$ は無理数である．■
(2) $\sqrt{3}-1$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{3}-1=r\ (r \text{ は有理数})$$

と表される．
整理すると，$\sqrt{3}=r+1$
$r+1$ は有理数であるから，$\sqrt{3}$ も有理数となる．
これは，$\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する．
よって，$\sqrt{3}-1$ は無理数である．■

◀ 結論の否定を仮定する（無理数ではないことから，有理数であると仮定する）．

◀ m^2 が 3 の倍数ならば，m も 3 の倍数である．

◀ m，n がともに 3 を約数にもつことから，互いに素であることに反する．

◀ (有理数) + (有理数) = (有理数)

解答 I2.1.16 ★★★ 問題 p.76

問題文

a, b を有理数とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい．
(1) $a+b\sqrt{3}=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ であることを証明せよ．
(2) $a(2+\sqrt{3})+b(5-\sqrt{3})=13+3\sqrt{3}$ を満たす a, b の値を求めよ．

(1) $b \neq 0$ と仮定する．
$a+b\sqrt{3}=0$ より，$\sqrt{3}=-\frac{a}{b}$
ここで，a, b は有理数より，$-\frac{a}{b}$ も有理数であるが，これは $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する．
したがって，$b=0$ である．

◀ $b=0$ であることのみを導いている．

これを $a+b\sqrt{3}=0$ に代入すると，$a=0$
よって，a, b が有理数のとき，$a+b\sqrt{3}=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ である．　■
(2) $a(2+\sqrt{3})+b(5-\sqrt{3})=13+3\sqrt{3}$ を整理すると，

$$(2a+5b-13)+(a-b-3)\sqrt{3}=0$$

◀ $\sqrt{3}$ について整理する．

a, b が有理数より，$2a+5b-13$, $a-b-3$ は有理数である．したがって，(1) より，

◀ $2a+5b-13$, $a-b-3$ がともに有理数であることを記すように注意すること．

$$\begin{cases} 2a+5b-13=0 \\ a-b-3=0 \end{cases}$$

よって，これを解いて，$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=1}$

解答 2.1

One math

解答（節末）I2.1.1 ★　節末 p.77

問題文

$P=\{a,\ b,\ c\}$ の部分集合をすべて求めよ．

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}$$

◀ $\varnothing$ や P も部分集合である．また，$\{\varnothing\}$ は空集合の集合となり，$\varnothing$ とは意味が異なるので波括弧をつけないように注意すること．

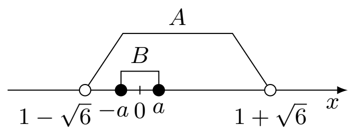
解答（節末）I2.1.2 ★★　節末 p.77

問題文

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A=\{x \mid |x-1|<\sqrt{6}\}$，$B=\{x \mid -a \leqq x \leqq a\}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．
(1) $A \supset B$ となる a の値の範囲を求めよ．
(2) $A \cup B$ に属する整数の個数が 9 個となる a の値の範囲を求めよ．

(1) 不等式 $|x-1|<\sqrt{6}$ を解くと
$-\sqrt{6}<x-1<\sqrt{6}$ より，$1-\sqrt{6}<x<1+\sqrt{6}$
したがって，$A=\{x \mid 1-\sqrt{6}<x<1+\sqrt{6}\}$ であるから，右の数直線より，$A \supset B$ となるのは

$$1-\sqrt{6}<-a$$

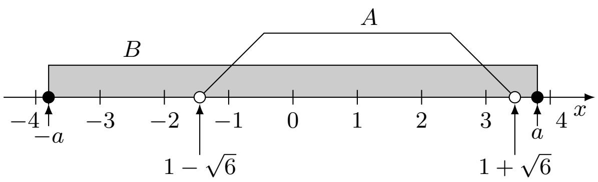


よって，$a>0$ より，$\mathbf{0<a<-1+\sqrt{6}}$

(2) A に属する整数は，-1，0，1，2，3 の 5 個であるから，$A \cup B$ に属する整数が，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4 の 9 個になればよい．

よって，右の数直線より，

$$\mathbf{4 \leqq a < 5}$$



◀ $|x|<a$（$a>0$）の解は，$-a<x<a$

◀ $a>0$ を忘れないように注意すること．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

解答 2.1

解答（節末）I2.1.3 ★★★ 節末 p.77

問題文

次の命題の真偽を調べよ．また，真のときにはその証明をし，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x, y は実数とし，$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ は無理数であることを用いてもよい．

(1) x が無理数，y が有理数ならば，$x+y$ は無理数である．

(2) x^2-x が有理数ならば，x は有理数である．

(3) x, y がともに無理数ならば，$x+y$, x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である．

(1) x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ が有理数であると仮定すると，

$$x=(x+y)-y$$

◀ (有理数) − (有理数) = (有理数)

となる．しかし，これは左辺が無理数，右辺が有理数となり，x が無理数であることに矛盾する．

したがって，x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ は無理数である．

よって，命題は**真**である．

(2) $x^2-x=1$ とすると，$x^2-x-1=0$

これを解いて，$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

◀ $ax^2+bx+c=0$ の解は，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\sqrt{5}$ は無理数であるから，x は無理数である．

よって，命題は**偽**である．反例は，$\boldsymbol{x^2-x=1}$

(3) $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ のとき, x, y はともに無理数であるが, $x+y=0$, $x^2+y^2=4$ であるから，$x+y$, x^2+y^2 はどちらも無理数ではない．

よって，命題は**偽**である．反例は，$\boldsymbol{x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}}$

解答（節末）I2.1.4 ★★★ 節末 p.77

問題文

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，a, b, c は実数とする．

(1) $a=b$ は，$ac=bc$ であるための $\boxed{}$.

(2) $a=b=c$ は，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ であるための $\boxed{}$.

(3) $a^2>b^2$ は，$a>b$ であるための $\boxed{}$.

(i) 必要条件であるが十分条件ではない　(ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

(1) 「$a=b \Longrightarrow ac=bc$」は，真である．

「$ac=bc \Longrightarrow a=b$」は，偽である．反例は，$a=1$, $b=2$, $c=0$

よって，**(ii) 十分条件であるが必要条件ではない**

(2)

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 &\Longleftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \\ &\Longleftrightarrow a=b=c \end{aligned}$$

◀ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$, $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$ はそれぞれ，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0$ と式変形することができる．展開して，同値の関係が成り立つことを確かめるとよい．

よって，**(iii) 必要十分条件である**

(3) 「$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$」は，偽である．反例は，$a=-1$, $b=0$

「$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$」は，偽である．反例は，$a=0$, $b=-1$

よって，**(iv) 必要条件でも十分条件でもない**

解答（節末）I2.1.5 ★★ 節末 p.77

問題文

次の命題が成り立つことを対偶を用いて証明せよ．

x，y がともに正の数のとき，$x^2+y^2 \geqq 4$ ならば，$x \geqq \sqrt{2}$ または $y \geqq \sqrt{2}$ である．

もとの命題の対偶「x，y がともに正の数のとき，$x<\sqrt{2}$ かつ $y<\sqrt{2}$ ならば，$x^2+y^2<4$」を証明する．

◀「$p \Longrightarrow q$」の対偶は，「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

x は正の数であり，$x<\sqrt{2}$ より，$x^2<2 \cdots$ (i)

◀ $0<x<\sqrt{2}$ より，$0<x^2<2$

y は正の数であり，$y<\sqrt{2}$ より，$y^2<2 \cdots$ (ii)

したがって，(i) と (ii) の辺々を足し合わせて，$x^2+y^2<4$

ゆえに，対偶は真である．

よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

解答（節末）I2.1.6 ★★★★ 節末 p.77

問題文

整数 a，b を係数とする 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が有理数の解 r をもつならば，r は整数であることを証明せよ．

$x^2+ax+b=0$ が有理数の解 r をもつから，

$$r=\frac{m}{n}\ (m \text{ と } n \text{ は 1 以外に公約数をもたない整数，} n \neq 0)$$

◀ 有理数の解 r は正であるとは限らないことに注意すること．

と表される．

このとき，$\left(\frac{m}{n}\right)^2+a\cdot\frac{m}{n}+b=0$

すなわち，$m^2+amn+bn^2=0$

したがって，$m^2=-n(am+bn) \cdots$ (i)

$n \neq \pm 1$ と仮定すると，n はある素数 p を約数にもつ．

◀ $\frac{m}{n}$ が整数ならば，$n=\pm 1$ であることを用いて，$n \neq \pm 1$ を仮定する．

このとき，(i) より m^2 は素数 p を約数にもつ．

m^2 が素数 p を約数にもてば，m も素数 p を約数にもつ．

これは，m と n が 1 以外に公約数をもたないことに矛盾する．

◀ m と n が素数 p を公約数をもつことになる．これは，公約数をもたないことに矛盾する．

したがって，$n=\pm 1$

よって，r は整数である． ■

解答 2.1

章末問題 2（解答）

解答（章末）I2.1 ★★★ 章末 p.78

問題文

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

$$A = \{5x + 2y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\} \text{ であるとき，} A = \mathbb{Z}$$

(i) $a \in A$ とすると，$a = 5x + 2y$ $(x,\ y \in \mathbb{Z})$ と表すことができる．
$5x + 2y$ は整数であるから，$a \in \mathbb{Z}$
すなわち，$a \in A$ ならば，$a \in \mathbb{Z}$ であるから，$A \subset \mathbb{Z}$
(ii) $a \in \mathbb{Z}$ とすると，$a = 5a + 2(-2a)$ であり，$a,\ -2a$ はともに整数であるから，

$$5a + 2(-2a) \in A$$

すなわち，$a \in \mathbb{Z}$ ならば，$a \in A$ であるから，$\mathbb{Z} \subset A$
よって，(i)，(ii) より，$A \subset \mathbb{Z}$ かつ $\mathbb{Z} \subset A$ であるから，$A = \mathbb{Z}$ が成り立つ． ■

◀ すべての整数は $5\times$(整数)$+$ $2\times$(整数) で表すことができることを示す．

解答（章末）I2.2 ★★★ 章末 p.78

問題文

次の命題の真偽を調べよ．また，真のときにはその証明をし，偽のときには具体的な反例を挙げよ．ただし，a，b を自然数とする．
(1) a が奇数かつ b が奇数ならば，$a^2 + b^2$ が偶数
(2) $a^2 + b^2$ が偶数ならば，a が偶数かつ b が偶数
(3) $a^2 + b^2$ が奇数ならば，a が奇数または b が奇数

(1) a，b は奇数であるから，$a = 2m + 1$，$b = 2n + 1$ $(m,\ n$ は整数$)$ とおくと，

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \\ &= \left(4m^2 + 4m + 1\right) + \left(4n^2 + 4n + 1\right) \\ &= 2\left(2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1\right) \end{aligned}$$

したがって，$2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1$ は整数であるから，$a^2 + b^2$ は偶数である．
よって，命題は**真**である．

◀ $2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1$ が整数であることを記すように注意すること．

(2) $a = 3$，$b = 3$ のとき，$a^2 + b^2 = 18$ となり，$a^2 + b^2$ は偶数であるが，a，b はともに奇数である．
よって，命題は**偽**である．反例は，$a = \mathbf{3}$，$b = \mathbf{3}$
(3) もとの命題の対偶「a が偶数かつ b が偶数ならば，$a^2 + b^2$ が偶数」が正しいことを証明する．
a，b は偶数であるから，$a = 2m$，$b = 2n$ $(m,\ n$ は整数$)$ とおくと，

◀ もとの命題のかわりに，対偶を用いて証明する．

$$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 2\left(2m^2 + 2n^2\right)$$

$2m^2 + 2n^2$ は整数であるから，$a^2 + b^2$ は偶数である．
よって，対偶が証明されたので，もとの命題は**真**である．

解答 2.2

One math

解答（章末）I2.3 ★★ 章末 p.78

問題文

次の命題を証明せよ．ただし，m，n は正の整数，$m > n$ とする．

$$\frac{m+n}{m-n} \text{ が既約分数ならば，} \frac{n}{m} \text{ は既約分数である．}$$

もとの命題の対偶「m，n が共通の素因数をもつならば，$m+n$，$m-n$ は共通の素因数をもつ」を証明する．

m，n に共通の素因数を k として，$m = ka$，$n = kb$（a，b は整数）とおくと，

$$m+n = k(a+b),\ m-n = k(a-b)$$

これらは，共通の素因数 k をもつ．

よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ．■

◀ もとの命題のかわりに，対偶を用いて証明する．

解答（章末）I2.4 ★★★ 章末 p.78

問題文

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ はともに有理数であることを証明せよ．ただし，a，b を正の有理数とする．

$\sqrt{a}+\sqrt{b} = r$（r は正の有理数）とおくと，$\sqrt{b} = r - \sqrt{a} \cdots$ (i)

(i) の両辺を 2 乗すると，$b = (r-\sqrt{a})^2$

したがって，$b = r^2 - 2r\sqrt{a} + a$

ゆえに，$2r\sqrt{a} = r^2 + a - b$

r は正の有理数であるから，両辺を $2r$ ($\neq 0$) で割って，

$$\sqrt{a} = \frac{r^2+a-b}{2r}$$

ここで，a，b，r は正の有理数であるから，$\frac{r^2+a-b}{2r}$ は有理数であり，$\sqrt{a}$ も有理数となる．

また，$\sqrt{a}$ が有理数のとき，(i) より，$\sqrt{b}$ も有理数である．

よって，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ はともに有理数である．■

◀ 有理数の和，差，積，商（0 の除算は除く）は有理数である．

◀ r と $\sqrt{a}$ が有理数であるから，$\sqrt{b} = r - \sqrt{a}$ も有理数である．

解答（章末）I2.5 ★★ 章末 p.78

問題文

三角形の内角で，60° 以上のものが少なくとも 1 つ存在することを証明せよ．

$\triangle \mathrm{ABC}$ において，すべての内角が 60° 未満であると仮定すると，

◀ 背理法を用いて証明する．

$$\angle \mathrm{A} < 60^\circ, \quad \angle \mathrm{B} < 60^\circ, \quad \angle \mathrm{C} < 60^\circ$$

これらの角度を足し合わせると，

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} < 180^\circ$$

これは，三角形の内角の和が 180° であることに矛盾する．
よって，三角形の内角で 60° 以上のものが少なくとも 1 存在する． ■

2 次関数（解答）

2 次関数のグラフ（解答）

解答 I3.1.1 ★　問題 p.82

問題文

関数 $f(x)=4x^2-x+5$ について，次の値を求めよ．

(1) $f(2)$　　(2) $f\left(-\frac{3}{2}\right)$　　(3) $f(3a)$

(4) $f(2a+1)$　　(5) $f(a^2-1)$

(1) $f(x)$ に $x=2$ を代入すると，

$$f(2)=4\cdot 2^2-2+5=16-2+5=\mathbf{19}$$

◀ $f(x)=4x^2-x+5$ に 2 を代入する．

(2) $f(x)$ に $x=-\frac{3}{2}$ を代入すると，

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)+5=4\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+5=\mathbf{\frac{31}{2}}$$

(3) $f(x)$ に $x=3a$ を代入すると，

$$f(3a)=4\cdot(3a)^2-(3a)+5=\boldsymbol{36a^2-3a+5}$$

(4) $f(x)$ に $x=2a+1$ を代入すると，

$$\begin{aligned}f(2a+1)&=4(2a+1)^2-(2a+1)+5\\&=4(4a^2+4a+1)-(2a+1)+5\\&=16a^2+16a+4-2a-1+5\\&=\boldsymbol{16a^2+14a+8}\end{aligned}$$

◀ 括弧をつけて $2a+1$ を代入する．

(5) $f(x)$ に $x=a^2-1$ を代入すると，

$$\begin{aligned}f(a^2-1)&=4(a^2-1)^2-(a^2-1)+5\\&=4(a^4-2a^2+1)-a^2+1+5\\&=4a^4-8a^2+4-a^2+1+5\\&=\boldsymbol{4a^4-9a^2+10}\end{aligned}$$

解答 I3.1.2 ★ 問題 p.83

問題文

次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ．

(1) $y=-2x+5\ (-2\leqq x\leqq 3)$　　(2) $y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 2)$

(1) $y=-2x+5$ において，

$x=-2$ のとき

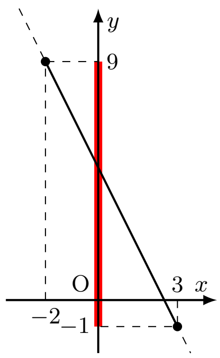
$$y=-2\cdot(-2)+5=4+5=9$$

$x=3$ のとき

$$y=-2\cdot 3+5=-6+5=-1$$

よって，グラフは右の図のようになる．

値域は $\boldsymbol{-1\leqq y\leqq 9}$



◀ $y=-2x+5$ のグラフは，y 切片が 5，傾きが -2 の直線である．

◀ グラフには，定義域の両端の座標を記す．

(2) $y=x^2$ において，

$x=-1$ のとき

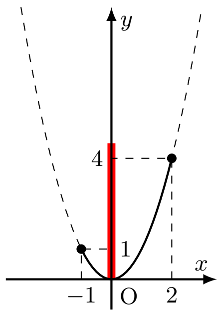
$$y=(-1)^2=1$$

$x=2$ のとき

$$y=2^2=4$$

よって，グラフは右の図のようになる．

値域は $\boldsymbol{0\leqq y\leqq 4}$



◀ $y=x^2$ のグラフは，頂点が原点，軸が y 軸であり，下に凸の放物線である．

◀ 定義域の端点が値域の端点になるとは限らないので注意すること．

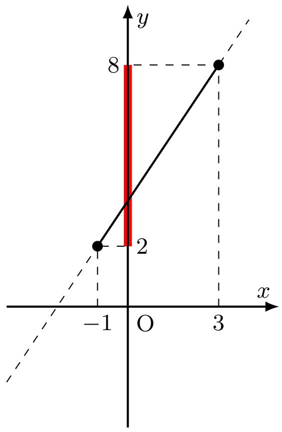
解答 I3.1.3 ★ 問題 p.84

問題文

関数 $y = ax + b \ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 8，最小値が 2 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

(i) $a > 0$ のとき

グラフは右の図のようになり，



$$x = -1 \text{ のとき，最小値 } 2$$
$$x = 3 \text{ のとき，最大値 } 8$$

◀ 点 $(-1,\ 2)$ を通る．

◀ 点 $(3,\ 8)$ を通る．

をとるから，

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = 8 \end{cases}$$

◀ 点 $(-1,\ 2)$ を通ることから，$y = ax + b$ に代入して，

$$2 = -a + b$$

点 $(3, 8)$ にも同様の操作を行うと，$a \cdot 3 + b = 8$ が得られる．

したがって，$a = \frac{3}{2}$，$b = \frac{7}{2}$

これは，$a > 0$ を満たす．

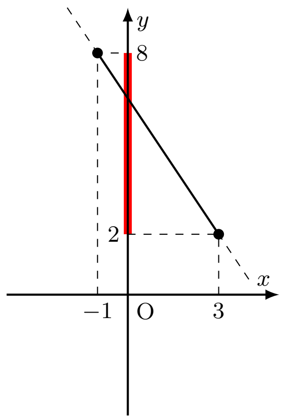
(ii) $a = 0$ のとき

$y = b$（定数関数）となり，最大値と最小値は一致するので，不適である．

◀ x 軸に平行な直線となる．

(iii) $a < 0$ のとき

グラフは右の図のようになり，



$$x = -1 \text{ のとき，最大値 } 8$$
$$x = 3 \text{ のとき，最小値 } 2$$

◀ 点 $(-1,\ 8)$ を通る．

◀ 点 $(3,\ 2)$ を通る．

をとるから，

$$\begin{cases} -a + b = 8 \\ 3a + b = 2 \end{cases}$$

◀ 連立方程式を解く．

したがって，$a = -\frac{3}{2}$，$b = \frac{13}{2}$

これは，$a < 0$ を満たす．

◀ 場合分けの条件を満たすことを確認する．

よって，(i)〜(iii) より，求める a，b の値は，$(a,\ b) = \left(\boldsymbol{\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{\frac{7}{2}}\right)$，$\left(\boldsymbol{-\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{\frac{13}{2}}\right)$

解答 I3.1.4 ★ 問題 p.85

問題文

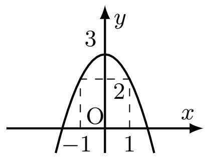
次の 2 次関数のグラフは，2 次関数 $y=-x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか．また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

(1) $y=-x^2+3$　　(2) $y=-(x-2)^2$　　(3) $y=-(x+1)^2-4$

(1) y 軸方向に 3 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．

軸は $\boldsymbol{y}$ **軸（直線** $\boldsymbol{x=0}$**）**

頂点は点 $\boldsymbol{(0,\ 3)}$

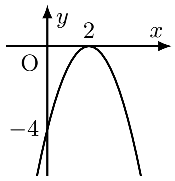


◀ $y=a(x-p)^2+q$ において，$p=0$ の形であるから，y 軸方向にのみ平行移動する．

(2) x 軸方向に 2 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．

軸は直線 $\boldsymbol{x=2}$

頂点は点 $\boldsymbol{(2,\ 0)}$

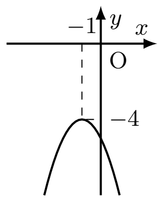


◀ $y=a(x-p)^2+q$ において，$q=0$ の形であるから，x 軸方向にのみ平行移動する．

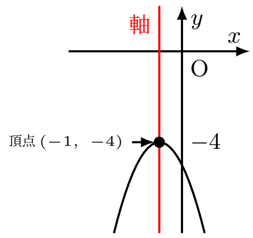
(3) x 軸方向に -1，y 軸方向に -4 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．

軸は直線 $\boldsymbol{x=-1}$

頂点は点 $\boldsymbol{(-1,\ -4)}$



◀



解答 I3.1.5 ★ 問題 p.86

問題文

次の 2 次関数のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

(1) $y=2x^2+8x+3$　　(2) $y=-x^2+6x-8$

(1)
$$\begin{aligned} y &= 2x^2+8x+3 \\ &= 2(x^2+4x)+3 \\ &= 2\{(x+2)^2-2^2\}+3 \\ &= 2(x+2)^2-8+3 \\ &= 2(x+2)^2-5 \end{aligned}$$

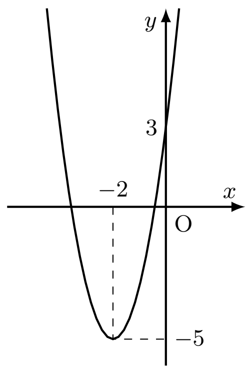
◀ 2 でくくり出す．

◀ x の係数の半分を 2 乗する．

よって，グラフは右の図のようになる．

軸は直線 $\boldsymbol{x=-2}$

頂点は点 $\boldsymbol{(-2,\ -5)}$



◀ $y=a(x-p)^2+q$ の形であるから，軸や頂点を求めることができ，グラフがかける．

(2)
$$\begin{aligned} y &= -x^2+6x-8 \\ &= -(x^2-6x)-8 \\ &= -\{(x-3)^2-3^2\}-8 \\ &= -(x-3)^2+9-8 \\ &= -(x-3)^2+1 \end{aligned}$$

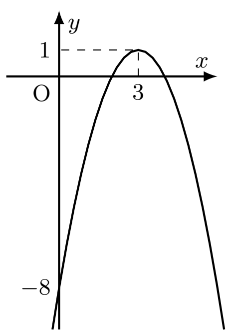
◀ -1 でくくり出す．

◀ x の係数の半分を 2 乗する．

よって，グラフは右の図のようになる．

軸は直線 $\boldsymbol{x=3}$

頂点は点 $\boldsymbol{(3,\ 1)}$



解答 I3.1.6 ★★　問題 p.87

問題文

放物線 $y = x^2 - 6x + 5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

放物線 $y = x^2 - 6x + 5$ の x を $x - 2$，y を $y + 3$ におき換えると，

◀ $x - 2$，$y + 3$ におき換える．

$$y + 3 = (x - 2)^2 - 6(x - 2) + 5$$

よって，求める放物線の方程式は，$\boldsymbol{y = x^2 - 10x + 18}$

◀ 移項して整理する．

【別解】

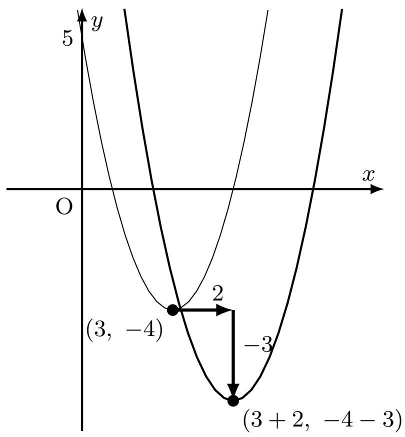
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 5 \\ &= (x^2 - 6x) + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 9 + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 4 \end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

したがって，もとの放物線 $y = x^2 - 6x + 5$ の頂点は点 $(3, -4)$ である．

この頂点を平行移動すると，点 $(3+2, -4-3)$ すなわち，点 $(5, -7)$ になる．

◀ 符号に注意すること．



よって，求める放物線の方程式は，$\boldsymbol{y = (x - 5)^2 - 7}$

◀ x^2 の係数は変わらない．$y = x^2 - 10x + 18$ としてもよい．

解答 3.1

解答 I3.1.7 ★★ 問題 p.88

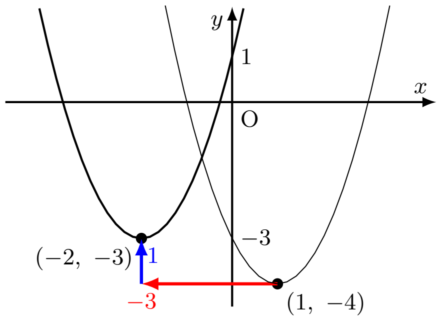
問題文

(1) 放物線 $y=x^2+4x+1$ は放物線 $y=x^2-2x-3$ をどのように平行移動したものか．
(2) x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y=-2x^2+5x-7$ になるような放物線 C の方程式を求めよ．

(1) $y=x^2+4x+1=(x+2)^2-3$ より，頂点は点 $(-2,\ -3)$
$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ より，頂点は点 $(1,\ -4)$
頂点 $(1,\ -4)$ が点 $(-2,\ -3)$ に移されるから，

◀ 頂点の座標を求める．

$$x \text{ 軸方向に } -2-1=-3$$
$$y \text{ 軸方向に } -3-(-4)=1$$



◀ 移動した後の座標から，移動する前の座標を引くことを考える．

だけ平行移動している．
よって，**x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの**である．
(2) 放物線 $y=-2x^2+5x-7$ において，

$$x \text{ 軸方向に } 2,\ y \text{ 軸方向に } -3$$

だけ平行移動したものが放物線 C である．
したがって，放物線 $y=-2x^2+5x-7$ の x を $x-2$, y を $y+3$ におき換えて，

$$y+3=-2(x-2)^2+5(x-2)-7$$

よって，$\boldsymbol{y=-2x^2+13x-28}$
【別解】 $y=-2x^2+5x-7=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{31}{8}$ より，頂点は点 $\left(\frac{5}{4},\ -\frac{31}{8}\right)$
したがって，放物線 C の頂点は点 $\left(\frac{5}{4}+2,\ -\frac{31}{8}-3\right)$
すなわち，点 $\left(\frac{13}{4},\ -\frac{55}{8}\right)$
よって，放物線 C の方程式は，

◀ 頂点の移動に注目した解法である．

$$y=-2\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{55}{8}=\boldsymbol{-2x^2+13x-28}$$

◀ 平行移動しても，x^2 の係数は変わらない．

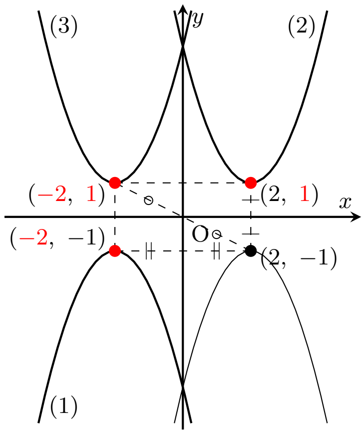
解答 3.1

解答 I3.1.8 ★ 問題 p.89

問題文

放物線 $y=-x^2+4x-5$ を，次のように移動した放物線の方程式を求めよ．

(1) x 軸に関して対称移動　(2) y 軸に関して対称移動　(3) 原点に関して対称移動



(1) y を $-y$ におき換えて，$-y=-x^2+4x-5$

よって，$\boldsymbol{y=x^2-4x+5}$

(2) x を $-x$ におき換えて,$y=-(-x)^2+4(-x)-5$

よって，$\boldsymbol{y=-x^2-4x-5}$

(3) x を $-x$,y を $-y$ におき換えて,$-y=-(-x)^2+4(-x)-5$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+4x+5}$

【別解】 $y=-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$ より，頂点は点 $(2,\ -1)$ で上に凸の放物線である．

(1) 点 $(2,\ -1)$ を x 軸に関して対称移動すると，$(2,\ 1)$

移動したグラフは下に凸であるから，$\boldsymbol{y=(x-2)^2+1}$

◀ 答えを記すときは，標準形でも一般形でもよい．

(2) 点 $(2,\ -1)$ を y 軸に関して対称移動すると，$(-2,\ -1)$

移動したグラフは上に凸であるから，$\boldsymbol{y=-(x+2)^2-1}$

(3) 点 $(2,\ -1)$ を原点に関して対称移動すると，$(-2,\ 1)$

移動したグラフは下に凸であるから，$\boldsymbol{y=(x+2)^2+1}$

◀ x^2 の係数の符号が変わり，下に凸のグラフとなる．

解答 3.1

One math

解答 I3.1.9 ★★★ 問題 p.90

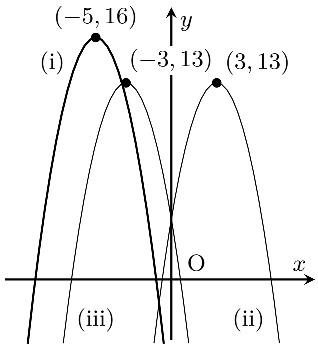
問題文

放物線 $y = ax^2 + bx + c \cdots$ (i) を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，さらに y 軸に関して対称移動すると，放物線 $y = -x^2 + 6x + 4 \cdots$ (ii) になった．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

(ii) を y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，

$$y = -(-x)^2 + 6(-x) + 4$$

すなわち，$y = -x^2 - 6x + 4 \cdots$ (iii)
(iii) を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動するから，



$$y - 3 = -(x+2)^2 - 6(x+2) + 4$$

◀ 標準形にして，頂点の移動に注目して解いてもよい．

すなわち，$y = -x^2 - 10x - 9$
よって，$y = -x^2 - 10x - 9$ が (i) と一致するから，係数を比較すると，

◀ $y = ax^2 + bx + c \cdots$ (i) と係数を比較する．

$$a = \mathbf{-1}, \quad b = \mathbf{-10}, \quad c = \mathbf{-9}$$

【別解】 (i) のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線の方程式は，$y + 3 = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$
したがって，$y = ax^2 + (b - 4a)x + (4a - 2b + c - 3)$
y 軸に関して対称移動すると，

$$y = a(-x)^2 + (b-4a)(-x) + (4a - 2b + c - 3)$$

ゆえに，$y = ax^2 + (4a - b)x + (4a - 2b + c - 3)$
したがって，$y = ax^2 + (4a-b)x + (4a - 2b + c - 3)$ が (ii) と一致するから，係数を比較すると，$a = -1$，$4a - b = 6$，$4a - 2b + c - 3 = 4$
よって，これを解いて，$a = \mathbf{-1}$，$b = \mathbf{-10}$，$c = \mathbf{-9}$

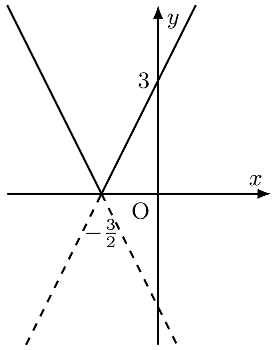
◀ $y = -x^2 + 6x + 4 \cdots$ (ii) と係数を比較する．

解答 I3.1.10 ★★ 問題 p.91

問題文

次の関数のグラフをかけ．

(1) $y=|2x+3|$　　(2) $y=|x^2-4x+3|$



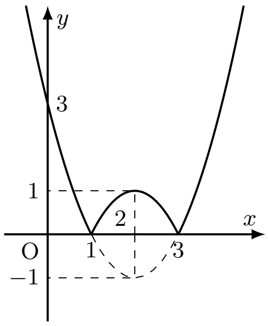
(1)　(i) $2x+3 \geqq 0$，すなわち，$x \geqq -\frac{3}{2}$ のとき

$$y=2x+3$$

(ii) $2x+3<0$，すなわち，$x<-\frac{3}{2}$ のとき

$$y=-(2x+3)=-2x-3$$

よって，(i)，(ii) より，**グラフは右上の図のようになる．**



(2)　$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$ より，

$x^2-4x+3 \geqq 0$ のとき，$x \leqq 1$，$3 \leqq x$

$x^2-4x+3<0$ のとき，$1<x<3$

(i) $x \leqq 1$，$x \geqq 3$ のとき

$$y=|x^2-4x+3|=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$$

(ii) $1<x<3$ のとき

$$y=|x^2-4x+3|=-(x^2-4x+3)=-(x-2)^2+1$$

よって，(i)，(ii) より，**グラフは右上の図のようになる．**

◀ 絶対値記号内が 0 になる値を境に場合分けをする．

解答 I3.1.11 ★★★ 問題 p.92

問題文

関数 $y=|x+2|+|x-4|$ のグラフをかけ．

(i) $x<-2$ のとき

$$\begin{aligned}|x+2|+|x-4|&=-(x+2)-(x-4)\\&=-2x+2\end{aligned}$$

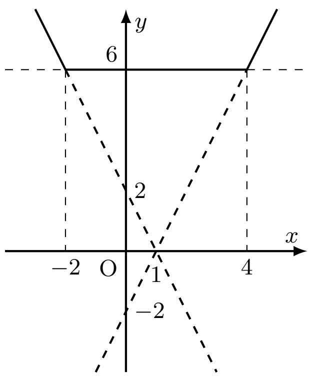
(ii) $-2 \leqq x<4$ のとき

$$\begin{aligned}|x+2|+|x-4|&=(x+2)-(x-4)\\&=6\end{aligned}$$

◀ 定数関数 $y=6$ となる．

(iii) $x \geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned}|x+2|+|x-4|&=(x+2)+(x-4)\\&=2x-2\end{aligned}$$



よって，(i)〜(iii) より，**グラフは右上の図のようになる．**

◀ グラフは繋がっている．

解答 I3.1.12 ★★★ 問題 p.93

問題文

不等式 $|x+4|+|2x-1| \leqq -2x+2$ をグラフを利用して解け.

$y=|x+4|+|2x-1|$ とおく.

(i) $x<-4$ のとき

$$y=-(x+4)-(2x-1)=-3x-3$$

(ii) $-4 \leqq x < \frac{1}{2}$ のとき

$$y=(x+4)-(2x-1)=-x+5$$

(iii) $\frac{1}{2} \leqq x$ のとき

$$y=(x+4)+(2x-1)=3x+3$$

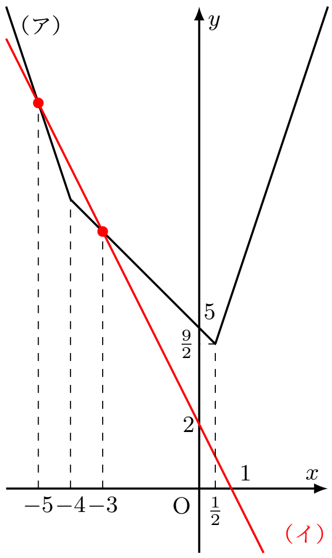
したがって,(i)〜(iii) より,関数 $y=|x+4|+|2x-1|$ のグラフは右の図の(ア)となる.一方,関数 $y=-2x+2$ のグラフは右の図の（イ）となる．右の図より,（ア）と（イ）のグラフは，$x<-4$ または $-4 \leqq x < \frac{1}{2}$ の範囲で交わる．

（ア）と（イ）のグラフの交点の x 座標は，$x<-4$ のとき，$-3x-3=-2x+2$ より，$x=-5$

$-4 \leqq x < \frac{1}{2}$ のとき, $-x+5=-2x+2$ より, $x=-3$

よって，不等式 $|x+4|+|2x-1| \leqq -2x+2$ の解は,

$$\boldsymbol{-5 \leqq x \leqq -3}$$



◀ 2 つの関数のグラフをかいて，グラフの上下関係を利用して不等式の解を求める.

解答（節末）I3.1.1 ★ 節末 p.94

問題文

関数 $f(x)=3x^2-2x+2$ について，$f(f(a))$ の値を求めよ．

$f(x)$ の式に，$x=f(a)=3a^2-2a+2$ を代入して，

$$\begin{aligned} f(f(a)) &= 3\left(3a^2-2a+2\right)^2-2\left(3a^2-2a+2\right)+2 \\ &= \boldsymbol{27a^4-36a^3+42a^2-20a+10} \end{aligned}$$

◀ $(x+y+z)^2$
$=x^2+y^2+z^2$
$+2xy+2yz+2zx$

解答（節末）I3.1.2 ★★ 節末 p.94

問題文

2 つの放物線 $y=3x^2-18x+25$ と $y=ax^2+8x+b$ の頂点が一致するように定数 a，b の値を定めよ．

$$y=3x^2-18x+25=3\left(x^2-6x\right)+25=3(x-3)^2-2,$$

$$\begin{aligned} y &= ax^2+8x+b \\ &= a\left(x^2+\frac{8}{a}x\right)+b \\ &= a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2-a\left(\frac{4}{a}\right)^2+b \\ &= a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2-\frac{16}{a}+b \end{aligned}$$

◀ $y=ax^2+8x+b$ は放物線であるから，$a\neq 0$

よって，2 つの放物線の頂点の座標は，それぞれ，

$$(3,\ -2),\ \left(-\frac{4}{a},\ -\frac{16}{a}+b\right)$$

与えられた条件より，

$$3=-\frac{4}{a},\ -2=-\frac{16}{a}+b$$

これを解くと，$a=\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$，$b=\boldsymbol{-14}$

◀ 連立方程式を解く．

【別解】 放物線 $y=3x^2-18x+25$ の頂点は，点 $(3,\ -2)$
したがって，2 つの放物線の頂点が一致するための条件は，$y=ax^2+8x+b$ が $y=a(x-3)^2-2\cdots$(i) と表されることであるから，(i) を展開すると，

$$y=ax^2-6ax+9a-2$$

これと $y=ax^2+8x+b$ の係数を比較すると，$8=-6a$，$b=9a-2$
これを解くと，$a=\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$，$b=\boldsymbol{-14}$

解答
3.1

One math

解答（節末）I3.1.3 ★★ 節末 p.94

問題文

$y=ax^2+bx+c$ で表される放物線が点 $(1,\ -2)$ に関して放物線 $y=-3x^2$ と点対称であるとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

放物線 $y=-3x^2$ の頂点は点 $(0,\ 0)$
この点を点 $(1,\ -2)$ に関して対称に移動すると，点 $(2,\ -4)$ となる．

◀ 対称に移動した点 $(x,\ y)$ は，$\frac{x+0}{2}=1$，$\frac{y+0}{2}=-2$ より，点 $(2,\ -4)$ と x 座標，y 座標を求めることができる．

もとのグラフの x^2 の係数が -3 であるから，移動したグラフは下に凸の放物線であり，x^2 の係数は 3 である．
したがって，点 $(1,\ -2)$ に関して放物線 $y=-3x^2$ と点対称である放物線の方程式は

$$y=3(x-2)^2-4=3x^2-12x+8$$

よって，$a=\mathbf{3}$，$b=\mathbf{-12}$，$c=\mathbf{8}$

解答（節末）I3.1.4 ★★ 節末 p.94

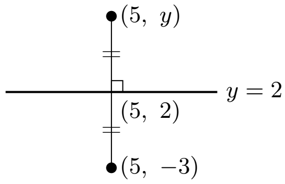
問題文

放物線 $y=x^2-4x+1$ を x 軸方向に 3 だけ平行移動し，さらに直線 $y=2$ に関して折り返してできる放物線の方程式を求めよ．

$$y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$$

したがって，もとの放物線 $y=x^2-4x+1$ の頂点は点 $(2,\ -3)$ である．
この頂点を x 軸方向に 3 だけ平行移動すると，点 $(5,\ -3)$ となる．
さらに，直線 $y=2$ に関して折り返すと，頂点は点 $(5,\ 7)$ となる．

◀ $\frac{y+(-3)}{2}=2$ より，折り返したグラフの頂点の y 座標は 7 である．



もとのグラフの x^2 の係数が 1 であるから，移動したグラフは上に凸の放物線であり，x^2 の係数は -1 である．
よって，$\boldsymbol{y=-(x-5)^2+7}$

解答（節末）I3.1.5 ★★★ 節末 p.94

問題文

次の関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(1) $f(x)=|x-2|+|x-4|+|x-6|$　　(2) $f(x)=|x+|2x-10||$

(1) $x<2$ のとき

$$f(x)=-(x-2)-(x-4)-(x-6)=-3x+12$$

◀ $x-2<0,\ x-4<0,\ x-6<0$

$2\leqq x<4$ のとき

$$f(x)=(x-2)-(x-4)-(x-6)=-x+8$$

◀ $x-2\geqq 0,\ x-4<0,\ x-6<0$

$4\leqq x<6$ のとき

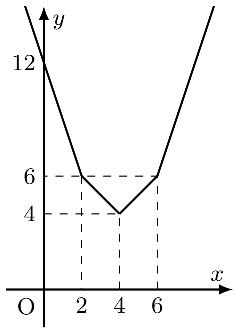
$$f(x)=(x-2)+(x-4)-(x-6)=x$$

◀ $x-2>0,\ x-4\geqq 0,\ x-6<0$

$6\leqq x$ のとき

$$f(x)=(x-2)+(x-4)+(x-6)=3x-12$$

◀ $x-2>0,\ x-4>0,\ x-6\geqq 0$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=4}$ で**最小値 4** をとる．

(2) $2x-10\geqq 0$，すなわち，$x\geqq 5$ のとき

$$f(x)=|x+2x-10|=|3x-10|$$

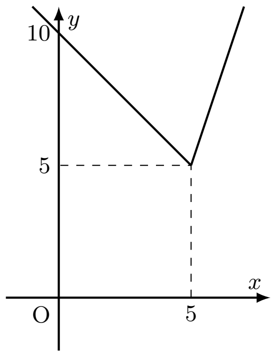
◀ 先に，$2x-10$ の絶対値記号を外し，$2x-10\geqq 0$，$2x-10<0$ で場合分けをする．

$x\geqq 5$ より，$3x-10>0$ であるから，$f(x)=3x-10$

$2x-10<0$，すなわち，$x<5$ のとき

$$f(x)=|x-(2x-10)|=|10-x|$$

$x<5$ より，$10-x>0$ であるから，$f(x)=-x+10$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=5}$ で**最小値 5** をとる．

解答 3.1

2 次関数の最大・最小と決定（解答）

解答 I3.2.1 ★　問題 p.96

問題文

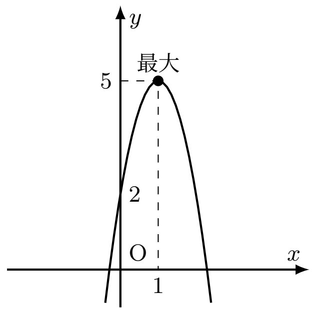
次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

(1) $y=-3x^2+6x+2$　　(2) $y=4x^2+8x-1$

$$\begin{aligned}(1)\quad y&=-3x^2+6x+2\\&=-3(x^2-2x)+2\\&=-3\{(x-1)^2-1^2\}+2\\&=-3(x-1)^2+5\end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

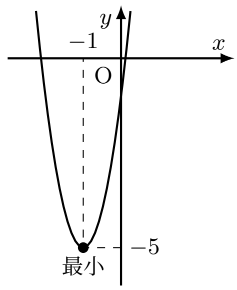
よって，$x=1$ のとき，**最大値 5，最小値はない．**



$$\begin{aligned}(2)\quad y&=4x^2+8x-1\\&=4(x^2+2x)-1\\&=4\{(x+1)^2-1^2\}-1\\&=4(x+1)^2-5\end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

よって，$x=-1$ のとき，**最小値 -5，最大値はない．**



解答 I3.2.2 ★★　問題 p.97

問題文

次の定義域における 2 次関数 $y=-x^2+4x+1$ の最大値，最小値を求めよ．

(1) $0\leqq x<2$　　(2) $1<x\leqq 4$

◀ 平方完成する．

$$y=-x^2+4x+1=-\{(x-2)^2-4\}+1=-(x-2)^2+5$$

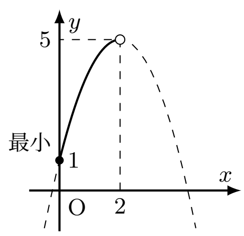
◀ 軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ 5)$ の上に凸の放物線である．

(1) $x=0$ のとき，$y=1$，$x=2$ のとき，$y=5$

したがって，$0\leqq x<2$ のとき，グラフは右の図のようになる．

よって，$x=0$ のとき，**最小値 1，最大値はない．**

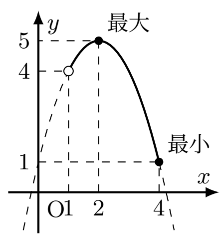
◀ $0\leqq x<2$ より，$x=2$ は定義域に含まれないので，最大値はない．



(2) $x=1$ のとき，$y=4$，$x=4$ のとき，$y=1$

したがって，$1<x\leqq 4$ のとき，グラフは右の図のようになる．

よって，$x=2$ のとき，**最大値 5**，$x=4$ のとき，**最小値 1**



解答 3.2

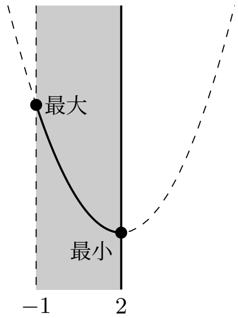
解答 I3.2.3 ★★★ 問題 p.98

問題文

関数 $f(x)=ax^2-4ax+2b$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -1 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

$$f(x)=ax^2-4ax+2b=a(x-2)^2-4a+2b$$

(i) $a>0$ のとき



$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ は, $x=-1$ のとき, 最大値 $5a+2b$, $x=2$ のとき，最小値 $-4a+2b$ をとる．

◀ 軸から遠い方の端点である $x=-1$ のとき，最大となる．

したがって，$\begin{cases} 5a+2b=5 \\ -4a+2b=-1 \end{cases}$

ゆえに，$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{5}{6}$

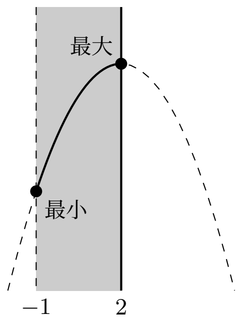
これは $a>0$ を満たす．

◀ 場合分けの条件を満たすことを確認する．

(ii) $a=0$ のとき

$f(x)=2b$ で一定の値をとり，最大値 5，最小値 -1 をとることはないから，不適である．

(iii) $a<0$ のとき



$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ は, $x=2$ のとき, 最大値 $-4a+2b$, $x=-1$ のとき，最小値 $5a+2b$ をとる．

◀ 軸から遠い方の端点である $x=-1$ のとき，最小となる．

したがって，$\begin{cases} -4a+2b=5 \\ 5a+2b=-1 \end{cases}$

ゆえに，$a=-\frac{2}{3}$，$b=\frac{7}{6}$

これは $a<0$ を満たす．

よって，(i)〜(iii) より，求める a，b の値は，$(a,\ b)=\left(\boldsymbol{\frac{2}{3}},\ \boldsymbol{\frac{5}{6}}\right)$，$\left(\boldsymbol{-\frac{2}{3}},\ \boldsymbol{\frac{7}{6}}\right)$

解答 3.2

解答 I3.2.4 ★★★ 問題 p.99

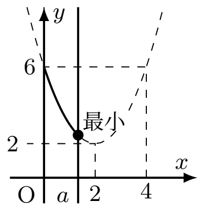
問題文

(1) $a>0$ とする．関数 $f(x)=x^2-4x+6\ (0\leqq x\leqq a)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $a>0$ とする．関数 $f(x)=-x^2+6x-8\ (0\leqq x\leqq a)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

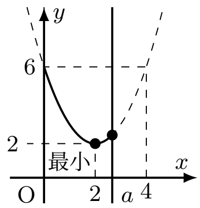
(1)　$f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$ $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$

(i) $0<a<2$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=a$ のとき最小となり，最小値 $f(a)=a^2-4a+6$



◀ 定義域 $0\leqq x\leqq a$ に軸が含まれるとき，最小となる点は頂点となるので，軸を含むか否かで場合分けをする．

(ii) $2\leqq a$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=2$ のとき最小となり，最小値 $f(2)=2$

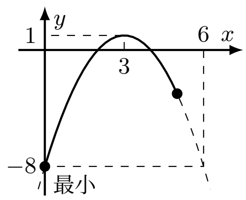


よって，(i)，(ii) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a<2\ \text{のとき，}\quad x=a\ \text{で最小値}\ a^2-4a+6} \\ \boldsymbol{2\leqq a\ \text{のとき，}\quad x=2\ \text{で最小値}\ 2} \end{cases}$$

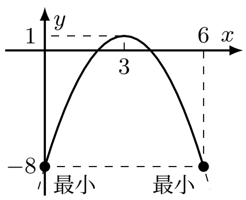
(2)　$f(x)=-x^2+6x-8=-(x-3)^2+1$ $y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=3$．

(i) $0<a<6$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=0$ のとき最小となり，最小値 $f(0)=-8$



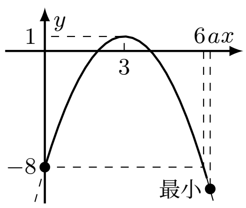
◀ $x=0$ の方が軸から遠いので，$x=0$ で最小となる．

(ii) $a=6$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=0,\ 6$ のとき最小となり，最小値 $f(0)=f(6)=-8$



◀ 定義域の両端における y 座標が等しくなる．

(iii) $6<a$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=a$ のとき最小となり，最小値 $f(a)=-a^2+6a-8$



◀ $x=a$ の方が軸から遠いので，$x=a$ で最小となる．

よって，(i)〜(iii) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a<6\ \text{のとき，}\quad x=0\ \text{で最小値}\ -8} \\ \boldsymbol{a=6\ \text{のとき，}\quad x=0,\ 6\ \text{で最小値}\ -8} \\ \boldsymbol{6<a\ \text{のとき，}\quad x=a\ \text{で最小値}\ -a^2+6a-8} \end{cases}$$

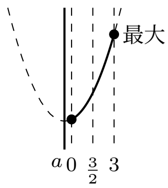
解答 I3.2.5 ★★★ 問題 p.100

問題文
(1) 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．
(2) 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(1) $y = x^2 - 2ax + 3 = (x-a)^2 - a^2 + 3$

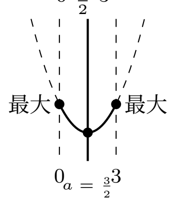
$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x = a$

(i) $a < \frac{3}{2}$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x = 3$ のとき最大となり，最大値 $f(3) = -6a + 12$

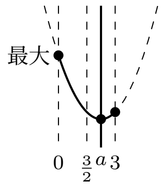


◀ 軸が定義域の中央である $x = \frac{3}{2}$ より左側にあるとき，右側にあるときで場合分けをする．

(ii) $a = \frac{3}{2}$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x = 0,\ 3$ のとき最大となり,最大値 $f(0) = f(3) = 3$



(iii) $\frac{3}{2} < a$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x = 0$ のとき最大となり，最大値 $f(0) = 3$



◀ $x = 0$ の方が軸から遠いので，$x = 0$ で最大となる．

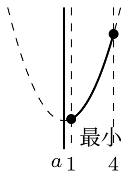
よって，(i)〜(iii) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < \frac{3}{2}} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x = 3} \text{ **で最大値**} \boldsymbol{-6a + 12} \\ \boldsymbol{a = \frac{3}{2}} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x = 0,\ 3} \text{ **で最大値**} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{\frac{3}{2} < a} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x = 0} \text{ **で最大値**} \boldsymbol{3} \end{cases}$$

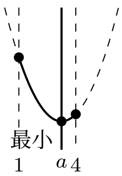
(2) $y = x^2 - 2ax + 5 = (x-a)^2 - a^2 + 5$

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x = a$

(i) $a < 1$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域より左側にある．
$x = 1$ のとき最小となり，最小値 $f(1) = -2a + 6$

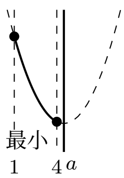


(ii) $1 \leqq a \leqq 4$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域内にある．
$x = a$ のとき最小となり，最小値 $f(a) = -a^2 + 5$



◀ 頂点で最小値をとる．

(iii) $4 < a$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域より右側にある．
$x = 4$ のとき最小となり，最小値 $f(4) = -8a + 21$



よって，(i)〜(iii) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < 1} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x = 1} \text{ **で最小値**} \boldsymbol{-2a + 6} \\ \boldsymbol{1 \leqq a \leqq 4} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x = a} \text{ **で最小値**} \boldsymbol{-a^2 + 5} \\ \boldsymbol{4 < a} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x = 4} \text{ **で最小値**} \boldsymbol{-8a + 21} \end{cases}$$

解答 I3.2.6 ★★★ 問題 p.101

> 問題文
>
> (1) 関数 $f(x)=x^2-2x+3\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．
>
> (2) 関数 $f(x)=x^2-4x+5\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．

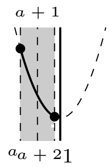
(1)　$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=1$

(i) $a+2<1$ ，すなわち，$a<-1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a+2$ で最小となり，最小値 $f(a+2)=a^2+2a+3$

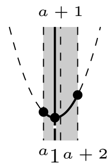


◀ 軸が定義域の左側にあるとき，区間内にあるとき，右側にあるときで場合分けをする．

(ii) $a \leqq 1 \leqq a+2$ ，すなわち，$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

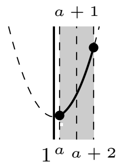
$x=1$ で最小となり，最小値 $f(1)=2$



(iii) $1<a$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a$ で最小となり，最小値 $f(a)=a^2-2a+3$



よって，(i)〜(iii) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<-1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=a+2} \textbf{ で最小値 } \boldsymbol{a^2+2a+3} \\ \boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=1} \textbf{ で最小値 } \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1<a} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=a} \textbf{ で最小値 } \boldsymbol{a^2-2a+3} \end{cases}$$

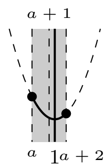
(2)　$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$

(i) $a+1<2$ ，すなわち，$a<1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a$ で最大となり，最大値 $f(a)=a^2-4a+5$

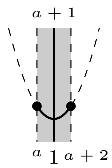


◀ $x=a$ の方が軸から遠いので，$x=a$ で最大となる．

(ii) $a+1=2$ ，すなわち，$a=1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

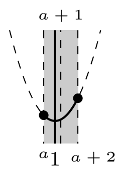
$x=1,\ 3$ で最大となり，最大値 $f(1)=f(3)=2$



(iii) $2<a+1$ ，すなわち，$a>1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a+2$ で最大となり，最大値 $f(a+2)=a^2+1$



◀ $x=a+2$ の方が軸から遠いので，$x=a+2$ で最大となる．

よって，(i)〜(iii) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=a} \textbf{ で最大値 } \boldsymbol{a^2-4a+5} \\ \boldsymbol{a=1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=1,\ 3} \textbf{ で最大値 } \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{a>1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=a+2} \textbf{ で最大値 } \boldsymbol{a^2+1} \end{cases}$$

解答 I3.2.7 ★★★ 問題 p.102

問題文

x の 2 次関数 $y=-x^2+4ax-5a^2+3a+6$ の最大値を M とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

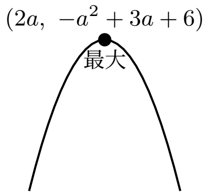
(1) 最大値 M を a を用いて表せ．

(2) a の値が $-2 \leqq a \leqq 3$ で変化するとき，M の最小値を求めよ．

(1)
$$\begin{aligned} y &= -x^2+4ax-5a^2+3a+6 \\ &= -\left\{(x-2a)^2-(2a)^2\right\}-5a^2+3a+6 \\ &= -(x-2a)^2-a^2+3a+6 \end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

グラフは右の図のようになる．

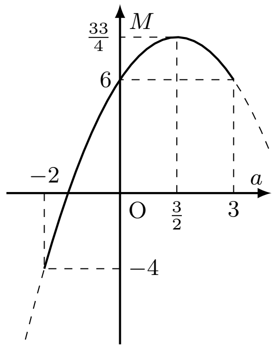


よって, y は $x=2a$ で最大値 $\boldsymbol{M=-a^2+3a+6}$

◀ M は a の 2 次式で表される．

(2)
$$\begin{aligned} M &= -a^2+3a+6 \\ &= -\left(a^2-3a\right)+6 \\ &= -\left\{\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+6 \\ &= -\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{33}{4} \end{aligned}$$

グラフは右の図のようになる．



よって，$-2 \leqq a \leqq 3$ の範囲において，a の関数 M は，$a=-2$ で**最小値 -4**

解答 I3.2.8 ★★★ 問題 p.103

問題文

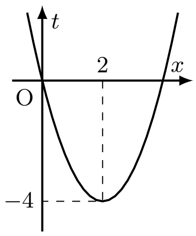
関数 $y=\left(x^2-4x\right)^2+6\left(x^2-4x\right)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t=x^2-4x$ とおいて，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) y を t の式で表し，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(1)
$$\begin{aligned} t &= x^2-4x \\ &= (x-2)^2-4 \end{aligned}$$

グラフは右の図のようになる．



よって，t のとりうる値の範囲は，$\boldsymbol{t \geqq -4}$

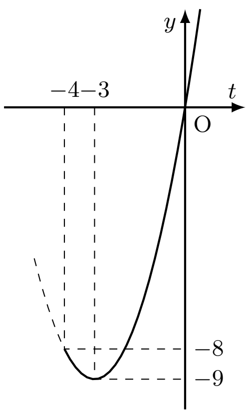
◀ t は x についての 2 次関数となるので，x 軸，y 軸ではなく，x 軸，t 軸であることに注意すること．

(2) $t=x^2-4x$ とおくと，

$$y=t^2+6t=(t+3)^2-9 \cdots \text{(i)}$$

(1) より，$t \geqq -4$ であるから，この範囲で，(i) のグラフをかくと，右の図のようになる．

◀ (1) で求めた t の値の範囲を忘れないようにする．また，x 軸ではなく，t 軸であることに注意すること．



したがって，$t=-3$ のとき，y は最小値 -9 をとる．

また，$t=-3$ のとき，$x^2-4x=-3$

ゆえに，$x=1,\ 3$

よって，**$x=1,\ 3$ のとき，最小値 -9**

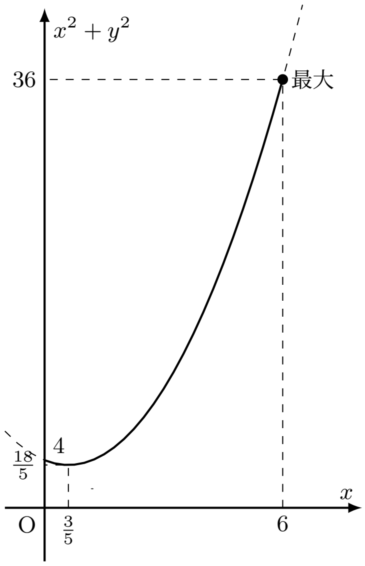
解答 I3.2.9 ★★★ 問題 p.104

問題文

$x+3y=6$ を満たすとき，次の問いに答えよ．
(1) x^2+y^2 の最小値を求めよ．
(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ．

(1) $x+3y=6$ より，$y=2-\frac{x}{3}\cdots$(i)
したがって，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+\left(2-\frac{x}{3}\right)^2 \\ &= x^2+\left(4-\frac{4x}{3}+\frac{x^2}{9}\right) \\ &= \frac{10}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4 \\ &= \frac{10}{9}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{18}{5}\cdots\text{(ii)} \end{aligned}$$



◀ y を代入して，文字を消去する．なお，$x=6-3y$ として，x を代入して，文字を消去してもよい．

ゆえに，$x=\frac{3}{5}$ で最小値 $\frac{18}{5}$
このとき，(i) より，$y=2-\frac{3}{5}\div 3=\frac{9}{5}$
よって，$x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{9}{5}$ のとき，**最小値 $\frac{18}{5}$**
(2) $y \geqq 0$ であるから，(i) より，$2-\frac{x}{3} \geqq 0$
$x \geqq 0$ との共通範囲は，$0 \leqq x \leqq 6\cdots$(iii)
(ii) より，(iii) において，x^2+y^2 は $x=6$ で最大値 36
このとき，(i) より，$y=2-\frac{6}{3}=0$
よって，$x=6$，$y=0$ のとき，**最大値 36**

解答 I3.2.10 ★★ 問題 p.105

問題文

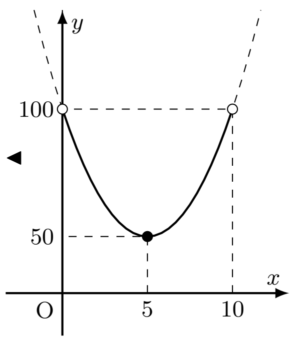
直角を挟む 2 辺の長さの和が 10 である直角三角形において，斜辺の長さが最小となる直角三角形を求め，その斜辺の長さを求めよ．

直角を挟む 2 辺のうち一方の辺の長さを x とすると，他方の辺の長さは $10-x$ である．
また，$x>0$，$10-x>0$ であるから，$0<x<10$
斜辺の長さを l とすると，

$$l^2=x^2+(10-x)^2=2x^2-20x+100=2\left(x^2-10x\right)+100=2(x-5)^2+50$$

$0<x<10$ において，l^2 は $x=5$ で最小値 50 をとる．
このとき，他方の辺の長さは $10-5=5$
ここで，$l>0$ であるから，l^2 が最小となるとき，l も最小となる．
よって，求める直角三角形は，**直角を挟む 2 辺の長さがともに 5 の直角二等辺三角形**で，斜辺の長さは，$\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

◀



解答 3.2

One math

解答 I3.2.11 ★★ 問題 p.106

> 問題文
>
> 次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ.
> (1) 頂点が点 $(-2,\ 3)$ で，点 $(1,\ 6)$ を通る.
> (2) 軸が直線 $x=2$ で，2 点 $(0,\ -4)$，$(3,\ 5)$ を通る.

(1) 頂点が点 $(-2,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は，

$$y=a(x+2)^2+3$$

と表される.

◀ 頂点が与えられているので，標準形を用いる.

この関数のグラフが点 $(1,\ 6)$ を通るから，

$$6=a(1+2)^2+3$$

◀ $y=a(x+2)^2+3$ に，$x=1$，$y=6$ を代入する.

したがって，$a=\frac{1}{3}$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}(x+2)^2+3}$

(2) 軸が直線 $x=2$ であるから，求める 2 次関数は，

$$y=a(x-2)^2+q$$

と表される.

◀ 軸が与えられているので，標準形を用いる.

この関数のグラフが 2 点 $(0,\ -4)$，$(3,\ 5)$ を通るから，

$$-4=a(0-2)^2+q,\quad 5=a(3-2)^2+q$$

◀ $x=0$，$y=-4$ と $x=3$，$y=5$ を，それぞれ $y=a(x-2)^2+q$ に代入する.

したがって，$4a+q=-4$，$a+q=5$

◀ 連立方程式を解く.

これを解いて，$a=-3$，$q=8$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=-3(x-2)^2+8}$

解答 I3.2.12 ★★ 問題 p.107

問題文

次の 3 点を通るような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(1) $(1,\ 7)$，$(3,\ 7)$，$(-2,\ -8)$　　(2) $(-1,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(2,\ -12)$

(1) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする．
この関数のグラフが 3 点 $(1,\ 7)$，$(3,\ 7)$，$(-2,\ -8)$ を通るから，

$$\begin{cases} 7 = a + b + c \cdots \text{(i)} \\ 7 = 9a + 3b + c \cdots \text{(ii)} \\ -8 = 4a - 2b + c \cdots \text{(iii)} \end{cases}$$

◀ $y = ax^2 + bx + c$ に (i) は $x = 1$，$y = 7$，(ii) は $x = 3$，$y = 7$，(iii) は $x = -2$，$y = -8$ をそれぞれ代入している．

(ii) − (i) より，$0 = 8a + 2b$，すなわち，$4a + b = 0 \cdots \text{(iv)}$
(ii) − (iii) より，$15 = 5a + 5b$，すなわち，$a + b = 3 \cdots \text{(v)}$
(iv)，(v) を解いて，$a = -1$，$b = 4$
したがって，これを (i) に代入すると，$c = 4$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y = -x^2 + 4x + 4}$

◀ c を消去して，a，b についての連立方程式 (iv)，(v) を解く．

(2) x 軸との共有点の座標が $(-1,\ 0)$，$(4,\ 0)$ であるから，求める 2 次関数は，

$$y = a(x + 1)(x - 4)$$

と表される．
この関数のグラフが点 $(2,\ -12)$ を通るから，

$$-12 = a(2 + 1)(2 - 4)$$

したがって，$a = 2$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y = 2(x + 1)(x - 4)}$

◀ $y = 2x^2 - 6x - 8$ でもよい．

解答 I3.2.13 ★★★ 問題 p.108

問題文

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．
(1) 頂点が x 軸上にあり，2 点 $(1,\ 4)$, $(-3,\ 36)$ を通る．
(2) 放物線 $y=3x^2$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 9)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある．

(1) 頂点が x 軸上にあるから，求める 2 次関数は，$y=a(x-p)^2$ と表される．
このグラフが 2 点 $(1,\ 4)$, $(-3,\ 36)$ を通るから，

$$a(1-p)^2=4\cdots\text{(i)},\quad a(p+3)^2=36\cdots\text{(ii)}$$

◀ 求める 2 次関数は $y=a(x-p)^2+q$ と表される．頂点が x 軸上にあることから，$q=0$ とする．

(i)×9 と (ii) より，$9a(1-p)^2=a(p+3)^2$
$a\neq0$ であるから，$9(1-p)^2=(p+3)^2$
したがって，$p^2-3p=0$
この方程式を解いて，$p=0,\ 3$
(i) より，$p=0$ のとき $a=4$, $p=3$ のとき $a=1$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=4x^2}$，$\boldsymbol{y=(x-3)^2}$

(2) 放物線 $y=3x^2$ を平行移動したもので，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，頂点の座標を $(p,\ 2p-3)$ とすると，求める 2 次関数は，$y=3(x-p)^2+2p-3\cdots$(i) と表される．

◀ 頂点 $(p,\ q)$ が直線 $y=2x-3$ 上にある．よって，$q=2p-3$ から，頂点の座標を $(p,\ 2p-3)$ とすることができる．

この関数のグラフが点 $(2,\ 9)$ を通るから，$3(2-p)^2+2p-3=9$
したがって，$3(4-4p+p^2)+2p-3=9$
ゆえに，$p(3p-10)=0$
これを解いて，$p=0$, $p=\frac{10}{3}$
(i) より，$p=0$ のとき，$y=3(x-0)^2+2\cdot0-3=3x^2-3$
また，$p=\frac{10}{3}$ のとき，$y=3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+2\cdot\frac{10}{3}-3=3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=3x^2-3}$，$\boldsymbol{y=3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{11}{3}}$

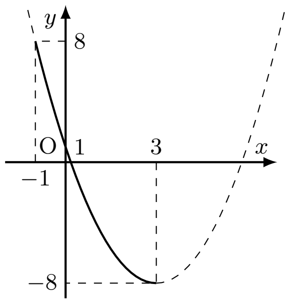
解答（節末）I3.2.1 ★★ 節末 p.109

問題文

関数 $y = x^2 - 6x + k + 3 \ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値の和が 0 であるとき，定数 k の値とそのときの最大値，最小値を求めよ．

$$y = x^2 - 6x + k + 3 = (x - 3)^2 + k - 6$$

◀ 平方完成する．



したがって，グラフは右の図のようになる．
グラフより，$x = -1$ のとき，最大値 $k + 10$，$x = 3$ のとき，最小値 $k - 6$ をとる．
最大値と最小値の和が 0 であるから，

$$(k + 10) + (k - 6) = 0$$

よって，$k = \mathbf{-2}$
また，$x = -1$ のとき，**最大値 8**，$x = 3$ のとき，**最小値 -8**

解答 3.2

解答（節末）I3.2.2 ★★★★ 節末 p.109

問題文

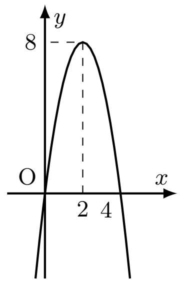
2 次関数 $y=-2x^2+8x$ について，次の問いに答えよ．
(1) この関数のグラフの頂点，x 軸の共有点，y 軸の共有点の座標を求め，グラフをかけ．
(2) $a \leqq x \leqq a+1$ における関数の最大値が 6 であるような定数 a の値を求めよ．

(1) $f(x)=-2x^2+8x$ とすると，

$$f(x)=-2x^2+8x=-2(x^2-4x)=-2(x-2)^2+8$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は，$\mathbf{(2,\ 8)}$

$f(x)=0$ とすると，$-2x^2+8x=0$
ゆえに，$-2x(x-4)=0$ より，$x=0,\ 4$
したがって，$y=f(x)$ と x 軸の共有点の座標は，
$\mathbf{(0,\ 0)}$，$\mathbf{(4,\ 0)}$
また，$f(0)=0$ より，y 軸の共有点の座標は，$\mathbf{(0,\ 0)}$
よって，$y=f(x)$ の**グラフは右の図のようになる．**



(2) $y=f(x)$ の最大値が 6 であるから，$a \leqq x \leqq a+1$ に軸である直線 $x=2$ は含まれない．

◀ $a \leqq x \leqq a+1$ に軸が含まれる場合は，最大値が 8 となり不適である．

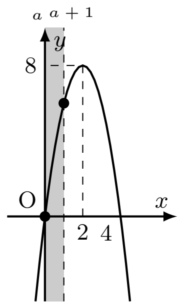
(i) $a+1<2$，すなわち $a<1$ のとき

◀ 軸が $a \leqq x \leqq a+1$ より，右側にあるときを考える．

$f(x)$ は $x=a+3$ のとき最大となるから，

$$f(a+1)=-2(a+1)^2+8(a+1)=-2a^2+4a+6$$

したがって，$f(a+1)=6$ より，$-2a^2+4a+6=6$
ゆえに，$-2a(a-2)=0$ であるから，$a=0,\ 2$
したがって，$a<1$ より，$a=0$



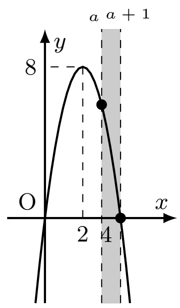
(ii) $2 \leqq a$ のとき

◀ 軸が $a \leqq x \leqq a+1$ より，左側にあるときを考える．

$f(x)$ は $x=a$ のとき最大となるから，

$$f(a)=-2a^2+8a$$

したがって，$f(a)=6$ より，$-2a^2+8a=6$
ゆえに，$(a-1)(a-3)=0$ であるから，$a=1,\ 3$
したがって，$2 \leqq a$ より，$a=3$



よって，(i)，(ii) より，求める a の値は，$a=\mathbf{0,\ 3}$

解答 3.2

解答（節末）I3.2.3 ★★ 節末 p.109

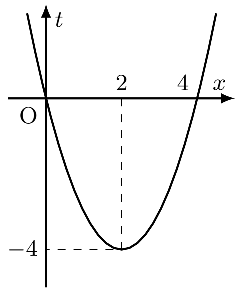
問題文

a を定数として，関数 $y=\left(x^2-4x\right)^2+2a\left(x^2-4x\right)+a+2$ の最小値を m とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) m を a の式で表せ．　　(2) m を最大にする a の値を求めよ．

(1)

$$y=\left(x^2-4x\right)^2+2a\left(x^2-4x\right)+a+2$$



$t=x^2-4x$ とおくと，$t=(x-2)^2-4$ より，$t \geqq -4$

◀ グラフより，t のとりうる値の範囲は $t \geqq -4$

したがって，

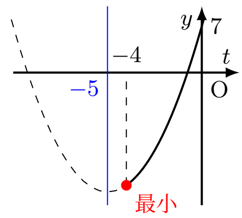
$$\begin{aligned} y &= t^2+2at+a+2 \\ &= (t+a)^2-a^2+a+2 \ (t \geqq -4) \end{aligned}$$

(i) $-a<-4$ ，すなわち，$a>4$ のとき

y は $t=-4$ のとき，最小値をとる．

したがって，$m=(-4)^2+2a\cdot(-4)+a+2=-7a+18$

◀

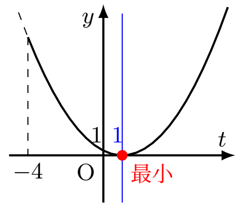


(ii) $-a \geqq -4$，すなわち，$a \leqq 4$ のとき

y は $t=-a$ のとき，最小値をとる．

したがって，$m=-a^2+a+2$

◀



よって，(i)，(ii) より，

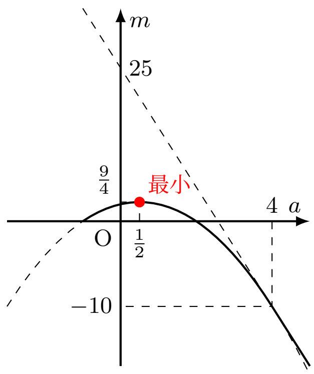
$$\boldsymbol{m=\begin{cases} -7a+18 & (a>4) \\ -a^2+a+2 & (a \leqq 4) \end{cases}}$$

(2) $a>4$ のとき

$$m=-7a+18$$

$a \leqq 4$ のとき

$$m=-a^2+a+2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$



よって，グラフは右の図のようになり，m は $a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\frac{9}{4}$

◀ y の最小値の最大値が $\frac{9}{4}$ である．

解答（節末）I3.2.4 ★★★ 節末 p.109

問題文

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は，頂点の座標が (3, 7) で，点 (6, −5) を通る．このとき，定数 a, b, c の値を求めよ．

頂点が点 (3, 7) であるから，求める放物線は，

$$y = a(x-3)^2 + 7$$

と表される．

この放物線が，点 (6, −5) を通るから，

$$-5 = a(6-3)^2 + 7$$

したがって $a = -\frac{4}{3}$

このとき，$y = -\frac{4}{3}(x-3)^2 + 7 = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - 5$

これが，$y = ax^2 + bx + c$ と一致するので，$b = 8$, $c = -5$

よって，$\boldsymbol{a = -\frac{4}{3}}$, $\boldsymbol{b = 8}$, $\boldsymbol{c = -5}$

◀ 問題文で $y = ax^2 + bx + c$ と与えられていても，$y = a(x-p)^2 + q$ などの形に設定し直した方が計算が楽になることもある．

◀ 係数を比較する．

解答（節末）I3.2.5 ★★★ 節末 p.109

問題文

$a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$ のとき，$a^3 + b^3$ の最小値を求めよ．

$a + b = 1$ から，$b = 1 - a \cdots$ (i)

$b > 0$ であるから，$1 - a > 0$

したがって，$a < 1$

$a > 0$ との共通範囲は，$0 < a < 1 \cdots$ (ii)

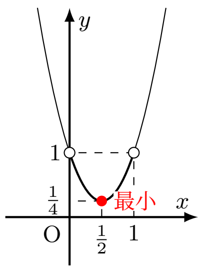
$a^3 + b^3 = t$ とすると，

$$t = a^3 + (1-a)^3 = 3a^2 - 3a + 1 = 3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

(ii) において，t は $a = \frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{2}$ のとき，(i) から $b = \frac{1}{2}$

よって，$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ のとき，**最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$**



◀ a の値の範囲を求めてから，最小値を考えるように注意すること．

◀ b を代入して，文字を消去する．

解答 3.2

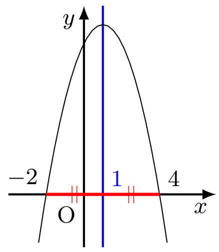
解答（節末）I3.2.6 ★★★ 節末 p.109

問題文

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が，$f(-2)=f(4)=0$ を満たし，その最大値が 9 であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

$f(-2)=f(4)=0$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の軸は，2 点 $(-2,\ 0)$，$(4,\ 0)$ を結ぶ線分の中点 $(1,\ 0)$ を通る．

◀ グラフは軸 $x=1$ に関して対称である．



したがって，$f(x)$ は $x=1$ で最大値 9 をとり，$f(x)$ は $f(x)=a(x-1)^2+9$ $(a<0)$ と表される．

$f(-2)=0$ から，$9a+9=0$

ゆえに，$a=-1$

これは，$a<0$ を満たす．

したがって，$f(x)=-(x-1)^2+9$

展開すると，$f(x)=-x^2+2x+8$ である．

よって，$a=\mathbf{-1}$，$b=\mathbf{2}$，$c=\mathbf{8}$ となる．

【別解】 $f(-2)=f(4)=0$ であるから，$f(x)=a(x+2)(x-4)$ と表される．

◀ x 軸との交点が 2 つ与えられたときは，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ を用いて考えるとよい．

展開すると，$a(x+2)(x-4)=a(x^2-2x-8)=a(x-1)^2-9a$ であるから，$f(x)=a(x-1)^2-9a$

最大値が 9 であるから，$a<0$ かつ $-9a=9$

したがって，$a=-1$

これは $a<0$ を満たす．

ゆえに，$f(x)=-(x+2)(x-4)=-x^2+2x+8$

よって，$a=\mathbf{-1}$，$b=\mathbf{2}$，$c=\mathbf{8}$

2 次方程式と 2 次不等式（解答）

解答 I3.3.1 ★ 問題 p.112

問題文

次の 2 次方程式を解け．

(1) $4x^2-7x+2=0$　　(2) $x^2-8x-5=0$

(3) $16x^2+8x+1=0$　　(4) $6x^2-11x+3=0$

(1) 解の公式より，

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}=\frac{7\pm\sqrt{49-32}}{8}=\boldsymbol{\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}}$$

◀ $a=4,\ b=-7,\ c=2$ として，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

に代入する．

(2) 解の公式より，

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\cdot(-5)}}{1}=4\pm\sqrt{16+5}=\boldsymbol{4\pm\sqrt{21}}$$

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(3) 左辺を因数分解すると，$(4x+1)^2=0$

よって，$4x+1=0$ より，$x=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$

【別解】

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot16}}{32}=\frac{-8\pm\sqrt{64-64}}{32}=\frac{-8\pm0}{32}=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

◀ 解の公式を用いてもよい．

(4) 左辺を因数分解すると，$(3x-1)(2x-3)=0$

したがって，$3x-1=0$ または $2x-3=0$

よって，$\boldsymbol{x=\frac{1}{3},\ \frac{3}{2}}$

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & & -3 & \longrightarrow & -9 \\ \hline & & & & -11 \end{array}$$

【別解】

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot6\cdot3}}{2\cdot6}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{12}=\frac{11\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{11\pm7}{12}$$

よって，$x=\boldsymbol{\frac{1}{3},\ \frac{3}{2}}$

解答 I3.3.2 ★★　問題 p.113

問題文

次の 2 次方程式を解け．

(1) $-0.25x^2+2x-1=0$　　(2) $\sqrt{3}x^2-12x+12\sqrt{3}=0$

(3) $(x+1)^2-6(x+1)+5=0$

(1) 両辺に -4 を掛けると，$x^2-8x+4=0$

よって，

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\cdot 4}}{1}=\mathbf{4\pm 2\sqrt{3}}$$

◀ x^2 の係数が正となるように，-4 を掛ける．

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(2) 両辺に $\sqrt{3}$ を掛けると，$3x^2-12\sqrt{3}x+36=0$

したがって，$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$

左辺を因数分解すると，$(x-2\sqrt{3})^2=0$

よって，$x=\mathbf{2\sqrt{3}}$

◀ x^2 の係数が有理数となるように，$\sqrt{3}$ を掛ける．

◀ $(2\sqrt{3})^2=12$

【別解】 両辺に $\sqrt{3}$ を掛けると，$3x^2-12\sqrt{3}x+36=0$

したがって，$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$

よって，

$$x=\frac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{(-2\sqrt{3})^2-1\cdot 12}}{1}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(3) $X=x+1$ とおくと，$X^2-6X+5=0$

したがって，$(X-5)(X-1)=0$

ゆえに，$X=5,\ 1$

すなわち，$x+1=5,\ 1$

よって，$x=\mathbf{4,\ 0}$

【別解】 $(x+1)^2-6(x+1)+5=0$ より，$\{(x+1)-5\}\{(x+1)-1\}=0$

したがって，$(x-4)\cdot x=0$

よって，$x=\mathbf{4,\ 0}$

◀ 共通する部分を 1 つのまとまりと見る．

解答 I3.3.3 ★★★ 問題 p.114

問題文

次の方程式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax^2+(a+3)x+3=0$　　(2) $(a^2-2a)x^2=a-2$

(1) (i) $a=0$ のとき

方程式は，$3x+3=0$ より，$x=-1$

(ii) $a \neq 0$ のとき

$ax^2+(a+3)x+3=0$ より，$(x+1)(ax+3)=0$

したがって，$x=-1,\ -\frac{3}{a}$

よって，(i)，(ii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=0} \text{ のとき，} & \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{a \neq 0} \text{ のとき，} & \boldsymbol{x=-1,\ -\frac{3}{a}} \end{cases}$$

◀ $a=0$ のとき，x^2 の項がなくなるので，x の 1 次方程式になる．

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 1 & \longrightarrow & a \\ a & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline & & & & a+3 \end{array}$$

(2) (i) $a=0$ のとき

方程式は，$0 \cdot x^2=0-2$

これを満たす x は存在しないので，解なし

(ii) $a=2$ のとき

方程式は，$0 \cdot x^2=0$

これは，x の値に関わらず成り立つ．

したがって，解はすべての実数

(iii) $a \neq 0,\ 2$ のとき

$a^2-2a \neq 0$ から，両辺を a^2-2a で割ると，$x^2=\frac{1}{a}$

（ア）$a>0$ のとき，$x=\pm\sqrt{\frac{1}{a}}=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}=\pm\frac{\sqrt{a}}{a}$

（イ）$a<0$ のとき，解なし

◀ $x^2=\frac{a-2}{a(a-2)}=\frac{1}{a}$

◀ $x^2=\frac{1}{a}$ を解く．

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq 0} \text{ のとき，} & \text{解なし} \\ \boldsymbol{a=2} \text{ のとき，} & \text{解はすべての実数} \\ \boldsymbol{0<a<2,\ 2<a} \text{ のとき，} & \boldsymbol{x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}} \end{cases}$$

解答 3.3

解答 I3.3.4 ★★ 問題 p.115

問題文

(1) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 4 と -5 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．
(2) 2 次方程式 $x^2+ax-8=0$ の解の 1 つが $x=a$ のとき，定数 a の値を求めよ．また，そのときの他の解を求めよ．

(1) $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 4 と -5 であるから，$x=4$ と $x=-5$ をそれぞれ代入して，

$$\begin{cases} 4^2+a\cdot 4+b=0 \\ (-5)^2+a\cdot(-5)+b=0 \end{cases}$$

◀ 数学 II で学習する，解と係数の関係を用いても求められる．

すなわち，$\begin{cases} 4a+b=-16\cdots\text{(i)} \\ -5a+b=-25\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

よって，(i)，(ii) を解いて，$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{-20}$

【別解】 2 つの解が 4 と -5 より，もとの 2 次方程式は，$(x-4)(x+5)=0$
したがって，$x^2+x-20=0$
よって，$x^2+ax+b=0$ と係数を比較すると，$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{-20}$

◀ α，β を解にもつ 2 次方程式は，$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と表される．与えられた方程式の x^2 の係数が 1 であることから，$a=1$ である．

(2) $x=a$ が $x^2+ax-8=0$ の解であるから，$a^2+a\cdot a-8=0$
すなわち，$2a^2=8$ より，$a=\pm 2$
(i) $a=2$ のとき
方程式は，$x^2+2x-8=0$
したがって，$(x-2)(x+4)=0$
ゆえに，$x=2$，-4
したがって，他の解は，$\boldsymbol{x=-4}$
(ii) $a=-2$ のとき
方程式は，$x^2-2x-8=0$
したがって，$(x-4)(x+2)=0$
ゆえに，$x=4$，-2
したがって，他の解は，$\boldsymbol{x=4}$

よって，(i)，(ii) より，

$a=2$ のとき，　他の解は，$x=-4$
$a=-2$ のとき，他の解は，$x=4$

解答 3.3

One math

解答 I3.3.5 ★　問題 p.116

問題文

次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ.

(1) $x^2-4x+1=0$　　(2) $4x^2+2x+3=0$

(3) $2x^2-6=0$　　(4) $16x^2-8x+1=0$

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 1=12$$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

【別解】与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 1=3$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

◀ $ax^2+bx+c=0$ において $b=2b'$（x の係数が 2 の倍数）のとき，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい.

(2) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$D=(2)^2-4\cdot 4\cdot 3=-44$$

$D<0$ であるから，実数解の個数は，**0 個**

(3) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$D=0^2-4\cdot 2\cdot(-6)=48$$

◀ $2x^2+0\cdot x-6=0$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

(4) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$D=(-8)^2-4\cdot 16\cdot 1=64-64=0$$

◀ $16x^2-8x+1$
$=(4x-1)^2$

$D=0$ であるから，実数解の個数は，**1 個**

【別解】与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，$\frac{D}{4}=(-4)^2-16\cdot 1=0$

$D=0$ であるから，実数解の個数は，**1 個**

解答 I3.3.6 ★★ 問題 p.117

問題文

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．
(1) x についての 2 次方程式 $x^2+2kx+3k+10=0$ が重解をもつような k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．
(2) x についての 2 次方程式 $x^2-2kx+k^2+4k-8=0$ の実数解の個数を調べよ．

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(2k)^2-4\cdot1\cdot(3k+10)=4k^2-12k-40=4(k^2-3k-10)$$

◀ $ax^2+bx+c=0$ における $b=2b'$（x の係数が 2 の倍数）のときであるので，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい．

2 次方程式が重解をもつから，$D=0$
したがって，$k=5,\ -2$
また，重解は，$x=-\frac{2k}{2\cdot1}=-k$
よって，

$k=5$ のとき，　解は，$x=-5$
$k=-2$ のとき，解は，$x=2$

(2) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-2k)^2-4\cdot1\cdot(k^2+4k-8)=-16k+32$$

◀ $ax^2+bx+c=0$ における $b=2b'$（x の係数が 2 の倍数）のときであるので，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい．

よって，実数解の個数は，k の値によって次のようになる．

$D>0$，すなわち，$k<2$ のとき，2 個
$D=0$，すなわち，$k=2$ のとき，1 個
$D<0$，すなわち，$k>2$ のとき，0 個

解答 I3.3.7 ★★ 問題 p.118

問題文

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2-2x-k+2=0,\ x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$ がともに実数解をもたないような定数 k の値の範囲を求めよ．

2 次方程式 $x^2-2x-(k-2)=0$ の判別式を D_1 とすると，

$$D_1=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-k+2)=4+4k-8=4k-4$$

2 次方程式が実数解をもたないから，$D_1<0$
したがって，$4k-4<0$
ゆえに，$k<1\cdots$(i)

◀ 実数解をもたない条件は，$D<0$ である．

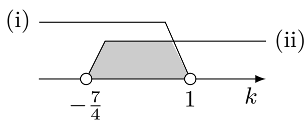
2 次方程式 $x^2+(2k-1)x+(k^2+2)=0$ の判別式を D_2 とすると，

$$D_2=(2k-1)^2-4\cdot1\cdot(k^2+2)=4k^2-4k+1-4k^2-8=-4k-7$$

2 次方程式が実数解をもたないから，$D_2<0$
したがって，$-4k-7<0$
ゆえに，$k>-\frac{7}{4}\cdots$(ii)

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，

$$\boldsymbol{-\frac{7}{4}<k<1}$$



解答 3.3

One math

解答 I3.3.8 ★★★ 問題 p.119

問題文

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2+(k+3)x+8=0,\quad x^2+5x+4k=0$ が共通な実数解をもつとき，定数 k の値と，そのときの共通解を求めよ．

共通解を α として，2 つの 2 次方程式に $x=\alpha$ を代入すると，

$$\begin{cases} \alpha^2+(k+3)\alpha+8=0\cdots\text{(i)} \\ \alpha^2+5\alpha+4k=0\cdots\text{(ii)} \end{cases}$$

(i)−(ii) より，

$$(k-2)\alpha+8-4k=0$$

したがって，$(k-2)(\alpha-4)=0$
ゆえに，$k=2$ または $\alpha=4$
（ア）$k=2$ のとき
もとの 2 つの 2 次方程式は，ともに $x^2+5x+8=0$
この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D=5^2-4\cdot1\cdot8=-7$
これは，$D<0$ であるから，共通な実数解をもつことに反する．　◀ 実数解をもたない．
（イ）$\alpha=4$ のとき
(i) に代入すると，$4^2+(k+3)\cdot4+8=0$　◀ (i) か (ii) に代入する．
したがって，$k=-9$
このとき，もとの 2 つの 2 次方程式は，$x^2-6x+8=0$ と $x^2+5x-36=0$ となり，解はそれぞれ，$x=4,\ 2$ と $x=4,\ -9$
したがって，2 つの方程式は共通解 $x=4$ をもつ．
よって，（ア），（イ）より，$\boldsymbol{k=-9}$ **，共通解は，** $\boldsymbol{x=4}$

解答 3.3

One math

解答 I3.3.9 ★ 問題 p.120

問題文

次の放物線は x 軸と共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - 3x - 10$　(2) $y = -x^2 + 4x - 4$　(3) $y = 3x^2 - 2x + 6$

(1) $x^2 - 3x - 10 = 0$ とすると，$(x-5)(x+2) = 0$
したがって，$x = 5,\ -2$
よって，x 軸と**共有点を 2 個もち，その座標は，(5，0)，(−2，0)**

◀ 判別式を D とすると，
$D = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 49$
よって，$D > 0$ より，共有点は 2 個である．

(2) $-x^2 + 4x - 4 = 0$ とすると，$x^2 - 4x + 4 = 0$
したがって，$(x-2)^2 = 0$
ゆえに，$x = 2$
よって，x 軸と**共有点を 1 個もち，その座標は，(2，0)**

◀ 判別式を D とすると，
$$D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$$
よって，$D = 0$ より，共有点は 1 個（重解）である．また，$(2,\ 0)$ は接点となる．

(3) $3x^2 - 2x + 6 = 0$ とする．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D = (-2)^2 - 4\cdot 3\cdot 6 = -68$$

よって，$D < 0$ であるから，グラフと x 軸は**共有点をもたない．**

【別解】

$$y = 3x^2 - 2x + 6 = 3\left\{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right\} + 6 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}$$

2 次関数のグラフは，下に凸の放物線で，頂点の y 座標は $\frac{17}{3}$ である．
よって，x 軸は**共有点をもたない．**

解答 3.3

One math

解答 I3.3.10 ★★ 問題 p.121

問題文

(1) 2 次関数 $y = x^2 - 2kx + 4k - 3$ のグラフが，x 軸と接するような定数 k の値を求め，その接点の座標を求めよ．
(2) 2 次関数 $y = x^2 + 2kx + k^2 + 3k + 9$ のグラフが，x 軸と共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

(1) $x^2 - 2kx + 4k - 3 = 0$ とする．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 1 \cdot (4k-3) = k^2 - 4k + 3 = (k-3)(k-1)$$

◀ x 軸は直線 $y = 0$ であることから，$y = 0$ とおいた，$x^2 - 2kx + 4k - 3 = 0$ とする．

グラフが x 軸と接するから，$D = 0$
したがって，$(k-3)(k-1) = 0$
ゆえに，$k = 3,\ 1$
グラフの頂点の x 座標は，$x = -\frac{-2k}{2 \cdot 1} = k$ であるから，

$k = 3$ のとき，$x = 3$ であり，$k = 1$ のとき，$x = 1$ である．

よって，接点の座標は，

$k = 3$ のとき，接点$(3,\ 0)$
$k = 1$ のとき，接点$(1,\ 0)$

(2) 共有点の x 座標は，$x^2 + 2kx + k^2 + 3k + 9 = 0$ の実数解である．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k^2 + 3k + 9) = -3k - 9$$

グラフが x 軸と共有点をもつから，$D \geqq 0$
したがって，$-3k - 9 \geqq 0$
よって，$\boldsymbol{k \leqq -3}$

解答 I3.3.11 ★★ 問題 p.122

問題文

(1) 2 次関数 $y=-2x^2+3x+4$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．
(2) 放物線 $y=-x^2+4x+2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが 6 であるとき，定数 k の値を求めよ．

(1) $-2x^2+3x+4=0$ とすると，$2x^2-3x-4=0$
したがって，$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-4)}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{9+32}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$
よって，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは，

$$\frac{3+\sqrt{41}}{4}-\frac{3-\sqrt{41}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{41}}{2}}$$

(2) $-x^2+4x+2k=0$ とすると，$x^2-4x-2k=0\cdots$(i)
この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-2k)=4+2k$$

グラフが x 軸と異なる 2 点で交わるから，$D>0$
したがって，$4+2k>0$ より，$k>-2\cdots$(ii)
このとき，2 次方程式 (i) を解くと，

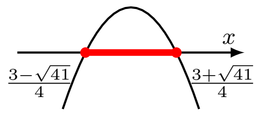
$$x=2\pm\sqrt{4+2k}$$

切り取る線分の長さが 6 であるから，

$$(2+\sqrt{4+2k})-(2-\sqrt{4+2k})=6$$

ゆえに，$2\sqrt{4+2k}=6$
したがって，$4+2k=9$
これより，$k=\frac{5}{2}$
この値は，(ii) を満たす．
よって，求める定数 k の値は，$\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

◀ 扱いやすさのために，x^2 の係数を正にする．

◀


◀ 扱いやすさのために，x^2 の係数を正にする．

◀ x 軸と異なる 2 点で交わらなければ，線分ができない．

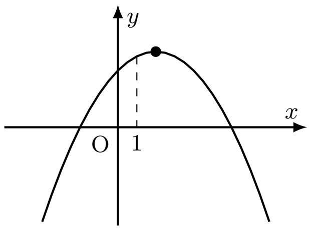
解答 I3.3.12 ★★ 問題 p.123

問題文

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようなとき，次の値の符号を調べよ．ただし，$a < 0$ とする．

(1) a　　(2) b　　(3) c

(4) $b^2 - 4ac$　　(5) $a + b + c$



(1) グラフは上に凸であるから，$\boldsymbol{a < 0}$

(2) 軸は直線 $x = -\frac{b}{2a}$

軸が y 軸より右側にあるから，$-\frac{b}{2a} > 0$

よって，$a < 0$ であるから，$\boldsymbol{b > 0}$

◀ $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

◀ $-\frac{b}{2a} > 0$ から，$\frac{b}{a} < 0$ より，a と b は異符号である．

(3) y 軸との共有点は点 $(0,\ c)$

よって，グラフは y 軸と $y > 0$ の部分で交わっているから，$\boldsymbol{c > 0}$

(4) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると，$D = b^2 - 4ac$

x 軸と異なる 2 点で交わっているから，$D > 0$

よって，$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$

◀ $D = b^2 - 4ac$

(5) $x = 1$ のとき，$y = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$

よって，グラフより，$x = 1$ のとき，$y > 0$ であるから，$\boldsymbol{a + b + c > 0}$

解答 3.3

解答 I3.3.13 ★★ 問題 p.124

問題文

次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x^2-3x-y=-1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+3y-9=0 \\ x^2-y^2+x+y=0 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 3x-y=4\cdots\text{(i)} \\ x^2-3x-y=-1\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

(i) より，$y=3x-4$

これを (ii) に代入すると，$x^2-3x-(3x-4)=-1$

整理すると，$x^2-6x+5=0$

したがって，$(x-1)(x-5)=0$

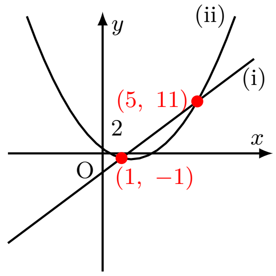
ゆえに，$x=1,\ 5$

$y=3x-4$ に代入すると，$x=1$ のとき，$y=3\cdot1-4=-1$

$x=5$ のとき，$y=3\cdot5-4=11$

よって，$(x,\ y)=\mathbf{(1,\ -1),\ (5,\ 11)}$

◀ $(1,\ -1)$, $(5,\ 11)$ は，与えられた連立方程式 (i)，(ii) を整理した $y=3x-4$（直線），$y=x^2-3x+1$（放物線）の交点を表している．



(2) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+3y-9=0\cdots\text{(i)} \\ x^2-y^2+x+y=0\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

(ii) より，$(x+y)(x-y)+(x+y)=0$

したがって，$(x+y)(x-y+1)=0$

ゆえに，$y=-x$ または $y=x+1$

（ア）$y=-x\cdots\text{(iii)}$ のとき，(iii) を (i) に代入して整理すると，

$$2x^2-x-3=0$$

したがって，$(2x-3)(x+1)=0$ となり，$x=\frac{3}{2},\ -1$

ゆえに，(iii) より，$x=\frac{3}{2}$ のとき，$y=-\frac{3}{2}$，$x=-1$ のとき，$y=1$

（イ）$y=x+1\cdots\text{(iv)}$ のとき，(iv) を (i) に代入して整理すると，$4x=4$

したがって，$x=1$

ゆえに，(iv) より，$x=1$ のとき，$y=2$

よって，（ア），（イ）より，求める解は，

$$(x,\ y)=\left(\mathbf{\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}}\right),\ \mathbf{(-1,\ 1),\ (1,\ 2)}$$

解答 I3.3.14 ★ 問題 p.125

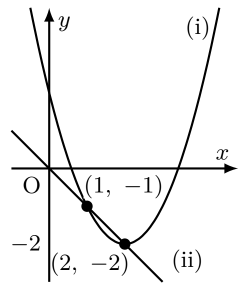
問題文

次の 2 つの関数のグラフは共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - 4x + 2,\ y = -x$　　(2) $y = -x^2 + 3x + 2,\ y = 4x + 7$

(3) $y = x^2 - 6x + 10,\ y = -x^2 + 2x + 2$

(1) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 & \cdots \text{(i)} \\ y = -x & \cdots \text{(ii)} \end{cases}$ とする．



(i) と (ii) から y を消去すると，$x^2 - 4x + 2 = -x$

整理すると，$x^2 - 3x + 2 = 0$

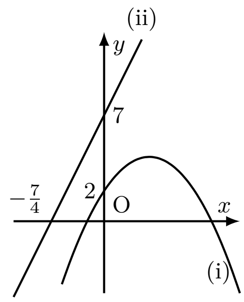
したがって，$(x-2)(x-1) = 0$

ゆえに，$x = 2,\ 1$

(ii) より，$x = 2$ のとき，$y = -2$，$x = 1$ のとき，$y = -1$

よって，**共有点を 2 個もち，その座標は，(2，−2)，(1，−1)**

(2) $\begin{cases} y = -x^2 + 3x + 2 & \cdots \text{(i)} \\ y = 4x + 7 & \cdots \text{(ii)} \end{cases}$ とする．



(i) と (ii) から y を消去すると，$-x^2 + 3x + 2 = 4x + 7$

整理すると，$-x^2 - x - 5 = 0$

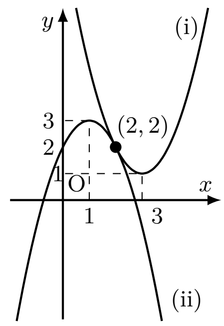
この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 1 - 20 = -19$$

したがって，$D < 0$ であるから，この 2 次方程式は実数解をもたない．

よって，放物線 (i) と直線 (ii) は**共有点をもたない．**

(3) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10 & \cdots \text{(i)} \\ y = -x^2 + 2x + 2 & \cdots \text{(ii)} \end{cases}$ とする．



(i) と (ii) から y を消去すると，$x^2 - 6x + 10 = -x^2 + 2x + 2$

整理すると，$x^2 - 4x + 4 = 0$

したがって，$(x-2)^2 = 0$

ゆえに，$x = 2$

(ii) より，$x = 2$ のとき，$y = -2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 2$

よって，**共有点を 1 個もち，その座標は，(2，2)**

解答 3.3

解答 I3.3.15 ★★ 問題 p.126

問題文

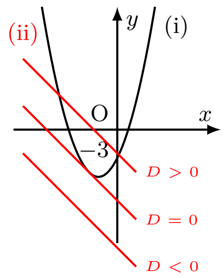
次の放物線と直線の共有点の個数を調べよ．ただし，k を定数とする．

(1) 放物線 $y=2x^2+4x-3$，直線 $y=-2x+k$

(2) 放物線 $y=-x^2+3x+k+1$，直線 $y=-x+2$

(1) $\begin{cases} y=2x^2+4x-3\cdots(\text{i}) \\ y=-2x+k\cdots(\text{ii}) \end{cases}$ とする．

◀ k の値によって，直線 (ii) が変化する．



(i) と (ii) から y を消去すると，$2x^2+4x-3=-2x+k$

整理すると，$2x^2+6x-3-k=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=3^2-2\cdot(-3-k)=9+2(3+k)=2k+15$$

よって，共有点の個数は，k の値によって次のようになる．

$$\boldsymbol{2k+15>0 \text{ のとき，すなわち，} k>-\frac{15}{2} \text{ のとき，} 2 \text{ 個}}$$

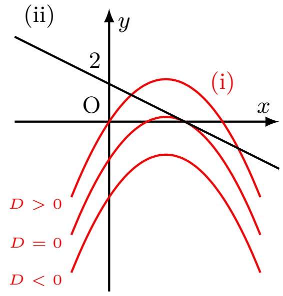
$$\boldsymbol{2k+15=0 \text{ のとき，すなわち，} k=-\frac{15}{2} \text{ のとき，} 1 \text{ 個}}$$

◀ 放物線と直線が接する．

$$\boldsymbol{2k+15<0 \text{ のとき，すなわち，} k<-\frac{15}{2} \text{ のとき，} 0 \text{ 個}}$$

(2) $\begin{cases} y=-x^2+3x+k+1\cdots(\text{i}) \\ y=-x+2\cdots(\text{ii}) \end{cases}$ とする．

◀ k の値によって，放物線 (i) が変化する．



(i) と (ii) から y を消去すると，$-x^2+3x+k+1=-x+2$

整理すると，$x^2-4x-k+1=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-k+1)=4+(k-1)=k+3$$

よって，共有点の個数は，k の値によって次のようになる．

$$\boldsymbol{k+3>0 \text{ のとき，すなわち，} k>-3 \text{ のとき，} 2 \text{ 個}}$$

$$\boldsymbol{k+3=0 \text{ のとき，すなわち，} k=-3 \text{ のとき，} 1 \text{ 個}}$$

◀ 放物線と直線が接する．

$$\boldsymbol{k+3<0 \text{ のとき，すなわち，} k<-3 \text{ のとき，} 0 \text{ 個}}$$

解答 I3.3.16 ★ 問題 p.127

問題文

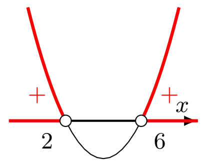
次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2-8x+12>0$　　(2) $x^2-3x+1>0$　　(3) $-3x^2+5x+2\geqq 0$

(1) 左辺を因数分解すると，

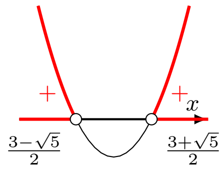
$$(x-2)(x-6)>0$$

よって，不等式の解は，$\boldsymbol{x<2}$ **または** $\boldsymbol{6<x}$



◀ $y=x^2-8x+12$ は x 軸と $x=2,\ 6$ で共有点をもつことがわかる．

(2) $x^2-3x+1=0$ を解くと，$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
よって，不等式の解は，$\boldsymbol{x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ **または** $\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x}$



◀ 解の公式を用いる．

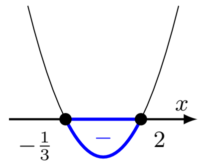
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(3) 両辺に -1 を掛けて，

$$3x^2-5x-2\leqq 0$$

左辺を因数分解すると，

$$(3x+1)(x-2)\leqq 0$$

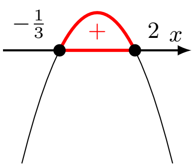


よって，不等式の解は，$\boldsymbol{-\frac{1}{3}\leqq x\leqq 2}$

【別解】左辺を因数分解すると，

$$-(3x+1)(x-2)\geqq 0$$

よって，$\boldsymbol{-\frac{1}{3}\leqq x\leqq 2}$



◀ $-3x^2+5x+2\geqq 0$ のグラフをかいて求めてもよい．

解答 3.3

One math

解答 I3.3.17 ★ 問題 p.128

問題文

次の 2 次不等式を解け．

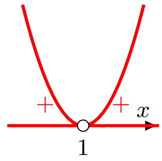
(1) $-2x^2+4x-2<0$　　(2) $x^2+4x+5>0$

(3) $x^2-6x+9 \leqq 0$　　(4) $-x^2+4x-4>0$

(1) $-2x^2+4x-2<0$ より，$2x^2-4x+2>0$

因数分解すると，$2(x-1)^2>0$

よって，不等式の解は，**1 以外のすべての実数**

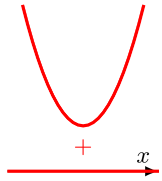


◀ 2 次関数 $y=2x^2-4x+2$ は，$x=1$ のとき，$y=0$ となるから，$x=1$ を除く．なお，$y=-2x^2+4x-2$ を考えてもよい．

(2) 2 次方程式 $x^2+4x+5=0$ の判別式を D とすると，

$$D=4^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4$$

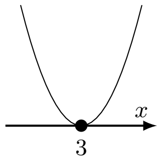
よって，$D<0$ であるから，不等式の解は，**すべての実数**



(3) 左辺を因数分解すると，

$$(x-3)^2 \leqq 0$$

よって，不等式の解は，$x=\mathbf{3}$

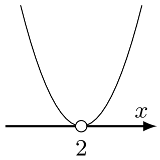


◀ 2 次関数 $y=x^2-6x+9$ は，$x=3$ のとき，$y=0$ であり，それ以外のときは $y>0$ となるから，$y \leqq 0$ となる x の値は $x=3$ のみである．

(4) $-x^2+4x-4>0$ より，$x^2-4x+4<0$

左辺を因数分解すると，$(x-2)^2<0$

よって，不等式の **解はない**



解答 I3.3.18 ★★ 問題 p.129

問題文

次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2+2x-3 \leqq 0 \\ 2x^2+3x+1>0 \end{cases}$　　(2) $2x-1 \leqq x^2-1 \leqq 2x+3$

(1) $x^2+2x-3 \leqq 0$ より，$(x+3)(x-1) \leqq 0$

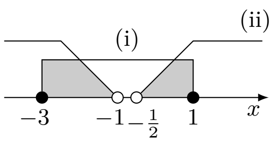
したがって，$-3 \leqq x \leqq 1 \cdots$ (i)

$2x^2+3x+1>0$ より，$(2x+1)(x+1)>0$

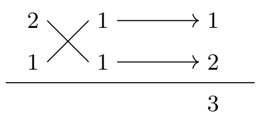
したがって，$x<-1$，$x>-\frac{1}{2} \cdots$ (ii)

(i)，(ii) の共通範囲は，右の図のようになる．

よって，$\boldsymbol{-3 \leqq x < -1,\ -\frac{1}{2} < x \leqq 1}$



◀ たすき掛けを用いる．



(2) $2x-1 \leqq x^2-1$ より，$x^2-2x \geqq 0$

因数分解すると，$(x-2)x \geqq 0$

したがって，$x \leqq 0$，$x \geqq 2 \cdots$ (i)

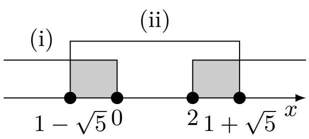
$x^2-1 \leqq 2x+3$ より，$x^2-2x-4 \leqq 0$

$x^2-2x-4=0$ を解くと，$x=1\pm\sqrt{5}$

したがって，$1-\sqrt{5} \leqq x \leqq 1+\sqrt{5} \cdots$ (ii)

(i)，(ii) の共通範囲は，右の図のようになる．

よって，$\boldsymbol{1-\sqrt{5} \leqq x \leqq 0,\ 2 \leqq x \leqq 1+\sqrt{5}}$



解答 I3.3.19 ★★★ 問題 p.130

問題文

次の 2 次不等式を解け．ただし，a を定数とする．

(1) $x^2-4ax+3a^2>0$　　(2) $ax^2-5ax+4a<0$

(1) $x^2-4ax+3a^2>0$ より，$(x-a)(x-3a)>0\cdots$(i)

$y=x^2-4ax+3a^2$ とすると，このグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$x=a,\ 3a$

◀ 2 つの解の大小関係を考えて，場合分けをする．$a>0$ のとき，$a<3a$ となり，$a<0$ のとき，$a>3a$ となる．

（ア）$a>0$ のとき

不等式 (i) の解は，$x<a,\ 3a<x$

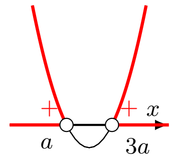
（イ）$a=0$ のとき

不等式 (i) の解は，0 以外のすべての実数

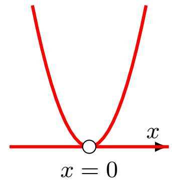
（ウ）$a<0$ のとき

不等式 (i) の解は，$x<3a,\ a<x$

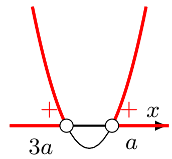
（ア）



（イ）



（ウ）



よって，（ア）〜（ウ）より，求める解は，

$$\begin{cases}\boldsymbol{a>0\ \text{のとき，}x<a,\ 3a<x}\\ \boldsymbol{a=0\ \text{のとき，}\ 0\ \text{以外のすべての実数}}\\ \boldsymbol{a<0\ \text{のとき，}x<3a,\ a<x}\end{cases}$$

(2) $ax^2-5ax+4a<0$ より，$a\left(x^2-5x+4\right)<0$

したがって，$a(x-1)(x-4)<0\cdots$(ii)

$y=ax^2-5ax+4a$ とすると，このグラフと x 軸との共有点の x 座標は，$x=1,\ 4$

与えられた不等式は 2 次不等式であるから，$a\neq 0$

◀ 問題文では「2 次不等式」となっていることから，$a\neq 0$ である．

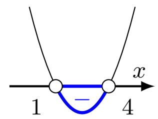
（ア）$a>0$ のとき

不等式 (ii) の解は，$1<x<4$

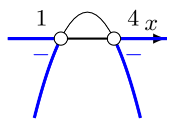
（イ）$a<0$ のとき

不等式 (ii) の解は，$x<1,\ 4<x$

（ア）



（イ）



よって，（ア），（イ）より，求める解は，

$$\begin{cases}\boldsymbol{a>0\ \text{のとき，}1<x<4}\\ \boldsymbol{a<0\ \text{のとき，}x<1,\ 4<x}\end{cases}$$

解答 3.3

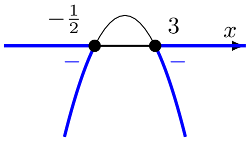
解答 I3.3.20 ★★ 問題 p.131

問題文

2 次不等式 $2ax^2+bx+1 \leqq 0$ の解が $x \leqq -\frac{1}{2}$，$3 \leqq x$ となるとき，定数 a，b の値を求めよ．

$y=2ax^2+bx+1 \cdots$ (i) とする．

$2ax^2+bx+1 \leqq 0$ の解が $x \leqq -\frac{1}{2}$，$3 \leqq x$ となるのは，
(i) のグラフが右の図のようになるときであるから，$a<0$
このとき，解が $x \leqq -\frac{1}{2}$，$3 \leqq x$ であるから，$y=2ax^2+bx+1$ のグラフは x 軸と $x=-\frac{1}{2}$，3 で交わる．



◀ $a>0$ のときは，解は $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ の形になるので不適である．

したがって，2 次方程式 $2ax^2+bx+1=0$ の解は，$x=-\frac{1}{2}$，3 となる．
ゆえに，$2ax^2+bx+1=0$ に $x=-\frac{1}{2}$，3 をそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+1=0 \\ 18a+3b+1=0 \end{cases}$$

これを解くと，$a=-\frac{1}{3}$，$b=\frac{5}{3}$ となり，$a<0$ を満たす．
よって，$a=-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$，$b=\boldsymbol{\frac{5}{3}}$

【別解】 $x \leqq -\frac{1}{2}$，$3 \leqq x$ を解にもつ 2 次不等式のうち，x^2 の係数が 1 のものは，$(x+\frac{1}{2})(x-3) \geqq 0$ と表される．

◀ $\alpha<\beta$ のとき，$x \leqq \alpha$，$\beta \leqq x \iff (x-\alpha)(x-\beta) \geqq 0$

したがって，$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \geqq 0 \cdots$ (i)
$2ax^2+bx+1 \leqq 0 \cdots$ (ii) の定数項が 1 であるから，(i) の両辺に $-\frac{2}{3}$ を掛けて，

$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x+1 \leqq 0$$

よって，(ii) と係数を比較すると，$a=-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$，$b=\boldsymbol{\frac{5}{3}}$

解答 3.3

解答 I3.3.21 ★★★ 問題 p.132

問題文

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．
(1) x についての 2 次方程式 $4x^2-kx+k-3=0$ が実数解をもたないような k の値の範囲を求めよ．
(2) x についての方程式 $(k+3)x^2+2(k-1)x+2=0$ の実数解の個数を求めよ．

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-k)^2-4\cdot4\cdot(k-3)=k^2-16k+48$$

2 次方程式が実数解をもたないから，$D<0$
したがって，$k^2-16k+48<0$
因数分解すると，$(k-4)(k-12)<0$
よって，$\boldsymbol{4<k<12}$

◀ k についての 2 次不等式を解く．

(2) $(k+3)x^2+2(k-1)x+2=0\cdots$(i) とする．

（ア）$k=-3$ のとき，(i) は $-8x+2=0$
これを解くと，$x=\frac{1}{4}$ であり，このとき，実数解の個数は 1 個
（イ）$k\neq-3$ のとき，2 次方程式 (i) の判別式を D とすると，

◀ 問題文では「方程式」となっていることから，x^2 の係数が 0 になる $k=-3$ のときを考える．

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k+3)\cdot2=k^2-4k-5=(k+1)(k-5)$$

$D>0$ のとき，$(k+1)(k-5)>0$
これを解くと，$k<-1,\ 5<k$
したがって，$k\neq-3$より，$k<-3,\ -3<k<-1,\ 5<k$ であり，このとき，実数解の個数は 2 個
$D=0$ のとき，$(k+1)(k-5)=0$
これを解くと，$k=-1,\ 5$ であり，このとき，実数解の個数は 1 個
$D<0$ のとき，$(k+1)(k-5)<0$
これを解くと，$-1<k<5$ であり，このとき，実数解の個数は 0 個

◀ $k\neq-3$ であることに注意すること．

よって，（ア），（イ）より，求める k の値の範囲は，

$$\begin{cases}\boldsymbol{k<-3,\ -3<k<-1,\ 5<k} \text{ のとき，} & \textbf{2 個}\\ \boldsymbol{k=-3,\ k=-1,\ k=5} \text{ のとき，} & \textbf{1 個}\\ \boldsymbol{-1<k<5} \text{ のとき，} & \textbf{0 個}\end{cases}$$

解答 I3.3.22 ★★★ 問題 p.133

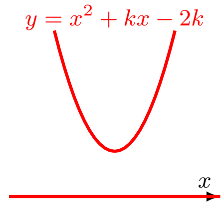
問題文

次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ．

(1) すべての実数 x について，2 次不等式 $x^2+kx-2k>0$ が成り立つ．

(2) 2 次不等式 $kx^2-2\sqrt{2}x+k+1>0$ が解をもたない．

(1) $f(x)=x^2+kx-2k$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，右の図のようになる．



よって，求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが常に上側にある，すなわち，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないことである．

◀ グラフは下に凸で x 軸と共有点をもたないので，$a>0$，$D<0$ である．ここでは，x^2 の係数が正であるので，$a>0$ は成り立っていることから，$D<0$ を考える．

$f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$$D=k^2-4\cdot1\cdot(-2k)=k^2+8k=k(k+8)$$

グラフが x 軸と共有点をもたないから，$D<0$

したがって，$k(k+8)<0$

ゆえに，$-8<k<0$

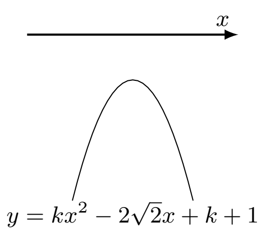
よって，求める k の値の範囲は，$\boldsymbol{-8<k<0}$

(2) $f(x)=kx^2-2\sqrt{2}x+k+1$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは放物線である．

与えられた不等式は 2 次不等式であるから，$k\neq0$

◀ 問題文では「2 次不等式」となっていることから，$k\neq0$ である．

求める条件は，$kx^2-2\sqrt{2}x+k+1>0$ が解をもたない，すなわち，すべての x について $kx^2-2\sqrt{2}x+k+1\leqq0$ が成り立つことである．つまり，グラフは上に凸の放物線であり，x 軸と共有点をもたない，または x 軸と接することから，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める条件は



$k<0\cdots$(i) かつ $D\leqq0$

◀ $k<0$ を忘れないように注意すること．

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{2})^2-k\cdot(k+1)=-k^2-k+2=-(k+2)(k-1)$$

したがって，$-4(k+2)(k-1)\leqq0$

ゆえに，$k\leqq-2,\ 1\leqq k\cdots$(ii)

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，$\boldsymbol{k\leqq-2}$

解答 3.3

解答 I3.3.23 ★★★　問題 p.134

問題文

$-1 \leqq x \leqq 9$ のすべての x の値に対して，不等式 $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + a + 6$ であるから，放物線 $y = f(x)$ の軸は直線 $x = a$

◀ 軸が区間より左側か，区間内か，右側かで場合分けをする．全部で 3 通りの場合分けとなる．

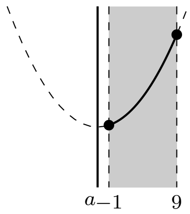
(i) $a < -1$ のとき

$f(x)$ は $x = -1$ で最小となり，最小値は $f(-1) = 3a + 7$

したがって，$3a + 7 > 0$

ゆえに，$a > -\frac{7}{3}$

これと $a < -1$ より，$-\frac{7}{3} < a < -1$



(ii) $-1 \leqq a \leqq 9$ のとき

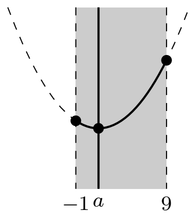
$f(x)$ は $x = a$ で最小となり，最小値は $f(a) = -a^2 + a + 6$

したがって，$-a^2 + a + 6 > 0$

ゆえに，$a^2 - a - 6 < 0$

これを解くと，$(a-3)(a+2) < 0$ であるから，$-2 < a < 3$

これと $-1 \leqq a \leqq 9$ より，$-1 \leqq a < 3$



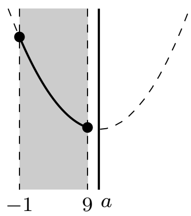
◀ 場合分けの条件である，$-1 \leqq a \leqq 9$ を満たすか否かの確認を忘れないように注意すること．

(iii) $a > 9$ のとき

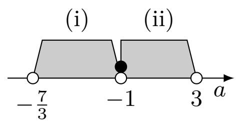
$f(x)$ は $x = 9$ で最小となり，最小値は $f(9) = -17a + 87$

したがって，$-17a + 87 > 0$ であるから，$a < \frac{87}{17}$

これは $a > 9$ を満たさない．



よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{-\frac{7}{3} < a < 3}$

◀


解答 3.3

解答 I3.3.24 ★★★ 問題 p.135

問題文

x についての不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$，$x^2-x-12>0$ を満たす整数 x がちょうど 3 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

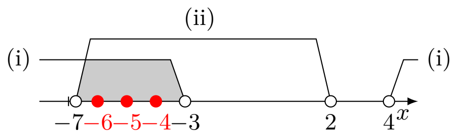
$x^2-x-12>0$ より，$(x+3)(x-4)>0$

したがって，$x<-3,\ 4<x\cdots$(i)

$x^2-(a+2)x+2a<0$ より，$(x-2)(x-a)<0\cdots$(ii)

（ア）$a<2$ のとき，(ii) より，$a<x<2$

これと (i) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 3 個となるのは，右の図のようなときである．



したがって，$-7\leqq a<-6$

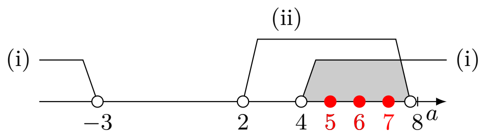
◀ 等号を含むか否かに注意すること．

（イ）$a=2$ のとき，(ii) は解なしで不適である．

◀ $a=2$ のとき，不等式は $(x-2)^2<0$ となり，これを満たす実数 x は存在しない．

（ウ）$a>2$ のとき，(ii) より，$2<x<a$

これと (i) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 3 個となるのは，右の図のようなときである．



したがって，$7<a\leqq 8$

よって，（ア）〜（ウ）より，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{-7\leqq a<-6,\ 7<a\leqq 8}$

解答 I3.3.25 ★★★ 問題 p.136

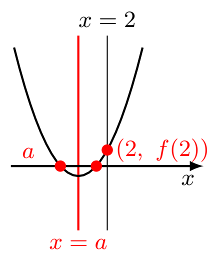
問題文

2 次方程式 $x^2-2ax-a+2=0$ の異なる 2 つの実数解が，ともに 2 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

$y=f(x)=x^2-2ax-a+2$ とし，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とする．

$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$である．

◀ 軸は $x=-\frac{b}{2a}$



$f(x)=0$ の異なる 2 つの実数解が，ともに 2 より小さくなるのは，$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．

したがって，求める条件は，(i) $D>0$，(ii) 軸が $x<2$ の範囲にある，(iii) $f(2)>0$ である．

◀ 判別式，軸，$f(2)$（端点）に注目する．

(i) $\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(-a+2)=a^2+a-2=(a+2)(a-1)$ であり，$D>0$ であるから，$(a+2)(a-1)>0$

◀ 判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 より小さくなる」という条件を用いても同じ結果が得られる．

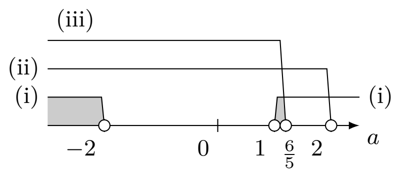
したがって，$a<-2,\ 1<a$

(ii) 軸は直線 $x=a$ であるから，$a<2$

(iii) $f(2)=2^2-2a\cdot 2-a+2=-5a+6$ であり，$f(2)>0$ より，$a<\frac{6}{5}$

よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{a<-2,\quad 1<a<\frac{6}{5}}$$



解答 I3.3.26 ★★★ 問題 p.137

問題文

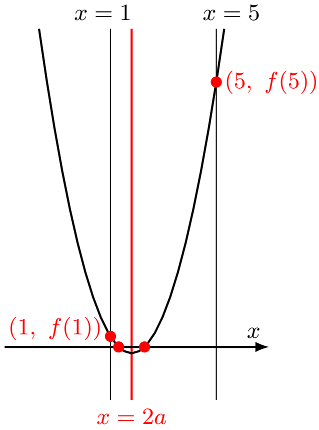
2 次方程式 $x^2-4ax+3=0$ が，$1<x<5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$y=f(x)=x^2-4ax+3$ とし,2 次方程式 $x^2-4ax+3=0$ の判別式を D とする．

$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は $x=2a$ である．

◀ 軸は $x=-\frac{b}{2a}$

$f(x)=0$ が $1<x<5$ に異なる 2 つの実数解をもつのは，$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．



したがって，求める条件は，(i) $D>0$，(ii) 軸が $1<x<5$ の間にある，(iii) $f(1)>0$，$f(5)>0$ である．

◀ 判別式，軸，$f(1)$，$f(5)$（端点）に注目する．

(i) $\frac{D}{4}=(-2a)^2-1\cdot 3=4a^2-3$ であり，$D>0$ であるから，

$$4a^2-3>0$$

したがって，$a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<a$

◀ 判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 より小さくなる」という条件を用いても同じ結果が得られる．

◀ $(a+\frac{\sqrt{3}}{2})(a-\frac{\sqrt{3}}{2})>0$ より，$a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<a$

(ii) 軸は直線 $x=2a$ であるから，$1<2a<5$ より，$\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

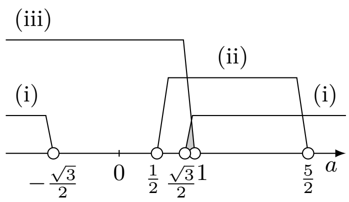
(iii) $f(1)=1^2-4a\cdot 1+3=-4a+4$，$f(5)=5^2-4a\cdot 5+3=-20a+28$ であり，

$f(1)>0$ かつ $f(5)>0$ より，$4-4a>0$，$-20a+28>0$

したがって，$a<1$

よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1}$$



解答 I3.3.27 ★★ 問題 p.138

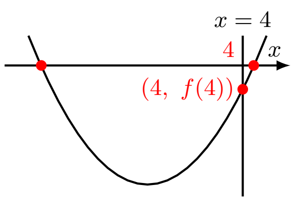
問題文

2 次方程式 $x^2-ax+3a^2-20=0$ の異なる 2 つの実数解のうち，1 つは 4 より大きく，他の 1 つは 4 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

$y=f(x)=x^2-ax+3a^2-20$ とする．

$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線である．

$f(x)=0$ が 異なる 2 つの実数解をもち，1 つは 4 より大きく，他の 1 つは 4 より小さくなるのは，$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．



したがって，求める条件は，$f(4)<0$ である．

$f(4)=4^2-a\cdot 4+3a^2-20=3a^2-4a-4=(3a+2)(a-2)$ より，

◀ たすき掛けを用いる．

3	2	→	2
1	-2	→	-6
			-4

$$(3a+2)(a-2)<0$$

よって，$\boldsymbol{-\frac{2}{3}<a<2}$

解答 I3.3.28 ★★★ 問題 p.139

問題文

2 次方程式 $ax^2-(a+1)x-2=0$ が，$-1<x<1$ の範囲に 1 つの解があり，$3<x<5$ の範囲に他の解があるような定数 a の値の範囲を定めよ．

$f(x)=ax^2-(a+1)x-2$ とする．

与えられた方程式は 2 次方程式であるから，$a\neq 0$

求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが $-1<x<1$，$3<x<5$ の範囲でそれぞれ x 軸と 1 点で交わることである．

すなわち，$f(-1)\cdot f(1)<0$ かつ $f(3)\cdot f(5)<0$

◀ グラフの凹凸に関係なく，$f(-1)\cdot f(1)<0$ かつ $f(3)\cdot f(5)<0$ が求める条件である．$a>0$，$a<0$ のときで場合分けをする必要はないので注意すること．

ここで，$f(-1)=2a-1$，$f(1)=-3$，$f(3)=6a-5$，$f(5)=20a-7$

$f(-1)\cdot f(1)<0$ より，$(2a-1)\cdot(-3)<0$

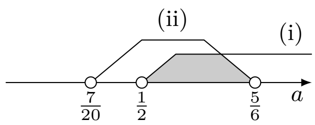
したがって，$a>\frac{1}{2}\cdots$(i)

$f(3)\cdot f(5)<0$ より，$(6a-5)(20a-7)<0$

したがって，$\frac{7}{20}<a<\frac{5}{6}\cdots$(ii)

よって，(i)，(ii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}<a<\frac{5}{6}}$$



これは，$a\neq 0$ を満たす．

解答 I3.3.29 ★★★★ 問題 p.140

問題文

2 次方程式 $x^2-2ax+(a+2)=0$ が，$1<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$f(x)=x^2-2ax+(a+2)$ とする．

(i) すべての解が $1<x<4$ の範囲にあるとき

$y=f(x)$ のグラフが $1<x<4$ の範囲で x 軸と共有点をもつことから，求める条件は，次の（ア）〜（ウ）である．

（ア）x 軸と共有点をもつから，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(a+2)=a^2-a-2=(a-2)(a+1)$$

$D\geqq 0$ であるから，$(a-2)(a+1)\geqq 0$

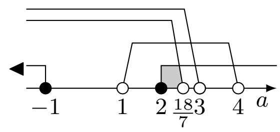
したがって，$a\leqq -1$，$2\leqq a$

◀ 少なくとも 1 つ実数解をもつから，$y=f(x)$ のグラフが x 軸に接する場合，すなわち，$D=0$ の場合も含めて，$D\geqq 0$ となる．

（イ）$y=f(x)$ の軸は直線 $x=a$ であり，軸が $1<x<4$ の間にあるから，$1<a<4$

（ウ）$f(1)=-a+3$，$f(4)=-7a+18$ であるから，$f(1)>0$ より，$a<3$，$f(4)>0$ より，$a<\frac{18}{7}$

したがって，$a<\frac{18}{7}$



したがって，（ア）〜（ウ）より，$2\leqq a<\frac{18}{7}$

(ii) 1 つの解が $1<x<4$，他の解が $x<1$，$4<x$ の範囲にあるとき

$f(1)\cdot f(4)<0$ が成り立つ．

したがって，$(-a+3)(-7a+18)<0$，すなわち，$(a-3)(7a-18)<0$ である．

ゆえに，$\frac{18}{7}<a<3$

◀ $f(1)>0$ かつ $f(4)<0$ または $f(1)<0$ かつ $f(4)>0$，すなわち，$f(1)\cdot f(4)<0$（$f(1)$ と $f(4)$ が異符号）

(iii) 1 つの解が $x=1$ のとき

$-a+3=0$ より，$a=3$ である．このとき，2 次方程式は，$x^2-6x+5=0$ となる．

したがって，$(x-1)(x-5)=0$ より，$x=1$，5 である．

ゆえに，$1<x<4$ の範囲に解はない．

(iv) 1 つの解が $x=4$ のとき

$-7a+18=0$ より，$a=\frac{18}{7}$ である．このとき，2 次方程式は，$x^2-\frac{36}{7}x+\frac{32}{7}=0$ となる．

したがって，$(7x-8)(x-4)=0$ より，$x=\frac{8}{7}$，4

よって，(i)〜(iv) より，求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{2\leqq a<3}$

解答 3.3

解答 I3.3.30 ★★★ 問題 p.141

問題文

2 つの 2 次方程式 $x^2-6x+a^2=0$，$x^2-2(a-1)x-a^2-10a+1=0$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．
(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつ．
(2) 2 つの方程式の少なくとも一方が実数解をもつ．
(3) 2 つの方程式のどちらか一方のみが実数解をもつ．

2 次方程式 $x^2-6x+a^2=0$ の判別式を D_1 とすると，

$$\frac{D_1}{4}=(-3)^2-1\cdot a^2=9-a^2=-(a+3)(a-3)$$

◀ 2 つの判別式を考えるので，D_1，D_2 とする．

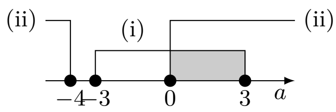
2 次方程式 $x^2-2(a-1)x-a^2-10a+1=0$ の判別式を D_2 とすると，

$$\frac{D_2}{4}=\{-(a-1)\}^2-1\cdot\left(-a^2-10a+1\right)=2a^2+8a=2a(a+4)$$

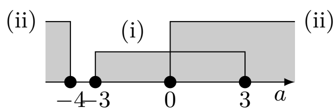
(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$ のときである．

◀ 実数解をもつ条件は，$D>0$，$D=0$ を合わせた，$D\geqq 0$ である．

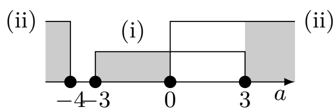
$D_1\geqq 0$ であるから，$-(a+3)(a-3)\geqq 0$
したがって，$-3\leqq a\leqq 3\cdots$(i)
$D_2\geqq 0$ であるから，$2a(a+4)\geqq 0$
ゆえに，$a\leqq -4$，$0\leqq a\cdots$(ii)
よって,(i) と (ii) の共通範囲を求めると,$\boldsymbol{0\leqq a\leqq 3}$



(2) 2 つの方程式の少なくとも一方が実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$ または $D_2\geqq 0$ のときである．
(i)，(ii) より，$\boldsymbol{a\leqq -4}$，$\boldsymbol{-3\leqq a}$



(3) 2 つの方程式のどちらか一方のみが実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$，$D_2\geqq 0$ の一方のみが成り立つことである．
(i) と (ii) の一方のみが成り立つ a の値の範囲を求めると，$\boldsymbol{a\leqq -4}$，$\boldsymbol{-3\leqq a<0}$，$\boldsymbol{3<a}$



解答 3.3

One math

解答 I3.3.31 ★★★ 問題 p.142

問題文

実数 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$x+y^2$ の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ．

$x^2+y^2=1$ より，$y^2=1-x^2 \cdots$ (i)

x，y は実数であるから $y^2 \geqq 0$，すなわち，$1-x^2 \geqq 0$

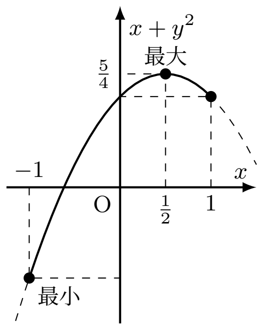
◀ y が実数のとき，$y^2 \geqq 0$ であることを用いて，x の値の範囲を求める．

したがって，$x^2-1 \leqq 0$ であるから，$(x+1)(x-1) \leqq 0$

ゆえに，$-1 \leqq x \leqq 1$

$x+y^2$ に (i) を代入すると，

$$\begin{aligned} x+y^2 &= x+\left(1-x^2\right) \\ &= -x^2+x+1 \\ &= -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \end{aligned}$$



グラフは右の図のようになる．

したがって，$x=\frac{1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$，$x=-1$ のとき，最小値 -1

$x=\frac{1}{2}$ のとき，$y^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ より，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=-1$ のとき，$y^2=1-(-1)^2=0$ より，$y=0$

よって，$x+y^2$ は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \textbf{のとき，最大値}\ \boldsymbol{\frac{5}{4}}$$
$$\boldsymbol{x=-1,\ y=0}\ \textbf{のとき，最小値}\ \boldsymbol{-1}$$

解答 I3.3.32 ★★★ 問題 p.143

問題文

次の関数の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ．

(1) x，y の関数 $P = x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 5$ の最小値を求めよ．

(2) x，y の関数 $Q = x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 4y + 7$ の最小値を求めよ．

(1)

$$\begin{aligned} P &= x^2 - 4x + 3y^2 + 2y + 5 \\ &= (x-2)^2 - 2^2 + 3y^2 + 2y + 5 \\ &= (x-2)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \\ &= (x-2)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

◀ さらに平方完成する．

x，y は実数であるから，$(x-2)^2 \geqq 0$，$\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 \geqq 0$

◀ a が実数のとき，$a^2 \geqq 0$ であり，等号が成り立つのは，$a = 0$ のときであることを用いる．

したがって，P は $x - 2 = 0$，$y + \frac{1}{3} = 0$ のとき最小となる．

よって，$\boldsymbol{x = 2}$**，**$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(2)

$$\begin{aligned} Q &= x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 4y + 7 \\ &= x^2 + 2(2y-2)x + 5y^2 - 4y + 7 \\ &= \{x + (2y-2)\}^2 - (2y-2)^2 + 5y^2 - 4y + 7 \\ &= (x + 2y - 2)^2 + y^2 + 4y + 3 \\ &= (x + 2y - 2)^2 + (y+2)^2 - 2^2 + 3 \\ &= (x + 2y - 2)^2 + (y+2)^2 - 1 \end{aligned}$$

x，y は実数であるから，$(x + 2y - 2)^2 \geqq 0$，$(y+2)^2 \geqq 0$

◀ $(\text{実数})^2 \geqq 0$

したがって，Q は $x + 2y - 2 = 0$，$y + 2 = 0$ のとき最小となる．

$x + 2y - 2 = 0$，$y + 2 = 0$ を解くと，$x = 6$，$y = -2$

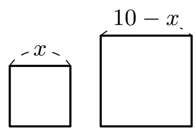
◀ x，y についての連立方程式を解く．

よって，$\boldsymbol{x = 6}$**，**$\boldsymbol{y = -2}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-1}$

解答 I3.3.33 ★★ 問題 p.144

問題文

長さ 40 cm の針金を 2 つに分け，それぞれを折り曲げて正方形を 2 つ作る．2 つの正方形の面積の和が 52 cm^2 以上になるようにするには，針金をどのように切ればよいか．短い方の針金の長さの範囲を求めよ．



短い方の針金の長さを $4x$ cm とすると，長い方の針金の長さは，

$$40 - 4x = 4(10 - x)\ (\text{cm})$$

◀ 短い方の針金の長さを x cm としてもよいが，1 辺の長さが $\frac{x}{4}$ cm となり，計算に手間が掛かる．

$0 < 4x < 20$ より，$0 < x < 5 \cdots \text{(i)}$

◀ 短い方の針金の長さは，40 cm の半分の 20 cm より小さい．

2 つの正方形の 1 辺の長さは，それぞれ x cm と $10 - x$ cm であるから，

$$x^2 + (10 - x)^2 \geqq 52$$

整理すると，$x^2 - 10x + 24 \geqq 0$

したがって，$(x-6)(x-4) \geqq 0$

ゆえに，$x \leqq 4$，$6 \leqq x \cdots \text{(ii)}$

(i)，(ii) より，$0 < x \leqq 4$

よって，$0 < 4x \leqq 16$ となり，短い方の針金の長さは，**0 cm より長く， 16 cm 以下**であればよい．

解答 I3.3.34 ★★★★ 問題 p.145

問題文

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+3ax+20$，$g(x)=-x^2+7ax-15$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．
(1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$
(2) ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$

$F(x)=f(x)-g(x)$ とすると，

$$F(x)=2x^2-4ax+35=2(x-a)^2-2a^2+35$$

(1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つ条件は，すべての実数 x に対して $F(x)>0$，すなわち，($F(x)$ の最小値) >0 が成り立つことと同じである．

◀ 判別式の符号に注目して，$D<0$ を用いてもよい．

$F(x)$ は $x=a$ で最小値 $-2a^2+35$ をとるから，$-2a^2+35>0$
したがって，$a^2<\frac{35}{2}$
よって，$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{70}}{2}<a<\frac{\sqrt{70}}{2}}$
(2) ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つ条件は，ある実数 x に対して $F(x)<0$ ，すなわち，($F(x)$ の最小値) <0 が成り立つことと同じである．

◀ 判別式の符号に注目して，$D>0$ を用いてもよい．

したがって，$-2a^2+35<0$
ゆえに，$a^2>\frac{35}{2}$
よって，$\boldsymbol{a<-\frac{\sqrt{70}}{2}}$，$\boldsymbol{\frac{\sqrt{70}}{2}<a}$

解答 I3.3.35 ★★★★ 問題 p.146

問題文

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2-4x+5$，$g(x)=-x^2+a-3$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ．
(1) $-1\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$
(2) $-1\leqq x\leqq 3$ を満たすある実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

$$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$$

(1) $-1\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ条件は，$-1\leqq x\leqq 3$ において，「($f(x)$ の最大値)< ($g(x)$ の最小値)」が成り立つときである．
$-1\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)$ の最大値は，$f(-1)=10$，$g(x)$ の最小値は，$g(3)=a-12$

◀ $f(-1)=(-1-2)^2+1=10$，$g(3)=-3^2+a-3=a-12$

したがって，$a-12>10$
よって，$\boldsymbol{a>22}$
(2) $-1\leqq x\leqq 3$ を満たすある実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ条件は，$-1\leqq x\leqq 3$ において，「($f(x)$ の最小値)< ($g(x)$ の最大値)」が成り立つときである．
$-1\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)$ の最小値は，$f(2)=1$，$g(x)$ の最大値は，$g(0)=a-3$

◀ $f(2)=(2-2)^2+1=1$，$g(0)=0^2+a-3=a-3$

したがって，$a-3>1$
よって，$\boldsymbol{a>4}$

解答 I3.3.36 ★★★ 問題 p.147

問題文

方程式 $|x^2-4x+3|=x+a$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，a は定数とする．

$|x^2-4x+3|=x+a$ より，$f(x)=\left|x^2-4x+3\right|-x$ とする．

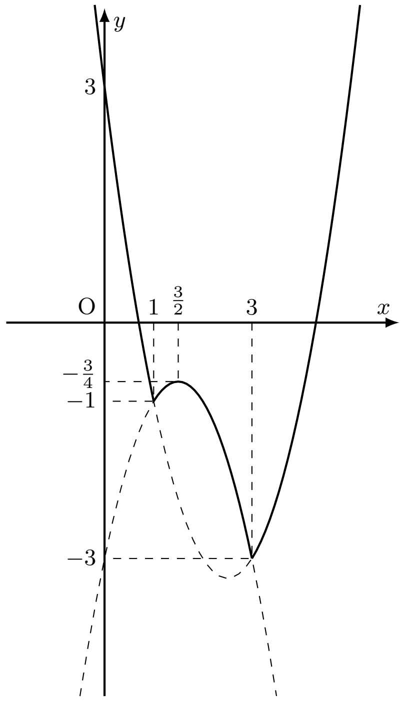
(i) $x^2-4x+3 \geqq 0$ のとき，すなわち，$(x-1)(x-3) \geqq 0$ より，$x \leqq 1$ または $x \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-4x+3-x \\ &= x^2-5x+3 \\ &= \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4} \end{aligned}$$

(ii) $x^2-4x+3<0$ のとき，すなわち，$1<x<3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(x^2-4x+3\right)-x \\ &= -x^2+3x-3 \\ &= -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって，(i)，(ii) より，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．



求める実数解の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数と一致するので，右の図より，

$a<-3$ のとき，**0 個**

$a=-3$ のとき，**1 個**

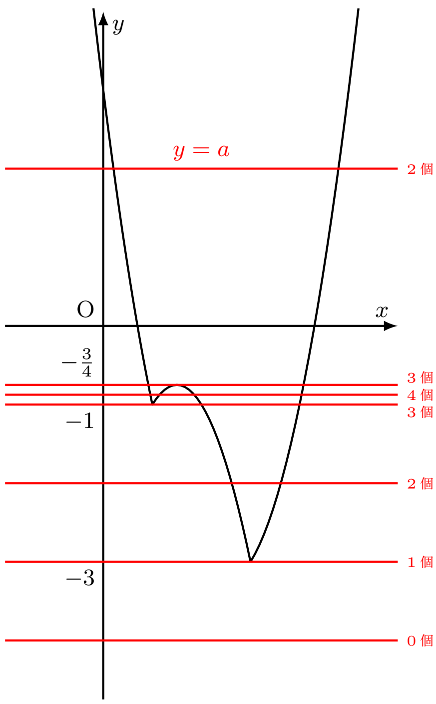
$-3<a<-1$ のとき，**2 個**

$a=-1$ のとき，**3 個**

$-1<a<-\frac{3}{4}$ のとき，**4 個**

$a=-\frac{3}{4}$ のとき，**3 個**

$a>-\frac{3}{4}$ のとき，**2 個**



◀ グラフをかき，$y=a$ を動かすことをイメージして，共有点の個数を調べる．

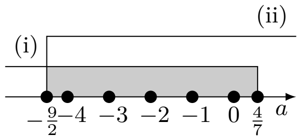
解答 3.3

解答（節末）I3.3.1 ★★ 節末 p.148

問題文
2 次方程式 $x^2+4x+7a=0$，$2x^2-6x-a=0$ がともに実数解をもつ整数 a の個数を求めよ．

2 次方程式 $x^2+4x+7a=0$ の判別式を D_1 とすると，$\frac{D_1}{4}=2^2-1\cdot 7a=4-7a$
2 次方程式が実数解をもつから，$D_1 \geqq 0$
したがって，$4-7a \geqq 0$
ゆえに，$a \leqq \frac{4}{7}\cdots$(i)
2 次方程式 $2x^2-6x-a=0$ の判別式を D_2 とすると，$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-2\cdot(-a)=9+2a$
2 次方程式が実数解をもつから，$D_2 \geqq 0$
したがって，$9+2a \geqq 0$
ゆえに，$a \geqq -\frac{9}{2}\cdots$(ii)
したがって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，

$$-\frac{9}{2} \leqq a \leqq \frac{4}{7}$$



この不等式を満たす整数 a は，$a=-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0$
よって，求める整数 a の個数は，**5 個**

◀ 2 つの判別式を考えるので，D_1，D_2 とする．

◀ 実数解をもつ条件は，$D_1>0$，$D=0$ を合わせた，$D \geqq 0$ である．

解答（節末）I3.3.2 ★★★ 節末 p.148

問題文
実数 x，y が $x^2+y^2=13$ のもとで，$x-ay$ の最大値が 7 となるとき，定数 a の値を求めよ．

$x-ay=k$ とおくと，$x=k+ay$
これを $x^2+y^2=13$ に代入すると，$(k+ay)^2+y^2=13$
したがって，$(a^2+1)y^2+2aky+k^2-13=0$
y は実数であるから，この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D \geqq 0$

$$\frac{D}{4}=(ak)^2-(a^2+1)(k^2-13)=-k^2+13(a^2+1)$$

これより，$-k^2+13(a^2+1) \geqq 0$
ゆえに，$k^2 \leqq 13(a^2+1)$
したがって，$-\sqrt{13(a^2+1)} \leqq k \leqq \sqrt{13(a^2+1)}$
k の最大値が 7 であるから，$\sqrt{13(a^2+1)}=7$
よって，$a^2=\frac{36}{13}$
これを解いて，$a=\pm\boldsymbol{\frac{6}{\sqrt{13}}}$

◀ $(\text{実数})^2 \geqq 0$ より，

$$a^2+1>0$$

◀ $\sqrt{13(a^2+1)}=7$ の両辺を 2 乗して，$13(a^2+1)=49$
これを整理すると，$a^2=\frac{36}{13}$ が得られる．

解答
3.3

解答（節末）I3.3.3 ★★★ 節末 p.148

問題文

(1) 不等式 $3x^4 - 7x^2 + 2 > 0$ を解け．

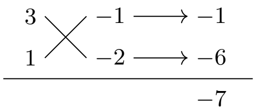
(2) 不等式 $\left(x^2 - 3x + 2\right)^2 - 4\left(x^2 - 3x + 2\right) + 3 \leqq 0$ を解け．

(1) $x^2 = t$ とおくと，$t \geqq 0$

◀ $(\text{実数})^2 \geqq 0$

与えられた不等式は，$3t^2 - 7t + 2 > 0$

◀ たすき掛けを用いる．



したがって，$(3t-1)(t-2) > 0$

これを解くと，$0 \leqq t < \frac{1}{3}$，$2 < t$

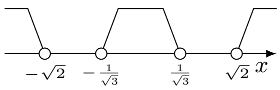
ゆえに，$0 \leqq x^2 < \frac{1}{3}$，$2 < x^2$

ここで，$x^2 \geqq 0$ は常に成り立つので，

$x^2 < \frac{1}{3}$ より，$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2 < x^2$ より，$x < -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} < x$

よって，$\boldsymbol{x < -\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}}$，$\boldsymbol{\sqrt{2} < x}$



◀ $0 \leqq x^2 < \frac{1}{3}$ または $2 < x^2$ であり，解を合わせた範囲が求める解となるので注意すること．

(2) $x^2 - 3x + 2 = t$ とおくと，$t = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ である．

t のとりうる値の範囲は，$t \geqq -\frac{1}{4}$

◀ t の変域を考える必要があるので注意すること．

不等式を t で表すと，$t^2 - 4t + 3 \leqq 0$

したがって，$(t-1)(t-3) \leqq 0$ より，$1 \leqq t \leqq 3$

これは $t \geqq -\frac{1}{4}$ を満たす．

ゆえに，$1 \leqq x^2 - 3x + 2 \leqq 3$

$1 \leqq x^2 - 3x + 2$ より，$x^2 - 3x + 1 \geqq 0$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ を解くと，$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

◀ 解の公式を用いる．

このとき，$x^2 - 3x + 1 \geqq 0$ の解は，

$$x \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x \cdots \text{(i)}$$

$x^2 - 3x + 2 \leqq 3$ より，$x^2 - 3x - 1 \leqq 0$

$x^2 - 3x - 1 = 0$ を解くと，$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

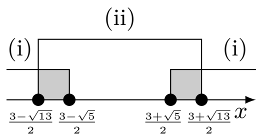
◀ 解の公式を用いる．

このとき，$x^2 - 3x - 1 \leqq 0$ の解は，

$$\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \frac{3+\sqrt{13}}{2} \cdots \text{(ii)}$$

よって，(i)，(ii) の共通範囲を求めると，

$$\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$



解答
3.3

One math

解答（節末）I3.3.4 ★★★★ 節末 p.148

問題文

a を定数とする．x についての方程式 $|(x-3)(x-5)| = ax - 2a + \frac{1}{2}$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

$$y = |(x-3)(x-5)| \cdots \text{(i)}, \quad y = ax - 2a + \frac{1}{2} \cdots \text{(ii)}$$

とする．

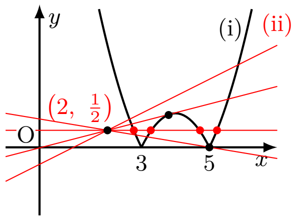
$(x-3)(x-5) \geqq 0$ の解は，$x \leqq 3,\ 5 \leqq x$

$(x-3)(x-5) < 0$ の解は，$3 < x < 5$

したがって，(i) は，

$x \leqq 3,\ 5 \leqq x$ のとき，$y = (x-3)(x-5) = (x-4)^2 - 1$

$3 < x < 5$ のとき，$y = -(x-3)(x-5) = -(x-4)^2 + 1$



よって，(i) のグラフは右の図のようになる．

(ii) は，$y = a(x-2) + \frac{1}{2}$ と変形できるから，(ii) のグラフは定点 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ を通る傾き a の直線である．

（ア）(ii) のグラフが (i) のグラフの $3 \leqq x \leqq 5$ の部分と接するとき

このとき,2 次方程式 $-(x-3)(x-5) = ax-2a+\frac{1}{2}$,すなわち,$x^2+(a-8)x-2a+\frac{31}{2} = 0$ の判別式を D とすると，

$$D = (a-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-2a + \frac{31}{2}\right) = a^2 - 8a + 2$$

$D = 0$ より，$a^2 - 8a + 2 = 0$

これを解いて，$a = 4 \pm \sqrt{14}$

このとき，$3 \leqq x \leqq 5$ の部分と接するのは，$a = 4 - \sqrt{14}$ のときである．

（イ）(ii) のグラフが点 $(5,\ 0)$ を通るとき

$0 = 5a - 2a + \frac{1}{2}$ より，$a = -\frac{1}{6}$

よって，（ア），（イ）より，方程式 $|(x-3)(x-5)| = ax - 2a + \frac{1}{2}$ が相異なる 4 つの実数解をもつとき，a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-\frac{1}{6} < a < 4 - \sqrt{14}}$$

◀ $y = |(x-3)(x-5)|$ のグラフと直線 $y = ax - 2a + \frac{1}{2}$ の共有点について調べる．a を含む式を直線の形に分離して，2 つのグラフが 4 つの共有点をもつ条件を考える．

◀ $y = (x-3)(x-5)$ のグラフで，x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返したものである．

◀ 2 つのグラフが接するとき，共有点（実数解）の個数は 3 個である．

◀ 2 つのグラフが接するとき，共有点（実数解）の個数は 3 個である．

解答 3.3

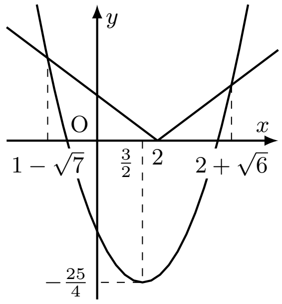
One math

解答（節末）I3.3.5 ★★★　節末 p.148

問題文

2 次不等式 $x^2-3x-4<|x-2|$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x \geqq 2)\\ -x+2 & (x<2)\end{cases}$$



$x^2-3x-4=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}$ であるから，$y=x^2-3x-4$ のグラフと $y=|x-2|$ のグラフは，右の図のようになる．

2 つのグラフの交点の x 座標は，

(i) $x \geqq 2$ のとき

$x^2-3x-4=x-2$ より，$x^2-4x-2=0$

したがって，$x=2\pm\sqrt{6}$

ゆえに，$x \geqq 2$ より，$x=2+\sqrt{6}$

(ii) $x<2$ のとき

$x^2-3x-4=-(x-2)$ より，$x^2-2x-6=0$

したがって，$x=1\pm\sqrt{7}$

ゆえに，$x<2$ より，$x=1-\sqrt{7}$

よって，(i)，(ii) とグラフより，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{1-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{6}}$

◀ $y=|x-2|$ のグラフが $y=x^2-3x-4$ のグラフより上側にある x の範囲である．

【別解】

(i) $x \geqq 2$ のとき

$x^2-3x-4<x-2$ より，$x^2-4x-2<0$

ゆえに，$2-\sqrt{6}<x<2+\sqrt{6}$

これと $x \geqq 2$ より，$2 \leqq x<2+\sqrt{6}$

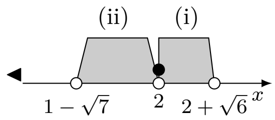
(ii) $x<2$ のとき

$x^2-3x-4<-(x-2)$ より，$x^2-2x-6<0$

ゆえに，$1-\sqrt{7}<x<1+\sqrt{7}$

これと $x<2$ より，$1-\sqrt{7}<x<2$

よって，(i)，(ii) より，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{1-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{6}}$

◀


章末問題 3（解答）

解答（章末）I3.1 ★★★ 章末 p.149

問題文

実数 x, y が $x^2-xy+y^2+y-5=0$ を満たすとき，y の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である．

y が k という値をとるとすると，$x^2-kx+k^2+k-5=0\cdots$(i) を満たす実数 x が存在する．

したがって，この条件は，(i) の判別式を D とすると，

$$D=(-k)^2-4\left(k^2+k-5\right)$$

$D \geqq 0$ であるから，$k^2-4k^2-4k+20 \geqq 0$

ゆえに，$-3k^2-4k+20 \geqq 0$ より，$(3k+10)(k-2) \leqq 0$

したがって，$-\frac{10}{3} \leqq k \leqq 2$

よって，y の**最大値は 2 ，最小値は $-\frac{10}{3}$**

◀ y が k (実数) という値をとりうる．$\iff$ $x^2-kx+k^2+k-5=0$ を満たす実数 x が存在する．$\iff x^2-kx+k^2+k-5=0$ の判別式 $D \geqq 0$

解答（章末）I3.2 ★★ 章末 p.149

問題文

2 つの放物線 $y=x^2+4$，$y=-x^2+4x$ の両方に接する直線の方程式を求めよ．

求める直線の方程式を $y=ax+b\cdots$(i) とおく．

直線 (i) と放物線 $y=x^2+4$ が接するから，$x^2+4=ax+b$

すなわち，$x^2-ax+(4-b)=0$

この 2 次方程式の判別式を D_1 とすると，$D_1=(-a)^2-4\cdot1\cdot(4-b)$

したがって，$D_1=0$ より，$a^2+4b-16=0\cdots$(ii)

直線 (i) と放物線 $y=-x^2+4x$ が接するから，$-x^2+4x=ax+b$

すなわち，$x^2+(a-4)x+b=0$

この 2 次方程式の判別式を D_2 とすると，$D_2=(a-4)^2-4\cdot1\cdot b$

したがって，$D_2=0$ より，$a^2-8a+16-4b=0$

ゆえに，$4b=a^2-8a+16\cdots$(iii)

(iii) を (ii) に代入して整理すると，

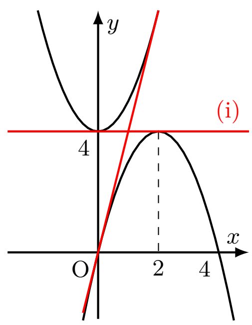
$$2a^2-8a=0$$

したがって，$2a(a-4)=0$ より，$a=0$，4

$a=0$ のとき，(ii) より，$b=4$

$a=4$ のとき，(ii) より，$b=0$

よって，求める直線の方程式は，$\boldsymbol{y=4}$，$\boldsymbol{y=4x}$



◀ 2 つの放物線の両方に接する直線は，y 軸に平行ではない．

解答 3.4

One math

解答（章末）I3.3 ★★★ 章末 p.149

問題文

a，b は自然数で，2 次方程式 $x^2+2ax+4a-4b=0$ が重解 α をもつとき，a，b，α の値を求めよ．

2 次方程式 $x^2+2ax+4a-4b=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(4a-4b)=a^2-4a+4b$$

2 次方程式が重解をもつから，$D=0$
整理すると，$4b=a(4-a)\cdots(\mathrm{i})$
ここで，a，b は自然数より，$4b>0$ かつ $a>0$
したがって，$4-a>0$ より，$0<a<4$
a は自然数であるから，$a=1$，2，3
これらのうち，(i) より，b が自然数となるのは，$a=2$ のときである．
ゆえに，$b=1$
このとき，$x^2+2ax+4a-4b=0$ の重解は，$x=-\frac{2a}{2}=-a$
したがって，$a=2$ より，重解は -2 となる．
よって，$a=\mathbf{2}$，$b=\mathbf{1}$，$\alpha=\mathbf{-2}$

◀ $a=1$ のとき，$4b=3$ より，$b=\frac{3}{4}$ となり，$a=3$ のとき，$4b=3$ より，$b=\frac{3}{4}$ となり不適である．

解答（章末）I3.4 ★★★ 章末 p.149

問題文

a，b を異なる実数とするとき，x に関する方程式 $(x-3a)(x-3b)-(3x-4a-5b)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつことを証明せよ．

与えられた方程式を整理すると，

$$x^2-3(a+b+1)x+9ab+4a+5b=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=\{3(a+b+1)\}^2-4\cdot1\cdot\{9ab+4a+5b\}=9(a-b)^2+2(a-b)+9$$

ここで，$a-b=c$ とおくと，

$$D=9c^2+2c+9=\left(3c+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{80}{9}$$

よって，この方程式は $D>0$ であるから，相異なる 2 つの実数解をもつ． ■

【別解】 $f(x)=(x-3a)(x-3b)-(3x-4a-5b)$ とする．方程式が異なる 2 つの実数解をもつことを示すには，$y=f(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わることを示せばよい．

$$f(3a)=-5(a-b),\quad f(3b)=4(a-b)$$

より，$a\neq b$ であるから，$f(3a)$ と $f(3b)$ は異符号であり，一方は負である．
よって，$y=f(x)$ は x 軸と異なる 2 点で交わる． ■

◀ 下に凸の放物線は，その関数が負の値をとるとき，x 軸と異なる 2 点で交わることを利用する．

解答（章末）I3.5 ★★★ 章末 p.149

問題文

方程式 $4x^2+7xy+4y^2=15$ を満たす x，y に対して，$u=x+y$，$v=xy$ とおく．
(1) $u^2-4v \geqq 0$ を示せ．
(2) u，v の間に成り立つ等式を求めよ．
(3) $k=u+v$ がとる値の範囲を求めよ

(1)

$$u^2-4v=(x+y)^2-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \geqq 0$$

よって，$u^2-4v \geqq 0$ が成り立つ．

◀ (実数)$^2 \geqq 0$

(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ であるから，与えられた方程式は，

$$4\left\{(x+y)^2-2xy\right\}+7xy=15$$

◀ 与えられた方程式は，x，y の対称式であるので，$x+y$，xy で表す．

したがって，$4(x+y)^2-xy=15$
よって，$\boldsymbol{4u^2-v=15}$
(3) $u^2-4v \geqq 0 \cdots$(i)，$4u^2-v=15 \cdots$(ii) とする．
(ii) より，$v=4u^2-15$
これを (i) に代入すると，$u^2-4(4u^2-15) \geqq 0$
したがって，$u^2-4 \leqq 0$
ゆえに，$-2 \leqq u \leqq 2 \cdots$(iii)
k を u の式で表すと，(ii) より，

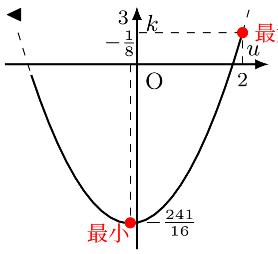
$$k=u+v=u+4u^2-15=4\left(u+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{241}{16}$$

◀ 平方完成する．

(iii) より，k は $u=2$ で最大値 3，$u=-\frac{1}{8}$ で最小値 $-\frac{241}{16}$
よって，

$$-\frac{\mathbf{241}}{\mathbf{16}} \leqq \boldsymbol{k} \leqq \mathbf{3}$$

◀



解答 3.4

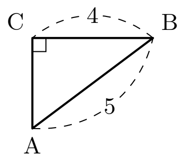
図形と計量（解答）

三角比の定義・性質（解答）

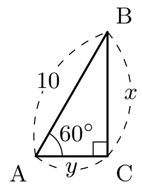
解答 I4.1.1 ★ 問題 p.154

問題文

(1) 右の図のような三角形において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．



(2) 右の図のような三角形において，x，y の値を求めよ．



(1) 三平方の定理より，$\mathrm{AC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

よって，$\sin A = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$，$\cos A = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$，$\tan A = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(2) $\sin 60^\circ = \frac{x}{10}$ であるから，$x = 10\sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{5\sqrt{3}}$

$\cos 60^\circ = \frac{y}{10}$ であるから，$y = 10\cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{5}$

◀ 三平方の定理
$a^2 + b^2 = c^2$

◀ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

◀ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

解答 I4.1.2 ★★ 問題 p.155

問題文

水平な道路をまっすぐに歩いている人が，あるビルの頂点 P を見上げたところ，A 地点でその仰角が 30° であった．その後，A 地点から 30m 進んで B 地点に到達したとき，再び仰角を測ると 45° であった．この人の目の高さが地面から 1.5m であるとき，このビルの高さを求めよ．

右の図のように，A′，B′，C，C′，P とおき，$\mathrm{BC} = \mathrm{B'C'} = x$ m，$\mathrm{C'P} = y$ m とする．

直角三角形 A′C′P において，

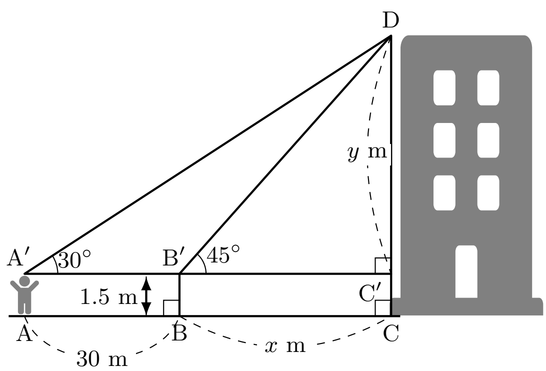
$$y = (30 + x)\tan 30^\circ$$

したがって，$y = \frac{30+x}{\sqrt{3}} \cdots$ (i)

直角三角形 B′C′P において，

$$y = x\tan 45^\circ$$

したがって，$y = x \cdots$ (ii)



(i)，(ii) より，$\frac{30+x}{\sqrt{3}} = x$

$\left(\sqrt{3} - 1\right)x = 30$ より，$x = \frac{30}{\sqrt{3}-1} = 15 + 15\sqrt{3}$

これと (ii) より，$y = 15 + 15\sqrt{3}$

ゆえに，$\mathrm{PC} = y + 1.5 = 16.5 + 15\sqrt{3}$

よって，ビルの高さは，$\boldsymbol{16.5 + 15\sqrt{3}}$ **(m)**

◀ $\tan 30^\circ = \frac{y}{30+x}$

◀ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

◀ $\tan 45^\circ = \frac{y}{x}$

◀ $\tan 45^\circ = 1$

◀ $\frac{30}{\sqrt{3}-1}$
$= \frac{30(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$= 15(\sqrt{3}+1)$

解答 4.1

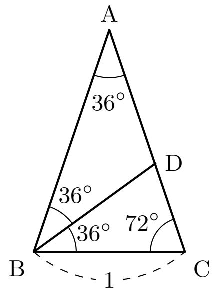
One math

解答 I4.1.3 ★★★ 問題 p.156

問題文

二等辺三角形 ABC において AB = AC，BC = 1，∠A = 36° とし，∠B の二等分線と辺 AC の交点を D とするとき，次の値を求めよ．

(1) 辺 BD の長さ　(2) 辺 AB の長さ　(3) $\sin 18^\circ$



(1) △ABC は二等辺三角形であり，∠A = 36° であるから，

$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

BD は ∠B の二等分線であるから，

$$\angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$$

また，∠BCD = ∠BDC = 72° であるから，△BCD は BC = BD の二等辺三角形である．

◀ ∠BDC = ∠ABD + ∠CBD

よって，BD = BC = **1**

(2) △DAB は DA = DB を満たす二等辺三角形であるから，AD = 1

◀ ∠ABD = ∠BAD = 36°

AB = x とすると，CD = $x - 1$

△ABC ∽ △BCD であるから，AB : BC = BC : CD，すなわち，$x : 1 = 1 : (x-1)$

したがって，$x(x-1) = 1$

整理すると，$x^2 - x - 1 = 0$

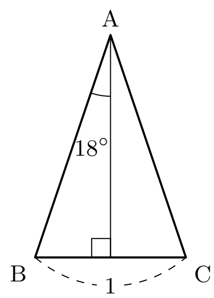
これを解くと，$x > 0$ より，$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，AB = $\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(3)

$$\sin 18^\circ = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

◀



解答 I4.1.4 ★ 問題 p.157

問題文

A は鋭角とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\sin A = \frac{4}{5}$ のとき，$\cos A$ と $\tan A$ の値を求めよ．

(2) $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ．

(1) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より，$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

A は鋭角であるから，$\cos A > 0$

◀ A が鋭角 $(0^\circ < A < 90^\circ)$ のとき，$\sin A > 0$，$\cos A > 0$，$\tan A > 0$ であることに注意すること．

よって，$\cos A = \frac{\sqrt{9}}{5} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$

また，$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(2) $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$ より，$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{18}{16}$

したがって，$\cos^2 A = \frac{16}{18}$

A は鋭角であるから，$\cos A > 0$

◀ $\cos A > 0$ より，$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ は不適である．

よって，$\cos A = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

また，$\sin A = \tan A \cos A = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

◀ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ より，$\sin A = \tan A \cos A$

解答 4.1

One math

解答 I4.1.5 ★★　問題 p.158

問題文

(1) $\sin 55^\circ$，$\cos 125^\circ$ を 45° 以下の三角比で表せ．また，$\sin 35^\circ \cos 125^\circ + \sin 55^\circ \cos 145^\circ$ を簡単にせよ．
(2) △ABC の 3 つの内角 ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，等式 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B+C}{2} = 1$ が成り立つことを証明せよ．

(1)

$$\sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 35^\circ) = \mathbf{\cos 35^\circ} \cdots (\mathrm{i}),$$

◀ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

$$\cos 125^\circ = \cos(180^\circ - 55^\circ) = -\cos 55^\circ = -\cos(90^\circ - 35^\circ) = \mathbf{-\sin 35^\circ} \cdots (\mathrm{ii})$$

◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$，$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\cos 145^\circ = \cos(180^\circ - 35^\circ) = -\cos 35^\circ$ であるから，これと (i)，(ii) より，

◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$$\begin{aligned}
&\sin 35^\circ \cos 125^\circ + \sin 55^\circ \cos 145^\circ \\
&= \sin 35^\circ(-\sin 35^\circ) + \cos 35^\circ(-\cos 35^\circ) \\
&= -\sin^2 35^\circ - \cos^2 35^\circ \\
&= -\left(\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ\right) \\
&= \mathbf{-1}
\end{aligned}$$

◀ すべて 35° の三角比に式変形する．

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $A + B + C = 180^\circ$ であるから，$B + C = 180^\circ - A$
したがって，$\frac{B+C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$
ゆえに，$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B+C}{2} = \tan\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}} = 1$
よって，等式は成り立つ．■

◀ $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$

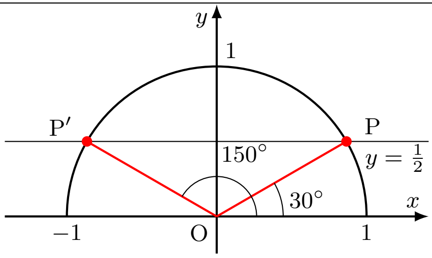
解答 I4.1.6 ★　問題 p.159

問題文

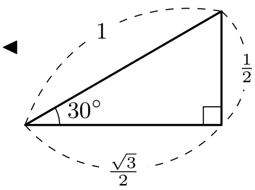
次の方程式を満たす θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$　　(2) $2\cos\theta + 1 = 0$　　(3) $\tan\theta + 1 = 0$

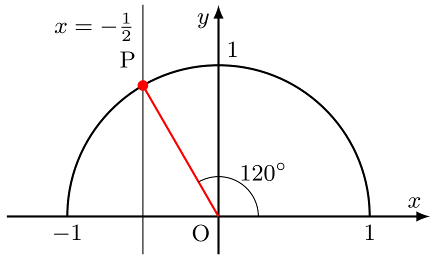
(1) $2\sin\theta - 1 = 0$ より，$\sin\theta = \frac{1}{2}$
半径 1 の半円上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の 2 点 P，P$'$ である．
よって，$\theta =$ **30°，150°**



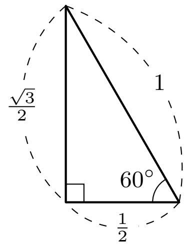
◀



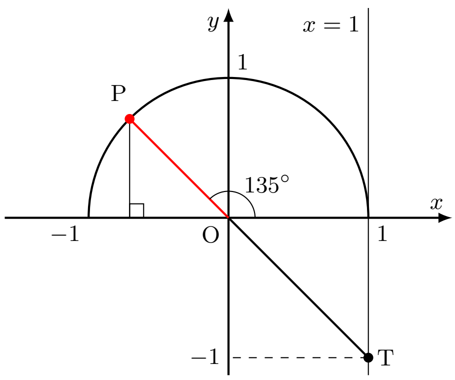
(2) $2\cos\theta + 1 = 0$ より，$\cos\theta = -\frac{1}{2}$
半径 1 の半円上で，x 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の点 P である．
よって，$\theta =$ **120°**



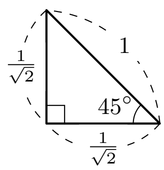
◀



(3) $\tan\theta + 1 = 0$ より，$\tan\theta = -1$
直線 $x = 1$ 上で，y 座標が -1 となる点 T をとると，直線 OT と半径 1 の半円上の交点は右の図の点 P である．
よって，$\theta =$ **135°**



◀



解答 I4.1.7 ★★　問題 p.160

問題文

(1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．ただし，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ とする．
(2) $\tan\beta = -2$ のとき，$\sin\beta$，$\cos\beta$ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より，$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ において，$\cos\alpha < 0$　◀ 符号に注意すること．
よって，$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$
また，$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{5}}}$　◀ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$

(2) $1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$ より，$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \tan^2\beta = 1 + (-2)^2 = 5$
したがって，$\cos^2\beta = \frac{1}{5}$
$\tan\beta = -2 < 0$ より，$90^\circ < \beta < 180^\circ$ であるから，$\cos\beta < 0$　◀ $\cos\beta < 0$ より，$\frac{1}{\sqrt{5}}$ は不適である．
よって，$\cos\beta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$
また，$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ より，$\sin\beta = \tan\beta \cdot \cos\beta = -2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$　◀ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より,$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha$

解答 4.1

One math

解答 I4.1.8 ★★★ 問題 p.161

問題文

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$　　(3) $\sin\theta+\cos\theta$

(1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}\cdots$(i) の両辺を 2 乗すると，$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

したがって，$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

よって，$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\frac{3}{8}}\cdots$(ii)

◀ 両辺を 2 乗して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta$ の形を作る．

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

(i)，(ii) を代入すると，$\sin^3\theta-\cos^3\theta=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{11}{16}}$

◀ a^3-b^3
$=(a-b)^3+3ab(a-b)$

【別解】 $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)\left(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)$

(i)，(ii) を代入すると，$\sin^3\theta-\cos^3\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{8}\right)=\boldsymbol{\frac{11}{16}}$

◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$

(ii) を代入すると，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，(ii) より，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$

したがって，$\sin\theta+\cos\theta>0$

よって，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{7}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

◀ $\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}>0$ であり，$\sin\theta>0$ より，$\cos\theta>0$
よって，$\sin\theta+\cos\theta>0$

解答 I4.1.9 ★★★ 問題 p.162

問題文

次の等式を満たす θ の値を求めよ．

(1) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(2) $2\cos^2\theta+7\sin\theta-5=0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(1) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$ より，$2\left(1-\cos^2\theta\right)-3\cos\theta=0$

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

したがって，$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0\cdots$(i)

$\cos\theta=t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$-1\leqq t\leqq 1$

◀ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

これを (i) に代入すると，$2t^2+3t-2=0$

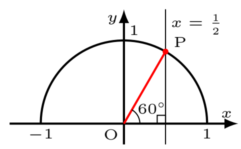
ゆえに，$(2t-1)(t+2)=0$ より，$t=\frac{1}{2}$，-2

◀ たすき掛けを用いる．

$-1\leqq t\leqq 1$ より，$t=\frac{1}{2}$

すなわち，$\cos\theta=\frac{1}{2}$

よって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\theta=\boldsymbol{60^\circ}$

◀ 

(2) $2\cos^2\theta+7\sin\theta-5=0$ より，$2\left(1-\sin^2\theta\right)+7\sin\theta-5=0$

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

したがって，$2\sin^2\theta-7\sin\theta+3=0\cdots$(i)

$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$0\leqq t\leqq 1$

◀ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$0\leqq\sin\theta\leqq 1$

これを (i) に代入すると，$2t^2-7t+3=0$

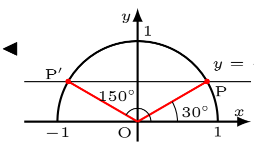
ゆえに，$(2t-1)(t-3)=0$ より，$t=\frac{1}{2}$，3

◀ たすき掛けを用いる．

$0\leqq t\leqq 1$ より，$t=\frac{1}{2}$

すなわち，$\sin\theta=\frac{1}{2}$

よって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\theta=\boldsymbol{30^\circ}$，$\boldsymbol{150^\circ}$

◀ 

解答 4.1

One math

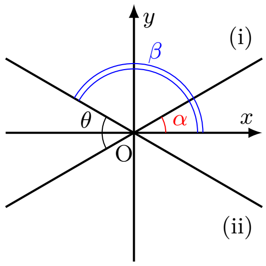
解答 I4.1.10 ★★ 問題 p.163

問題文

2 直線 $x-\sqrt{3}y=0\cdots$(i)，$x+\sqrt{3}y=0\cdots$(ii) について，次の問いに答えよ．
(1) 直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を求めよ．
(2) 2 直線 (i)，(ii) のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を求めよ．

(1) 直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を α とすると，$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ より，$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$0^\circ \leqq \alpha < 180^\circ$ より，$\alpha=\mathbf{30^\circ}$

(2) 直線 (ii) が x 軸の正の向きとのなす角を β とすると，$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$ より，$\tan\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$0^\circ \leqq \beta < 180^\circ$ より，$\beta=150^\circ$
右の図から，$\beta-\alpha=150^\circ-30^\circ=120^\circ$
よって，求める角 θ は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より，$\theta=180^\circ-120^\circ=\mathbf{60^\circ}$



◀ 求める角は，2 直線の図をかいて判断するとよい．

解答 I4.1.11 ★★ 問題 p.164

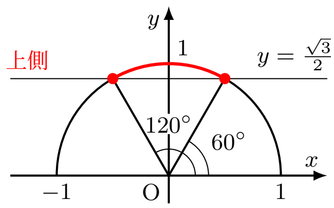
問題文

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\theta=60^\circ,\ 120^\circ$
よって，右の図より，$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値の範囲は，

$$\mathbf{60^\circ < \theta < 120^\circ}$$

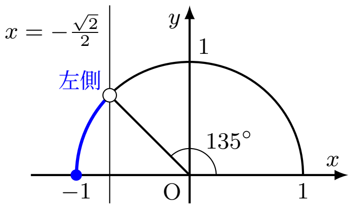


◀ 不等号を等号におき換えて，方程式を解く．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

(2) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ より，$\theta=135^\circ$
よって，右の図より，$\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる θ の値の範囲は，

$$\mathbf{135^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ}$$



◀ 不等号を等号におき換えて，方程式を解く．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

解答 4.1

解答 I4.1.12 ★★　問題 p.165

問題文

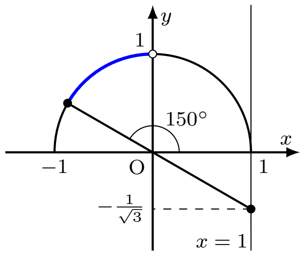
次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\tan\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$　　　(2) $\tan\theta > -1$

(1) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\theta = 150^\circ$

よって，右の図より，$\tan\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ の値の範囲は，

$$\boldsymbol{90^\circ < \theta \leqq 150^\circ}$$



◀ 不等号を等号におき換える．

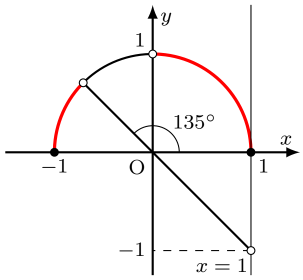
◀ 傾きが $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 以下となる範囲を求める．

◀ $\theta \neq 90^\circ$ であることに注意すること．

(2) $\tan\theta = -1$ より，$\theta = 135^\circ$

よって，右の図より，$\tan\theta > -1$ の値の範囲は，

$$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta < 90^\circ,\quad 135^\circ < \theta \leqq 180^\circ}$$



◀ 不等号を等号におき換える．

◀ 傾きが -1 より大きい範囲を求める．

◀ $\theta \neq 90^\circ$ であることに注意すること．

解答 I4.1.13 ★★★　問題 p.166

問題文

次の不等式を解け．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 > 0$　　　(2) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 \geqq 0$

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 > 0$ より，$2(1-\cos^2\theta) + \cos\theta - 2 > 0$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

したがって，$2\cos^2\theta - \cos\theta < 0 \cdots$ (i)

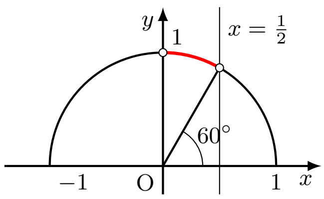
$\cos\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$-1 \leqq t \leqq 1 \cdots$ (ii)

また，(i) の不等式は，$2t^2 - t < 0$ より，$t(2t-1) < 0$

ゆえに，$0 < t < \frac{1}{2}$

これと (ii) より，$0 < \cos\theta < \frac{1}{2}$

よって，求める解は，$\boldsymbol{60^\circ < \theta < 90^\circ}$

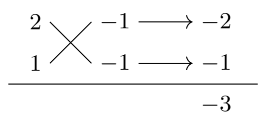


(2) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 \geqq 0$ より，$2t^2 - 3t + 1 \geqq 0 \cdots$ (i)

$\sin\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$0 \leqq t \leqq 1 \cdots$ (ii)

また，(i) の不等式は，$2t^2 - 3t + 1 \geqq 0$ より，$(2t-1)(t-1) \geqq 0$

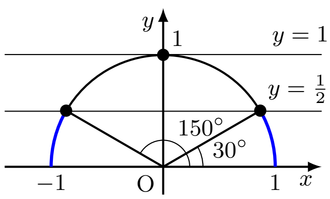
◀ たすき掛けを用いる．



したがって，$t \leqq \frac{1}{2}$，$1 \leqq t$

これと (ii) より，$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$，$t = 1$

すなわち，$0 \leqq \sin\theta \leqq \frac{1}{2}$，$\sin\theta = 1$



よって，求める解は，$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ,\ 150^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ,\ \theta = 90^\circ}$

解答
4.1

One math

解答 I4.1.14 ★★★ 問題 p.167

問題文

関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

$y=\sin^2\theta-\cos\theta=\left(1-\cos^2\theta\right)-\cos\theta=-\cos^2\theta-\cos\theta+1\cdots$(i)

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

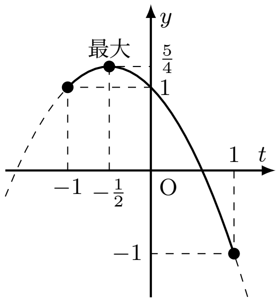
$\cos\theta=t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

◀ t の範囲を求める．

このとき，(i) に t を代入すると，

$$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$



したがって，グラフは右の図のようになる．

ゆえに，y は $t=-\frac{1}{2}$，すなわち，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$ をとり，$t=1$，すなわち，$\cos\theta=1$ のとき，最小値 -1 をとる．

◀ $t=1$ の方が軸から遠いので，$t=1$ で最小となる．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ のとき，$\theta=120^\circ$，$\cos\theta=1$ のとき，$\theta=0^\circ$

よって，$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\frac{5}{4}}$，$\boldsymbol{\theta=0^\circ}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-1}$

解答 I4.1.15 ★★★★ 問題 p.168

問題文

方程式 $3\sin^2\theta+\cos\theta-a=0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$\cos\theta=t$ とおくと，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，与えられた方程式は，

◀ $3(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-a=0$ より，$-3\cos^2\theta+\cos\theta+3-a=0$

$$-3t^2+t+3-a=0\cdots\text{(i)}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，t の値の範囲は $-1 \leqq t \leqq 1$ であり，$-1 \leqq t \leqq 1$ のとき，$\cos\theta=t$ を満たす θ の値は 1 個である．

したがって，与えられた方程式を満たす θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で異なる 2 個の解をもつのは，(i) が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で解を 2 個もつときである．

(i) を整理すると，$a=-3t^2+t+3$

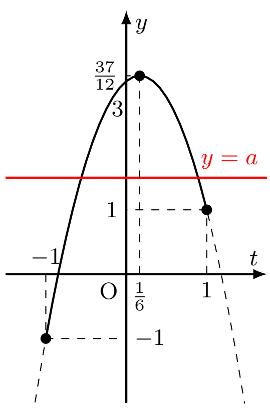
ゆえに，$a=-3\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{37}{12}\cdots$(ii)

(ii) の実数解の個数は，$y=a$ と $y=-3\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{37}{12}$ のグラフの共有点の個数と一致する．

◀ 定数を分離する．

よって，右の図より，$-1<t \leqq 1$ の範囲で解を 2 個もつ a の範囲は，

$$\boldsymbol{1 \leqq a < \frac{37}{12}}$$



◀ $1 \leqq a < \frac{37}{12}$ のとき，共有点が 2 個存在し，それを満たす θ は 2 個存在する．

解答 4.1

解答 I4.1.16 ★★★★ 問題 p.169

問題文

方程式 $2\cos^2\theta + a\cos\theta + 1 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

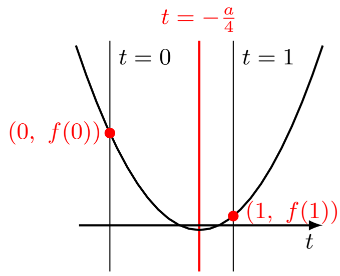
$\cos\theta = t$ とおくと，与えられた方程式は $2t^2 + at + 1 = 0$ となり，この 2 次方程式の判別式を D とする．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，t の値の範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であり，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$\cos\theta = t$ を満たす θ の値は 1 個である．

◀ おき換えた文字の範囲に注意すること．

したがって，与えられた方程式を満たす θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で異なる 2 個の解をもつのは，$2t^2 + at + 1 = 0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつときである．

ゆえに，求める条件は，$f(t) = 2t^2 + at + 1$ とすると，(i) $D > 0$，(ii) 軸が $0 < t < 1$ の範囲にある，(iii) $f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ である．



◀ (i) のように判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 になる」という条件を用いても同じ結果が得られる．

(i) $D = a^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = a^2 - 8$ であり，$D > 0$ であるから，

$$a^2 - 8 > 0$$

したがって，$a < -2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2} < a$

(ii) 軸は直線 $t = -\frac{a}{4}$ であるから，$0 < -\frac{a}{4} < 1$ より，$-4 < a < 0$

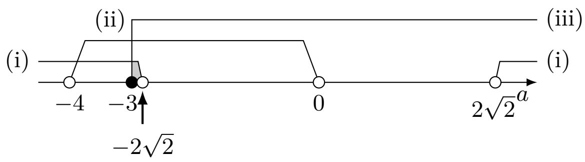
(iii) $f(0) = 1$，$f(1) = a + 3$ であり，$f(0) \geqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$ より，$a + 3 \geqq 0$

◀ $f(0) \geqq 0$ は常に成り立つ．

したがって，$-3 \leqq a$

よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-3 \leqq a < -2\sqrt{2}}$$



解答 4.1

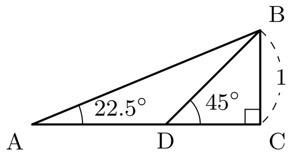
解答（節末）I4.1.1 ★★★ 節末 p.170

問題文

右の図のような直角三角形 ABC を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを求めよ．

(2) $\sin 22.5^\circ$，$\cos 22.5^\circ$，$\tan 22.5^\circ$ の値を求めよ．



(1) $\angle \mathrm{CBD} = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$ より，$\mathrm{CD} = 1$，$\mathrm{BD} = \sqrt{2}$

◀ BC : CD : BD $=1 : 1 : \sqrt{2}$

また，$\angle \mathrm{ABC} = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$ より，$\angle \mathrm{ABD} = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ$

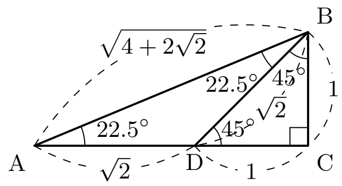
したがって，△ABD は AD = BD の二等辺三角形である．

よって，CD = 1 より，$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} + \mathrm{CD} = \sqrt{2} + 1 \cdots$ (i)

△ABC において，三平方の定理より，

$$\mathrm{AB}^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + 1^2 = 4 + 2\sqrt{2}$$

◀ $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$



AB > 0 より，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdots \text{(ii)}$$

◀ この 2 重根号は外すことができない．

(2) △ABC において，(i)，(ii)，BC = 1 より，

$$\sin 22.5^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}}$$
$$= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{8}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos 22.5^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}+1)\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}}$$
$$= (\sqrt{2}+1)\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{8}} = \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2(2-\sqrt{2})}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\tan 22.5^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \boldsymbol{\sqrt{2}-1}$$

解答 4.1

One math

解答（節末）I4.1.2 ★★★ 節末 p.170

問題文

鋭角 θ が $\tan\theta=\frac{5}{12}$ を満たすとき，$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ の値を求めよ．

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}&=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\\&=\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}\end{aligned}$$

◀ 通分する．

◀ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

また，

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{144}{169},$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}$$

θ は鋭角であるから，$\sin\theta>0$

したがって，$\sin\theta=\frac{5}{13}$

よって，

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=2\div\frac{5}{13}=\boldsymbol{\frac{26}{5}}$$

◀ θ は鋭角，$\tan\theta=\frac{5}{12}$ であることから，直角三角形をかき，三平方の定理を用いて解くこともできる．

【別解】 $\tan\theta=\frac{5}{12}$ より，

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{144}{169}$$

θ は鋭角であるから，$\cos\theta>0$

したがって，$\cos\theta=\frac{12}{13}$

また，$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{13}$

よって，これらを代入して，

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{5}{13}\div\frac{25}{13}+\frac{5}{13}\div\frac{1}{13}=\boldsymbol{\frac{26}{5}}$$

◀ $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ より，$\sin A=\tan A\cos A$

◀ θ が鋭角 $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ のとき，$\cos\theta>0$ であることに注意すること．

◀ $1+\cos\theta=1+\frac{12}{13}=\frac{25}{13}$，$1-\cos\theta=1-\frac{12}{13}=\frac{1}{13}$

解答（節末）I4.1.3 ★★ 節末 p.170

問題文

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ において，$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\cos\theta=0$ を満たす θ の値を求めよ．

$\cos\theta=0$ のとき，$\theta=90^\circ$ であり，これは方程式を満たさない．

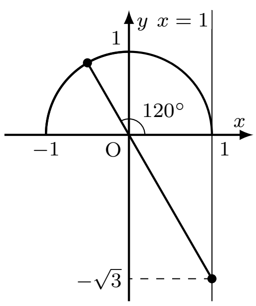
したがって，$\cos\theta\neq0$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\cos\theta=0$ より，$\sin\theta=-\sqrt{3}\cos\theta$

両辺を $\cos\theta$ で割ると，$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{3}$

よって，$\tan\theta=-\sqrt{3}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから，$\theta=\boldsymbol{120^\circ}$



◀ $\theta=90^\circ$ のとき，$\sin\theta=1$

◀ $\cos\theta\neq0$ より，両辺を $\cos\theta$ で割ることができる．

解答 4.1

解答（節末）I4.1.4 ★★★ 節末 p.170

問題文

$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ < \theta < 45^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin\theta + \cos\theta$　(3) $\sin\theta - \cos\theta$　(4) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

(1)

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

◀ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 3$ であるから，$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 3$

よって，$\sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots$(i)

(2)

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(i) より，$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ より，$\sin\theta + \cos\theta > 0$

よって，$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{\frac{5}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{3}}$

(3)

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$$

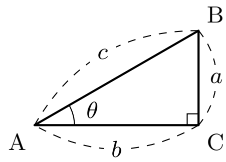
◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(i) より，$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，$\sin\theta < \cos\theta$ より，$\sin\theta - \cos\theta < 0$

よって，$\sin\theta - \cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

◀ $0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，下の図のような直角三角形において，$a < b$
よって，$c\sin\theta < c\cos\theta$



(4)

$$\sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta - \cos\theta)\left(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)$$

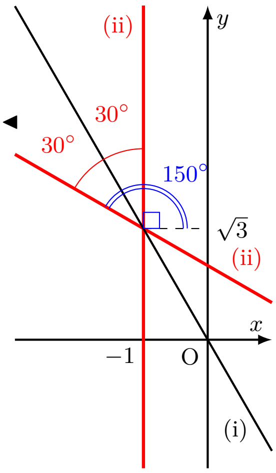
$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{-\frac{4\sqrt{3}}{9}}$$

解答（節末）I4.1.5 ★★ 節末 p.170

問題文

2 直線 $\sqrt{3}x+y=0\cdots$(i)，$ax+by+2=0\cdots$(ii) がある．直線 (ii) は点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を通り，2 直線 (i)，(ii) のなす角は 30° である．このとき，定数 a，b の値を求めよ．

$\sqrt{3}x+y=0$ より，$y=-\sqrt{3}x$
直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta=-\sqrt{3}$
$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より，$\theta=120^\circ$
2 直線 (i)，(ii) のなす角が 30° であるから，直線 (ii) が x 軸の正の向きとのなす角は 90° または 150°



（ア）90° のとき
直線 (ii) は点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を通り，y 軸に平行であるから，$x=-1$
式変形すると，$2x+2=0$
したがって，これと (ii) を比較すると，$a=2$，$b=0$
（イ）150° のとき
$\tan 150^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ より，直線 (ii) の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
直線 (ii) は点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を通るから，$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)+\sqrt{3}$
式変形すると，$-x-\sqrt{3}y+2=0$
したがって，これと (ii) を比較すると，$a=-1$，$b=-\sqrt{3}$
よって，（ア），（イ）より，$\boldsymbol{a=2,\ b=0}$ **または** $\boldsymbol{a=-1,\ b=-\sqrt{3}}$

正弦定理と余弦定理（解答）

解答 I4.2.1 ★ 問題 p.172

問題文

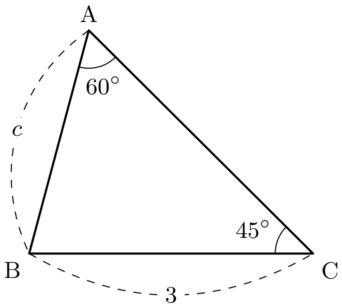
△ABC において，次の値を求めよ．ただし，外接円の半径を R とする．
(1) $a=3$，$A=60°$，$C=45°$ のとき，c，R
(2) $R=1$，$a=\sqrt{3}$ のとき，A

(1) 正弦定理より，

$$\frac{3}{\sin 60°}=\frac{c}{\sin 45°}$$

よって，

$$c=\frac{3}{\sin 60°}\cdot\sin 45°=3\div\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$$



◀ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ を用いる．両辺に $\sin 45°$ を掛けると，$c=\frac{3}{\sin 60°}\cdot\sin 45°$

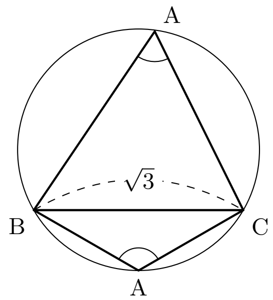
また，$\frac{3}{\sin 60°}=2R$ より，

$$R=\frac{1}{2}\cdot 3\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

◀ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=2R$ を用いる．

(2) 正弦定理より，

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=2\cdot 1$$



◀ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=2R$ を用いる．

したがって，

$$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$0°<A<180°$ より，

$$A=\boldsymbol{60°，120°}$$

◀ 図のように，鋭角と鈍角の 2 つの場合がある．

解答 I4.2.2 ★★　問題 p.173

問題文

△ABC において，次の値を求めよ．

(1) $a=6,\ b=4,\ C=120^\circ$ のとき，c　(2) $a=5,\ b=7,\ c=8$ のとき，B

(3) $a=2,\ c=\sqrt{6},\ C=60^\circ$ のとき，b

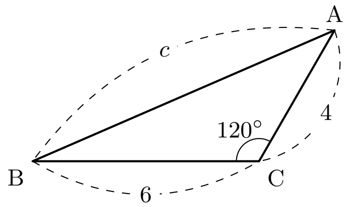
(1) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 120^\circ \\ &= 36+16+24=76 \end{aligned}$$

◀ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

よって，$c>0$ より，$c=\boldsymbol{\sqrt{76}}$

◀ 辺の長さは正であるから，$c>0$

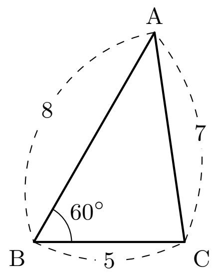


(2) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8} \\ &= \frac{25+64-49}{80}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

◀ $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

よって，$B=\boldsymbol{60^\circ}$



(3) 余弦定理より，

$$(\sqrt{6})^2=2^2+b^2-2\cdot 2\cdot b\cdot\cos 60^\circ$$

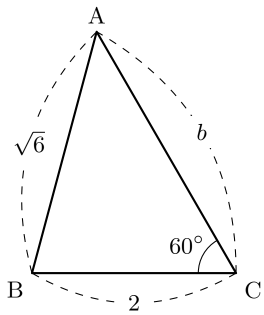
◀ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

したがって，$b^2-2b-2=0$

これを解くと，$b=1\pm\sqrt{3}$

よって，$b>0$ より，$b=\boldsymbol{1+\sqrt{3}}$

◀ 辺の長さは正であるから，$b>0$



解答 4.2

One math

解答 I4.2.3 ★★ 問題 p.174

問題文

次の場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

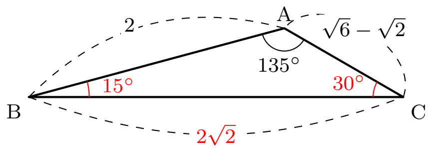
(1) $b=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ c=2,\ A=135^\circ$　(2) $a=2\sqrt{2},\ b=2,\ c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(1) 余弦定理より，

$$a^2=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+2^2-2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2\cdot\cos 135^\circ=8$$

したがって，$a>0$ であるから，$a=\sqrt{8}=$
$\mathbf{2\sqrt{2}}$

正弦定理より，



$$\frac{2}{\sin C}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$$

◀ 余弦定理でも求めることができるが，計算に手間が掛かる．そこで，正弦定理を用いるとよい．

ゆえに，$\sin C=\frac{1}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ-135^\circ$ より，$0^\circ<C<45^\circ$ であるから，$C=\mathbf{30^\circ}$

◀ $C=150^\circ$ は不適である．

よって，$B=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=\mathbf{15^\circ}$

(2) 余弦定理より，

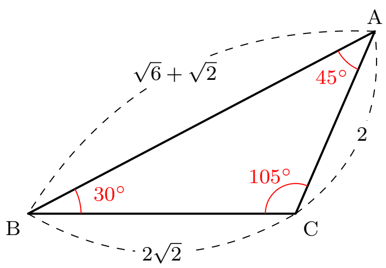
$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

◀ $\cos B$ から考えてもよい．

したがって，$A=\mathbf{45^\circ}$

余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}}\\&=\frac{12+4\sqrt{3}}{4\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



したがって，$B=\mathbf{30^\circ}$

よって，$C=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=\mathbf{105^\circ}$

◀ $C=180^\circ-(A+B)$

解答 I4.2.4 ★★　問題 p.175

問題文

△ABC において，$b=2\sqrt{2}$，$c=2$，$C=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

余弦定理より，$2^2=a^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot a\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 30^\circ$

したがって，$a^2-2\sqrt{6}a+4=0$

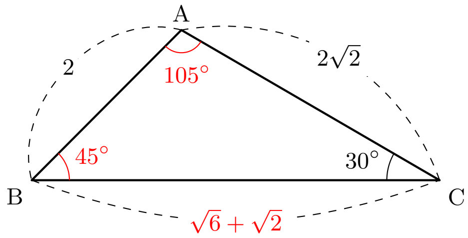
これを解くと，$a=\sqrt{6}\pm\sqrt{2}$

◀ いずれも $a>0$ であるから，場合分けをして考える．

(i) $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ のとき

余弦定理より，

$$\cos B=\frac{2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



◀ 計算に手間が掛かる（別解のように，第一余弦定理を用いると計算が楽になる）．

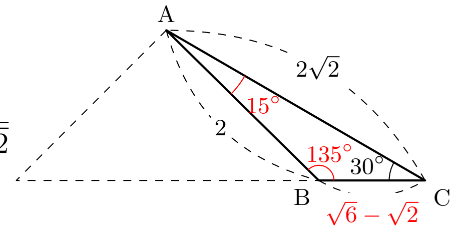
したがって，$B=45^\circ$

ゆえに，$A=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

(ii) $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ のとき

余弦定理より，

$$\cos B=\frac{2^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



したがって，$B=135^\circ$

ゆえに，$A=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$

◀ $A=180^\circ-(B+C)$

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{a=\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{A=105^\circ}$，$\boldsymbol{B=45^\circ}$ または $\boldsymbol{a=\sqrt{6}-\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{A=15^\circ}$，$\boldsymbol{B=135^\circ}$

【別解】 正弦定理より，$\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$ であるから，$\sin B=\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，$B=45^\circ$，135°

(i) $B=45^\circ$ のとき，$A=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

このとき，

$$\begin{aligned}a&=c\cos B+b\cos C\\&=2\cos 45^\circ+2\sqrt{2}\cos 30^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

◀ 第一余弦定理より，

$$a=c\cos B+b\cos C$$

第一余弦定理を用いると，計算が楽になり，役に立つことがある．

(ii) $B=135^\circ$ のとき，$A=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$

このとき，

$$\begin{aligned}a&=b\cos C+c\cos B\\&=2\sqrt{2}\cos 30^\circ+2\cos 135^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

◀ 第一余弦定理は，90° や鈍角についても成り立つ．

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{a=\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{A=105^\circ}$，$\boldsymbol{B=45^\circ}$ または $\boldsymbol{a=\sqrt{6}-\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{A=15^\circ}$，$\boldsymbol{B=135^\circ}$

解答 I4.2.5 ★★★ 問題 p.176

問題文

△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ が成り立つとき，最大の角の大きさを求めよ．

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ より，

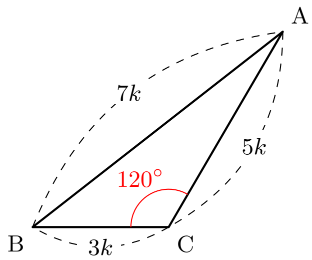
$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

したがって，$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ であるから，

$$a : b : c = 3 : 5 : 7$$

ゆえに，最も長い辺は c であるから，C が最大の角である．
$a = 3k$，$b = 5k$，$c = 7k$ $(k > 0)$ とおくと，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} \\ &= \frac{9k^2 + 25k^2 - 49k^2}{30k^2} \\ &= \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$



$0° < C < 180°$ より，$C = 120°$
よって，最大の角の大きさは，**120°** である．

◀ k $(k > 0)$ として，

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k$$

とおくと，$a = 3k$，$b = 5k$，$c = 7k$
したがって，$a < b < c$ より，

$$A < B < C$$

よって，C が最大の角である．

解答 4.2

解答 I4.2.6 ★★★ 問題 p.177

問題文

3 辺の長さが 2，3，x である三角形について，次の問いに答えよ．
(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．
(2) この三角形が鈍角三角形となるような x の値の範囲を求めよ．

(1) 三角形が成立する条件より，$|3-2| < x < 3+2$
よって，x のとり得る値の範囲は，$\boldsymbol{1 < x < 5}\cdots$(i)

◀ 三角形の成立条件 $|b-c| < a < b+c$ を利用する．$|x-3| < 2 < x+3$ または $|2-x| < 3 < 2+x$ を解いてもよいが，計算に手間が掛かる．

(2) （ア）$1 < x < 3$ のとき
最大の辺の長さは 3 であるから，その対角が $90°$ より大きいとき，鈍角三角形となる．
したがって，$3^2 > 2^2 + x^2$
整理すると，$x^2 - 5 < 0$
ゆえに，$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) < 0$
これを解くと，$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\cdots$(ii)
(i)，(ii) の共通範囲を求めると，$1 < x < \sqrt{5}$

（イ）$3 \leqq x < 5$ のとき
最大の辺の長さは x であるから，その対角が $90°$ より大きいとき，鈍角三角形となる．
したがって，$x^2 > 2^2 + 3^2$
整理すると，$x^2 - 13 > 0$
ゆえに，$(x+\sqrt{13})(x-\sqrt{13}) > 0$
これを解くと，$x < -\sqrt{13}$，$\sqrt{13} < x\cdots$(iii)
(i)，(iii) の共通範囲を求めると，$\sqrt{13} < x < 5$

◀ 最大の辺になることができる辺は，3 と x の 2 通りあるので注意すること．

よって，（ア），（イ）より，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{1 < x < \sqrt{5}}$，$\boldsymbol{\sqrt{13} < x < 5}$

解答 I4.2.7 ★★★ 問題 p.178

問題文

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か．

(1) $a\sin A = b\sin B$　　(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B$

(1) $a\sin A = b\sin B \cdots$(i) とする．
△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R}\cdots\text{(ii)}$$

◀ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(ii) を (i) に代入すると，

$$a\cdot\frac{a}{2R} = b\cdot\frac{b}{2R}$$

したがって，$a^2 = b^2$

◀ 両辺に $2R$ を掛ける．

$a > 0$，$b > 0$ より，$a = b$
よって，**BC = CA の二等辺三角形**

◀ 次数の低い c に注目して，整理するとよい．

(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B\cdots$(iii) とする．
余弦定理により，

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdots\text{(iv)}$$

(ii)，(iv) を (iii) に代入すると，

$$\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

両辺に $4Rabc$ を掛けると，

$$a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) = b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)$$

整理すると，$\left(a^2-b^2\right)c^2 - \left(a^4-b^4\right) = 0$

◀ $a-b=0$ または $c^2-a^2-b^2=0$

したがって，$\left(a^2-b^2\right)c^2 - \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right) = 0$
ゆえに，$(a+b)(a-b)\left(c^2-a^2-b^2\right) = 0$
$a+b>0$ より，$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$
よって，△ABC は **BC = CA の二等辺三角形 または $C = 90°$ の直角三角形**

解答 4.2

解答（節末）I4.2.1 ★★ 節末 p.179

問題文

△ABC の頂点 A，B，C の対辺をそれぞれ a，b，c とする．$C=60^\circ$ のとき，$\frac{b}{c^2-a^2}+\frac{a}{c^2-b^2}$ の値を求めよ．

余弦定理より，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{1}{2}=a^2+b^2-ab$

整理すると，$c^2-a^2=b^2-ab$

また，$c^2-b^2=a^2-ab$

よって，これらを与えられた式に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{b}{c^2-a^2}+\frac{a}{c^2-b^2}&=\frac{b}{b^2-ab}+\frac{a}{a^2-ab}\\&=\frac{b}{b(b-a)}+\frac{a}{a(a-b)}\\&=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{a-b}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

◀ $c^2-a^2=b^2-ab$，$c^2-b^2=a^2-ab$ を代入する．

◀ 約分する．

解答（節末）I4.2.2 ★★★ 節末 p.179

問題文

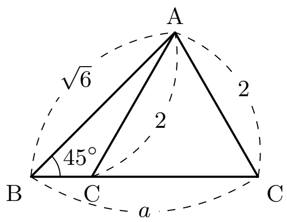
△ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{6}$，$B=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

正弦定理より，$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

したがって，$\sin C=\sqrt{6}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$B=45^\circ$ より，$0^\circ<C<135^\circ$ であるから，

$$C=60^\circ,\quad 120^\circ$$



◀ C の値が 2 つ求められたから，場合分けをして考える．

(i) $C=60^\circ$ のとき

$$A=180^\circ-(B+C)=75^\circ$$

◀ $\sin 75^\circ$ は扱いにくいことから，正弦定理ではなく，余弦定理を用いる．

余弦定理より，$2^2=a^2+(\sqrt{6})^2-2\cdot a\cdot\sqrt{6}\cdot\cos 45^\circ$

したがって，$a^2-2\sqrt{3}a+2=0$ より，$a=\sqrt{3}\pm 1$

ここで，A が最大の角であるから，対辺 a が最大の辺である．

ゆえに，$a>\sqrt{6}$ より，$a=\sqrt{3}+1$

◀ $(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2=2(\sqrt{3}-1)>0$ より，$\sqrt{3}+1>\sqrt{6}$

(ii) $C=120^\circ$ のとき

$$A=180^\circ-(B+C)=15^\circ$$

余弦定理より，$2^2=a^2+(\sqrt{6})^2-2\cdot a\cdot\sqrt{6}\cdot\cos 45^\circ$

したがって，$a^2-2\sqrt{3}a+2=0$ より，$a=\sqrt{3}\pm 1$

ここで，A が最小の角であるから，対辺 a が最小の辺である．

ゆえに，$a<2$ より，$a=\sqrt{3}-1$

◀ $2^2-(\sqrt{3}-1)^2=2\sqrt{3}>0$ より，$\sqrt{3}-1<2$

よって，(i)，(ii) より，

$$\boldsymbol{A=75^\circ,\ C=60^\circ,\ a=\sqrt{3}+1\ \text{または}\ A=15^\circ,\ C=120^\circ,\ a=\sqrt{3}-1}$$

解答（節末）I4.2.3 ★★★ 節末 p.179

問題文

△ABC において，$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，$R=\sqrt{3}$ が成り立つとき，$\cos A$，a，b，c を求めよ．

$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$ であるから，$b+c=8k$，$c+a=10k$，$a+b=12k$ $(k>0)\cdots$(i) とおくと，これらの辺々を足し合わせると，$2(a+b+c)=30k$

したがって，$a+b+c=15k\cdots$(ii)

(i)，(ii) より，$a=7k$，$b=5k$，$c=3k\cdots$(iii)

余弦定理より，$\cos A=\frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 3k}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

$\cos A=-\frac{1}{2}$ であるから，$A=120^\circ$

これと $R=\sqrt{3}$ であるから，正弦定理より，$\frac{a}{\sin 120^\circ}=2\sqrt{3}$

よって，$a=2\sqrt{3}\sin 120^\circ=\boldsymbol{3}$

このとき，(iii) より，$k=\frac{3}{7}$ であり，$b=\boldsymbol{\frac{15}{7}}$，$c=\boldsymbol{\frac{9}{7}}$

◀ $b+c=4k$，$c+a=5k$，$a+b=6k$ とおいてもよいが，$a+b+c=\frac{15}{2}$ となり計算に手間が掛かる．そこで，計算を簡単にするために，$4:5:6$ を $8:10:12$ と考えている．

解答（節末）I4.2.4 ★★★ 節末 p.179

問題文

△ABC において，$\mathrm{AB}=x-1$，$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BC}=x+1$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) △ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ．

(3) △ABC の 1 つの内角が 120° であるとき，x の値，外接円の半径を求めよ．

(1) $x-1<x<x+1$ であるから，三角形が成立する条件より，

$$x+1<x+(x-1)$$

◀ 最大の辺の長さは，他の 2 辺の長さの和より小さい．

よって，x のとり得る値の範囲は，$\boldsymbol{x>2}\cdots$(i)

(2) 辺 BC が最大の辺であるから，鈍角三角形となる条件は $A>90^\circ$，すなわち，$\cos A<0$ である．

余弦定理より，

$$\cos A=\frac{x^2+(x-1)^2-(x+1)^2}{2x(x-1)}<0$$

◀ 鈍角になることができるのは，最大の角のみである．

◀ (i) より，分母が正であるから，分子は負である．

したがって，$x^2+(x-1)^2-(x+1)^2<0$

整理すると，$x^2-4x<0$

ゆえに，$x(x-4)<0$

これを解くと，$0<x<4\cdots$(ii)

よって，(i)，(ii) より，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{2<x<4}\cdots$(iii)

(3) 長さ $x+1$ の辺に対する角が 120° になるから，余弦定理より，

$$(x+1)^2=x^2+(x-1)^2-2\cdot x\cdot(x-1)\cdot\cos 120^\circ$$

したがって，$2x^2-5x=0$ であるから，$x(2x-5)=0$

(iii) より，$2<x<4$ であるから $x=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

外接円の半径を R とすると，正弦定理より，$\frac{x+1}{\sin 120^\circ}=2R$

よって，$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}+1}{\sin 120^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{6}}$

◀ 1 つの内角が 120° であるから，△ABC は鈍角三角形である．

解答 4.2

解答（節末）I4.2.5 ★★★ 節末 p.179

問題文

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か．

$$(a-b)\sin^2 C = a\sin^2 A - b\sin^2 B$$

正弦定理より，

$$(a-b)\left(\frac{c}{2R}\right)^2 = a\left(\frac{a}{2R}\right)^2 - b\left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

◀ $\sin A = \frac{a}{2R}$，$\sin B = \frac{b}{2R}$，$\sin C = \frac{c}{2R}$

両辺に $4R^2$ を掛けると，

$$(a-b)c^2 = a^3 - b^3$$

したがって，$(a-b)c^2 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ゆえに，$(a-b)\left\{c^2 - \left(a^2+ab+b^2\right)\right\} = 0$

したがって，$a=b$ または $c^2 - \left(a^2+ab+b^2\right) = 0$

◀ $\alpha\beta = 0$ ならば $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ となる．

(i) $a=b$ のとき

△ABC は BC = CA の二等辺三角形である．

(ii) $c^2 = a^2+ab+b^2$ のとき

余弦定理より，

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-\left(a^2+ab+b^2\right)}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}$$

◀ $ab \neq 0$

したがって，$C = 120^\circ$

よって，(i)，(ii) より，△ABC は **BC = CA の二等辺三角形 または $C = 120^\circ$ の三角形**

図形の計量（解答）

解答 I4.3.1 ★★ 問題 p.181

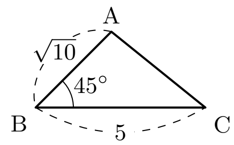
問題文

次のような △ABC の面積 S を求めよ.

(1) $a=5,\ c=\sqrt{10},\ B=45^\circ$　　(2) $a=7,\ b=5,\ c=8$

(1) 求める △ABC の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 5\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{20}}{4}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

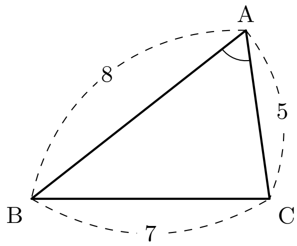
◀ 

(2) 余弦定理より, $\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1,\ \sin A>0$ より,

◀ A は三角形の内角であるから, $0^\circ<A<180^\circ$ より, $\sin A>0$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



よって, 求める △ABC の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{10\sqrt{3}}$$

【別解】 ヘロンの公式より, $s=\frac{7+5+8}{2}=10$ であるから,

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)}\\&=\sqrt{10\cdot3\cdot5\cdot2}\\&=\sqrt{300}=10\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって, 求める面積 S は, $S=\boldsymbol{10\sqrt{3}}$

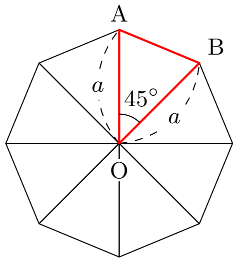
解答 I4.3.2 ★★ 問題 p.182

問題文

(1) 1 辺の長さが 1 の正八角形の面積 S を求めよ.

(2) 半径 1 の円に内接する正十二角形の面積 S を求めよ.

(1) 右の図のように，1 辺の長さが 1 の正八角形を対角線によって 8 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると，



$$\angle \mathrm{AOB} = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

余弦定理より，

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 45^\circ$$

◀ $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cdot \cos \angle \mathrm{AOB}$

$$1 = 2a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2a^2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = a^2(2-\sqrt{2})$$

したがって，

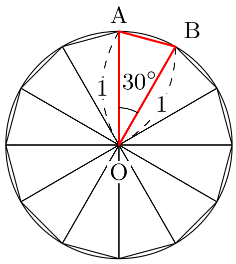
$$a^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

◀ a の値まで求めなくてよい（a^2 のまま扱うとよい）.

よって，求める面積 S は,

$$S = 8 \times \triangle\mathrm{OAB} = 8 \times \frac{1}{2}a^2 \sin 45^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{4}a^2 = \sqrt{2}(2+\sqrt{2}) = \mathbf{2 + 2\sqrt{2}}$$

(2) 右の図のように，正十二角形を対角線によって 12 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると，



$$\angle \mathrm{AOB} = 360^\circ \div 12 = 30^\circ$$

よって，求める面積 S は,

$$S = 12 \times \triangle\mathrm{OAB} = 12 \times \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 30^\circ = \mathbf{3}$$

解答 4.3

解答 I4.3.3 ★★ 問題 p.183

問題文

△ABC において，$a=4$, $b=5$, $c=6$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos A$, $\sin A$　　(2) △ABC の面積 S

(3) △ABC の内接円の半径 r　　(4) △ABC の外接円の半径 R

(1) 余弦定理より，$\cos A=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

◀ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

また，$\sin A>0$ より，

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{16}-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

◀ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

(2) 求める △ABC の面積 S は，$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$

(3) (2)，$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より，$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}r(4+5+6)$

よって，$r=\frac{2\cdot15\sqrt{7}}{4\cdot15}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

(4) 正弦定理より，$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{4}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{8}{\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

よって，外接円の半径は，$R=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{7}}{7}}$

◀ $2R=\frac{a}{\sin A}$ より，

$R=\frac{a}{2\sin A}$

解答 I4.3.4 ★★ 問題 p.184

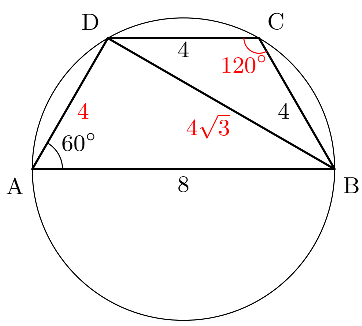
問題文

円に内接する四角形 ABCD において，AB $=8$, BC $=4$, CD $=4$, $\angle$BCD $=120^\circ$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 対角線 BD の長さ　　(2) AD の長さ　　(3) 四角形 ABCD の面積

(1) △BCD において，余弦定理より，BD$^2=4^2+4^2-2\cdot4\cdot4\cdot\cos120^\circ=48$

よって，BD >0 より，BD $=\mathbf{4\sqrt{3}}$



(2) 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle\mathrm{BAD}=180^\circ-\angle\mathrm{BCD}=60^\circ$$

したがって，△ABD において，余弦定理より，

$$(4\sqrt{3})^2=\mathrm{AD}^2+8^2-2\cdot\mathrm{AD}\cdot8\cos60^\circ$$

整理すると，AD$^2-8$AD$+16=0$ より，(AD $-4)^2=0$

よって，AD >0 より，AD $=\mathbf{4}$

(3) 四角形 ABCD の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin120^\circ\\&=\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{12\sqrt{3}}\end{aligned}$$

◀ 四角形の面積は，2 つの三角形の面積の和と考えられる．
◀ 2 辺の長さが a, b であり，その間の角が θ のとき，三角形の面積 S は，$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

解答 I4.3.5 ★★★ 問題 p.185

問題文

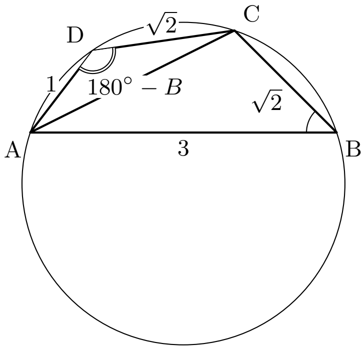
円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\mathrm{DA}=1$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos B$　　(2) 四角形 ABCD の面積 S

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$D=180^\circ-B$$

◀ $B+D=180^\circ$



△ABC において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cdot\cos B\\&=11-6\sqrt{2}\cos B\cdots\text{(i)}\end{aligned}$$

△ACD において，余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2=(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\cos(180^\circ-B)=3+2\sqrt{2}\cos B\cdots\text{(ii)}$$

◀ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

(i)，(ii) より，$11-6\sqrt{2}\cos B=3+2\sqrt{2}\cos B$

よって，$\cos B=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) $\sin B>0$ より，

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

◀ $\sin^2 B+\cos^2 B=1$

また，$\sin D=\sin(180^\circ-B)=\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}$

◀ $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

よって，求める四角形 ABCD の面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}\\&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{2}\cdot\sin B+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\sin D\\&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2}\end{aligned}$$

◀ 四角形の面積は，2 つの三角形の面積の和と考えられる．

解答 4.3

解答 I4.3.6 ★★ 問題 p.186

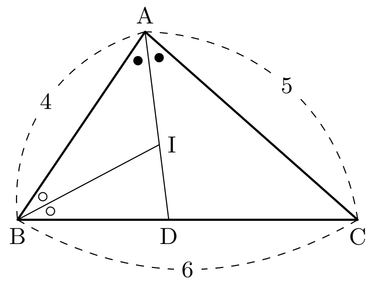
問題文

$\triangle$ABC において，AB $=4$，BC $=6$，CA $=5$ とする．$\angle$A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，$\angle$B の二等分線が線分 AD と交わる点を I とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 線分 AD の長さ　(2) 線分 AI の長さ

(1) $\triangle$ABC において，線分 AD は $\angle$A の二等分線であるから，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=4:5$$



BC $=6$ より，

$$\mathrm{BD}=\frac{4}{4+5}\mathrm{BC}=\frac{4}{9}\cdot 6=\frac{8}{3}$$

$\triangle$ABC において，余弦定理より，

$$\cos B=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{9}{16}$$

◀ 先に，$\cos B$ を求める．

$\triangle$ABD において，余弦定理より，

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\cos B=4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot 4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{16}=\frac{100}{9}$$

◀ 求めた $\cos B$ を用いて，AD の長さを求める．

よって，AD >0 より，

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\boldsymbol{\frac{10}{3}}$$

◀ 辺の長さは正であるから，AD >0

(2) $\triangle$ABD において，線分 BI は $\angle$B の二等分線であるから，

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=4:\frac{8}{3}=3:2$$

よって，AI $=\frac{3}{3+2}$AD $=\frac{3}{5}\times\frac{10}{3}=\mathbf{2}$

解答 I4.3.7 ★★ 問題 p.187

問題文

AB $=5$，BC $=10$，CA $=6$ である $\triangle$ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AM の長さを求めよ．

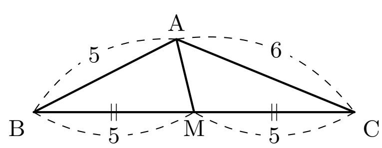
中線定理より，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

◀ 中線定理を用いると，楽に中線の長さを求めることができる．

これに，AB $=5$，BM $=\frac{1}{2}$BC $=5$，AC $=6$ を代入すると，

$$5^2+6^2=2\left(\mathrm{AM}^2+5^2\right)$$



したがって，AM$^2=\frac{11}{2}$

よって，AM >0 より，AM $=\boldsymbol{\frac{\sqrt{22}}{2}}$

解答 I4.3.8 ★★ 問題 p.188

問題文

水平な地面に垂直に立つ木があり，木の頂点を A，その真下の地面上の点を D とする．また，地面上で互いに 200 m 離れた 2 点 B，C を定め，∠ABC，∠ACB，∠ACD を測定したところ，それぞれ 75°，60°，60° であった．このとき，木の高さ AD を求めよ．

△ABC において，

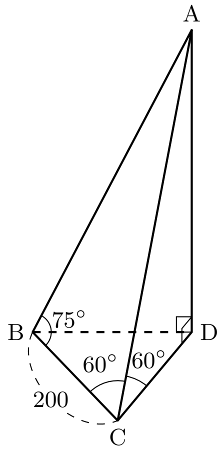
$$\angle BAC = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

正弦定理より，

$$\frac{200}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 60^\circ}$$

したがって，

$$AB = \frac{200}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ = 200 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{6}$$



◀ ∠BAC = 45° に注目すると，AB の値を求めやすい (75° を扱わないで済む)．先に正弦定理を用いて AB の値を求め，次に余弦定理を用いて AC の値を求める．

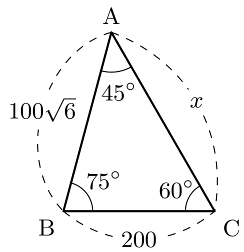
AC = x とすると，余弦定理より，

$$(100\sqrt{6})^2 = 200^2 + x^2 - 2 \cdot 200 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

ゆえに，$x^2 - 200x - 20000 = 0$

これを解くと，$x = 100 \pm 100\sqrt{3}$

したがって，$x > 0$ より，$x = 100 + 100\sqrt{3}$



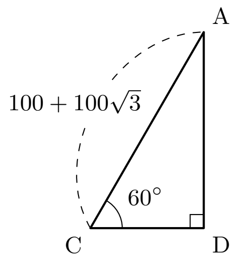
◀ 空間図形で考えるのではなく，平面図形を取り出して考えるとよい．また，扱いやすさのために AC を x とおいている．

すなわち，AC $= 100 + 100\sqrt{3}$

△ACD おいて，

$$AD = AC \cdot \sin 60^\circ = \left(100 + 100\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} + 150$$

よって，木の高さは，AD = $\mathbf{50\sqrt{3} + 150}$ **(m)**



◀ $\sin 60^\circ = \frac{AD}{AC}$

解答 4.3

解答 I4.3.9 ★★★ 問題 p.189

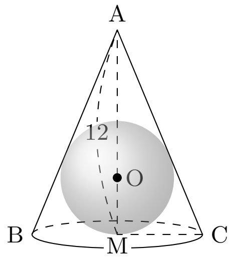
問題文

右の図のように，底面の半径 5，高さが 12 の直円錐があり，球 O と側面，底面の中心 M で接している．このとき，次の問いに答えよ．

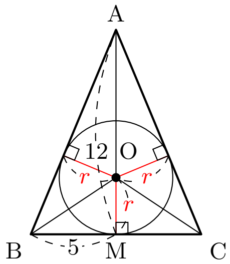
(1) 円錐の母線の長さを求めよ．

(2) 球 O の半径を求めよ．

(3) 球 O の体積 V と表面積 S を求めよ．



A と M を通る平面で円錐を切った切断面は，右の図のようになる．



(1) 求める母線の長さは，$\sqrt{\mathrm{BM}^2+\mathrm{AM}^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\mathbf{13}$

◀ 三平方の定理を用いる．

(2) 球 O の半径を r，△ABC の面積を S' とすると，

$$S'=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\frac{1}{2}r(10+2\cdot 13)=18r$$

◀ $S'=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$S'=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12=60$ であるから，$18r=60$

◀ $S'=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM}$

よって，$r=\boldsymbol{\frac{10}{3}}$

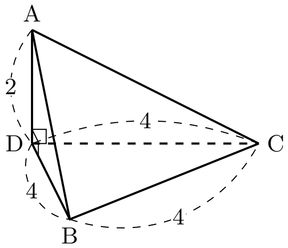
(3) (2) より，$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{4000}{81}\pi}$，$S=4\pi\left(\frac{10}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{400}{9}\pi}$

◀ 球の体積は $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，表面積は $S=4\pi r^2$

解答 I4.3.10 ★★★★ 問題 p.190

問題文

四面体 ABCD において，△BCD は 1 辺の長さが 4 の正三角形であり，$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADC}=90^\circ, \mathrm{AD}=2$ である．このとき，頂点 D から平面 ABC に下ろした垂線 DH の長さを求めよ．



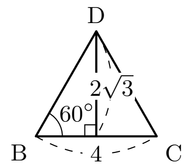
四面体 ABCD の体積を V とする．$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$ であるから，

$$\mathrm{AD}\perp\text{面 BCD}$$

したがって，

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}\times 2=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdots\text{(i)}$$

◀ △BCD を底面，AD を高さとして考える．また，△BCD は正三角形である．



また，A から辺 BC に下ろした垂線の足を T とすると，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=4$ であるから，

$$\mathrm{AT}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BT}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$$

ゆえに，$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\times\mathrm{DH}=\frac{8}{3}\mathrm{DH}\cdots\text{(ii)}$

◀ △ABC を底面，DH を高さとして考える．

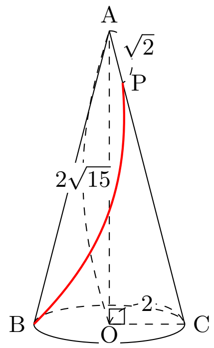
(i)，(ii) より，$\frac{8}{3}\mathrm{DH}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

よって，$\mathrm{DH}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{8}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

解答 I4.3.11 ★★★ 問題 p.191

問題文

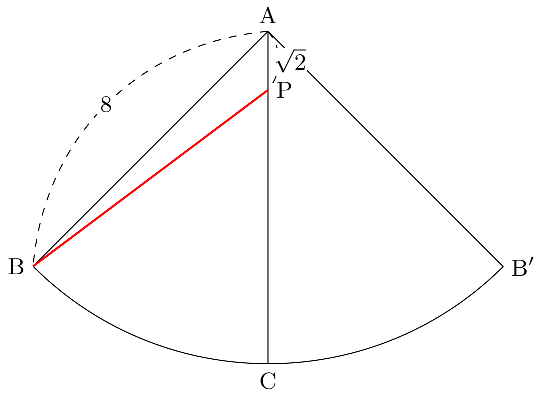
底面の中心が O で半径が 2，高さが $2\sqrt{15}$ の直円錐がある．直円錐の頂点を A，底面の直径の両端を B，C とし，線分 AC 上に $\mathrm{AP}=\sqrt{2}$ となる点 P をとる．側面上において，点 B から点 P までに至る最短距離を求めよ．



側面を直線 AB に沿って切り開いた展開図は，右の図のように，中心 A，半径 AB の扇形となる．三角形 ABO において，$\mathrm{BO}=2$，$\mathrm{AO}=2\sqrt{15}$ より，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{15})^2}=8$$

求める 最短距離 の長さは，展開図において，線分 BP の長さである．



弧 BCB′ の長さは，$2\pi\cdot 2=4\pi$

◀ 弧 BCB′ の長さは，底面の円の円周に等しい．

扇形の半径は 8 であるから，中心角 $\angle\mathrm{BAB'}$ は，

$$\angle\mathrm{BAB'}=360^\circ\times\frac{4\pi}{2\pi\cdot 8}=90^\circ$$

したがって，$\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$

$\triangle\mathrm{ABP}$ において，余弦定理より，

$$\mathrm{BP}^2=8^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=66-16\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=50$$

よって，$\mathrm{BP}=\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

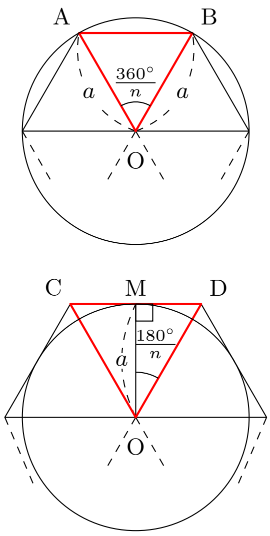
解答（節末）I4.3.1 ★★ 節末 p.192

問題文

半径 a の円に内接する正 n 角形の面積，および外接する正 n 角形の面積を，それぞれ a と n を用いて表せ．

右の図のように，円 O に内接する正 n 角形の 1 辺を AB，外接する正 n 角形の 1 辺を CD とし，CD の中点を M とする．

◀ 正 n 角形を n 個の合同な三角形に分割する．



$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=a$，$\angle\mathrm{AOB}=\frac{360^\circ}{n}$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}a^2\sin\frac{360^\circ}{n}$$

よって，内接する正 n 角形の面積は，

$$n\times\triangle\mathrm{OAB}=\boldsymbol{\frac{1}{2}na^2\sin\frac{360^\circ}{n}}$$

また，$\mathrm{OM}=a$，$\mathrm{DM}=a\tan\frac{180^\circ}{n}$ より，$\triangle\mathrm{OCD}$ の面積は，

$$\triangle\mathrm{OCD}=2\cdot\frac{1}{2}a\cdot a\tan\frac{180^\circ}{n}=a^2\tan\frac{180^\circ}{n}$$

よって，外接する正 n 角形の面積は，

$$n\times\triangle\mathrm{OCD}=\boldsymbol{na^2\tan\frac{180^\circ}{n}}$$

解答 4.3

解答（節末）I4.3.2 ★★★ 節末 p.192

問題文

△ABC において，$\frac{\sin A}{13} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{7}$ が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) $\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ．
(2) △ABC の内接円の半径が 1 のとき，△ABC の面積，△ABC の外接円の半径を求めよ．

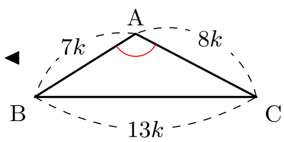
(1) 正弦定理 $\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin B} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin C}$ より，

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} = \sin A : \sin B : \sin C \cdots \text{(i)}$$

$\frac{\sin A}{13} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{7}$ より，

$$\sin A : \sin B : \sin C = 13 : 8 : 7 \cdots \text{(ii)}$$

(i)，(ii) より，$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} = 13 : 8 : 7$
$\mathrm{BC} = 13k$，$\mathrm{CA} = 8k$，$\mathrm{AB} = 7k$ $(k > 0)$ とおくと，余弦定理より，



$$\cos A = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ であるから，$\sin A > 0$ より，

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

◀ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

(2) △ABC の面積を S とする．

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8k \cdot 7k \cdot \sin A = 14\sqrt{3}k^2$$

また，内接円の半径が 1 であるから，

$$S = \frac{1}{2} \cdot (13k + 8k + 7k) \cdot 1 = 14k$$

したがって，$7k(\sqrt{3}k - 1) = 0$
$k > 0$ より，$k = \frac{1}{\sqrt{3}}$
ゆえに，$\mathrm{AB} = 7k = 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$
求める △ABC の面積 S は，$S = 14k = 14 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{14\sqrt{3}}{3}}$
外接円の半径を R とすると，正弦定理より，$\frac{13k}{\sin A} = 2R$
よって，△ABC の外接円の半径は，

$$R = \frac{13k}{2\sin A} = 13 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \div \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{13}{3}}$$

◀ $2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A}$ より，

$$R = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin A}$$

解答
4.3

解答（節末）I4.3.3 ★★★ 節末 p.192

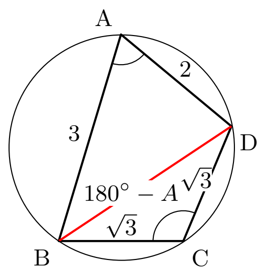
問題文

円に内接する四角形 ABCD がある．$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\sqrt{3}$, $\mathrm{DA}=2$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{BAD}$ と対角線 BD の長さを求めよ．

(2) 2 つの対角線 AC と BD の交点を E とする．BE : ED と BE の長さを求めよ．

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから，



$$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\angle\mathrm{BAD}$$

◀ $\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{BAD}=180^\circ$

△ABD において，余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos\angle\mathrm{BAD}=13-12\cos\angle\mathrm{BAD}\cdots\text{(i)}$$

◀ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

△BCD において，余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(180^\circ-\angle\mathrm{BAD})=6+6\cos\angle\mathrm{BAD}\cdots\text{(ii)}$$

(i)，(ii) より，$13-12\cos\angle\mathrm{BAD}=6+6\cos\angle\mathrm{BAD}$

したがって，$\cos\angle\mathrm{BAD}=\boldsymbol{\frac{7}{18}}$

(i) に代入すると，$\mathrm{BD}^2=13-12\cdot\left(\frac{7}{18}\right)=\frac{25}{3}$

よって，$\mathrm{BD}>0$ より，$\mathrm{BD}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$

(2) $\mathrm{BE}:\mathrm{ED}=\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ACD}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}:\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}=3\cdot\sqrt{3}:\sqrt{3}\cdot2=\mathbf{3:2}$

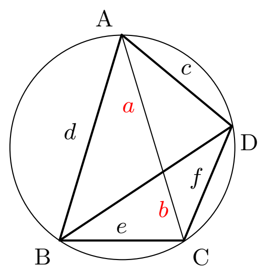
◀ 下の線分比と面積比の関係を用いる．

よって，$\mathrm{BE}=\mathrm{BD}\cdot\frac{3}{3+2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{5}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

線分比と面積比

右の図において，線分比と面積比の関係より，

$$a:b=\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{CBD}=\frac{1}{2}cd\sin\angle\mathrm{BAD}:\frac{1}{2}ef\sin(180^\circ-\angle\mathrm{BAD})=cd:ef$$



解答（節末）I4.3.4 ★★★ 節末 p.192

問題文

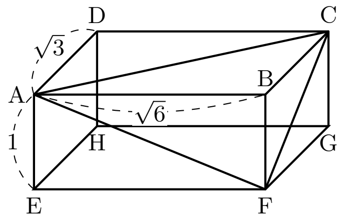
$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AE}=1$ である右の図のような直方体 ABCD − EFGH がある．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\angle\mathrm{ACF}$

(2) $\triangle\mathrm{ACF}$ の面積

(3) 四面体 BAFC の体積

(4) B から平面 AFC に下ろした垂線の長さ

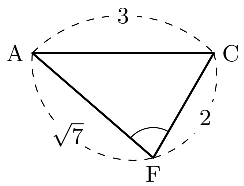


(1) $\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ より，$\mathrm{AC}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$

$\mathrm{AF}^2=\mathrm{AE}^2+\mathrm{EF}^2$ より，$\mathrm{AF}=\sqrt{6+1}=\sqrt{7}$

$\mathrm{CF}^2=\mathrm{BF}^2+\mathrm{BC}^2$ より，$\mathrm{CF}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\triangle\mathrm{AFC}$ において，余弦定理より，



◀ 三平方の定理を用いる．

$$\cos\angle\mathrm{ACF}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{1}{2}$$

よって，$0^\circ<\angle\mathrm{ACF}<180^\circ$ より，$\angle\mathrm{ACF}=\mathbf{60^\circ}$

(2) $\triangle\mathrm{ACF}$ の面積を S とすると，$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin\angle\mathrm{ACF}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

(3) 四面体 BAFC の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABF}\cdot\mathrm{BC}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot1\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{18}}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdots\text{(i)}$$

◀ $\triangle\mathrm{ABF}$ を底面とすると，V が求められる．

(4) 求める垂線の長さを h とすると，$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ACF}\cdot h$

したがって，(i)，(ii) より，$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot h\cdots\text{(ii)}$

よって，$h=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

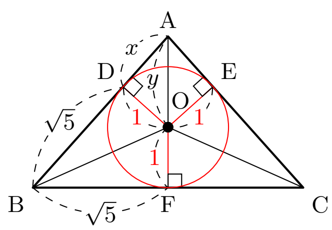
解答（節末）I4.3.5 ★★★ 節末 p.192

問題文

底面の半径 $\sqrt{5}$ の直円錐に半径 1 の球が内接している．このとき，この直円錐の体積を求めよ．

右の図のように，直円錐の頂点 A と底面の円の直径 BC を含む平面 (切断面) を考える．球の中心を O，直円錐と球との接点を D，E，F とし，$\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{AO}=y$ とおく．

$\triangle\mathrm{ADO}\sim\triangle\mathrm{AEB}$ より，



◀ ～は相似を表す．$\angle\mathrm{DAO}=\angle\mathrm{EAB}$，$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{AEB}$ より，相似である．

$\mathrm{AD}:\mathrm{AE}=\mathrm{DO}:\mathrm{EB}$，すなわち，$x:(y+1)=1:\sqrt{5}\cdots\text{(i)}$

$\mathrm{AO}:\mathrm{AB}=\mathrm{DO}:\mathrm{EB}$，すなわち，$y:(x+\sqrt{5})=1:\sqrt{5}\cdots\text{(ii)}$

◀ 2 つの接線の長さは等しいので，$\mathrm{BD}=\mathrm{BE}=\sqrt{5}$ である．（数学 A で学習する）

(i) より，$y+1=\sqrt{5}x\cdots\text{(iii)}$

(ii) より，$x+\sqrt{5}=\sqrt{5}y$，すなわち，$x=\sqrt{5}(y-1)\cdots\text{(iv)}$

(iii)，(iv) より，$y+1=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}(y-1)$

したがって，$y+1=5(y-1)$ より，$y=\frac{3}{2}$

このとき，これを (iv) に代入すると，$x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

よって，求める直円錐の体積を V とすると，$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)=\boldsymbol{\frac{25}{6}\pi}$

◀ 高さ $\mathrm{AE}=\mathrm{AO}+\mathrm{OE}$

解答 4.3

章末問題 4（解答）

解答（章末）I4.1 ★★　章末 p.193

問題文

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\tan^3\theta + \frac{1}{\tan^3\theta}$ の値を求めよ．

$$\begin{aligned}\tan^3\theta + \frac{1}{\tan^3\theta} &= \left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)^3 - 3\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)\\ &= \left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)^3 - 3\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)\cdots\text{(i)}\end{aligned}$$

◀ $a^3 - b^3$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

また，

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\cdots\text{(ii)}$$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を 2 乗すると，$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{5}$
したがって，$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5}$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

整理すると，$\sin\theta\cos\theta = -\frac{2}{5}$
ゆえに，(ii) より，$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{5}{2}$
よって，(i) より，$\tan^3\theta + \frac{1}{\tan^3\theta} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{65}{8}}$

解答（章末）I4.2 ★★★★　章末 p.193

問題文

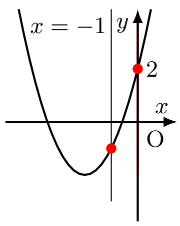
$\sin^2\theta + 2a\cos\theta - 3 = 0$ が $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲に解をもつための定数 a の値の範囲を求めよ．

$\cos\theta = t$ とおくと,与えられた方程式は,$1-t^2+2at-3=0$,すなわち,$t^2-2at+2=0$ となり，この 2 次方程式の判別式を D とする．

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より，
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

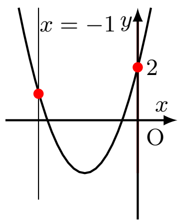
$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 0$ より，$-1 \leqq t \leqq 0$
$f(t) = t^2 - 2at + 2$ とおくと，与えられた方程式が $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ に解をもつのは，$y = f(t)$ のグラフが $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲で t 軸と共有点をもつときである．
また，$f(-1) = 2a + 3$，$f(0) = 2$ より，$f(0) > 0$ であるから，求める条件は，(i)，(ii) の場合に分けられる．

◀



(i) $f(-1) \leqq 0$，すなわち，$a \leqq -\frac{3}{2}$ のとき
$f(-1)\cdot f(0) \leqq 0$ となることから，これは求める条件を満たす．
(ii) $f(-1) > 0$，すなわち，$a > -\frac{3}{2}$ のとき
求める条件は，（ア）$D \geqq 0$ （イ）軸 $t = a$ が $-1 < t < 0$ である．

◀ 下の図のようになるa の値は存在しない．



（ア）$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1\cdot1\cdot2 = a^2 - 2$ であり,$D \geqq 0$ から,$a \leqq -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} \leqq a$
（イ）$y = f(t)$ の軸は直線 $t = a$ であり，軸が $-1 < t < 0$ の間にあるから，$-1 < a < 0$

したがって，（ア），（イ）より，これらを同時に満たすa の値は存在しない．
よって，(i)，(ii) より，求める定数 a の値の範囲は，$\boldsymbol{a \leqq -\frac{3}{2}}$

解答（章末）I4.3 ★★★ 章末 p.193

問題文

三角形 ABC の辺 BC を $8:5$ に内分する点を D とする．$\mathrm{AB}=7$，$\mathrm{AC}=5\sqrt{3}$，$\mathrm{AD}=5$ であるとき，次の値を求めよ．

(1) $\angle\mathrm{ADB}$ の大きさ　　(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積

(1) $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=8:5$ より，$\mathrm{BD}=8k$，$\mathrm{DC}=5k$ $(k>0)$，また，$\angle\mathrm{ADB}=\theta$ とおく．

$\triangle\mathrm{ABD}$ において，余弦定理より，$7^2=5^2+(8k)^2-2\cdot5\cdot8k\cdot\cos\theta$

整理すると，$8k^2-10k\cos\theta-3=0\cdots$(i)

$\triangle\mathrm{ACD}$ において，余弦定理より，$(5\sqrt{3})^2=5^2+(5k)^2-2\cdot5\cdot5k\cdot\cos(180^\circ-\theta)$

したがって，$75=25+25k^2+50k\cos\theta$

◀ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

整理すると，$5k^2+10k\cos\theta-10=0\cdots$(ii)

(i) と (ii) の辺々を足し合わせると，$13k^2-13=0$

ゆえに，$k>0$ より，$k=1$

これを (i) に代入すると，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より，$\theta=60^\circ$

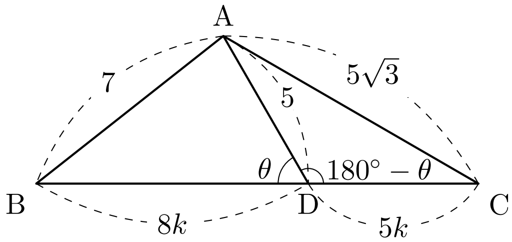
◀ (ii) に代入してもよい．

よって，$\angle\mathrm{ADB}=\mathbf{60^\circ}$

(2) 求める $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は,

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{13}{8}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{13}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\sin60^\circ=\boldsymbol{\frac{65\sqrt{3}}{4}}$$

◀ $\mathrm{BD}:\mathrm{BC}=8:13$ より，$\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{ABC}=8:13$
なお，A から BC に垂線を下ろし，60° の三角比から高さを考えることで面積を求めてもよい．



解答 4.4

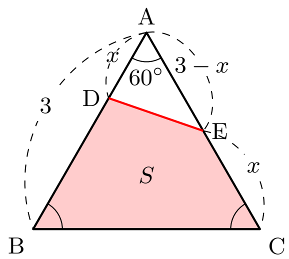
解答（章末）I4.4 ★★★★ 章末 p.193

問題文

1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC がある．辺 AB，AC 上に，それぞれ頂点とは異なる点 D，E を，AD $=$ CE を満たすようにとる．また，四角形 DBCE の面積を S とする．

(1) DE の長さの最小値を求めよ．

(2) 面積 S の最小値とそのときの AD の長さを求めよ．



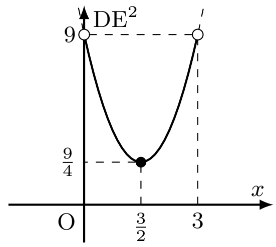
(1) AD $=$ CE $= x$ とすると，

$$0 < x < 3$$

◀ 1 辺の長さが 3 であるから，$x < 3$ であり，また，辺の長さは正であるから，$0 < x$ である．

△ADE において，余弦定理より，

$$\begin{aligned} \mathrm{DE}^2 &= x^2 + (3-x)^2 - 2x \cdot (3-x) \cdot \cos 60^\circ \\ &= 3x^2 - 9x + 9 \\ &= 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$



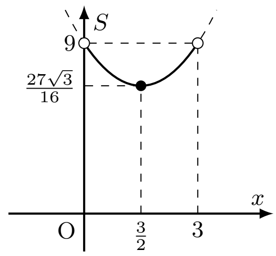
したがって，$0 < x < 3$ の範囲において，DE^2 は $x = \frac{3}{2}$ のとき，最小値 $\frac{9}{4}$

よって，DE > 0 であるから，DE は AD $= \frac{3}{2}$ のとき，**最小値 $\frac{3}{2}$**

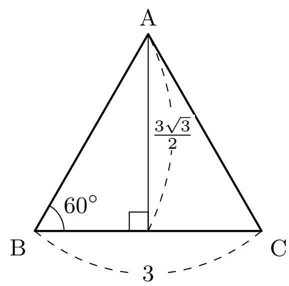
◀ DE^2 が最小となるとき，DE も最小となる．

(2)

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{ADE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}x(3-x)\sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\{9 - x(3-x)\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2 - 3x + 9\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$



◀ 三角形の面積 ABC の面積は，$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$



よって，$0 < x < 3$ の範囲において，S は **AD $= \frac{3}{2}$ のとき，最小値 $\frac{27\sqrt{3}}{16}$**

解答 4.4

解答（章末）I4.5 ★★★ 章末 p.193

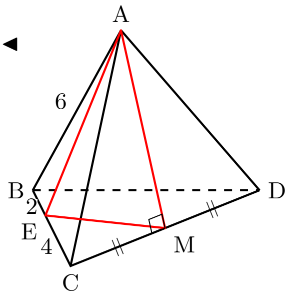
問題文

1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD について，辺 BC 上に BE : EC = 1 : 2 となるように点 E をとり，辺 CD の中点を M，$\angle\mathrm{EAM} = \theta$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos\theta$　　(2) $\triangle\mathrm{AEM}$ の面積 S

(1) $\triangle\mathrm{ACM}$ は，$\angle\mathrm{AMC} = 90^\circ$ の直角三角形であるから，

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{ACM} = \mathrm{AC}\sin 60^\circ = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$



◀

$\triangle\mathrm{ABE}$ において，余弦定理により，

$$\mathrm{AE}^2 = 6^2 + 2^2 - 2\cdot 6\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = 28$$

したがって，$\mathrm{AE} > 0$ より，$\mathrm{AE} = 2\sqrt{7}$

$\triangle\mathrm{CEM}$ において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{EM}^2 &= \mathrm{CE}^2 + \mathrm{CM}^2 - 2\cdot\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CM}\cdot\cos\angle\mathrm{ECM}\\ &= 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos 60^\circ = 13\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{EM} > 0$ より，$\mathrm{EM} = \sqrt{13}$

$\triangle\mathrm{EAM}$ において，余弦定理より，

$$\cos\theta = \frac{(3\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{13})^2}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{6}}$$

(2) $\sin\theta > 0$ であるから，

◀ $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，$\sin\theta > 0$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

よって，求める $\triangle\mathrm{AEM}$ の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{15}}{6} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{35}}{2}}$$

データの分析（解答）

データの整理と分析（解答）

解答 I5.1.1 ★ 問題 p.200

問題文

次のデータは，ある月の A 市の毎日の降水量の記録である．

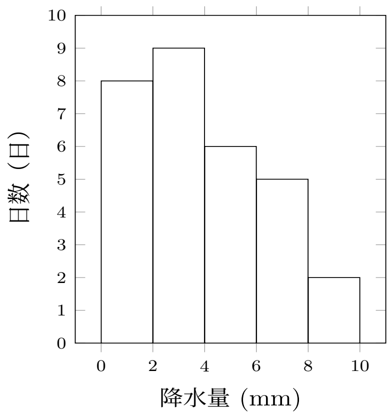
3.5, 7.2, 2.1, 9.1, 6.1, 4.3, 2.9, 3.7, 5.8, 0.0,
2.1, 8.4, 0.7, 1.2, 5.0, 4.9, 3.3, 6.7, 7.8, 2.5,
1.0, 6.2, 1.6, 4.0, 2.3, 0.8, 3.9, 1.5, 0.0, 5.5 (mm)

(1) 階級の幅を 2 mm として，度数分布表を作成せよ．ただし，階級は 0 mm から区切り始めるものとする．
(2) (1) で作った度数分布表をもとにヒストグラムをかけ．

(1)

階級 (mm)	度数
0 以上 2 未満	8
2 ～ 4	9
4 ～ 6	6
6 ～ 8	5
8 ～ 10	2
計	30

(2)



◀ 0mm 以上 2mm 未満から考え，5 個の階級に分ける．

解答 I5.1.2 ★ 問題 p.201

問題文

次のデータは，A クラス 6 人，B クラス 5 人の 10 点満点のテストの得点である．

A クラス：7, 8, 6, 9, 5, 8（点）　　B クラス：4, 5, 6, 7, 3 （点）

(1) A クラスのデータの平均値と B クラスのデータの平均値をそれぞれ求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．
(2) A クラスと B クラスを合わせた 11 人のデータの平均値を求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．
(3) A クラスのデータの中央値と B クラスのデータの中央値をそれぞれ求めよ．

(1) A クラスの平均値は，$\frac{7+8+6+9+5+8}{6} = \frac{43}{6} \fallingdotseq \mathbf{7.17}$ **(点)**
B クラスの平均値は，$\frac{4+5+6+7+3}{5} = \frac{25}{5} = \mathbf{5}$ **(点)**

◀ (平均値) $=$ $\frac{(\text{データの値の総和})}{(\text{データの値の個数})}$

(2) A クラスと B クラスを合わせた 11 人のデータの平均値は，

$$\frac{43+25}{11} = \frac{68}{11} \fallingdotseq \mathbf{6.18}\ \textbf{(点)}$$

◀ (1) より，A クラスのデータの総和は 43，B クラスのデータの総和は 25 である．

(3) A クラスのデータの中央値は，データを小さい順に並べると，5，6，7，8，8，9
よって，中央値は 3 番目の値と 4 番目の値の平均値であるから，$\frac{7+8}{2} = \mathbf{7.5}$ **(点)**
B クラスのデータの中央値は，データを小さい順に並べると，3，4，5，6，7
よって，中央値は 3 番目の値である **5 (点)**

◀ データの個数が奇数個（5 個）である．

解答
5.1

解答 I5.1.3 ★　問題 p.202

問題文

右の表は，ある家庭の 10 日間の 1 日の電気使用量（整数）の記録である．

(1) このデータの平均値の最小値と最大値を求めよ．

(2) 10 日間の電気使用量の平均は 12 (kWh) であり，各日の電気使用量は x，18，15，13，12，10，10，8，7，6 (kWh) であった．x の値を求めよ．

使用量の階級（kWh）	日数
5 以上 10 未満	3
10 ～15	4
15 ～20	3
計	10

(1) データの平均値が最小となるのは，データのそれぞれの値が各階級の最小の値となるときであるから，$\frac{1}{10}(5\times3+10\times4+15\times3)=10$

よって，平均値の **最小値は，10 (kWh)**

データの平均値が最大となるのは，データのそれぞれの値が各階級の最大の値となるときであるから，$\frac{1}{10}(9\times3+14\times4+19\times3)=14$

よって，平均値の **最大値は，14 (kWh)**

◀ 使用量は整数であるから，例えば 5 以上 10 未満の階級において，最大の値（最大値）は 9 である．

【別解】データの平均値が最大となるのは，データのそれぞれの値が最小の値より 4kWh だけ大きいときであるから，平均使用量も 4kWh 高くなり，10+4 = **14 (kWh)**

(2) 合計使用量を考えると，

$$x+18+15+13+12+10+10+8+7+6=12\times10$$

したがって，$x+99=120$

よって，$x=\mathbf{21}$

解答 I5.1.4 ★★　問題 p.203

問題文

次のデータは，ある学生が過去 12 ヶ月間に記録した月ごとの読書冊数である．このデータの箱ひげ図をかけ．ただし，外れ値がある場合は，外れ値を示して箱ひげ図をかけ．

13，15，14，17，16，19，18，20，21，23，25，32 (冊)

与えられたデータを小さい順に並べると，次のようになる．

13，14，15，16，17，18，19，20，21，23，25，32

したがって，最大値は 32 冊，最小値は 13 冊

第 1 四分位数は，$Q_1=\frac{15+16}{2}=15.5$ (冊)

第 2 四分位数（中央値）は，$Q_2=\frac{18+19}{2}=18.5$ (冊)

第 3 四分位数は，$Q_3=\frac{21+23}{2}=22$ (冊)

四分位範囲は，$Q_3-Q_1=22-15.5=6.5$ (冊)

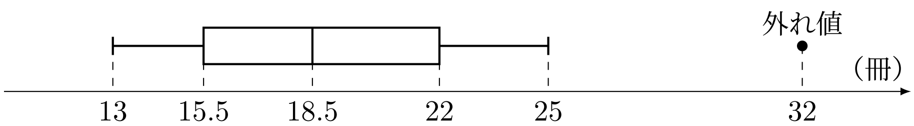
ここで，$6.5\times1.5=9.75$ より，外れ値の目安は，$15.5-9.75=5.75$ より，5.75 以下か，$22+9.75=31.75$ より，31.75 以上のデータである．

◀ 四分位範囲の 1.5 倍以上離れているか否かで判断する．

ゆえに，32 は外れ値となる．

よって，箱ひげ図は次のようになる．

◀ 外れ値を除いた最大の値が最大値となる．また，求めた 5 数要約はそのまま示す．



解答 I5.1.5 ★★ 問題 p.204

問題文

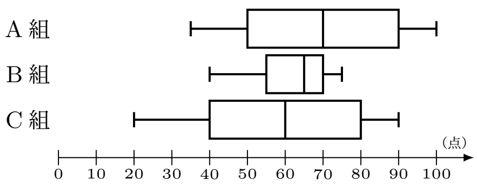
右の図は，生徒数がいずれも 36 人の A 組，B 組，C 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．

(1) 上位 9 人の散らばりが最も小さい組はどれか．

(2) 70 点以上の生徒が 18 人以上いる組はどれか．

(3) 75 点をとった生徒が上位から 14 番目，45 点をとった生徒が上位から 23 番目であった組はどれか．

(4) 全体の散らばりが最も大きい組はどれか．



各組の生徒数は 36 人であるから，中央値は点数の低い方から 18 番目と 19 番目の得点の平均値である．また，第 1 四分位数は点数の低い方から 9 番目と 10 番目の得点の平均値であり，第 3 四分位数は点数の高い方から 9 番目と 10 番目の得点の平均値である．

(1) 上位 9 人の散らばりが最も小さい，つまり，箱ひげ図の第 3 四分位数から最大値までが最も短い組であるから，**B 組**

(2) 生徒 18 人は，各組の生徒数 36 人の 50%（半分）に相当する．つまり，中央値が 70 点以上の組であるから，**A 組**

(3) 上位から 14 番目は中央値 Q_2 と第 3 四分位数 Q_3 の間に位置し，上位から 23 番目は第 1 四分位数 Q_1 と中央値 Q_2 の間に位置する．箱ひげ図が，$Q_1 < 45 < Q_2 < 75 < Q_3$ となっている組であるから，**C 組**

(4)全体の散らばりは，範囲で決まるから，全体の散らばりが最も大きい，つまり，全体が最も長い組であるから，**C 組**

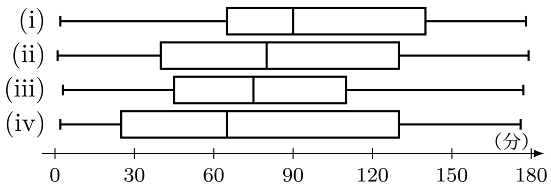
◀ 範囲の大小から散らばりを考えることができる．

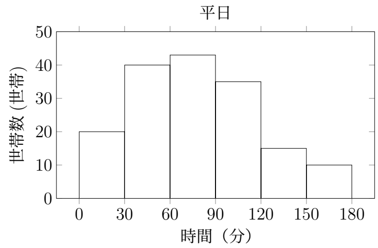
解答 5.1

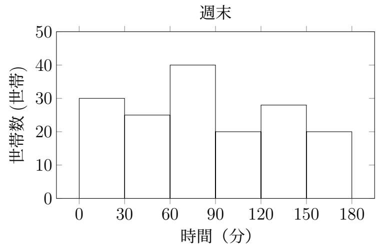
解答 I5.1.6 ★★ 問題 p.205

問題文

右のヒストグラムは，ある地域の 163 世帯について，ある電化製品の週末の電力使用時間（分）を調査した結果である．平日，週末の電力使用時間に対応する箱ひげ図を，左下の (i)〜(iv) からそれぞれ 1 つずつ選べ．







世帯数は 163 世帯であるから，データの値を小さい順に並べたとき，41 番目の値が第 1 四分位数，82 番目の値が第 2 四分位数，123 番目の値が第 3 四分位数である．ヒストグラムより，41 番目，82 番目，123 番目の値が含まれる階級は次のようになる．

◀ ヒストグラムから 41 番目，82 番目，123 番目の値の階級を読み取る．

	最小値	41 番目の値	82 番目の値	123 番目の値	最大値
平日	0 〜 30	30 〜 60	60 〜 90	90 〜 120	150 〜 180
週末	0 〜 30	30 〜 60	60 〜 90	120 〜 150	150 〜 180

よって，平日，週末の電力使用時間の箱ひげ図はそれぞれ **平日は (iii)，週末は (ii)**

解答 5.1

解答 I5.1.7 ★★ 問題 p.206

問題文

下の表は A，B の 2 つの倉庫で 1 日あたりの荷物の搬入量（単位: 箱）を 10 日間調査した結果である．

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 倉庫の搬入量 (箱)	8	6	6	7	7	8	8	7	6	7
B 倉庫の搬入量 (箱)	5	4	5	6	4	5	5	7	4	5

(1) A 倉庫，B 倉庫それぞれの搬入量の平均値 $\overline{a}$，$\overline{b}$，分散 ${s_a}^2$，${s_b}^2$，標準偏差 s_a，s_b を求めよ．ただし，$\sqrt{3}=1.73$，$\sqrt{5}=2.24$ とし，標準偏差は小数第 2 位を四捨五入して答えよ．

(2) (1) から，A 倉庫，B 倉庫の 2 つの倉庫の搬入量の散らばりはどちらが大きいか．

(1)

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= \frac{1}{10}(8+6+6+7+7+8+8+7+6+7) = \mathbf{7\ (箱)}\\
{s_a}^2 &= \frac{1}{10}\left\{(8-7)^2+(6-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2\right.\\
&\qquad \left.+(8-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2\right\}\\
&= \mathbf{0.6}\\
s_a &= \sqrt{0.6} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{5} \fallingdotseq \mathbf{0.8\ (箱)}\\
\overline{b} &= \frac{1}{10}(5+4+5+6+4+5+6+6+4+5) = \mathbf{5\ (箱)}\\
{s_b}^2 &= \frac{1}{10}\left\{(5-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2\right.\\
&\qquad \left.+(5-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2\right\}\\
&= \mathbf{0.8}\\
s_b &= \sqrt{0.8} = \frac{\sqrt{80}}{10} = \frac{\sqrt{16}\times\sqrt{5}}{10} \fallingdotseq \mathbf{0.9\ (箱)}
\end{aligned}$$

◀ 平均値は整数である．

◀ $s^2 = (x^2$ の平均値$) - (x$ の平均値$)^2$ を用いて求めてもよい．

(2) $s_b > s_a$ より，**B 倉庫の方が搬入量の散らばりが大きい．**

解答 5.1

One math

解答 I5.1.8 ★★ 問題 p.207

問題文

右の表はクラス A とクラス B の 4 日間における生徒の読書ページ数のデータである．

(1) クラス A の読書ページ数の平均値と分散を求めよ．

(2) クラス B の 1 日目から 4 日目までの読書ページ数の平均値は 12 ページ，分散は 30.5 であるとき，クラス B の読書ページ数 a，b を求めよ．ただし，$a < b$ とする．

日数	クラス A	クラス B
1	5	a
2	8	16
3	7	12
4	6	b

(1) クラス A の読書ページ数の平均値は，$\frac{1}{4}(5+8+7+6) = \mathbf{6.5}$ **(ページ)**

クラス A の読書ページ数の分散は，

$$\frac{1}{4}\left(5^2+8^2+7^2+6^2\right) - 6.5^2 = 43.5 - 42.25 = \mathbf{1.25}$$

◀ $s^2 = (x^2$ の平均値$) - (x$ の平均値$)^2$ を用いて求めている．

(2) 平均値が 12 ページであるから，$\frac{1}{4}(a+16+12+b) = 12$

したがって，$a+b = 20 \cdots$ (i)

分散が 30.5 であるから，

$$\frac{1}{4}\left\{(a-12)^2+(16-12)^2+(12-12)^2+(b-12)^2\right\} = 30.5$$

ゆえに，$(a-12)^2+(b-12)^2 = 106 \cdots$ (ii)

(i) より，$b = 20 - a$ を (ii) に代入すると，$a^2 - 20a + 51 = 0$

よって，$a = 3$，17

これを (i) に代入すると，$a < b$ より，$a = \mathbf{3}$，$b = \mathbf{17}$

解答 I5.1.9 ★★ 問題 p.208

問題文

次のデータは，あるクラスの 12 人の生徒があるテストで得た点数を並べたものである．

80，85，90，88，76，94，89，92，81，84，87，80 （点）

(1) このデータの平均値を求めよ．
(2) このデータに誤りが見つかり，正しくは 92 点が 88 点，94 点が 98 点であった．この誤りを修正すると，平均値，分散は，修正前から増加するか，減少するか，変化しないかを答えよ．

(1) $\frac{1}{12}(80+85+90+88+76+94+89+92+81+84+87+80) = \mathbf{85.5}$ **(点)**
(2) $92+94=88+98$ であるから，データの総和は変わらず，平均値は修正前と同じである．
よって，修正後の平均値は**変化しない．**
また，修正前の 2 つのデータの偏差の 2 乗の和は，

$$(92-85.5)^2+(94-85.5)^2=114.5$$

修正後の 2 つのデータの偏差の 2 乗の和は，

$$(88-85.5)^2+(98-85.5)^2=162.5$$

よって，偏差の 2 乗の総和は増加するため，分散は修正前より**増加する．**

◀ 平均値が修正前と修正後で一致しているから，修正していない 10 人分のデータは，偏差の 2 乗の値に変化はない．

解答 I5.1.10 ★★ 問題 p.209

問題文

変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ が $\overline{x}=50$，分散 ${s_x}^2=36$ であるとする．このとき，次の式によって得られる変量 y のデータについて，平均値 $\overline{y}$，分散 ${s_y}^2$，標準偏差 s_y を求めよ．

(1) $y=x-20$　(2) $y=3x$　(3) $y=-2x+10$　(4) $y=\frac{x-50}{6}$

(1) $\overline{y}=\overline{x}-20=50-20=\mathbf{30}$

$${s_y}^2=1^2\times{s_x}^2=\mathbf{36}$$

$$s_y=1\times s_x=\sqrt{36}=\mathbf{6}$$

(2) $\overline{y}=3\overline{x}=3\times 50=\mathbf{150}$

$${s_y}^2=3^2\times{s_x}^2=9\times 36=\mathbf{324}$$

$$s_y=3\times s_x=3\times\sqrt{36}=\mathbf{18}$$

(3) $\overline{y}=-2\overline{x}+10=-2\times 50+10=-100+10=\mathbf{-90}$

$${s_y}^2=(-2)^2\times{s_x}^2=4\times 36=\mathbf{144}$$

$$s_y=|-2|\times s_x=2\times\sqrt{36}=\mathbf{12}$$

(4) $\overline{y}=\dfrac{\overline{x}-50}{6}=\dfrac{50-50}{6}=\mathbf{0}$

$${s_y}^2=\frac{{s_x}^2}{6^2}=\frac{36}{36}=\mathbf{1}$$

$$s_y=\frac{s_x}{6}=\frac{\sqrt{36}}{6}=\mathbf{1}$$

◀ 標準偏差 s_y は，分散 ${s_y}^2$ より求めてもよい．
例：(1) ${s_y}^2=36$ より，

$$s_y=\sqrt{36}=6$$

(2) ${s_y}^2=324$ より，

$$s_y=\sqrt{324}=18$$

解答 I5.1.11 ★★ 問題 p.210

問題文

次のような変量 x のデータがある．このとき，次の問いに答えよ．

$$550,\ 620,\ 590,\ 570,\ 610,\ 630,\ 560,\ 580,\ 590,\ 600$$

(1) $y=x-600$ とおくことにより，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ．
(2) $z=\frac{x-600}{10}$ とおくことにより，変量 x のデータの分散を求めよ．

(1) y のデータの平均値を $\overline{y}$ とすると，

$$\overline{y}=\frac{1}{10}\{-50+20-10-30+10+30-40-20-10+0\}=-10$$

◀ $\overline{x}=\frac{1}{10}(550+\cdots+600)$ を用いても平均値は求められるが，計算に手間が掛かる．

よって，$\overline{x}$ は，$\overline{x}=\overline{y}+600=-10+600=\mathbf{590}$

(2) $z=\frac{x-600}{10}$ とおくと，z，z^2 の値は次のようになる．

x	550	620	590	570	610	630	560	580	590	600	計
y	-50	20	-10	-30	10	30	-40	-20	-10	0	-100
z	-5	2	-1	-3	1	3	-4	-2	-1	0	-10
z^2	25	4	1	9	1	9	16	4	1	0	70

したがって，z のデータの分散は，z のデータの平均値を $\overline{z}$ とすると，

$$\overline{z^2}-(\overline{z})^2=\frac{70}{10}-\left(\frac{-10}{10}\right)^2=7-1=6$$

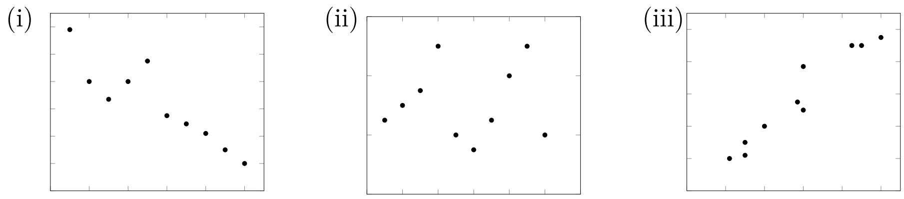
よって，x のデータの分散は，$10^2\times 6=100\times 6=\mathbf{600}$

◀ ${s_x}^2=10^2{s_z}^2$

解答 I5.1.12 ★ 問題 p.211

問題文

あるクラスの 10 名の生徒について，2 つの指標 X，Y でテスト結果を評価した．指標 X の評価値の分散は $\frac{33}{4}$，指標 Y の評価値の分散は $\frac{33}{4}$ で，X と Y の評価値の共分散は $-\frac{15}{2}$ であった．このとき，X と Y の評価値の相関係数を求めよ．また，X と Y の評価値として対応する散布図を次の (i)〜(iii) から選べ．



X の評価値の分散が $\frac{33}{4}$ より，標準偏差は $\sqrt{\frac{33}{4}}$
Y の評価値の分散が $\frac{33}{4}$ より，標準偏差は $\sqrt{\frac{33}{4}}$
X と Y の評価値の共分散が $-\frac{15}{2}$ より，求める相関係数は，

$$\frac{-\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{33}{4}}\times\sqrt{\frac{33}{4}}}=-\frac{30}{33}=-\mathbf{\frac{10}{11}}$$

◀ x と y の相関係数は，$\dfrac{(x\text{と}y\text{の共分散})}{(x\text{の標準偏差})\times(y\text{の標準偏差})}$

また，相関係数は負で，強い負の相関があるため，**散布図は (i)**

◀ 負の相関関係があるとき，散布図は右下がりの分布となる．

解答 5.1

One math

解答 I5.1.13 ★★ 問題 p.212

問題文

次の表は，5 名の生徒 A，B，C，D，E の運動時間 x（時間）と体力テストの点数 y（点）を測定した結果である．このとき，x と y の相関係数 r を求めよ．

	A	B	C	D	E
運動時間 x（時間）	8	6	8	5	8
点数 y（点）	10	12	15	10	13

x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，

$$\overline{x} = \frac{1}{5}(8+6+8+5+8) = 7 \text{ (時間)},$$
$$\overline{y} = \frac{1}{5}(10+12+15+10+13) = 12 \text{ (点)}$$

したがって，下のような表が得られる．

◀ 表を用いるとよい．

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	8	10	1	-2	1	4	-2
B	6	12	-1	0	1	0	0
C	8	15	1	3	1	9	3
D	5	10	-2	-2	4	4	4
E	8	13	1	1	1	1	1
計	35	60	0	0	8	18	6

よって，相関係数 r は，$r = \frac{6}{\sqrt{8\times18}} = \frac{6}{\sqrt{144}} = \frac{6}{12} = \mathbf{0.5}$

解答 I5.1.14 ★★ 問題 p.213

問題文

ある商品に新機能を追加し，20 人に対しアンケートをとったところ，15 人が「新機能が役立つ」と回答した．この結果から，新機能が役立つと判断してよいか．仮説検定により，基準となる確率を 0.05 として考察せよ．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 20 回投げて，表が出た回数を記録する実験を 200 セット行ったところ次の表のようになったとして，この結果を用いよ．

表が出た回数	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	計
度数	1	2	6	12	16	23	25	31	27	21	16	8	6	3	2	1	200

「新機能が役立つ」と判断してよいかを考察するために，これに反する「新機能が役立つとはいえない」，すなわち，「新機能が役立つ結果が得られたのは偶然である」という仮説を立てる．このとき，公正なコインの実験結果から，表が出た回数が 15 回以上である場合の相対度数は，

◀ コインを投げたときの表裏がそれぞれ出る確率と同様に考えることができる．

$$\frac{6+3+2+1}{200} = \frac{12}{200} = 0.06$$

よって，これは 0.05 より大きいから，偶然に起こり得る事象であるといえる．すなわち，仮説を棄却することはできず，**新機能が役立つとは判断できない．**

◀ 基準となる確率との大小を比較する．ここでは $0.06 > 0.05$ から，仮説は棄却されない．

解答 5.1

One math

解答（節末）I5.1.1 ★★ 節末 p.214

問題文

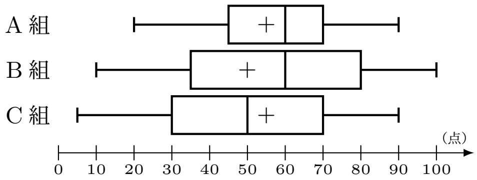
右の図は，生徒数がいずれも 40 人の A 組，B 組，C 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．次の (i)〜(iv) の記述のうち，適切ではないものを答えよ．

(i) B 組の合計得点は A 組の合計得点より小さい．

(ii) A 組と B 組において，得点が 60 点以上の人数は同じである．

(iii) B 組で得点が 50 点以上の人数は 20 人以上である．

(iv) B 組の生徒が，A 組，B 組，C 組全体の最高得点をとっている．



(i) A 組，B 組の得点の平均値は，それぞれおおよそ 55 点，50 点と読み取れる．
A 組，B 組ともに人数は同じであるから，平均値が小さいB 組の合計得点が A 組より低く，適切である．

◀ (平均値) $=\frac{(\text{合計得点})}{(\text{人数})}$

(ii) A 組，B 組とも中央値が 60 点であるが，得点が 60 点以上の生徒の人数は箱ひげ図からは読み取れない．
したがって，60 点以上の人数が同じであるとは限らず，適切ではない．

◀ 中央値と等しいデータは 1 個とは限らず，2 個以上の可能性もある．

(iii) B 組の得点の中央値は 60 点であるため，少なくとも 20 人が 60 点以上の得点をとっている．
したがって，50 点以上の人数は 20 人以上であるので，適切である．

(iv) A 組，B 組，C 組の得点の最大値は，それぞれ 90 点，100 点，90 点である．
したがって，B 組の最大得点が全体の最高得点であるため，適切である．

よって，適切ではないものは，**(ii)**

解答（節末）I5.1.2 ★★ 節末 p.214

問題文

10 人の社員に対して作業時間を記録した．記録したところ，作業時間の平均値は 20 ，分散は 4.5 であった．しかし，この 10 人のうち 2 人の作業時間が右の表のように修正された．修正後の 10 人の作業時間の平均値と分散を求めよ．

社員	修正前	修正後
A	18	22
B	17	23

修正後の作業時間の平均値を $\overline{x}$，分散を ${s_x}^2$，作業時間の 2 乗の平均値を $\overline{x^2}$ とする．
このとき，$\overline{x}=\frac{1}{10}\{20\times10-(18+17)+(22+23)\}=\mathbf{21}$ **(時間)**
修正前の作業時間の平均値を $\overline{y}$，分散を ${s_y}^2$，作業時間の 2 乗の平均値を $\overline{y^2}$ とする．
このとき，$\overline{y^2}={s_y}^2+(\overline{y})^2=4.5+20^2=404.5$

◀ ${s_y}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2$

したがって，$\overline{x^2}=\frac{1}{10}\left\{404.5\times10-\left(18^2+17^2\right)+\left(22^2+23^2\right)\right\}=444.5$
よって，${s_x}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=444.5-21^2=\mathbf{3.5}$

◀ ${s_x}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$

解答（節末）I5.1.3 ★★ 節末 p.214

問題文

ある地域で A 地区と B 地区の 2 か所のうちどちらかに新しい公園を建設する案があり，住民投票の結果，B 地区を支持した住民が 60 人中 43 人であった．一般に，B 地区の方が住民にとって望ましい建設地であると判断してよいであろうか．もし A 地区と B 地区を何も考えずに選ぶ場合，それぞれが選ばれる確率は 0.5 とし，起こる割合が 5% 以下であればほとんど起こりえないと判断するものとする．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 60 枚投げて，表が出た枚数を記録する実験を 1000 セット行ったところ右の表のようになったとして，この結果を用いよ．

表の枚数	回数
0 ～ 30	540
31	99
32	91
33	86
34	54
35	43
36	32
37	20
38	11
39	8
40	6
41	4
42	3
43	2
44	1
45	0

「B 地区の方が望ましい建設地である」と判断してよいかを考察するために，これに反する「B 地区の方が望ましい建設地とはいえない」という仮説を立てる．このとき，公正なコインの実験結果から，60 枚中 43 枚以上が表となる場合の相対度数は，

$$\frac{2+1}{1000}=\frac{3}{1000}=0.003$$

より，0.3%

よって，これは 5% より小さいから，仮説は正しくなかったと考えられ，仮説は棄却される．すなわち，**B 地区の方が望ましい建設地であると判断してよい．**

◀ A 地区と B 地区を何も考えずに選ぶ場合の B 地区の選ばれ方が 0.5 であるので，コインの表面の出方とおき換えて考えることができる．

◀ 基準となる確率との大小を比較する．

章末問題 5（解答）

解答（章末）I5.1 ★★ 章末 p.215

問題文

任意の連続する 4 個の自然数の分散 s^2 を求めよ．

n を自然数とすると，任意の連続する 4 個の自然数は，n，$n+1$，$n+2$，$n+3$ とおける．

4 個の自然数の平均値は，

$$\frac{1}{4}\{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)\}=n+1.5$$

よって，任意の連続する 4 個の自然数の分散は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\left\{n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2\right\}-(n+1.5)^2\\=&\frac{1}{4}\left(4n^2+12n+14\right)-\left(n^2+3n+2.25\right)\\=&\frac{14}{4}-2.25=\mathbf{1.25}\end{aligned}$$

◀ s^2 ＝（x^2 の平均値）－（x の平均値）^{2} を用いて求めている．

解答（章末）I5.2 ★★ 章末 p.215

問題文

変量 x についてのデータの値が p，q，r，s，t であるとする．データ p，q，r の平均値が 12 ，分散が 4 であり，データ s，t の平均値が 10 ，分散が 2 であるとするとき，変量 x の次の値を求めよ．

(1) 平均値　　(2) 分散

(1) データ p，q，r の平均値が 12 であるから，$\frac{p+q+r}{3}=12$

すなわち，$p+q+r=36\cdots$(i)

データ s，t の平均値が 10 であるから，$\frac{s+t}{2}=10$

すなわち，$s+t=20\cdots$(ii)

(i)，(ii) の辺々を足し合わせると，$p+q+r+s+t=56$

よって，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{p+q+r+s+t}{5}=\frac{56}{5}=\mathbf{11.2}$$

(2) データ p，q，r の分散が 4 であるから，$\frac{p^2+q^2+r^2}{3}-12^2=4$

すなわち，$p^2+q^2+r^2=444\cdots$(iii)

データ s，t の分散が 2 であるから，$\frac{s^2+t^2}{2}-10^2=2$

すなわち，$s^2+t^2=204\cdots$(iv)

(iii)，(iv) の辺々を足し合わせると，$p^2+q^2+r^2+s^2+t^2=648$

よって，x の分散は，

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2+t^2}{5}-\overline{x}^2=\frac{648}{5}-11.2^2=129.6-125.44=\mathbf{4.16}$$

◀ s^2 ＝（x^2 の平均値）－（x の平均値）^{2} を用いて求めている．

解答 5.2

One math

解答（章末）I5.3 ★★★ 章末 p.215

問題文

ある実験で得られた n 個の測定値 x_1，x_2，x_3，$\ldots$，x_n の平均が m，分散が σ^2 である．
p，q $(p>0,\ q>0)$ を正の定数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) $(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+(x_3-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2$ を最小にする x の値を求めよ．
(2) x_1+p，x_2+p，x_3+p，$\ldots$，x_n+p の平均値および分散を求めよ．
(3) qx_1，qx_2，qx_3，$\ldots$，qx_n の平均値および分散を求めよ．

(1) $(x_i-x)^2=x_i^2-2x_ix+x^2$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ となることから，与えられた式を整理すると，

$$nx^2-2\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)x+\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)$$

したがって，

$$\begin{aligned}&nx^2-2\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)x+\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)\\&=n\left\{x-\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\right\}^2-\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^2\\&\quad+\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)\end{aligned}$$

◀ x^2 の係数は正である．

◀ x についての 2 次式と考えて，平方完成する．

よって，$x=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)$ のとき，すなわち，$x=\boldsymbol{m}$ のとき，最小値をとる．

◀ 与えられた条件より，平均は m である．

(2)

$$\begin{aligned}(\text{平均値})&=\frac{1}{n}\left\{(x_1+p)+(x_2+p)+\cdots+(x_n+p)\right\}\\&=\frac{1}{n}\left\{(x_1+x_2+\cdots+x_n)+np\right\}\\&=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)+p\\&=\boldsymbol{m+p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{分散})&=\frac{1}{n}\left\{(x_1+p)^2+(x_2+p)^2+\cdots+(x_n+p)^2\right\}-(m+p)^2\\&=\frac{1}{n}\left\{\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)+2p\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)+np^2\right\}\\&\quad-(m+p)^2\\&=\frac{1}{n}\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)+2pm+p^2-(m+p)^2\\&=\frac{1}{n}\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)-m^2\\&=\boldsymbol{\sigma^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\text{平均値})&=\frac{1}{n}\left\{qx_1+qx_2+\cdots+qx_n\right\}=q\times\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\\&=\boldsymbol{qm},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{分散})&=\frac{1}{n}\left\{(qx_1)^2+(qx_2)^2+\cdots+(qx_n)^2\right\}-(qm)^2\\&=q^2\frac{1}{n}\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)-q^2m^2\\&=q^2\left(\sigma^2+m^2\right)-q^2m^2\\&=\boldsymbol{q^2\sigma^2}\end{aligned}$$

解答（章末）I5.4 ★★★ 章末 p.215

問題文

ある学校で，120 人の生徒が定期テストを受験した．得点の平均値が m 点，標準偏差が s 点である試験において，得点が x 点である受験者の偏差値は $50+\frac{10(x-m)}{s}$ で与えられる．A さんのこのテストの得点は 78 点であり，偏差値は 58 であった．また，このテストの得点の平均値は 66 点であった．
(1) 120 人の生徒の得点の標準偏差を求めよ．
(2) 後日，この定期テストを新たに 60 人が受験し，受験者数は合計で 180 人となった．その結果，試験の得点の平均値が 67 点となり，A さんの偏差値は 55 となった．新たに受験した 60 人の受験者の得点について，平均値と標準偏差をそれぞれ求めよ．

(1) 最初に受験した 120 人の得点の標準偏差を s_x とする．
A さんの偏差値より，$50+\frac{10(78-66)}{s_x}=58$
よって，$s_x=\mathbf{15}$

◀ 偏差値 $50+\frac{10(x-m)}{s}$ から，標準偏差を求める．

(2) 新たに受験した 60 人の得点の平均値を $\overline{y}$ とする．
180 人の得点の平均値より，

$$\frac{66\times 120+\overline{y}\times 60}{120+60}=67$$

◀ 120 人の得点の合計は，66×120（点）
60 人の得点の合計は，$\overline{y}\times 60$（点）

よって，$\overline{y}=\mathbf{69}$
180 人の得点の平均値を $\overline{z}$，標準偏差を s_z，得点の 2 乗の平均値を $\overline{z^2}$ とする．
A さんの得点の偏差値より，$50+\frac{10(78-67)}{s_z}=55$
したがって，$s_z=22$

◀ 偏差値 $50+\frac{10(x-m)}{s}$ から，標準偏差を求める．

${s_z}^2=\overline{z^2}-(\overline{z})^2$ であるから，

$$\overline{z^2}={s_z}^2+(\overline{z})^2=22^2+67^2=4973$$

また，最初に受験した 120 人の得点の平均値を $\overline{x}$，得点の 2 乗の平均値を $\overline{x^2}$ とすると，${s_x}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ であるから，

$$\overline{x^2}={s_x}^2+(\overline{x})^2=15^2+66^2=4581$$

ゆえに，新たに受験した 60 人の得点の 2 乗の平均値を $\overline{y^2}$ とすると，

$$\overline{y^2}=\frac{\overline{z^2}\times 180-\overline{x^2}\times 120}{60}=\frac{4973\times 180-4581\times 120}{60}=5757$$

よって，新たに受験した 60 人の得点の標準偏差 s_y は，

$$s_y=\sqrt{\overline{y^2}-(\overline{y})^2}=\sqrt{5757-69^2}=\mathbf{2\sqrt{249}}$$

◀ ${s_y}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2$

解答（章末）I5.5 ★★★ 章末 p.215

問題文

右の表は，ある数学クラスの学生 10 人がそれぞれ試験 A（代数）と試験 B（幾何）の得点を 0，1，2 の 3 段階で評価したときの得点を，2 次元の度数分布表にまとめたものである．試験 A の得点 x と試験 B の得点 y の相関係数 r を小数第 3 位まで求めよ．ただし，$\sqrt{70}=8.3666$ とする．

A\B	0	1	2	計
0	2	2	0	4
1	0	1	1	2
2	0	1	3	4
計	2	4	4	10

x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，下のような表が得られる．

◀ 表を用いるとよい．

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
	0	0	-1	-1.2	1	1.44	1.2
	0	0	-1	-1.2	1	1.44	1.2
	0	1	-1	-0.2	1	0.04	0.2
	0	1	-1	-0.2	1	0.04	0.2
	1	1	0	-0.2	0	0.04	0
	1	2	0	0.8	0	0.64	0
	2	1	1	-0.2	1	0.04	-0.2
	2	2	1	0.8	1	0.64	0.8
	2	2	1	0.8	1	0.64	0.8
	2	2	1	0.8	1	0.64	0.8
計	10	12	0	0	8	5.6	5
平均	1.0	1.2	0	0	0.8	0.56	0.5

x，y の標準偏差は，それぞれ，

$$s_x=\sqrt{0.8}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad s_y=\sqrt{0.56}=\frac{\sqrt{14}}{5}$$

x と y の共分散は，$s_{xy}=0.5=\frac{1}{2}$

よって，x と y の相関係数 r は，

$$r=\frac{1}{2}\div\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{14}}{5}\right)=\frac{25}{4\sqrt{70}}=\frac{5\sqrt{70}}{56}=\frac{5\cdot 8.3666}{56}\fallingdotseq\mathbf{0.747}$$

◀ $r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$

索引

動画一覧

番号	動画（リンク）	✓
I1.1.1	例題 I1.1.1（解説動画）	
I1.1.2	例題 I1.1.2（解説動画）	
I1.1.3	例題 I1.1.3（解説動画）	
I1.1.4	例題 I1.1.4（解説動画）	
I1.1.5	例題 I1.1.5（解説動画）	
I1.1.6	例題 I1.1.6（解説動画）	
I1.1.7	例題 I1.1.7（解説動画）	
I1.1.8	例題 I1.1.8（解説動画）	
I1.1.9	例題 I1.1.9（解説動画）	
I1.1.10	例題 I1.1.10（解説動画）	
I1.1.11	例題 I1.1.11（解説動画）	
I1.1.12	例題 I1.1.12（解説動画）	
I1.1.13	例題 I1.1.13（解説動画）	
I1.1.14	例題 I1.1.14（解説動画）	
I1.1.15	例題 I1.1.15（解説動画）	
I1.1.16	例題 I1.1.16（解説動画）	
I1.2.1	例題 I1.2.1（解説動画）	
I1.2.2	例題 I1.2.2（解説動画）	
I1.2.3	例題 I1.2.3（解説動画）	
I1.2.4	例題 I1.2.4（解説動画）	
I1.2.5	例題 I1.2.5（解説動画）	
I1.2.6	例題 I1.2.6（解説動画）	
I1.2.7	例題 I1.2.7（解説動画）	
I1.2.8	例題 I1.2.8（解説動画）	
I1.2.9	例題 I1.2.9（解説動画）	
I1.3.1	例題 I1.3.1（解説動画）	
I1.3.2	例題 I1.3.2（解説動画）	
I1.3.3	例題 I1.3.3（解説動画）	
I1.3.4	例題 I1.3.4（解説動画）	
I1.3.5	例題 I1.3.5（解説動画）	
I1.3.6	例題 I1.3.6（解説動画）	
I1.3.7	例題 I1.3.7（解説動画）	
I1.3.8	例題 I1.3.8（解説動画）	

番号	動画（リンク）	✓
I2.1.1	例題 I2.1.1（解説動画）	
I2.1.2	例題 I2.1.2（解説動画）	
I2.1.3	例題 I2.1.3（解説動画）	
I2.1.4	例題 I2.1.4（解説動画）	
I2.1.5	例題 I2.1.5（解説動画）	
I2.1.6	例題 I2.1.6（解説動画）	
I2.1.7	例題 I2.1.7（解説動画）	
I2.1.8	例題 I2.1.8（解説動画）	
I2.1.9	例題 I2.1.9（解説動画）	
I2.1.10	例題 I2.1.10（解説動画）	
I2.1.11	例題 I2.1.11（解説動画）	
I2.1.12	例題 I2.1.12（解説動画）	
I2.1.13	例題 I2.1.13（解説動画）	
I2.1.14	例題 I2.1.14（解説動画）	
I2.1.15	例題 I2.1.15（解説動画）	
I2.1.16	例題 I2.1.16（解説動画）	

番号	動画（リンク）	✓
I3.1.1	例題 I3.1.1（解説動画）	
I3.1.2	例題 I3.1.2（解説動画）	
I3.1.3	例題 I3.1.3（解説動画）	
I3.1.4	例題 I3.1.4（解説動画）	
I3.1.5	例題 I3.1.5（解説動画）	
I3.1.6	例題 I3.1.6（解説動画）	
I3.1.7	例題 I3.1.7（解説動画）	
I3.1.8	例題 I3.1.8（解説動画）	
I3.1.9	例題 I3.1.9（解説動画）	
I3.1.10	例題 I3.1.10（解説動画）	
I3.1.11	例題 I3.1.11（解説動画）	
I3.1.12	例題 I3.1.12（解説動画）	
I3.2.1	例題 I3.2.1（解説動画）	
I3.2.2	例題 I3.2.2（解説動画）	
I3.2.3	例題 I3.2.3（解説動画）	
I3.2.4	例題 I3.2.4（解説動画）	
I3.2.5	例題 I3.2.5（解説動画）	
I3.2.6	例題 I3.2.6（解説動画）	
I3.2.7	例題 I3.2.7（解説動画）	
I3.2.8	例題 I3.2.8（解説動画）	
I3.2.9	例題 I3.2.9（解説動画）	
I3.2.10	例題 I3.2.10（解説動画）	
I3.2.11	例題 I3.2.11（解説動画）	
I3.2.12	例題 I3.2.12（解説動画）	
I3.2.13	例題 I3.2.13（解説動画）	

番号	動画（リンク）	✓
I3.3.1	例題 I3.3.1（解説動画）	
I3.3.2	例題 I3.3.2（解説動画）	
I3.3.3	例題 I3.3.3（解説動画）	
I3.3.4	例題 I3.3.4（解説動画）	
I3.3.5	例題 I3.3.5（解説動画）	
I3.3.6	例題 I3.3.6（解説動画）	
I3.3.7	例題 I3.3.7（解説動画）	
I3.3.8	例題 I3.3.8（解説動画）	
I3.3.9	例題 I3.3.9（解説動画）	
I3.3.10	例題 I3.3.10（解説動画）	
I3.3.11	例題 I3.3.11（解説動画）	
I3.3.12	例題 I3.3.12（解説動画）	
I3.3.13	例題 I3.3.13（解説動画）	
I3.3.14	例題 I3.3.14（解説動画）	
I3.3.15	例題 I3.3.15（解説動画）	
I3.3.16	例題 I3.3.16（解説動画）	
I3.3.17	例題 I3.3.17（解説動画）	
I3.3.18	例題 I3.3.18（解説動画）	
I3.3.19	例題 I3.3.19（解説動画）	
I3.3.20	例題 I3.3.20（解説動画）	
I3.3.21	例題 I3.3.21（解説動画）	
I3.3.22	例題 I3.3.22（解説動画）	
I3.3.23	例題 I3.3.23（解説動画）	
I3.3.24	例題 I3.3.24（解説動画）	
I3.3.25	例題 I3.3.25（解説動画）	
I3.3.26	例題 I3.3.26（解説動画）	
I3.3.27	例題 I3.3.27（解説動画）	
I3.3.28	例題 I3.3.28（解説動画）	
I3.3.29	例題 I3.3.29（解説動画）	
I3.3.30	例題 I3.3.30（解説動画）	
I3.3.31	例題 I3.3.31（解説動画）	
I3.3.32	例題 I3.3.32（解説動画）	
I3.3.33	例題 I3.3.33（解説動画）	
I3.3.34	例題 I3.3.34（解説動画）	
I3.3.35	例題 I3.3.35（解説動画）	
I3.3.36	例題 I3.3.36（解説動画）	

番号	動画（リンク）	✓
I4.1.1	例題 I4.1.1（解説動画）	
I4.1.2	例題 I4.1.2（解説動画）	
I4.1.3	例題 I4.1.3（解説動画）	
I4.1.4	例題 I4.1.4（解説動画）	
I4.1.5	例題 I4.1.5（解説動画）	
I4.1.6	例題 I4.1.6（解説動画）	
I4.1.7	例題 I4.1.7（解説動画）	
I4.1.8	例題 I4.1.8（解説動画）	
I4.1.9	例題 I4.1.9（解説動画）	
I4.1.10	例題 I4.1.10（解説動画）	
I4.1.11	例題 I4.1.11（解説動画）	
I4.1.12	例題 I4.1.12（解説動画）	
I4.1.13	例題 I4.1.13（解説動画）	
I4.1.14	例題 I4.1.14（解説動画）	
I4.1.15	例題 I4.1.15（解説動画）	
I4.1.16	例題 I4.1.16（解説動画）	

I4.2.1	例題 I4.2.1（解説動画）	
I4.2.2	例題 I4.2.2（解説動画）	
I4.2.3	例題 I4.2.3（解説動画）	
I4.2.4	例題 I4.2.4（解説動画）	
I4.2.5	例題 I4.2.5（解説動画）	
I4.2.6	例題 I4.2.6（解説動画）	
I4.2.7	例題 I4.2.7（解説動画）	

I4.3.1	例題 I4.3.1（解説動画）	
I4.3.2	例題 I4.3.2（解説動画）	
I4.3.3	例題 I4.3.3（解説動画）	
I4.3.4	例題 I4.3.4（解説動画）	
I4.3.5	例題 I4.3.5（解説動画）	
I4.3.6	例題 I4.3.6（解説動画）	
I4.3.7	例題 I4.3.7（解説動画）	
I4.3.8	例題 I4.3.8（解説動画）	
I4.3.9	例題 I4.3.9（解説動画）	
I4.3.10	例題 I4.3.10（解説動画）	
I4.3.11	例題 I4.3.11（解説動画）	

番号	動画（リンク）	✓
I5.1.1	例題 I5.1.1（解説動画）	
I5.1.2	例題 I5.1.2（解説動画）	
I5.1.3	例題 I5.1.3（解説動画）	
I5.1.4	例題 I5.1.4（解説動画）	
I5.1.5	例題 I5.1.5（解説動画）	
I5.1.6	例題 I5.1.6（解説動画）	
I5.1.7	例題 I5.1.7（解説動画）	
I5.1.8	例題 I5.1.8（解説動画）	
I5.1.9	例題 I5.1.9（解説動画）	
I5.1.10	例題 I5.1.10（解説動画）	
I5.1.11	例題 I5.1.11（解説動画）	
I5.1.12	例題 I5.1.12（解説動画）	
I5.1.13	例題 I5.1.13（解説動画）	
I5.1.14	例題 I5.1.14（解説動画）	

例題（問題）一覧

第 1 章　数と式

第 2 章　集合と命題

第 3 章　2 次関数

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
例題 I3.3.1	2 次方程式の解 1	★	112	305		
例題 I3.3.2	2 次方程式の解 2	★★	113	306		
例題 I3.3.3	方程式の解（係数が文字のとき）	★★★	114	307		
例題 I3.3.4	2 次方程式の係数決定	★★	115	308		
例題 I3.3.5	実数解の個数と判別式	★	116	309		
例題 I3.3.6	2 次方程式が実数解をもつ条件 1	★★	117	310		
例題 I3.3.7	2 次方程式が実数解をもつ条件 2	★★	118	310		
例題 I3.3.8	2 次方程式の共通解	★★★	119	311		
例題 I3.3.9	放物線と x 軸の共有点の座標	★	120	312		
例題 I3.3.10	2 次関数のグラフと x 軸の位置関係	★★	121	313		
例題 I3.3.11	x 軸から切り取る線分の長さ	★★	122	314		
例題 I3.3.12	2 次関数のグラフと係数の符号	★★	123	315		
例題 I3.3.13	2 次の連立方程式	★★	124	316		
例題 I3.3.14	放物線と直線の共有点の座標 1	★	125	317		
例題 I3.3.15	放物線と直線の共有点の座標 2	★★	126	318		
例題 I3.3.16	2 次不等式 1	★	127	319		
例題 I3.3.17	2 次不等式 2	★	128	320		
例題 I3.3.18	連立 2 次不等式	★★	129	320		
例題 I3.3.19	文字係数の 2 次不等式	★★★	130	321		
例題 I3.3.20	不等式の係数決定	★★	131	322		
例題 I3.3.21	2 次方程式が実数解をもつ条件 3	★★★	132	323		
例題 I3.3.22	すべての実数について成り立つ不等式	★★★	133	324		
例題 I3.3.23	ある区間で常に成り立つ不等式	★★★	134	325		
例題 I3.3.24	2 次不等式が整数解をもつ条件	★★★	135	326		
例題 I3.3.25	方程式の解の存在範囲 1	★★★	136	326		
例題 I3.3.26	方程式の解の存在範囲 2	★★★	137	327		
例題 I3.3.27	方程式の解の存在範囲 3	★★	138	327		
例題 I3.3.28	方程式の解の存在範囲 4	★★★	139	328		
例題 I3.3.29	方程式の解の存在範囲 5	★★★★	140	329		
例題 I3.3.30	2 次方程式が実数解をもつ条件 4	★★★	141	330		
例題 I3.3.31	条件付きの 2 変数関数の最大・最小 2	★★★	142	331		
例題 I3.3.32	条件なし 2 変数関数	★★★	143	332		
例題 I3.3.33	2 次不等式の文章題	★★	144	332		
例題 I3.3.34	2 つの放物線の大小関係 1	★★★★	145	333		
例題 I3.3.35	2 つの放物線の大小関係 2	★★★★	146	333		
例題 I3.3.36	絶対値記号を含む 2 次方程式（定数分離）	★★★	147	334		

第 4 章　図形と計量

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
例題 I4.1.1	直角三角形の三角比	★	154	342		
例題 I4.1.2	三角比を用いた測量	★★	155	342		
例題 I4.1.3	15° の三角比	★★★	156	343		
例題 I4.1.4	三角比の相互関係 1	★	157	343		
例題 I4.1.5	余角・補角の三角比	★★	158	344		
例題 I4.1.6	三角比を含む方程式 1	★	159	345		
例題 I4.1.7	三角比の相互関係 2	★★	160	345		
例題 I4.1.8	三角比の式の値	★★★	161	346		
例題 I4.1.9	三角比を含む方程式 2	★★★	162	346		
例題 I4.1.10	2 直線のなす角	★★	163	347		
例題 I4.1.11	三角比を含む不等式 1	★★	164	347		
例題 I4.1.12	三角比を含む不等式 2	★★	165	348		
例題 I4.1.13	三角比を含む不等式 3	★★★	166	348		
例題 I4.1.14	三角比を含む 2 次関数の最大・最小	★★★	167	349		
例題 I4.1.15	三角比を含む方程式の解の個数 1	★★★★	168	349		
例題 I4.1.16	三角比を含む方程式の解の個数 2	★★★★	169	350		
例題 I4.2.1	正弦定理	★	172	355		
例題 I4.2.2	余弦定理	★★	173	356		
例題 I4.2.3	三角形の辺と角 1	★★	174	357		
例題 I4.2.4	三角形の辺と角 2	★★	175	358		
例題 I4.2.5	正弦定理と余弦定理の利用	★★★	176	359		
例題 I4.2.6	三角形の成立条件	★★★	177	360		
例題 I4.2.7	三角形の形状の決定	★★★	178	361		
例題 I4.3.1	三角形の面積	★★	181	365		
例題 I4.3.2	多角形の面積	★★	182	366		
例題 I4.3.3	三角形の内接円と外接円の半径	★★	183	367		
例題 I4.3.4	円に内接する四角形 1	★★	184	367		
例題 I4.3.5	円に内接する四角形 2	★★★	185	368		
例題 I4.3.6	角の二等分線の長さ	★★	186	369		
例題 I4.3.7	中線定理	★★	187	369		
例題 I4.3.8	空間図形の測量	★★	188	370		
例題 I4.3.9	円錐に内接する球	★★★	189	371		
例題 I4.3.10	正四面体の計量	★★★★	190	371		
例題 I4.3.11	空間図形における最短距離	★★★	191	372		

第 5 章　データの分析

三角比の表

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	——

ギリシャ文字の表

大文字	小文字	読み方
A	α	alpha（アルファ）
B	β	beta（ベータ）
Γ	γ	gamma（ガンマ）
Δ	δ	delta（デルタ）
E	ϵ, ε	epsilon（イプシロン）
Z	ζ	zeta（ゼータ）
H	η	eta（イータ）
Θ	θ, ϑ	theta（シータ）
I	ι	iota（イオタ）
K	κ	kappa（カッパ）
Λ	λ	lambda（ラムダ）
M	μ	mu（ミュー）

大文字	小文字	読み方
N	ν	nu（ニュー）
Ξ	ξ	xi（クシー）
O	o	omicron（オミクロン）
Π	π, ϖ	pi（パイ）
P	ρ, ϱ	rho（ロー）
Σ	σ, ς	sigma（シグマ）
T	τ	tau（タウ）
Υ	υ	upsilon（ウプシロン）
Φ	ϕ, φ	phi（ファイ）
X	χ	chi（カイ）
Ψ	ψ	psi（プサイ）
Ω	ω	omega（オメガ）

謝辞

本書の制作にあたり，市販の優れた参考書や資料，そして先人の貴重な研究成果から多くの学びを得ました．「はじめに」でも述べたとおり，教育という営みは古来より知識を継承・発展させる「祖述の学」に通じるものであり，高校数学の分野も例外ではありません．すでに最適解が確立されている箇所が多いことから，たとえ独自の工夫を加えたとしても，最終的に似通った流れや表現に行き着くのは避けがたい面がございます．そこで本書を執筆するにあたっては，よく知られている内容であっても再構成を試みて，細かな表現や途中式，数値などをできる限り変更することで，参考資料への敬意を払いつつも独自の形を保つよう配慮いたしました．

また，多くの参考書で採用されているような，最適解に近い構成を積極的に取り入れた部分もあります．それらは，広く認められている解法であることに加え，問題を最も的確かつ理解しやすい形で解決していると著者が判断したからに他ならず，学習者の利益を最優先に考えた結果でもあります．こうした背景のもと，万が一他の書籍や資料との類似点をご指摘いただいた際には，決して権利を侵害する意図がないことを改めて申し上げるとともに，速やかに事実関係を確認し，必要に応じて修正や対応を行う所存です．

なお，本書は私の趣味的活動の一環として制作しており，商業ベースの出版物や公式教材とは異なる「同人誌」のような位置づけにあります．既存の参考書と同等の完成度を追求するというよりは，PDF のリンク機能やプルダウン機能を活用した「扱いやすさ」や，動画教材との連携によって学習効率を高めるという試みをコンセプトとしております．拙い部分もあるかと存じますが，未熟な私とその教材を温かく見守っていただければ幸いです．

最後に，本書の作成に際し，多くの研究者・教育者の皆様が築かれた知的財産と尽力に学ぶ機会を得られたことに，改めて深く感謝申し上げます．本書を手に取ってくださった皆様が，数学への興味と学習意欲を少しでも高めていただけるならば，これ以上の喜びはありません．今後も皆様からのご意見・ご指摘を糧に，より良い教材づくりを目指して精進してまいります．ありがとうございました．

関連図書（参考文献）

本書を執筆する上でも参考にした，おすすめの参考書を関連図書としていくつか挙げたいと思います．本書と合わせて活用していただくことで，より学習効果が高まることでしょう．

「チャート式」シリーズ（数研出版）：学習参考書の定番として長い歴史を持ち，幅広い範囲を網羅しています．色によって難易度が分類されており，基礎から標準レベルを固めたい人は白チャートや黄チャート，難問にも挑戦したい人は青チャートや赤チャートなど，自分のレベルに合わせて選べる点が魅力です．

「Focus Gold」シリーズ（啓林館）：思考力を鍛えられる良問が並んでいます．受験を意識した例題や実践的な問題が多いため，実力を伸ばしたい人，ある程度数学に自信がある人におすすめです．

「NEW ACTION」シリーズ（東京書籍）：わかりやすい解説を重視しており，教科書レベルから標準的な演習まで丁寧にサポートしてくれます．本書では動画と連携することで「わかりやすさ」を補強していますが，文章自体のわかりやすさを重視したい方には特に役立つでしょう．

「大学への数学」シリーズ（東京出版）：難関大学レベルの受験対策に強みがある雑誌・書籍群です．月刊誌をはじめ，一般の問題集よりもややマニアックな内容や奥深い解法が多く，高度な演習ができるため，数学をさらに深く楽しみたい人にもおすすめです．

「総合的研究」シリーズ（旺文社）：「総合的研究数学 I+A」「論理学で学ぶ数学」など，学校の定期試験や受験対策だけでなく，数学を学問としてしっかり学びたい人にも対応する内容の書籍もあります．これらの書籍は受験用の数学の範囲を超えた話題に触れられることもあり，大学レベルへのステップアップを見据える人に有用です．

あくまで個人の推薦であり，これらの出版社や著者と公式な提携関係はありません．また，ここに挙げた以外にも素晴らしい教材や良書は多数存在しますが，私の個人的な見解から特におすすめしたいものを簡単に取り上げています．

あとがき

数学 I・A の One More と，それに付随する解説動画の作成を無事に終えることができました．本書をお手に取ってくださった方々，また動画をご視聴いただいた皆さまには，心より感謝申し上げます．

私は幼い頃から漫画が大好きで，「読み手を惹きつける工夫」を数多く学んできました．その体験を参考書づくりにも活かし，あたかも漫画家のように構成を練り上げながら執筆しています．本書は単なる「問題集」にとどまらず，一貫性ある構成と数学の奥深さを感じられる作品にしたいという思いで設計しました．

なお，本書および動画の制作では「犬飼シムラ」というペンネームを使用しています．これは漫画家と同様に，作品への没入感を高めたいこと，またプライバシー保護の観点からでもあります．今後，本名などを公開する予定は未定ですが，当面は控えさせていただきますのでご了承ください．

本書では，執筆，作問，編集，校正，組版，図形作成，表紙・ロゴデザイン，挿絵，動画原稿・字幕の作成，動画の編集に至るまで，すべての作業を一人で行いました．作業量は膨大で，例えば本書のソースコードの文字数と行数を示せばイメージがつきやすいでしょうか．本書だけで，ソースコードの文字数は約 170 万文字，行数は約 60000 行ありました（LaTeX という組版システムを使用しており，単に日本語テキストだけではなくコマンド文字列を含めています）．字幕や動画原稿も合わせると更に文字数は多くなり，その作業を本業の公立高校の教員と並行して進めているため，新しい参考書を頻繁に公開することは難しいのが現状です．また，いただいたコメントやご意見には可能な限り対応したいと考えていますが，すべてにお返事できない場合もあるかもしれません．何卒ご容赦ください．

「外注などをすれば効率が良いのでは」という意見もあるかもしれません．しかし，私は参考書作りに関しては，参考書を一つの「作品」として捉えており，執筆から図形の細部に至るまで，自分の手で丁寧に仕上げることにこだわっています．定番問題が多く特別な解説を記していないため，どこにでもあるような内容に見える部分があるかもしれませんが（そのような内容に意図的に寄せていますが），細部まで思いを込めて作り込むことで，より質の高い教材を提供できると信じています．とはいえ，校正作業だけは本当に大変ですね．どんなに工夫しても一人で校正するのには限界があると感じており，アシスタントが欲しいくらいです（主に手計算，手打ちで問題や図形を設定している影響でミスが頻出し，時間が掛かります）．第三者の視点を取り入れる必要性を実感しており，今後の課題として取り組んでいきたいと考えています．

次回作は数学 II・B の One More を予定しています．現時点で，既に一部作業を進めて形になりつつありますが，完成時期は未定です（可能な限り早く出したいと思っています）．また，本書のような参考書の他にも，「こんな教材を作りたい」というアイデアは沢山あります．しかし，一つ一つを形にするには時間が必要です．とりあえずしばらくの間は，本書の数学 II・B 版の作成を少しずつでも進めていきたいと考えています．

何かご意見やお問い合わせがありましたら，メールにてお気軽にお寄せください．私は数学教育の世界に微力ながら貢献したいという思いから，本書のような教材を一般公開することを始めました．皆さんの学びがより豊かなものになることを心から願っています．

著者：犬飼　シムラ

著者紹介

著者：犬飼 シムラ（いぬかい・しむら）

早稲田大学教育学部数学科を卒業し，高等学校の公立学校教員として勤務している．専門は函数解析，数学教育など．好きなものは，漫画，犬，動物，スポーツ，サウナとのこと．神奈川県在住との噂がある．

表紙デザイン：PGF/Ti*k*Z を使用して作成
本文：LaTeX を使用して作成
図版：PGF/Ti*k*Z を使用して作成
挿絵：PGF/Ti*k*Z を使用して作成・知人に依頼して作成

One More（数学 I）

2025年 4月 11日　初版公開
2025年 4月 19日　第 2 版公開
2025年 5月 14日　第 3 版公開
2025年 6月 22日　第 4 版公開
2025年 7月 6日　第 5 版公開
2026年 4月 7日　第 6 版公開

著者： 犬飼（いぬかい） シムラ
発行： Onemath

Onemath