Ⅰ・A

One More (数学Ⅰ・A)

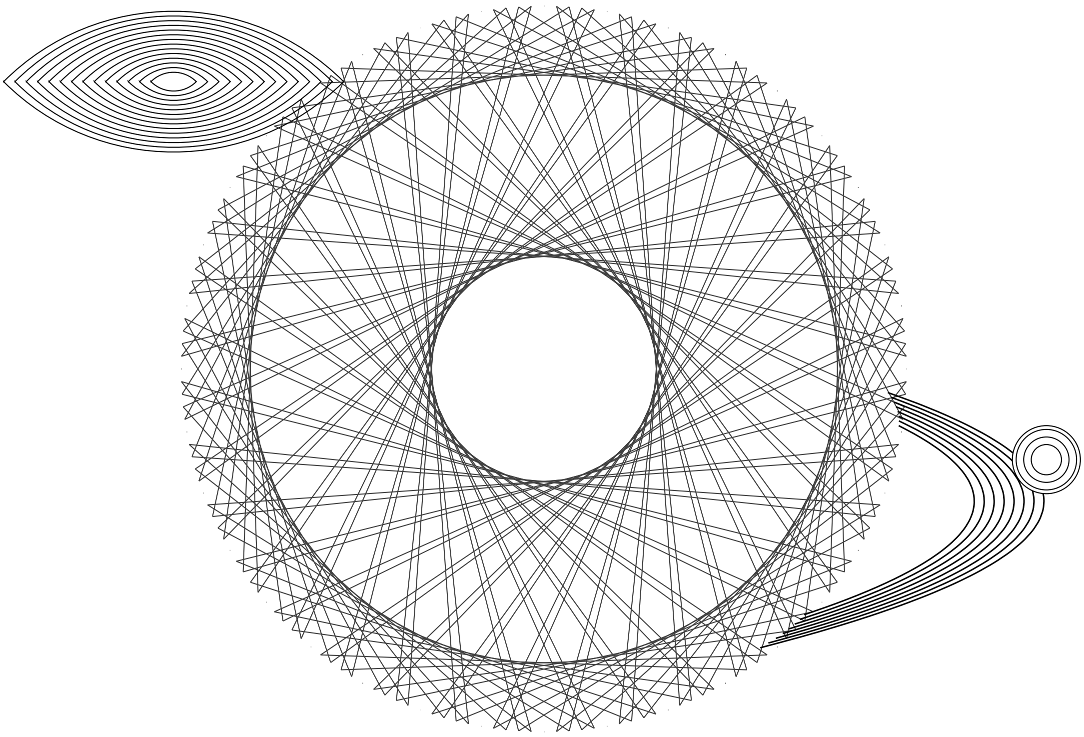
基本事項まとめ

Onemath

※ 本 PDF は，数学 I・A の One More の基本事項をまとめたものとなります．さらに詳しい内容を学びたい場合は，右にある 2 次元コードを読み取ると，数学 I・A の One More の PDF をダウンロードできる専用ページにアクセスできますのでご利用ください．

One More 数学Ⅰ・A

基本事項まとめ



本書は印刷された書籍として販売されているわけではありません．そのため，印刷したものが必要な場合は，学習者ご自身で PDF をダウンロードし，お手元で印刷してご利用ください．

本書は教育目的での利用であれば，許可なく自由にご使用いただけます．授業内での教材としての配布や使用など，教育現場での活用を歓迎いたします．ただし，本書を販売するなど，商用目的での利用は固く禁じられております．

本書の内容については，正確性に細心の注意を払っておりますが，万一の誤りや不備があった場合や，本書の内容を利用した結果生じた損害，あるいは適用できなかったことによる不利益に関して，著者は一切の責任を負いかねますので，あらかじめご了承ください．

第 I 部

数学 I

目次

例題（問題）一覧へのリンク

PDF 版からは各ページの右下のフッターにあるロゴに「基本事項一覧」へのリンク機能がついています．

ロゴにリンク機能あり

I1　数と式

I1.1　式の展開と因数分解

I1.1.1　単項式と多項式

(1) 数や文字，またはそれらを掛け合わせてできる式を**単項式**という．単項式において，掛け合わせた文字の総数をその単項式の**次数**という．また，数の部分を**係数**という．

◀ 例：単項式 $3x^2$ の次数は 2，係数は 3 である．

2 種類以上の文字が含まれる単項式では，1 つの文字に着目して係数や次数を考えることがあり，このとき他の文字は数と同様に扱われる．

(2) **多項式**とは，複数の単項式の和で表される式であり，これら単項式を多項式の**項**という．多項式は**整式**ともいわれる．

◀ 単項式を項が 1 つである多項式と考えることができる．なお，定義の仕方によって，単項式と多項式を区別する立場をとることもある．

(3) 多項式において，文字部分が同じである項を**同類項**という．多項式は，同類項を 1 つにまとめて整理することができる．

(4) 同類項をまとめて整理した多項式において，最も次数が高い項の次数をその多項式の**次数**とし，次数が n の多項式を $\boldsymbol{n}$ **次式**という．

2 種類以上の文字を含む多項式においても，特定の文字に着目し，他の文字は数として扱うことがある．多項式において，着目した文字を含まない項を**定数項**という．

◀ $3ax^2+y$ において，x に着目すると次数は 2，係数は $3a$，定数項は y となる．

I1.1.2　多項式の整理

多項式において，特定の文字に着目して，その文字の次数が高いものから低いものへと並び替えることを**降べきの順に整理する**という．逆に，次数が低いものから高いものへと並べ替えることを**昇べきの順に整理する**という．

◀ 例：$xy^2+x^3+x^2y+y^2$ を x について降べきの順に整理すると，

$$x^3+yx^2+y^2x+y^2$$

I1.1.3　多項式の計算

	加法	乗法
交換法則	$A+B=B+A$	$AB=BA$
結合法則	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$

分配法則 $\cdots A(B+C)=AB+AC,\ (A+B)C=AC+BC$

とくに $A-B$ のような場合においては，括弧を忘れないように注意すること（右の例を参照）．また，分配法則を用いて多項式を変形，単項式の和のみの形にすることを**多項式の展開**という．

◀ 例：$A=2x+3y$，$B=x-y$ のとき，

$$\begin{aligned}&A-B\\=&(2x+3y)-(x-y)\\=&2x+3y-x+y\\=&x+4y\end{aligned}$$

I1.1.4　指数法則

m，n を正の整数とする．このとき，次の**指数法則**が成り立つ．

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn},\quad (ab)^n=a^nb^n$$

なお，2×3 を $2\cdot3$ とも表す．

◀ $(3^2)^3\neq3^5$ であるので注意すること．正しくは，$(3^2)^3=3^6$

I1.1.5　乗法公式

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(4) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(5) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

(6) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

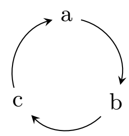
(7) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(8) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

式を整理するときには,「アルファベット順」「輪環の順」「降べきの順」などが有効である. これらを用いて, 式を見やすく整理することが推奨される.

◀ (1) において b を $-b$ とおくと, (2) が導かれる. (7) も同様の手順を考えれば, (8) が導かれる.

◀ a, b, c が輪の形となるように, 循環するように整理している. これを, **輪環の順 (cyclic order)** に整理するという.



I1.1.6　因数分解

1 つの多項式を, 1 次以上の多項式の積の形に変形することを, もとの式を**因数分解する**という. このとき, 積を構成する各式を, もとの式の**因数**という.
多項式の各項に共通の因数が存在する場合には, その共通因数をくくり出し, 括弧の外にくくり出すことにより因数分解を行うことができる.

◀ 因数分解は, 既約分解または素元分解ということもある.

◀ $\underbrace{AB+AC}_{A\ \text{が共通因数}} = A(B+C)$

(1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

(2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

(3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

(4) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

(5) $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

(6) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

(7) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

(8) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

(9) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

(10) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$

(11) $a^4 + a^2 + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^2 - a + 1\right)$

◀ たすき掛けの因数分解という.

◀ 符号に注意すること.

◀ 符号に注意すること.

◀ 複 2 次式の形である.

なお, 与えられた多項式を因数分解するときには, とくに指定がない限り, 因数の係数を有理数の範囲内で考える.

◀ 例えば x^2-4 は (3) より, $(x+2)(x-2)$ と因数分解できるが, x^2-3 や x^2-2 などは因数分解できない.

$$\begin{tikzcd} x^2+5x+6 \arrow[r, bend right, "\text{因数分解}"'] & (x+2)(x+3) \arrow[l, bend right, "\text{展開}"'] \end{tikzcd}$$

I1.2 実数

I1.2.1 実数

(1) 自然数（Natural number）1, 2, 3, ... に 0 と負の整数 -1, -2, -3, ... を合わせて**整数（Zahlen）**という．

◀ 2 つの自然数の足し算や掛け算の結果は常に自然数であるが，引き算や割り算は自然数になるとは限らない．このことを，自然数全体の集合は足し算や掛け算という演算に関して**閉じている**，引き算や割り算に関して**閉じていない**，という．

【余談】Zahlen はドイツ語で数を表す．また，自然数に 0 を含むという考え方もある．

(2) 整数 m と 0 ではない整数 n を使い，分数 $\frac{m}{n}$ の形で表される数を**有理数（Quotient，Rational number）**という．整数 m は $\frac{m}{1}$ として表すことができるので，整数も有理数の一種である．

(3) 整数ではない有理数を小数で表すとき，それは**有限小数**になるか，あるいは循環する**無限小数（循環小数）**となる．

循環小数は，循環する最初と最後の数字の上に $\bullet$ をつけて表すことができる．また，有限小数や循環小数は，常に分数の形で表すことができることが知られている．

◀ 循環小数の例：

$$\frac{1}{9} = 0.111\ldots = 0.\dot{1},$$

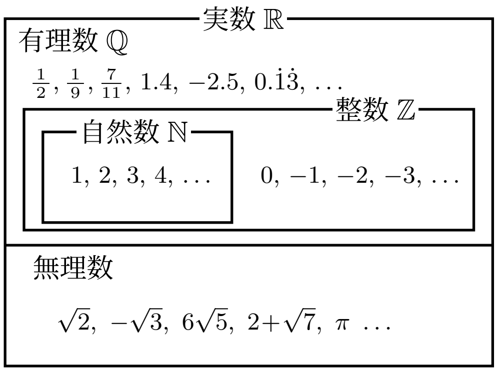
$$\frac{123}{999} = 0.123123\ldots = 0.\dot{1}2\dot{3}$$

(4) 整数，有限小数，または無限小数で表される数を**実数（Real number）**という．

(5) 実数の中で有理数ではないものを**無理数**という．無理数を小数で表すと，$\sqrt{3} = 1.732\ldots$, $\pi = 3.141\ldots$ のように循環しない無限小数となる．

自然数全体の集合，整数全体の集合，有理数全体の集合，実数全体の集合は，それぞれ，$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ という記号で表されることもある．

◀ $\mathbb{N}$ といった，重ね打ちしたような書体の文字を黒板文字という．



$$\text{実数}\mathbb{R}\begin{cases}\text{有理数 }\mathbb{Q}\begin{cases}\text{整数 }\mathbb{Z}\begin{cases}\text{自然数 }\mathbb{N}\\ 0\\ \text{負の整数}\end{cases}\\ \text{有限小数}\\ \text{循環小数（無限小数）}\end{cases}\\ \text{無理数（循環しない無限小数）}\end{cases}$$

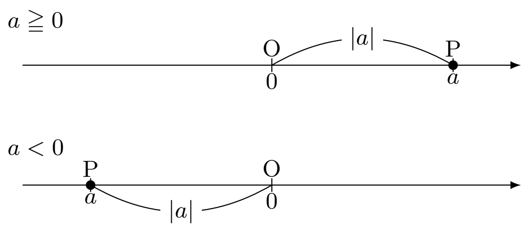
I1.2.2 絶対値

数直線上の点 P の座標が a のとき，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a})$ と表される．原点 O(0) と P(a) の間の距離を **$\boldsymbol{a}$ の絶対値**といい，記号 $|\boldsymbol{a}|$ で表す．

◀ $|0| = 0$

(1) $|a| \geqq 0$

(2) $|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$



I1.2.3 平方根

(1) $x^2=a$ を満たす数 x を a の**平方根**という．正の数 a の平方根は 2 つあり，その絶対値は等しく，符号が異なる．正の平方根を $\sqrt{a}$，負の平方根を $-\sqrt{a}$ と表し，両方をまとめて $\pm\sqrt{a}$ と記す．0 の平方根は 0 のみであり，$\sqrt{0}=0$ と定める．なお，記号 $\sqrt{}$ を**根号**といい，$\sqrt{a}$ を「ルート a」と読む．

◀ 4 の平方根は ± 2 である．また，$\sqrt{4}=2$，$-\sqrt{4}=-2$

◀ 負の数の平方根は，実数の範囲内では存在しない．

(2)

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

◀ $\sqrt{a^2}=|a|$ とも表される．

(3) $a>0,\ b>0,\ k>0$ のとき，

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}},\quad \sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$$

(4) 分母に根号を含む式を変形して，分母に根号を含まない式にする操作を，**分母を有理化する**という．

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a},\quad \frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}\quad (\text{複号同順})$$

◀ 1 つの式に現れる複号 $\pm$，$\mp$ において，上の符号同士，下の符号同士を組み合わせることを複号同順という．

(5) 2 つの数の大小関係は，次の原理に基づき簡単に判定できる．

$\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0$ のとき，

$$\alpha>\beta \iff \alpha^2>\beta^2$$

この原理の特別な場合として，次の関係が成立する．

$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき，

$$a>b \iff \sqrt{a}>\sqrt{b}$$

◀ 例えば次のように平方根で表された数の大小を判定するときに役立つ．
$3^2<13<4^2$ であるから，
$\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$，すなわち，
$3<\sqrt{13}<4$

(6) 根号内にさらに根号が含まれているものを **2 重根号**という．

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\quad (a>0,\ b>0),$$
$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}\quad (a>b>0)$$

◀ $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ のとき，$\sqrt{\text{大}}-\sqrt{\text{小}}$ $(a>b>0)$ であることに注意すること．

(7) 基本的な平方根の近似値は，次のように語呂合わせを用いて記憶することが推奨される．

$\sqrt{2}=1.41421356\ldots$ 一夜一夜に人見頃　　$\sqrt{3}=1.7320508\ldots$ 人並みに奢れや

$\sqrt{5}=2.2360679\ldots$ 富士山麓鸚鵡鳴く　　$\sqrt{6}=2.44949$ 似よよくよく

$\sqrt{7}=2.64575\ldots$ 菜に虫いない　　$\sqrt{8}=2.828427\ldots$ 庭には呼ぶな

One math

I1.3 1 次不等式

I1.3.1 不等式

(1) 数量の間の大小関係を，不等号 $>$，$<$，$\geqq$，$\leqq$ を用いて表した式を**不等式**という．不等号の左側を**左辺**，右側を**右辺**といい，左辺と右辺を合わせて**両辺**という．

◀ $\geqq$ を $\ge$，$\leqq$ を $\le$ と表すこともある．

(2) 不等式についても，等式とよく似た性質が成り立つ．不等式についても等式の場合と同様に，移項することによって，与えられた不等式を簡単な形に変形できる．

$$a < b \iff a + c < b + c,$$
$$a < b \iff a - c < b - c,$$

$$c > 0 \text{ のとき}, a < b \iff ac < bc,$$
$$c > 0 \text{ のとき}, a < b \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

とくに，負の数 c を両辺に掛けると不等号の向きが逆転するので注意すること．

$$c < 0 \text{ のとき}, a < b \iff ac > bc,$$
$$c < 0 \text{ のとき}, a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

◀ 例えば不等式 $2 < 5$ に対して，両辺に負の数 -1 を掛けると，次のように式不等号の向きが変わる．

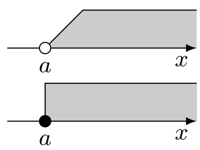
$$-2 \underbrace{>}_{\text{向きが変わる}} -5$$

(3) x が満たすべき条件を示す不等式（これを x に対する不等式という）において，不等式を満たす x の値を，その不等式の**解**といい，不等式を満たすすべての x の値を求めることを**不等式を解く**という．また，不等式のすべての解の集合を，その**不等式の解集合**ともいう．

◀ 不等式を解くことは，不等式の基本的な性質に基づき，それを最も単純な形の不等式に変形（同値変形）することを指す．

(4) 不等式においてすべての項を左辺に集めて（右辺が 0 になるように）整理したとき，$ax + b > 0$, $ax + b \geqq 0$ のように，左辺が x の 1 次式となる不等式を，x に関する **1 次不等式**という．ここで，a，b は定数であり，$a \neq 0$ とする．

数直線上に不等式の解を示すときには，右の図のように行う．本書では「$<$」「$>$」の場合は $\circ$,「$\leqq$」「$\geqq$」の場合は $\bullet$ を用いて表す．



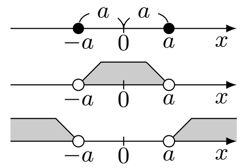
◀ 図は上から順にそれぞれ，$x > a$，$x \geqq a$ のときを示している．

I1.3.2 絶対値と方程式・不等式

$a > 0$ のとき，次のことがいえる．

$$|x| = a \text{ の解は，} x = \pm a$$
$$|x| < a \text{ の解は，} -a < x < a$$
$$|x| > a \text{ の解は，} x < -a,\ x > a$$

◀ 上から順にそれぞれ，



絶対値記号を含む方程式，不等式を解くには，

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geqq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

より，絶対値記号を外して計算すればよい．

◀ なお，絶対値記号の定義は，

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geqq 0) \\ -A & (A \leqq 0) \end{cases}$$

としても構わない．この方が実践的であり，気楽であるという考え方もある．

I2 集合と命題

I2.1 集合と論理

I2.1.1 集合

(1) 明確な範囲をもつ事物の集まりを**集合**という．また，集合に属する 1 つ 1 つのものを，その集合の**要素**という．ある要素 a が集合 A に含まれる場合，a は集合 A に**属する**といい，$\boldsymbol{a \in A}$ と表す．逆に，要素 b が集合 A に含まれない場合には，$\boldsymbol{b \notin A}$ と表す．このとき，任意の要素 a と集合 A の関係において，$a \in A$ または $a \notin A$ のいずれかが成り立つ．要素が有限個である集合を**有限集合**，要素の数が無限に存在する集合を**無限集合**という．

◀ 要素は元(げん)と訳されることもある．

(2) 集合を表すには，次の 2 つの方法がある．
(i) **要素を列記する方法**
(ii) **要素の満たす条件を述べて表す方法**
例えば，1 桁の正の奇数の集合を A とすると，A には次のような表し方がある．
(i) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
(ii) $A = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 9,\ x\ \text{は奇数}\}$, $A = \{2n-1 \mid 1 \leqq n \leqq 5,\ n\ \text{は整数}\}$

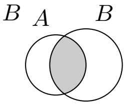
◀ 波括弧（brace）を用いて表す．

(3) 2 つの集合 A, B に関して，A のすべての要素が B の要素でもある場合，つまり $x \in A$ ならば $x \in B$ が成り立つとき，A を B の**部分集合**といい，$A \subset B$ と表す．このとき，A は B に**含まれる**，あるいは B は A を**含む**という．また，A は A 自身の部分集合でもあり，任意の集合 A について $A \subset A$ が成り立つ．
2 つの集合 A, B が一致しているとは，互いに他方の部分集合となっていることである．すなわち，A と B が等しい $\Longleftrightarrow A \subset B$ かつ $B \subset A \Longleftrightarrow A = B$

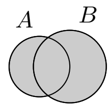
◀ $\Longleftrightarrow$ は同値を表す．また，$A \Longleftrightarrow B$ のことを，A iff B と表すこともある．

(4) **空集合** $\varnothing$ は，要素を 1 つも含まない集合を指す．任意の集合 A に対して，$\varnothing$ は A の部分集合であるとする．すなわち，$\varnothing \subset A$ と約束する．
A, B の両方に属するような要素全体の集合を A と B の **共通部分** (A と B の交わり) といい，$A \cap B$ で表す．
A, B の少なくとも一方に属するような要素全体の集合を A と B の **和集合** (A と B の結び) といい，$A \cup B$ で表す．

◀ $A \cap B$



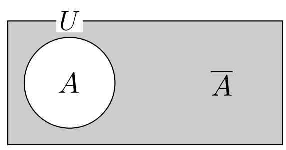
$A \cup B$



(5) **全体集合**とは，特定の文脈や議論において，考えられるすべての要素を含む集合である．**補集合**とは，全体集合 U に属し，かつ U の部分集合 A に属さない要素全体からなる集合である．これを $\overline{A}$ で表す（A^c で表されることもある）また，次のことが成り立つ．

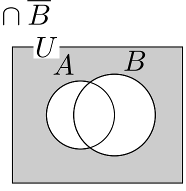
$$\overline{\varnothing} = U, \quad \overline{U} = \varnothing, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad \overline{\overline{A}} = A$$

◀ 全体集合と補集合

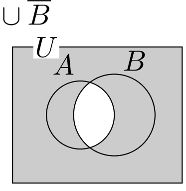


(6) **ド・モルガンの法則（ド・モーガンの法則）**

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



◀ このような図をベン図という．ド・モルガンの法則はベン図を用いて確認できる．

I2.1.2 命題

(1) 式や文章によって示される事柄で，明確に正しいか正しくないかが決定される文や式を**命題**という．命題が正しい場合，その命題は**真**であるといい，正しくない場合は**偽**であるという．命題においては，真または偽のいずれかが必ず確定する．

(2) 文字を含んだ文や式において，文字のとる値を変えると，真偽が変わるものがある．例えば，$x+y=11$ は，$x=1$，$y=10$ のときは真，$x=2$，$y=3$ のときは偽である．このように，含まれる文字に値を代入することで真偽が明確に決まる（すなわち，命題となる）文や式を**条件**という．また，これを「x と y に関する条件」などということもある．

(3) 命題「$p \Longrightarrow q$」において，条件 p を満たす要素の集合を P，条件 q を満たす要素の集合を Q とする．

$$\text{「}p \Longrightarrow q \text{ が真」} \iff P \subset Q \iff P \cap \overline{Q} = \varnothing,$$
$$\text{「}p \iff q \text{ が真」} \iff P = Q$$

(4) 命題「$p \Longrightarrow q$」において，p は満たすが q を満たさないような例を**反例**という．反例が 1 つでもあれば，命題「$p \Longrightarrow q$」は偽であるといえる．

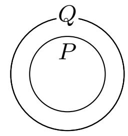
◀ 2 つの条件 $p(x)$，$q(x)$ を用いて，命題を

$$p(x) \Longrightarrow q(x)$$

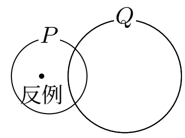
で表したとき，$p(x)$ を仮定，$q(x)$ を結論という．

命題「$\underbrace{p}_{\text{仮定}} \Longrightarrow \underbrace{q}_{\text{結論}}$」

◀ $p \Longrightarrow q$ が真：$P \subset Q$



$p \Longrightarrow q$ が偽



I2.1.3 必要条件と十分条件

命題「$p \Longrightarrow q$」が真の場合，p は q であるための**十分条件**である，q は p であるための**必要条件**であるという．命題「$p \Longrightarrow q$」と「$q \Longrightarrow p$」が共に真である，すなわち，命題「$p \iff q$」が成り立つとき，p は q（q は p）であるための**必要十分条件**であるという．また，この場合，p と q は互いに**同値**であるという．

◀ 命題「$p \Longrightarrow q$」が真の場合，

命題「$\underbrace{p}_{\text{十分条件}} \Longrightarrow \underbrace{q}_{\text{必要条件}}$」

I2.1.4 条件の否定

(1) 条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とする．このとき，p と q をともに満たすものの全体の集合は $P \cap Q$，p または q のいずれかを満たすものの全体の集合は $P \cup Q$ である．

(2) 条件 p の**否定**（p ではない）を $\overline{p}$ で表す．$\overline{p}$ を満たすものの集合は，p を満たすものの集合 P の補集合 $\overline{P}$ となる．

(3) **ド・モルガンの法則**

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}, \quad \overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$$

(4) 「すべて」と「ある」の否定は次のようになる．

命題「すべての x について p である」の否定は，「ある x について $\overline{p}$ である」
命題「ある x について p である」の否定は，「すべての x について $\overline{p}$ である」

◀ 集合におけるド・モルガンの法則に対応する．

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q},$$
$$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$$

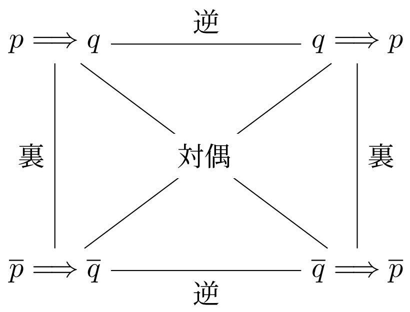
I2.1.5　逆・裏・対偶

(1) 命題「$p \Longrightarrow q$」に対して，

命題「$q \Longrightarrow p$」を「$p \Longrightarrow q$」の**逆**，
命題「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」を「$p \Longrightarrow q$」の**裏**，
命題「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」を「$p \Longrightarrow q$」の**対偶**

◀ $\overline{p}$ の否定は，p となる．

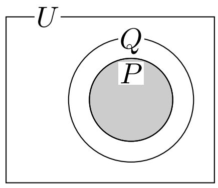
といい，次のような関係が成り立つ．



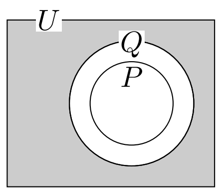
(2) 命題「$p \Longrightarrow q$」とその対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は，**真偽が一致する**．

◀ 命題「$p \Longrightarrow q$」の逆と裏は対偶の関係にあるので，逆と裏の真偽も一致する．

$P \subset Q$ より，「$p \Longrightarrow q$」は真



$\overline{Q} \subset \overline{P}$ より，対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は真



◀ 条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とする．

命題「$p \Longrightarrow q$」の証明では，代わりにその対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」を証明してもよい（対偶証明法）．一方，真である命題の逆や裏は真であるとは限らない．

I2.1.6　背理法

ある命題に対して，その結論が成り立たないと仮定し，矛盾が導かれることを示すことにより，もとの命題が成り立つことを証明する方法を**背理法**（帰謬(きびゅう)法）という．

◀ 背理法で証明する場合，否定を作る．

I3　2 次関数

I3.1　2 次関数のグラフ

I3.1.1　関数

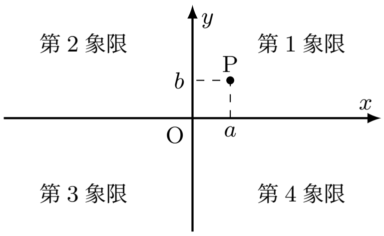
(1) 2 つの変数 x, y があり，x の値を定めるとそれに応じて y の値がただ 1 つ定まるとき，**y は x の関数**であるといい，$\boldsymbol{y = f(x)}$, $\boldsymbol{y = g(x)}$ などと表す．また，x の関数を単に関数 $\boldsymbol{f(x)}$ ともいう．

◀ f という記号は関数と訳される単語（英語では function）の頭文字に由来する．

(2) 関数 $y = f(x)$ において，$x = a$ のときの y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ と表し，$f(a)$ を関数 $f(x)$ の $x = a$ における**値**という．

◀ 例：$f(x) = x^2 + 2x + 1$ のとき，$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$

(3) 座標の定められた平面を**座標平面**という．座標軸によって分けられている 4 つの部分を，右の図のように，第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限という．また，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする．



◀ x 軸と y 軸は，原点 O（origin）を通って直交する．また，座標が $(a,\ b)$ である点 P を $\mathrm{P}(a,\ b)$ と記す．なお，進んだ数学（主に大学以降）では直交しない座標軸を考えることもある．

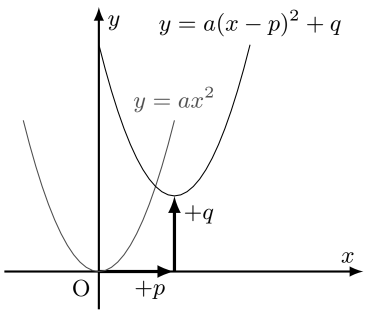
(4) 関数 $y = f(x)$ において，x のとる値の範囲をこの関数の**定義域**といい，x が定義域内のすべての値をとるときの y のとる値の範囲を**値域**という．

I3.1.2　2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$（標準形）のグラフ

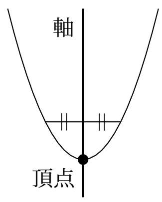
2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した**放物線**で，

軸は直線 $\boldsymbol{x = p}$，頂点は点 $\boldsymbol{(p,\ q)}$

また，この放物線は $a > 0$ のときは**下に凸**，$a < 0$ のときは**上に凸**である．



◀



I3.1.3　2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$（一般形）のグラフ

$y = ax^2 + bx + c$ の右辺を $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形することを**平方完成**という．

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

◀ x^2 の係数でくくり出す．

◀ x の係数の半分を 2 乗する．

◀ $-\frac{b^2}{4a^2}$ に a をかけ忘れないように注意すること．

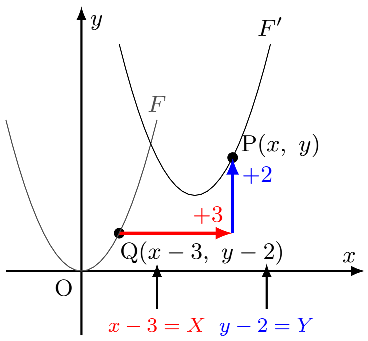
この関数のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で，軸は直線 $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$，頂点は点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

I3.1.4　曲線の平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフ F を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる F' の方程式は，次のようになる．

$$\boldsymbol{y-q=f(x-p)}$$

例：$y=2x^2$ のグラフを F，$y=2(x-3)^2+2$ のグラフを F' とすると，F' は F を x 軸方向に 3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．$\cdots$(i)
なお，ここで F' 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとり，(i) の平行移動によって P に移される F 上の点を$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，



$$x=X+3,\quad Y=y+2$$

◀ $x=X+3$，$y=Y+2$，すなわち，$X=x-3$，$Y=y-2$ より，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は $\mathrm{Q}(x-3,\ y-2)$ と表される．

すなわち，$X=x-3$，$Y=y-2$ であり，点 Q は F 上にあるから，$Y=2X^2$
この式の X に $x-3$，Y に $y-2$ を代入すると，F の方程式は，

$$y-2=2(x-3)^2$$

◀「移動後の方程式は $y+q=a(x+p)^2$ である」とするのは誤りであるので注意すること．

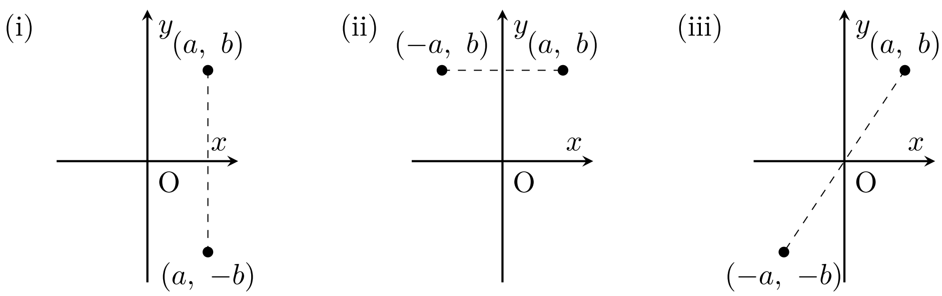
このように，F' の方程式は，F の方程式において，

$$\boldsymbol{y=2x^2\ \text{の}\ x\ \text{を}\ x-3,\ y\ \text{を}\ y-2}$$

におき換えたものになっている．

I3.1.5　点・グラフの対称移動

点 $(a,\ b)$ の対称移動
(i) x 軸に関して対称移動 $\cdots$ 点 $(a,\ -b)$ に移る．
(ii) y 軸に関して対称移動 $\cdots$ 点 $(-a,\ b)$ に移る．
(iii) 原点に関して対称移動 $\cdots$ 点 $(-a,\ -b)$ に移る．



関数 $y=f(x)$ のグラフの平行移動・対称移動
(i) x 軸方向に p だけ平行移動 $\cdots x$ を $x-p$ におき換えて，$y=f(x-p)$
(ii) y 軸方向に q だけ平行移動 $\cdots y$ を $y-q$ におき換えて，$y-q=f(x)$　◀ $y=f(x)+q$
(iii) x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動 $\cdots x$ を $x-p$，y を $y-q$ におき換えて，$y-q=f(x-p)$　◀ $y=f(x-p)+q$
(iv) x 軸に関して対称移動 $\cdots y$ を $-y$ におき換えて，$-y=f(x)$　◀ $y=-f(x)$
(v) y 軸に関して対称移動 $\cdots x$ を $-x$ におき換えて，$y=f(-x)$
(vi) 原点に関して対称移動 $\cdots x$ を $-x$，y を $-y$ におき換えて，$-y=f(-x)$　◀ $y=-f(-x)$

I3.2 2 次関数の最大・最小と決定

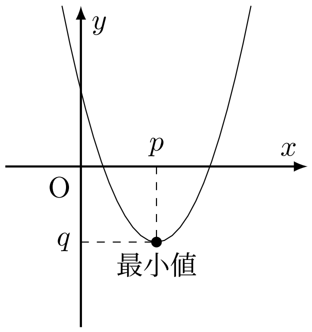
I3.2.1 2 次関数の最大・最小

(1) $y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ は，

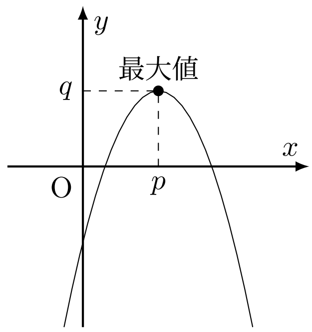
◀ $p=-\frac{b}{2a}$，$q=-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$a>0$ のとき，$\boldsymbol{x=p}$ **で最小値** $\boldsymbol{q}$，**最大値はない．**
$a<0$ のとき，$\boldsymbol{x=p}$ **で最大値** $\boldsymbol{q}$，**最小値はない．**

$a>0$ のとき



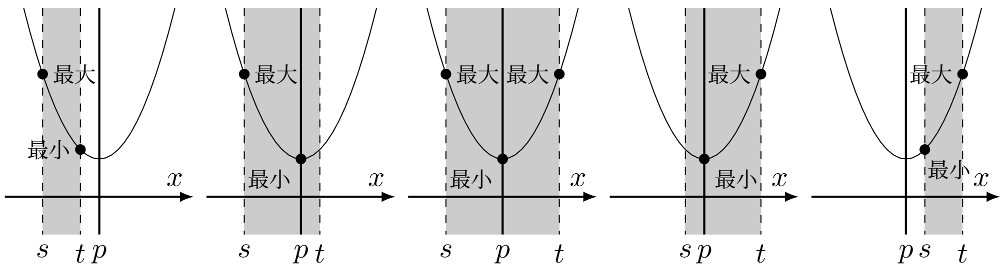
$a<0$ のとき



(2) 定義域に制限があるとき

$a>0$ のとき，$y=a(x-p)^2+q$ $(s \leqq x \leqq t)$ の最大・最小は，定義域（軸の位置）によって次のようになる．

◀ $a<0$ のときも同様に考えることができ，グラフは上に凸で，最大と最小が入れ替わる．



I3.2.2 2 次関数の決定

3 点を通る．$\cdots$ **一般形** $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$ とおく．
頂点が点 $(p,\ q)$ である．$\cdots$ **標準形** $\boldsymbol{y=a(x-p)^2+q}$ とおく．
x 軸と $x=\alpha,\ \beta$ で交わる．$\cdots$ $\boldsymbol{y=a(x-\alpha)(x-\beta)}$ とおく．
x 軸と点 $(\alpha,\ 0)$ で接する．$\cdots$ $\boldsymbol{y=a(x-\alpha)^2}$ とおく．

◀ これらの方法以外でも 2 次関数を決定することができるが，計算に手間が掛かることが多いので注意すること．

I3.3　2 次方程式と 2 次不等式

I3.3.1　2 次方程式の解法

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots$(i) の解は，左辺を因数分解して求めるか，解の公式を用いて求める．

(1) 2 次方程式 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の解は，$\boldsymbol{x=\alpha}$**，**$\boldsymbol{\beta}$

(2) 2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

とくに，$b=2b'$ のとき，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，

$$\boldsymbol{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$$

◀ 俗に言う，「解の公式」である．導出例は次のようになる．

(i) において，左辺を平方完成すると，$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$

両辺を a で割り，式変形すると，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

これより，$b^2-4ac\geqq 0$ のときは，$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

すなわち，$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

なお，両辺に $4a$ を掛けるという技巧的な導出もあるが，2 次方程式だけにしか通用しない．平方完成による手法を押さえておくとよい．

I3.3.2　2 次方程式の解の個数

b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式（discriminant）**という．

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，

$$b^2-4ac>0\ (D>0)\iff \text{異なる 2 つの実数解をもつ．}$$
$$b^2-4ac=0\ (D=0)\iff \text{1 つの実数解 (重解) をもつ．}$$
$$b^2-4ac<0\ (D<0)\iff \text{実数解をもたない．}$$

とくに，$b=2b'$ であるとき，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ の符号について，

$$b'^2-ac>0\ (D>0)\iff \text{異なる 2 つの実数解をもつ．}$$
$$b'^2-ac=0\ (D=0)\iff \text{1 つの実数解 (重解) をもつ．}$$
$$b'^2-ac<0\ (D<0)\iff \text{実数解をもたない．}$$

◀ D は判別式（discriminant）の頭文字である．

◀ 重解は，$x=-\frac{b}{2a}$

◀ $ax^2+2b'x+c=0$

◀ $D\geqq 0\iff$ 実数解をもつ．

I3.3.3　2 次関数のグラフと x 軸の共有点

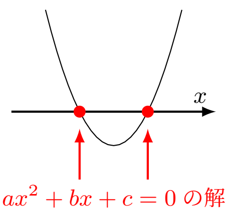
(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ において，$y=0$ とおいたものと考えることができる．2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解は，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である．

(2) (1) より，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と，$y=ax^2+bx+c$ のグラフの x 軸の共有点の個数は一致する．よって，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，次のようになる．

$$D>0\iff x\ \text{軸と異なる 2 点で交わる．}$$
$$D=0\iff x\ \text{軸に接する．}$$
$$D<0\iff x\ \text{軸と共有点をもたない．}$$

◀ $a\neq 0$

◀ 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標 が $ax^2+bx+c=0$ の 解（実数解）となる．

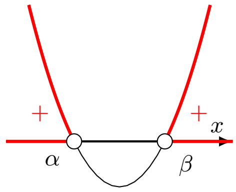


I3.3.4　2 次関数のグラフと 2 次不等式

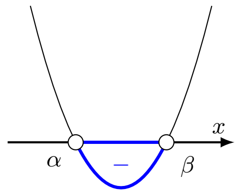
$a \neq 0$ のとき，次の形で表される不等式を，x についての **2 次不等式**という．

$$ax^2+bx+c>0, \quad ax^2+bx+c<0,$$
$$ax^2+bx+c \geqq 0, \quad ax^2+bx+c \leqq 0$$

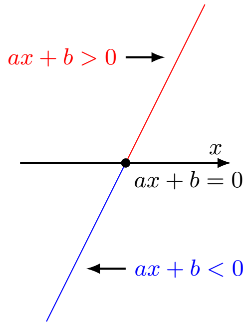
2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸より上側にある ($y>0$ となる) 部分の x の値の範囲が解となる．



2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸より下側にある ($y<0$ となる) 部分の x の値の範囲が解となる．

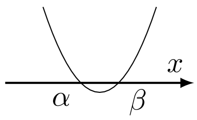
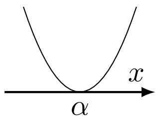
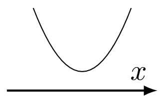


◀ 1 次関数 $y=ax+b$ の場合は，次のようになる．



I3.3.5　2 次関数と方程式・不等式

2 次関数 $y=f(x)=ax^2+bx+c\,(a>0)$ のグラフと x 軸の位置関係は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$，$\alpha<\beta$ とすると，次のようになる．

判別式 D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=f(x)$ のグラフ			
グラフと x 軸	2 点で交わる	1 点で接する	共有点なし
$f(x)=0$ の解	2 解 α，β	$x=\alpha$	なし
$f(x)>0$ の解	$x<\alpha$，$\beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$f(x) \geqq 0$ 解	$x \leqq \alpha$，$\beta \leqq x$	すべての実数	すべての実数
$f(x)<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	なし	なし
$f(x) \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x=\alpha$	なし

◀ $a<0$ の場合は，両辺に -1 を掛けて（不等号の向きが変わるので注意すること），x^2 の係数を正にしてから，左の表で考えるとよい．

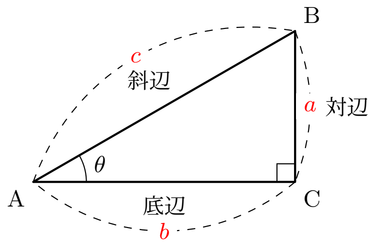
I4　図形と計量

I4.1　三角比の定義・性質

I4.1.1　三角比

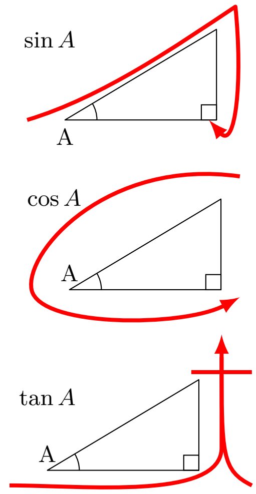
(1) ∠A の辺の長さの比の値を ∠A の正弦，余弦，正接といい，これらをまとめて三角比という．

$$\text{正弦 (sine)} : \sin A = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$$
$$\text{余弦 (cosine)} : \cos A = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$$
$$\text{正接 (tangent)} : \tan A = \frac{\text{対辺}}{\text{底辺}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$



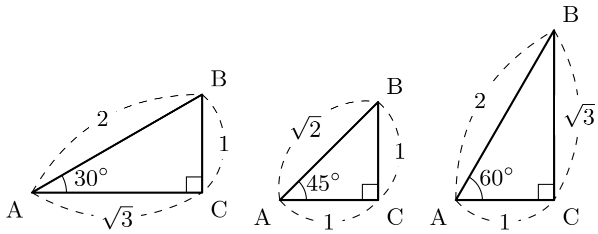
◀ 比 $a:b$ の比の値は，$\frac{a}{b}$

◀ $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ はそれぞれの頭文字 s，c，t の筆記体を利用すると覚えやすい．



(2) 有名な角（30°，45°，60°）の三角比

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

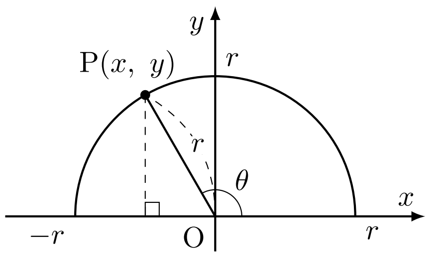


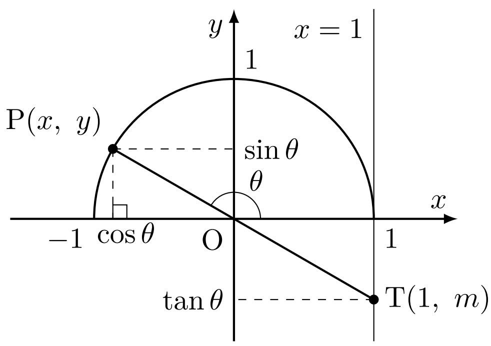
I4.1.2　三角比の拡張

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，下の図において

◀ 数学 I では，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲内を考える．

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$





ただし，$\tan 90°$ の値は定義されない．とくに，原点を中心とする半径が 1 の半円上において，

$$\boldsymbol{\sin\theta = y,\quad \cos\theta = x}$$

◀ 半径 1 の半円を考えると，三角比が半径 r に関係なく，θ だけで値を定めることができる．また，半径 1 の円のことを単位円という．

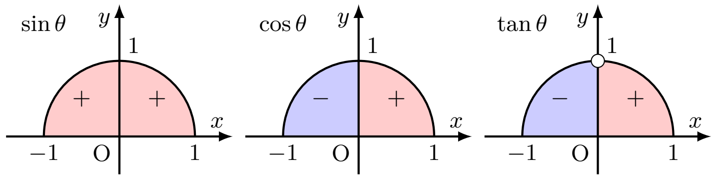
ここで，$-1 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ であるから $\boldsymbol{-1 \leqq \cos\theta \leqq 1,\ 0 \leqq \sin\theta \leqq 1}$ である．

また，直線 $x=1$ と，直線 OP の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると，$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1}}$

よって，$\boldsymbol{\tan\theta = m}$　$(\boldsymbol{\theta \neq 90°})$

I4.1.3　三角比の値と符号

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°
$\sin\theta$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos\theta$	1	$+$	0	$-$	-1
$\tan\theta$	0	$+$	——	$-$	0



I4.1.4　三角比の相互関係

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}}$$

◀ $(\sin A)^2$,$(\cos A)^2$,$(\tan A)^2$ を，$\sin^2 A$, $\cos^2 A$, $\tan^2 A$ と記す．

数学 I
I4.1

I4.1.5　有名な三角比の値

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	——	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

I4.1.6　余角・補角の三角比

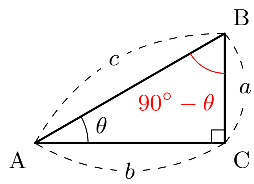
(1) $90^\circ - \theta$ （余角）の三角比 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta,$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta,$$
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta} \qquad (\theta \neq 0^\circ,\ \theta \neq 90^\circ)$$

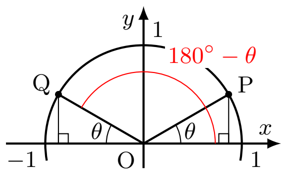
(2) $180^\circ - \theta$ （補角）の三角比 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,$$
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta,$$
$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta \qquad (\theta \neq 90^\circ)$$

◀ 余角の三角比



◀ 補角の三角比



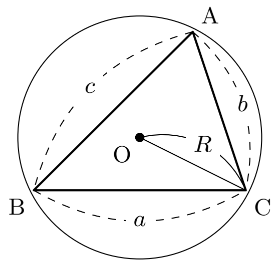
One math

I4.2 正弦定理と余弦定理

I4.2.1 正弦定理

三角形の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{2R}$$



◀ $2R$ を無視すると，$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ という連比の形で表すことができる．

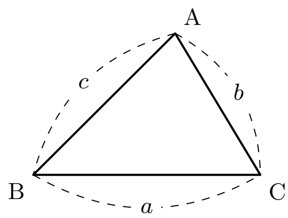
数学 I
I4.2

I4.2.2 余弦定理

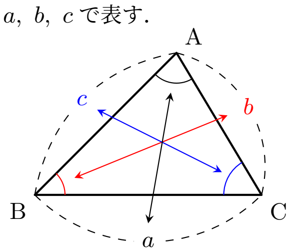
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

式を整理すると，次の等式が得られる．

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



◀ △ABC において，頂点 A，B，C に向かい合う辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c で表す．



I4.2.3 角と辺の大小関係

△ABC において，AB $= c$，BC $= a$，CA $= b$ とする．ここで，∠A が鋭角，直角，鈍角であるとき，それぞれ，$\cos A > 0$，$\cos A = 0$，$\cos A < 0$ であることから，次の関係がいえる．

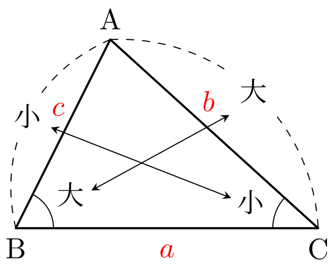
$$A \text{ が鋭角} \iff b^2 + c^2 > a^2,$$
$$A \text{ が直角} \iff b^2 + c^2 = a^2,$$
$$A \text{ が鈍角} \iff b^2 + c^2 < a^2$$

◀ 余弦定理と合わせて考えれば，関係を導くことができる．

◀ A が直角のときは，三平方の定理となる．

また，角の大小と辺の大小は一致する．すなわち，

$$A > B \iff a > b$$

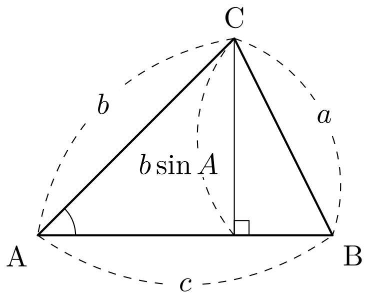


I4.3 図形の計量

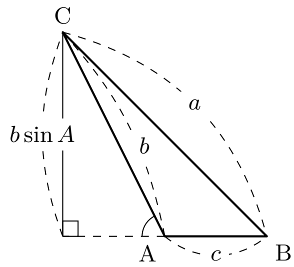
I4.3.1 三角形の面積

△ABC の面積を S とする．
(1) 2 辺とその間の角が与えられているとき，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$



◀ これは，鈍角のときも直角のときも成り立つ．



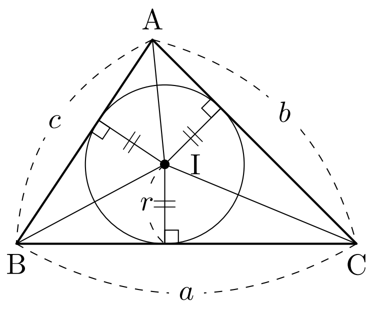
(2) ヘロンの公式

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

I4.3.2 三角形の面積と内接円

三角形の 3 辺に接する円を，その三角形の**内接円**という．
△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると，

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$



◀ △ABC ＝ △IBC ＋ △ICA ＋ △IAB より，

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

数学 I
I4.3

I5　データの分析

I5.1　データの整理と分析

I5.1.1　データの整理

(1) **変量** ··· ある特性を数量的に表したもののこと．

(2) **データ** ··· 調査や実験などから得られた変量の観測値や測定値をまとめたもののこと．

(3) **度数分布表** ··· データの区間を設定し，その区間に入るデータの値の個数を表したもののこと．

(4) **階級** ··· 度数分布表で設定される区間のこと．区間の幅を**階級の幅**，階級の中央の値を**階級値**という．

◀ 階級の幅を狭くすると，与えられた元のデータに近い度数分布を得ることができるが，その分だけデータの全体の分布の特徴を把握することが難しくなる．逆に，階級の幅を広くすると，データの全体の特徴を把握しやすくなるが，その分だけ分布の詳細な部分を理解することが難しくなる．

(5) **度数** ··· 各階級に含まれる値の個数のこと．

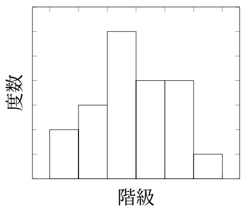
(6) **相対度数** ··· 各階級における度数の全体に対する割合のこと．

(7) **累積度数** ··· 各階級に対し，最初の階級からその階級までの度数を合計したもののこと．

(8) **累積相対度数** ··· 最初の階級からその階級までの相対度数を合計したもののこと．

(9) **ヒストグラム**

度数分布表をもとに，縦軸に度数をとり，各階級の度数を柱状のグラフで表したもののこと．



I5.1.2　データにおける代表値

(1) **平均値** ··· 変量 x のとる値が n 個で，その値が，x_1，x_2，...，x_n であるとき，それらの総和を n で割った値を平均値といい，$\overline{x}$ で表す．

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

◀ (平均値) $= \frac{(\text{データの値の総和})}{(\text{データの値の個数})}$

(2) **中央値（メジアン）** ··· 変量 x の n 個の値を小さい方から順に並べたとき，中央に位置する値のこと．

◀ 同じ値が重複する場合も，省略せずにすべて並べる．

(3) **最頻値（モード）** ··· データの値の中で，度数が最も大きい値のこと．

I5.1.3　四分位数

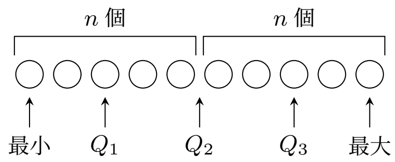
データを大きさの順に並べて, 4 等分に位置する 3 つの値のことを**四分位数**という.

第 1 四分位数 Q_1 $\cdots$ 最小値を含む n 個のデータの中央値のこと.

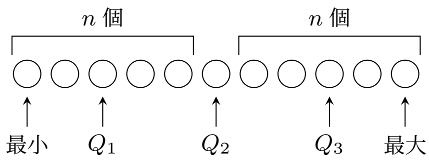
第 2 四分位数 Q_2 $\cdots$ 中央値のこと.

第 3 四分位数 Q_3 $\cdots$ 最大値を含む n 個のデータの中央値のこと.

データの個数が偶数（$2n$）個の場合



データの個数が奇数（$2n+1$）個の場合



◀ 最小値, 第 1 四分位数, 第 2 四分位数, 第 3 四分位数, 最大値の 5 つの値をまとめて 5 数要約という.

I5.1.4　箱ひげ図

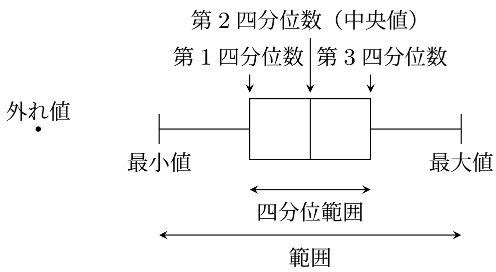
(1) **範囲** = 最大値 − 最小値

(2) **四分位範囲** = 第 3 四分位数 − 第 1 四分位数

(3) **四分位偏差** = 四分位範囲 ÷2

(4) 5 数要約（最小値, 第 1 四分位数, 中央値, 第 3 四分位数, 最大値）を表すグラフを**箱ひげ図**という.

(5) **外れ値** $\cdots$ 他の値から極端にかけ離れた値のこと. 外れ値の目安は, 第 1 四分位数から小さい方（または第 3 四分位数から大きい方）へ四分位範囲の 1.5 倍以上離れていることである.



◀ 箱ひげ図上で, 平均値を + で表すこともある. また, 箱ひげ図を 90° 回転させて, 縦向きに示すこともある.

I5.1.5　分散と標準偏差

変数 x についてのデータの値が n 個の値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であり, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の平均値を $\overline{x}$ とする.

◀ $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

(1) **偏差** $\cdots$ 各データの値から平均値を引いた値のこと.

(2) **偏差平方** $\cdots$ 偏差を 2 乗した値のこと.

(3) **分散 s^2** $\cdots$ 偏差平方の平均値のこと.

(4) **標準偏差 s** $\cdots$ 分散の正の平方根のこと.

(5)
分散　$s^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$

標準偏差　$s = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$

分散は, $\boldsymbol{s^2 = (x^2}$ **の平均値**$\boldsymbol{) - (x}$ **の平均値**$\boldsymbol{)^2}$ により求めることもできる.

◀ s は標準偏差（standard deviation）の頭文字である. なお, SD や σ と表すこともある.

I5.1.6 変量の変換

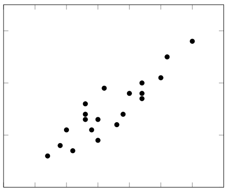
変量 x のデータに基づき $y=ax+b$ によって新たな変量 y のデータが得られるとき，x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$，分散をそれぞれ ${s_x}^2$，${s_y}^2$，標準偏差をそれぞれ s_x，s_y とすると

◀ a，b は定数とする．

$$\overline{y}=a\overline{x}+b,\quad {s_y}^2=a^2{s_x}^2,\quad s_y=|a|s_x$$

このように，関係式 $y=ax+b$ により変量 x を別の変量 y に変換することを，**変量の変換**という．

I5.1.7 データの相関



対応する 2 つの変量 x，y があり，x，y はそれぞれ n 個の値 x_1，x_2，…，x_n および y_1，y_2，…，y_n をとり，その平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とする．

(1) **散布図** ⋯ 平面上に，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$ を座標とする点をとった図のこと．

(2) **相関** ⋯ 対応する 2 つの変量 x，y の間において，一方が増加するときに他方も増加（または他方が減少）する傾向が見られる場合，この 2 つの変量 x，y の間には**正の相関関係（減少する場合は負の相関関係）**があるという．散布図において，データの分布が直線に近づくほど**相関関係が強い**といい，広く散らばるほど**相関関係が弱い**という．

◀ 正の相関がある（負の相関がある）ということもある．なお，そのどちらにも当てはまらないとき，相関関係がない（相関がない）という．

(3) **共分散** ⋯ 2 つの変量 x，y のそれぞれの偏差の積の平均値のこと．

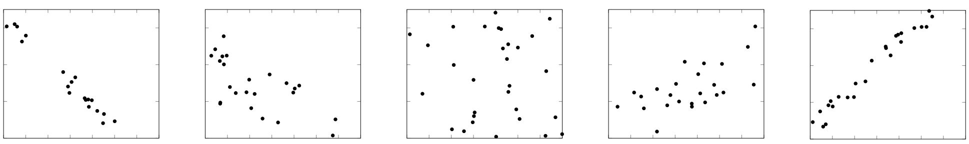
$$\boldsymbol{s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}}$$

(4) **相関係数** ⋯ 共分散を 2 つの変量 x と y の標準偏差で割った値のこと．

◀ $\dfrac{(x\text{と}y\text{の共分散})}{(x\text{の標準偏差})\times(y\text{の標準偏差})}$

$$\begin{aligned}r&=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\\&=\frac{\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right\}}\sqrt{\dfrac{1}{n}\left\{(y_1-\overline{y})^2+\cdots+(y_n-\overline{y})^2\right\}}}\\&=\frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{\sqrt{\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right\}\left\{(y_1-\overline{y})^2+\cdots+(y_n-\overline{y})^2\right\}}}\end{aligned}$$

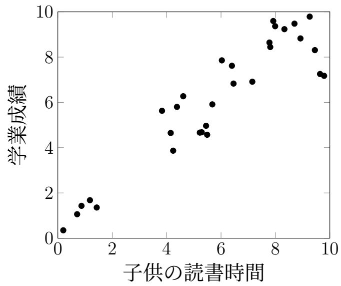
相関係数 r は常に $\boldsymbol{-1\leqq r\leqq 1}$ を満たし，正の相関関係が強いほど相関係数は 1 に近づき，負の相関関係が強いほど相関係数は -1 に近づく．



$r=-1$ 負の相関が強い　　$r=0$　　正の相関が強い $r=1$

I5.1.8 相関関係と因果関係

ある調査で，子供の読書時間と学業成績の間に正の相関関係（相関係数 0.85）が見られたとする．この 2 つのデータの間には正の相関関係が認められる．しかし，読書が直接成績を向上させるのか，または成績が良い子供が読書を好むのかは明確ではない．親の教育レベルや家庭の教育環境など，他の要因も影響しているかもしれない．



◀ 因果関係が認められるとは断定できない．

一方が原因となりもう一方が結果となるような関係を**因果関係**という．一般に，上の例からもわかるように，2 つのデータの間に相関があるからといって，必ずしも因果関係があるとはいえない．

I5.1.9 仮説検定

(1) **仮説検定の考え方**
得られたデータをもとにして母集団に対する仮説を立て，それが正しいかどうかを判断する統計的手法を**仮説検定**という．
(2) **仮説検定の手順**
ある主張が正しいかどうか判断するための仮説検定は，次のような手順で行う．
[1] 正しいかどうか判断したい主張に対し，その主張に反する仮説を立てる．
[2] 立てた仮説のもとで，得られたデータがどの程度の確率で起こるかを求める．
[3] 仮説が正しいかどうかをもとに，主張が正しいかどうかを判断する．

◀ 正しいかどうか判断したい主張を対立仮説といい，それに反する仮定として立てた主張を帰無仮説という（数学 B で学習する）．

I5.1.10 統計的探求プロセス

実社会では，多様な社会問題に応じて，統計的手法を用いた問題解決が行われている．そのときには，次のような**統計的探求プロセス**を考えることが大切である．
[1] 問題の発見 ⋯ 解決が必要な事項を明確にし，統計で扱える問題を設定する．
[2] 調査の計画 ⋯ 設定された問題に対して，集めるべきデータとその集める方法を考える．
[3] データの収集 ⋯ 計画に従いデータを集め，表やグラフなどに整理する．
[4] 分析 ⋯ 目的やデータの種類に応じてグラフにまとめたり，データに関する数値を計算したりして，特徴や傾向を把握する．
[5] 結論 ⋯ 見出した特徴や傾向から結論をまとめ，さらなる課題や改善点を見いだす．

◀ 実社会のデータは一般的に大量であり，手で計算を行うと対処しきれないことがほとんどである．そのような大量のデータを扱うときは，コンピュータなどの情報機器を用いて計算を行うとよい．

第 II 部

数学 A

A1　場合の数

A1.1　数え上げの原則

A1.1.1　集合

(1) 明確な範囲をもつ事物の集まりを**集合**という．また，集合に属する 1 つ 1 つのものを，その集合の**要素**という．ある要素 a が集合 A に含まれる場合，a は集合 A に**属する**といい，$\boldsymbol{a \in A}$ と表す．逆に，要素 b が集合 A に含まれない場合には，$\boldsymbol{b \notin A}$ と表す．このとき，任意の要素 a と集合 A の関係において，$a \in A$ または $a \notin A$ のいずれかが成り立つ．要素が有限個である集合を**有限集合**，要素の数が無限に存在する集合を**無限集合**という．

◀ 要素は元（げん）と訳されることもある．

(2) 集合を表すには，次の 2 つの方法がある．

(i) **要素を列記する方法**

(ii) **要素の満たす条件を述べて表す方法**

例えば，1 桁の正の奇数の集合を A とすると，A には次のような表し方がある．

(i) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(ii) $A = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 9,\ x \text{ は奇数 }\}$, $A = \{2n-1 \mid 1 \leqq n \leqq 5,\ n \text{ は整数 }\}$

◀ 波括弧（brace）を用いて表す．

(3) 2 つの集合 $A,\ B$ に関して，A のすべての要素が B の要素でもある場合，つまり $x \in A$ ならば $x \in B$ が成り立つとき，A を B の**部分集合**といい，$A \subset B$ と表す．このとき，A は B に**含まれる**，あるいは B は A を**含む**という．また，A は A 自身の部分集合でもあり，任意の集合 A について $A \subset A$ が成り立つ．

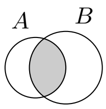
2 つの集合 $A,\ B$ が一致しているとは，互いに他方の部分集合となっていることである．すなわち，A と B が等しい $\Longleftrightarrow$ $A \subset B$ かつ $B \subset A$ $\Longleftrightarrow$ $A = B$

◀ $\Longleftrightarrow$ は同値を表す．また，$A \Longleftrightarrow B$ のことを，A iff B と表すこともある．

(4) **空集合** $\varnothing$ は，要素を 1 つも含まない集合を指す．任意の集合 A に対して，$\varnothing$ は A の部分集合であるとする．すなわち，$\varnothing \subset A$ と約束する．

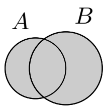
$A,\ B$ の両方に属するような要素全体の集合を A と B の **共通部分** (A と B の交わり) といい，$A \cap B$ で表す．

◀ $A \cap B$



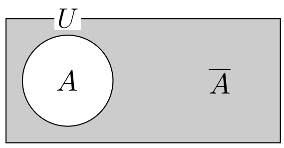
$A,\ B$ の少なくとも一方に属するような要素全体の集合を A と B の **和集合** (A と B の結び) といい，$A \cup B$ で表す．

$A \cup B$



(5) **全体集合**とは，特定の文脈や議論において，考えられるすべての要素を含む集合である．**補集合**とは，全体集合 U に属し，かつ U の部分集合 A に属さない要素全体からなる集合である．これを $\overline{A}$ で表す（A^c で表されることもある）また，次のことが成り立つ．

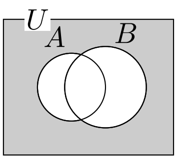
◀ 全体集合と補集合



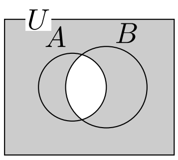
$$\overline{\varnothing} = U, \quad \overline{U} = \varnothing, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad \overline{\overline{A}} = A$$

(6) **ド・モルガンの法則（ド・モーガンの法則）**

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



◀ このような図をベン図という．ド・モルガンの法則はベン図を用いて確認できる．

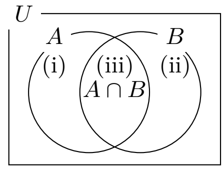
A1.1.2　有限集合の要素の個数

有限集合 A の要素の個数を $\boldsymbol{n(A)}$ で表す．全体集合 U の部分集合である A，B，C に対して，

(1) 和集合の要素の個数

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

とくに，$\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$ のとき，$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$

◀ 

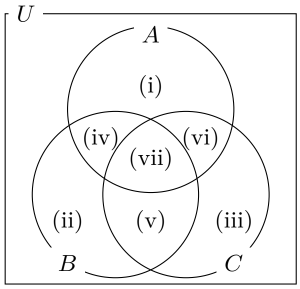
単に $n(A)+n(B)$ を考えると，(iii) の部分を 2 回重複して数えたことになる．そのため，(iii) の部分を 1 回除いている．

(2) 補集合の要素の個数

$$\boldsymbol{n(\overline{A}) = n(U) - n(A)}$$

(3) 3 つの集合の和集合の要素の個数

単に $n(A)+n(B)+n(C)$ を考えると，(iv)，(v)，(vi) の部分を 2 回，(vii) の部分を 3 回重複して数えたことになる．(iv)，(v)，(vi) の部分が重複しないように $A \cap B$，$B \cap C$，$C \cap A$ を 1 回ずつ除くと，(vii) の部分が 3 回除かれる．そのため，最後に (vii) の部分を加えると，次の式が成り立つ．



$$n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

A1.1.3　場合の数

ある事柄について，考えられるすべての場合を，もれなく数え上げるときのその総数のことを**場合の数**という．数え上げる方法は，辞書の単語のようにアルファベット順に並べる**辞書式に並べる方法（辞書式配列）**や，**樹形図**を用いる方法がある．

辞書式配列，樹形図を用いると，例えば，a，a，b，c の 4 文字から 3 文字を選んで 1 列に並べる方法の総数は右のように考えることができ，12 通りとなる．また，1 文字目に b を選んだとすると，樹形図を作成する手順は次のようになる．

[1] 1 文字目に b を選ぶとする．

[2] 2 文字目に a を選ぶ．

[3] 3 文字目に a を選ぶ．

[4] 3 文字目に戻り，c を選ぶ

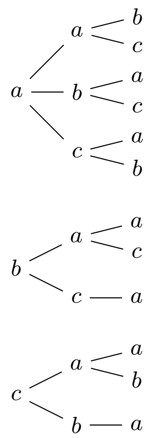
[5] 2 文字目に戻り，c を選ぶ．

[6] 3 文字目に a を選ぶ．

[7] 1 文字目が b の場合はすべて考え尽くしたので，1 文字目が a の場合や c の場合も同様に考える．

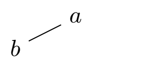
辞書式配列　　樹形図

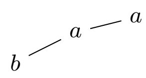
aab
aac
aba
abc
aca
acb
baa
bac
bca
caa
cab
cba

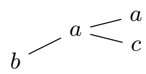


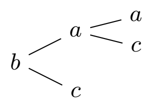
◀ 樹形図を作成する手順

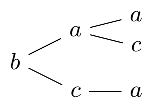
[1] b

[2] 

[3] 

[4] 

[5] 

[6] 

数学 A
A1.1

One math

A1.1.4 和の法則・積の法則

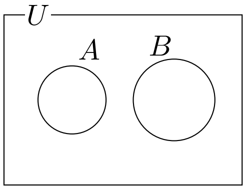
(1) 和の法則

2 つの事柄 A, B について，A である場合が m 通り，B である場合が n 通りで，A と B が同時に起こらないとする．このとき，A または B が起こる場合の数は，$\boldsymbol{m+n}$ 通りである．

つまり，$n(A\cap B)=0$ のとき，

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

◀ $n(A\cap B)=0$ のとき，$A\cap B=\varnothing$ であり,$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ が成り立つ．



(2) 積の法則

2 つの事柄 A, B について，A である場合が m 通りあり，そのどの場合についても B である場合が n 通りあるとき，A, B がともに起こる場合の数は，$\boldsymbol{m\times n}$ 通りである．

◀ なお，(1)，(2) とも，3 つ以上の事柄 A, B, C, ... についても同様に成り立つ．

(3) 自然数 N が $N=p^aq^br^c\cdots$ と素因数分解されているとき，

(i) N の約数の個数は，

$$\boldsymbol{(a+1)(b+1)(c+1)\cdots}\ \textbf{(個)}$$

(ii) N の約数の総和は，

$$\boldsymbol{(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)(1+r+r^2+\cdots+r^c)\cdots}$$

A1.2 順列・組合せ

A1.2.1 順列

(1) 順列（permutation）$\cdots$ 異なる n 個のものから r 個を取り出して 1 列に並べる**順列**の総数は，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r}$ と表し，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{個の連続する自然数の積}}}$$

◀ P は順列（permutation）の頭文字である．

◀ ${}_7\mathrm{P}_3 = \underbrace{7\cdot 6\cdot 5}_{3\ 個}$

(2) n の**階乗**を $\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$ とし，$0! = 1$ と定める．階乗の記号を用いると，順列は，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}_{r\ \text{個の連続する自然数の積}} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

また，n 個のものすべての順列の総数は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_n = n!}$ であり，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_0 = 1}$ と定める．

◀ 階乗の記号 ! は factorial という．

◀ ${}_7\mathrm{P}_3 = 7\cdot 6\cdot 5 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7!}{(7-3)!}$

A1.2.2 円順列と数珠順列

異なる n 個の円順列の総数は，

$$\textbf{円順列の総数} = \boldsymbol{\frac{{}_n\mathrm{P}_n}{n} = (n-1)!}$$

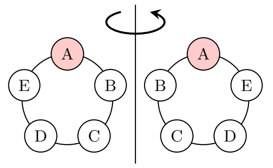
異なる n 個の数珠順列の総数は，

$$\text{数珠順列の総数} = \frac{\text{円順列の総数}}{2} = \frac{{}_n\mathrm{P}_n}{2n} = \frac{(n-1)!}{2} \quad (n \geqq 3)$$

なお，裏表があるので，2 で割ることに注意すること．

◀ $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

◀ 裏返すと同じものになる．



A1.2.3 重複順列

重複順列 $\cdots$ 異なる n 個のものから重複を許して，r 個を取り出して並べる順列の総数は，$\boldsymbol{n^r}$

◀ $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\ 個} = n^r$

A1.2.4 組合せ

組合せ（combination）$\cdots$ 異なる n 個のものから r 個取った組合せの総数は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r}$ と表し，異なる n 個のものから r 個とった順列の総数を，異なる r 個のものから r 個とった順列の総数で割った値となる．つまり，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

また，次の等式が成り立つ．

$${}_n\mathrm{C}_0 = 1,\quad {}_n\mathrm{C}_n = 1,\quad {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r},\quad {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

◀ C は組合せ（combination）の頭文字である．また，${}_n\mathrm{C}_r$ を $\binom{n}{r}$ と表すこともある．

◀ ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{\overbrace{7\cdot 6\cdot 5}^{3\ 個}}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3\ 個}}$

A1.2.5 同じものを含む順列

同じものを含む順列 $\cdots$ n 個のものから，同じものがそれぞれ，p 個，q 個，r 個，$\cdots$ あるとき，n 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は，

$$\boldsymbol{\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \quad (p+q+r+\cdots = n)}$$

◀ ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r \times \cdots$ とも表される．

A2 確率

A2.1 確率の基本性質

A2.1.1 事象と確率

(1) さいころを投げる，トランプのカードを引く，ルーレットを回すなど同じ条件のもとで繰り返し行うことのできる実験や観察のことを**試行**という．

(2) 試行の結果生じた事柄，現象のことを**事象**という．

(3) 事象の 1 つ 1 つのこと，これ以上分けることのできない事象のことを**根元事象**という．

(4) 事象をすべて合わせたもの，起こりうるすべての場合のことを**全事象**という．

(5) ある試行において根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という．

(6) ある試行において，根元事象はすべて同様に確からしいとする．全事象 U に含まれる根元事象の個数を $n(U)$，事象 A に含まれる根元事象の個数を $n(A)$ とするとき，事象 A の起こる確率 $P(A)$ は，

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{(\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}}$$

◀ 例：1 つのさいころを投げる試行において，2 の倍数が出る事象を A とすると，全事象 U は，

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

事象 A は，

$A = \{2,\ 4,\ 6\}$

根元事象は，

$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$

A2.1.2 確率の基本性質

(1) 事象 A の確率の範囲 $\cdots \boldsymbol{0 \leqq P(A) \leqq 1}$

(2) 全事象 U の確率 $\cdots \boldsymbol{P(U) = 1}$，空事象 $\varnothing$ の確率 $\cdots \boldsymbol{P(\varnothing) = 0}$

◀ P は確率（probability）の頭文字である．

A2.1.3 積事象と和事象，排反事象

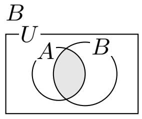
(1) 全事象 U の部分集合 A，B について，A と B の**積事象** $\boldsymbol{A \cap B}$ は「A と B がともに起こる」という事象であり，**和事象** $\boldsymbol{A \cup B}$ は「A または B が起こる」という事象である．

(2) 2 つの事象 A，B が同時には決して起こらない，すなわち，$A \cap B = \varnothing$ のとき，事象 A，B は互いに**排反**である，または，互いに**排反事象**であるという．

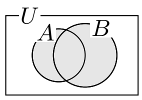
(3) 和事象の確率

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

◀ $A \cap B$



$A \cup B$



また，事象 A，B が互いに排反（$A \cap B = \varnothing$）であるとき，次の**確率の加法定理**が成り立つ．

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

◀ なお，$\varnothing$ はノルウェー語由来の記号である．空集合を表す $\varnothing$ や $\emptyset$ といった記号は，ϕ（ファイ）で代用されることもある．

A2.1.4 余事象の確率

事象 A に対して，A が起こらない事象のことを**余事象**といい，$\boldsymbol{\overline{A}}$ で表す．

$$P(\overline{A}) = \frac{(\text{起こりうるすべての場合の数}) - (\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})} = 1 - P(A)$$

◀ 事象 A の起こる確率 $P(A)$ を計算するとき，「A が起こらない」という事象の確率を考える方が楽な場合がある．

A2.2 いろいろな確率

A2.2.1 独立な試行とその確率

(1) 2 つの試行 T_1, T_2 について，試行の結果が互いに影響し合わないとき，試行 T_1, T_2 は**独立**であるという．

(2) 2 つの独立な試行 T_1, T_2 について，T_1 で事象 A が起こり，T_2 で事象 B が起こるという事象を C とすると，

$$\boldsymbol{P(C) = P(A) \times P(B)}$$

◀ 3 つ以上の試行についても同様である．

A2.2.2 反復試行の確率

同じ条件のもとで同じ試行を繰り返し，それらの試行が独立であるとき，これを**反復試行**という．

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とすると，この試行を n 回繰り返し行うとき，事象 A がちょうど r 回起こる確率は，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}}$$

ただし，$p^0 = 1$, $(1-p)^0 = 1$ とする．

◀ 独立重複試行や，単に重複試行，独立試行ともいう．

◀ A が起こる確率が p であるから，A が起こらない確率は，$1-p$

A2.2.3 条件付き確率

試行 T_1 では事象 A が起こり，続いて行う試行 T_2 では事象 B が起こる確率 $P(A \cap B)$ は，試行 T_1 で事象 A が起こる確率を $P(A)$，試行 T_1 で事象 A が起こったという条件付きで，続いて行う試行 T_2 で事象 B が起こる条件付き確率を $P_A(B)$ とすると，

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) P_A(B) \quad \left(P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \right)}$$

◀ $P(B|A)$ と表されることもある．

◀ $n(A) \neq 0$, $P(A) \neq 0$

A2.2.4 期待値

ある試行を行ったとき，その結果として得られる数値の平均値のことを**期待値**という．試行によって得られる数値 X が x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n であり，それぞれの値をとる確率が p_1, p_2, p_3, $\ldots$, p_n とすると，X の期待値は，

$$\boldsymbol{E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}$$

◀ $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$ が成り立つ．

A3　図形の性質

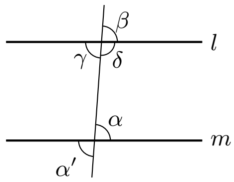
A3.1　平面図形の基本

A3.1.1　角

(1) 対頂角の性質

対頂角が等しい．($\alpha = \alpha'$)

(2) 平行線と同位角・錯角の性質



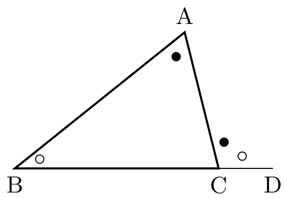
2 直線 l，m に直線 n が交わるとき，

$l /\!/ m \iff$ 同位角が等しい（$\alpha = \beta$）．

$l /\!/ m \iff$ 錯角が等しい（$\alpha = \gamma$）．

$l /\!/ m \iff$ 同じ側の内角の和が180° になる．（$\alpha + \delta = 180°$）

(3) 多角形の内角・外角の和



三角形の内角の和は，180° である．

三角形の外角はその隣にない 2 つの内角の和に等しい．

n 角形の内角の和は，$180° \times (n-2)$ である．

多角形の外角の和は，360° である．

◀ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

◀ $\angle A + \angle B = \angle ACD$

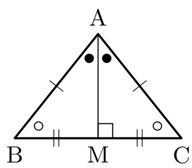
数学 A
A3.1

A3.1.2　二等辺三角形の性質

$\triangle$ABC において，$AB = AC \iff \angle B = \angle C$

二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分する．

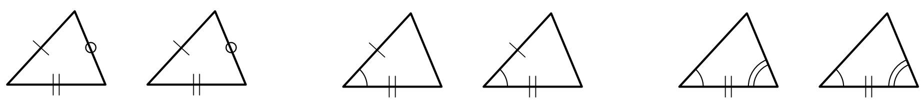
2 つの角が等しい三角形は，二等辺三角形である．



◀ M は BC の中点となる．

A3.1.3　三角形の合同条件

(i) 3 辺がそれぞれ等しい．　(ii) 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい．　(iii) 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい．

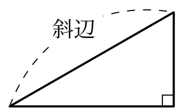


◀ (i)，(ii)，(iii) はそれぞれ，三辺相等または SSS（side-side-side），二辺夾角相等または SAS，二角夾辺相等または ASA ともいう．

とくに，直角三角形の合同条件は次のようになる．

(i) 斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい．　(ii) 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい．

◀



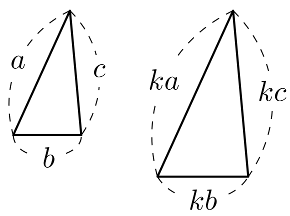
(i)，(ii) はそれぞれ，斜辺一鋭角相等または RHA，斜辺他一辺相等または RHS ともいう．

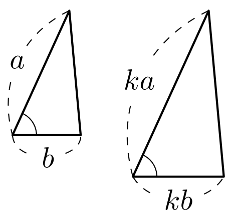
A3.1.4 三角形の相似条件

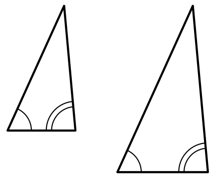
(i) 3 組の辺の比がすべて等しい.

(ii) 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい.

(iii) 2 組の角がそれぞれ等しい.







◀ (i), (ii), (iii) はそれぞれ, 三辺比相等または SSS（side-side-side）, 二辺比夾角相等または SAS, 二角相等または AA ともいう. また, 本書では相似の記号を ∽ と表す（一般的な日本の高校数学の教科書における相似の記号よりも, 両端が丸みを帯びていない).

A3.1.5 平行四辺形

平行四辺形は次の性質がある. 逆に, 四角形で次のいずれかの条件が成り立てば, その四角形は平行四辺形である.

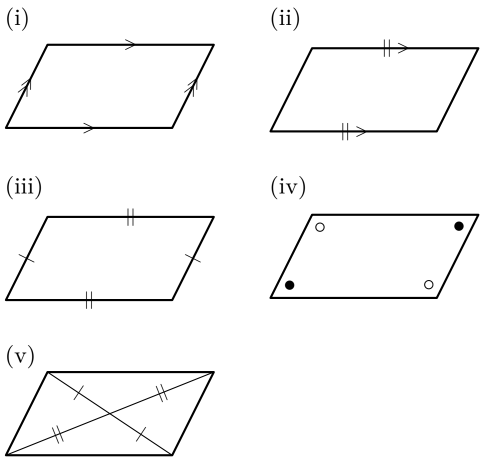
(i) 2 組の対辺がそれぞれ平行である.

(ii) 1 組の対辺が等しくて平行である.

(iii) 2 組の対辺がそれぞれ等しい.

(iv) 2 組の対角がそれぞれ等しい.

(v) 対角線がそれぞれの中点で交わる.



◀ (i) は定義である.

A3.1.6 平行線と線分の比

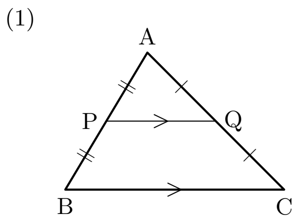
(1) △ABC の 2 辺 AB, AC の中点をそれぞれ P, Q とすると,

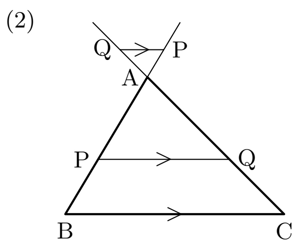
$$\mathbf{PQ /\!/ BC},\quad \mathbf{PQ} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{BC}$$

である（**中点連結定理**).

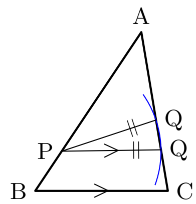
(2) △ABC の 2 辺 AB, AC またはその延長上に, それぞれ点 P, Q があるとき,

$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \iff \mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{AC}$$
$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \implies \mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{PQ} : \mathrm{BC} \cdots \text{(i)}$$
$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \iff \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QC}$$





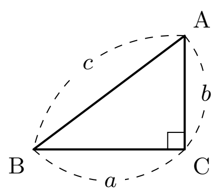
◀ (i) の逆 ⟸ が成り立たない例は, 次のようになる.



A3.1.7 三平方の定理とその逆

△ABC において,

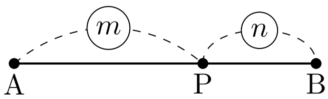
$$\angle \mathrm{C} = 90^\circ \iff a^2 + b^2 = c^2$$



◀ 三平方の定理は, ピタゴラスの定理, 勾股弦の定理ともいう.

A3.1.8 内分点と外分点

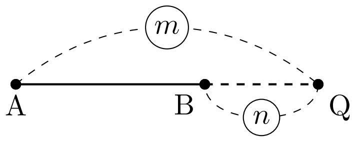
(1) 線分 AB 上に点 P があり，$\boldsymbol{\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n}$ であるとき，点 P は AB を $m : n$ に**内分する**といい，点 P を**内分点**という．



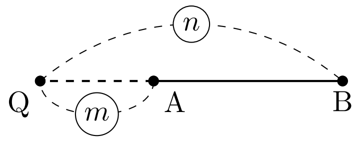
◀ 線分 AB の中点は，線分 AB を 1 : 1 に内分する点である．

(2) 線分 AB の延長上に点 Q があり，$\boldsymbol{\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n}$ であるとき，点 Q は AB を $m : n$ に**外分する**といい，点 Q を**外分点**という．

$m > n$



$m < n$

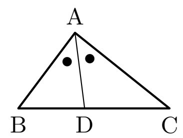


A3.1.9 三角形の角の二等分線と辺の比

(1) △ABC の辺 BC を内分する点 D について，

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD} \iff \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

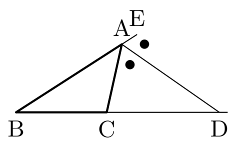
(1)



(2) △ABC の辺 BC を外分する点 D について，

$$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{EAD} \iff \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

(2)



◀ $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$

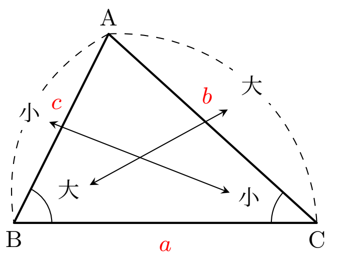
A3.1.10 角と辺の大小関係

△ABC において，$\mathrm{AB} = c$，$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$ とする．このとき，角の大小と辺の大小は一致する．すなわち，

$$\angle \mathrm{B} > \angle \mathrm{C} \iff b > c$$

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C} \iff b = c$$

$$\angle \mathrm{B} < \angle \mathrm{C} \iff b < c$$



◀ 大きい角に対する角は，小さい角に対する角よりも大きく，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺よりも大きい．

A3.1.11　三角形の五心

(1) **外心**

三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．この交点 O を外心という．

◀ 外心は 3 つの頂点から等しい距離の点である．

(2) **内心**

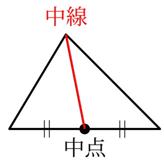
三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる．この交点 I を内心という．

◀ 内心は三角形内の，3 辺から等しい距離の点である．

(3) **重心**

三角形の 3 つの中線は 1 点で交わり，各中線はその交点でそれぞれ 2 : 1 に内分される．この交点 G を重心という．

◀ 頂点と対辺の中点を結んだ線分を中線という．



(4) **垂心**

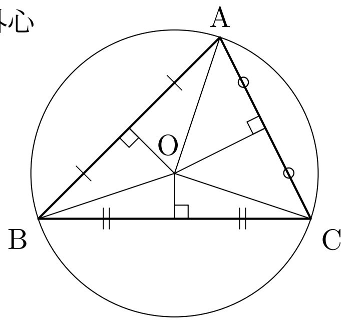
三角形の頂点から対辺に下ろした 3 つの垂線は 1 点で交わる．この交点 H を垂心という．

(5) **傍心**

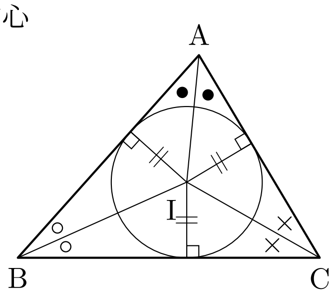
三角形の 1 つの内角と 2 つの外角の二等分線は 1 点で交わる．この交点 $\mathrm{J_1}$，$\mathrm{J_2}$，$\mathrm{J_3}$ を傍心という．傍心は 1 つの三角形に対して 3 つある．

◀ 三角形の外心，内心，重心，垂心，傍心を合わせて三角形の五心ということもある（アジア圏でいわれることが多い）．なお，傍心は心ではないという考え方もある．

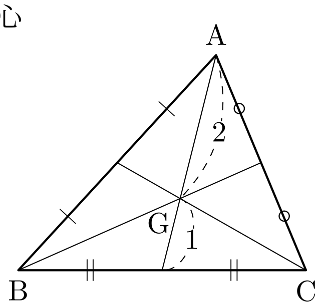
(1) 外心



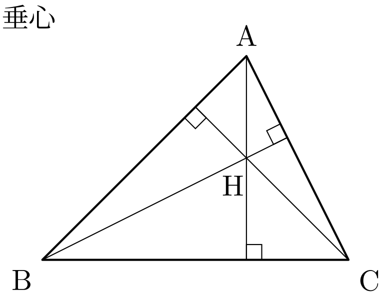
(2) 内心



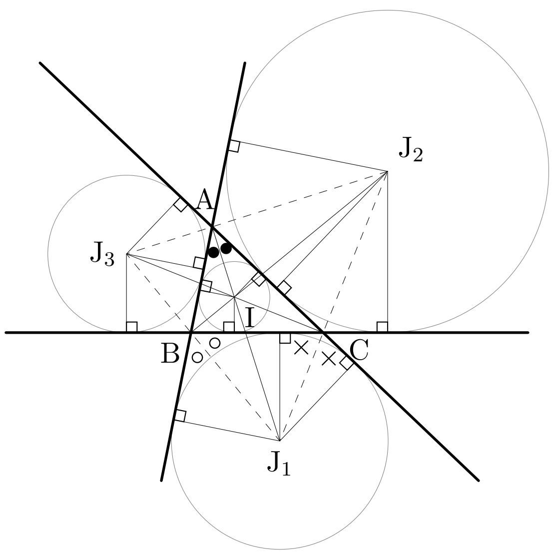
(3) 重心



(4) 垂心



(5) 傍心



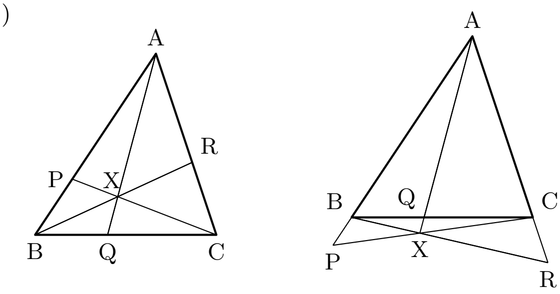
A3.1.12　チェバの定理とメネラウスの定理

(1) チェバの定理

点 X と △ABC の 3 頂点 A，B，C を結んだ直線が，3 辺 AB, BC, CA またはその延長と，それぞれ，P，Q，R で交わるとき，次の式が成り立つ．

$$\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PB}}\cdot\frac{\mathbf{BQ}}{\mathbf{QC}}\cdot\frac{\mathbf{CR}}{\mathbf{RA}}=\mathbf{1}$$

(1)

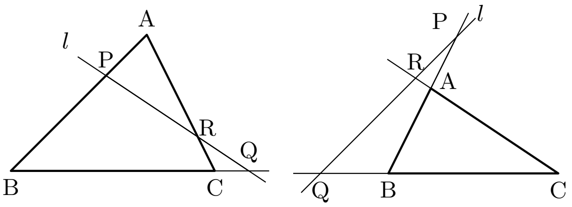


(2) メネラウスの定理

直線 l が △ABC の 3 辺 AB, BC, CA またはその延長と，それぞれ，P，Q，R で交わるとき，次の式が成り立つ．

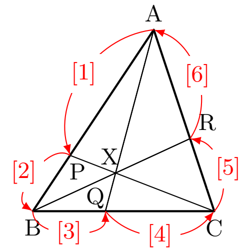
$$\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PB}}\cdot\frac{\mathbf{BQ}}{\mathbf{QC}}\cdot\frac{\mathbf{CR}}{\mathbf{RA}}=\mathbf{1}$$

(2)



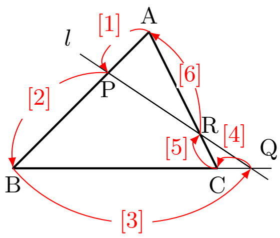
◀ チェーヴァの定理ともいう．

$$\frac{[1]}{[2]}\cdot\frac{[3]}{[4]}\cdot\frac{[5]}{[6]}=1$$



◀ メネラオスの定理ともいう．

$$\frac{[1]}{[2]}\cdot\frac{[3]}{[4]}\cdot\frac{[5]}{[6]}=1$$



A3.1.13　チェバの定理とメネラウスの定理の逆

(1) チェバの定理の逆

△ABC の辺 AB，BC，CA またはその延長上に，それぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうちの 1 個または 3 個が辺上にあるとする．

このとき，AQ と BR が交わり，かつ $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1$ が成り立つならば，**3 直線 AQ，BR，CP は 1 点で交わる．**

(2) メネラウスの定理の逆

△ABC の辺 AB，BC，CA またはその延長上に，それぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうちの 1 個または 3 個が辺の延長上にあるとする．

このとき，$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=1$ が成り立つならば，**P，Q，R は 1 つの直線上にある．**

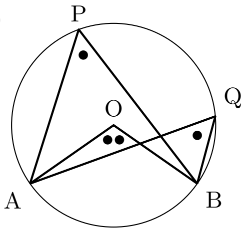
◀ チェバの定理の逆を用いると，三角形の 3 つの中線は 1 点で交わること（重心）や，3 つの内角の二等分線が 1 点で交わること（内心）などは簡単にわかる．

A3.2　円の性質と作図

A3.2.1　円周角の定理とその逆

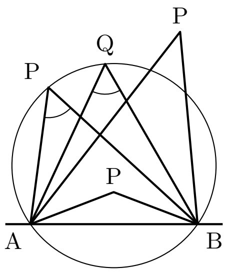
(1) 円周角の定理
同じ弧に対する円周角の大きさは等しい．円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの半分である．

$$\angle\mathbf{APB} = \angle\mathbf{AQB} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\angle\mathbf{AOB}$$

(1)


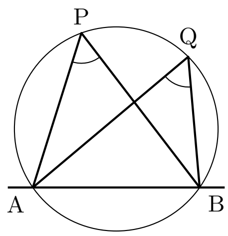
◀ なお，半径の等しい円では，円周角の大きさは弧の長さに比例する．

(2) 3 点 A，B，Q を通る円において，点 P が直線 AB について点 Q と同じ側にあるとき，次のことが成り立つ．
(i) 点 P が円の内部にある $\Longrightarrow \angle\text{APB} > \angle\text{AQB}$
(ii) 点 P が周上にある $\Longrightarrow \angle\text{APB} = \angle\text{AQB}$
(iii) 点 P が円の外部にある $\Longrightarrow \angle\text{APB} < \angle\text{AQB}$

(2)


(3) 円周角の定理の逆
4 点 A，B，P，Q において，2 点 P，Q が直線 AB について同じ側にあるとき，

$\angle\text{APB} = \angle\text{AQB} \Longrightarrow$ 4 点A，B，P，Q は同一円周上にある．

(3)


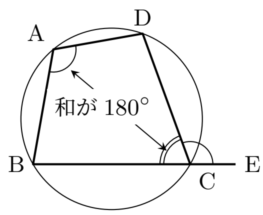
A3.2.2　円に内接する四角形

円に内接する四角形
(1) 向かい合う内角の和は 180° である．

四角形 ABCD が円に内接する $\Longleftrightarrow \angle\text{BAD}+\angle\text{BCD} = 180°$

(2) 1 つの内角は，それに向かい合う内角の隣にある外角に等しい．

四角形 ABCD が円に内接する $\Longleftrightarrow \angle\text{BAD} = \angle\text{DCE}$

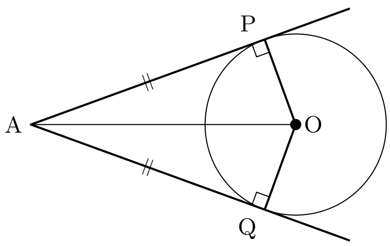


◀ なお，四角形において 1 つの角とそれに向かい合う角を，その角の対角という．

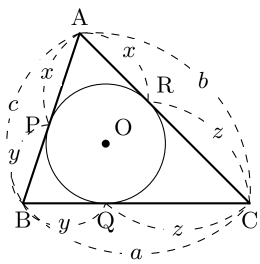
A3.2.3　接線の長さ

円 O の外部の点 A から，その円 O に引いた 2 本の接線について，2 つの接線の長さは等しい．

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AQ}$$



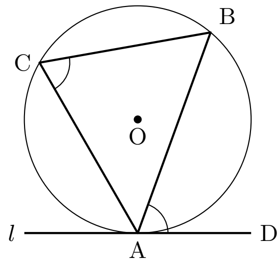
◀ 下図のように各辺の長さが定められているときは，$x+y=c$，$y+z=a$，$z+x=b$ の関係から x，y，z の長さを求めることができる．



A3.2.4　接線と弦のなす角（接弦定理）

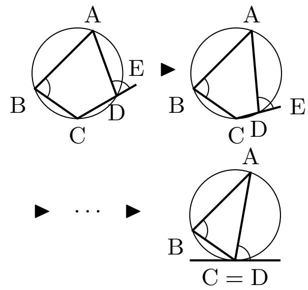
接弦定理
円 O の弦 AB と点 A における接線とのなす角は，その角の内部に含まれる弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角に等しい．

$$\angle\mathbf{ACB} = \angle\mathbf{BAD}$$



接弦定理の逆
円 O の弦 AB と点 A を通る直線 l とのなす角が，その角の内部に含まれる弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角に等しいとき，直線 l は点 A における円 O の接線である．

◀ 接弦定理は下の図のように，円に内接する四角形 ABCD において，点 D が限りなく点 C に近づき，最終的に点 C に一致した場合であると見ることができる．

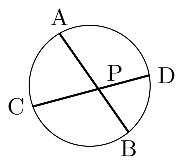


A3.2.5　方べきの定理とその逆

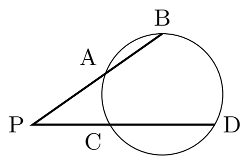
(1) 点 P を通る 2 つの直線が，円とそれぞれ 2 点 A，B および 2 点 C，D で交わるとき，

$$\mathbf{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

(1)



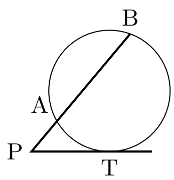
(1)′



(2) 点 P を通る 2 直線のうち，一方が円と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき，

$$\mathbf{PA \cdot PB = PT^2}$$

(2)



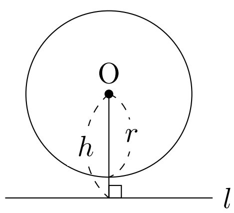
◀ (2) は (1)′ の図において，点 P が外部にあるとき，2 点 C，D が限りなく近づき，最終的に線分 PC（PD）が円の接線 PT になった場合であると見ることができる．

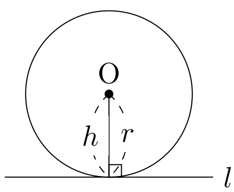
(3) 方べきの定理の逆
2 つの線分 AB および CD またはそれらの延長の交点を P とするとき，$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$ が成り立つならば，4 点 A，B，C，D は同一円周上に存在する．
一直線上にない 3 点 A，B，T と線分 BA の延長上の 1 点を P とするとき，$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$ が成り立つならば，PT は 3 点 A，B，T を通る円に接する．

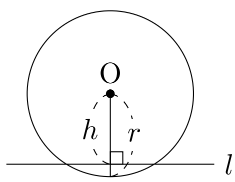
A3.2.6　円と直線の位置関係

点 O を中心とする半径 r の円と直線 l について，点 O から l へ下ろした垂線の長さを h とすると，円と直線の位置関係は次のようになる．

(i) $h > r$（共有点はない）　(ii) $h = r$（1 点を共有）　(iii) $h < r$（2 点を共有）







◀ (ii) のとき，l は円 O の接線となる．

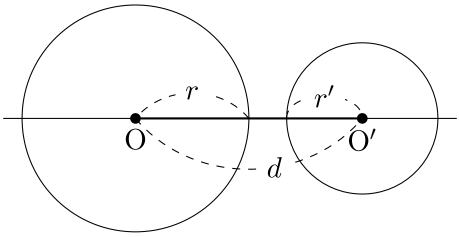
数学 A
A3.2

A3.2.7　2 つの円の位置関係

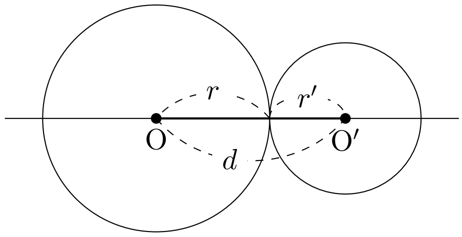
2 つの円 O，O$'$ の半径をそれぞれ r，r' $(r > r')$，中心間の距離を d とするとき，2 つの円の位置関係は次のようになる．

◀ 2 つの円の位置関係は $r < r'$ の場合も考えることができるが，その場合は $r - r'$ を $|r - r'|$ でおき換える必要がある．

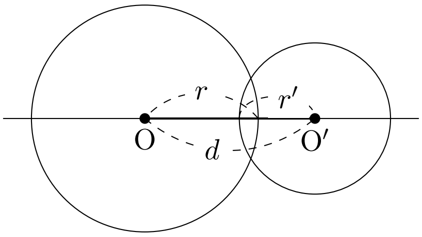
(i) $d > r + r'$（交わらない）



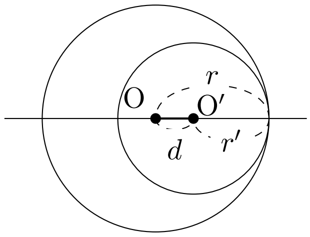
(ii) $d = r + r'$（外接する）



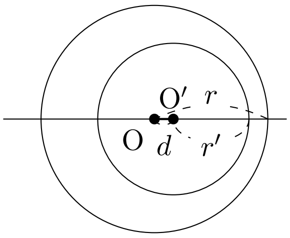
(iii) $r - r' < d < r + r'$（交わる）



(iv) $d = r - r'$（内接する）



(v) $d < r - r'$
（一方が他方の内部にある）

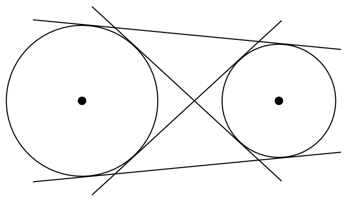


2 つの円の共有点の個数

(i)，(v) $\cdots$ 0 個（共有点はない）

(ii)，(iv) $\cdots$ 1 個（1 点を共有する）

(iii) $\cdots$ 2 個（2 点を共有する）



2 つの円の共通接線の本数

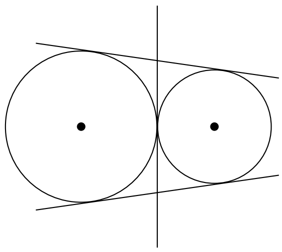
(i) 4 本（交わらない）

(ii) 3 本（外接する）

(iii) 2 本（交わる）

(iv) 1 本（内接する）

(v) 0 本（一方が他方の内部にある）



◀ 2 つの円の両方に接する直線を，2 つの円の共通接線という．

A3.2.8　作図

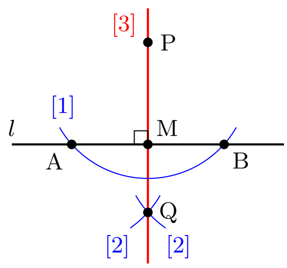
定規とコンパスだけを用いて与えられた条件を満たす図形をかくことを**作図**という．
定規 ⋯ 与えられた 2 点を通る直線を引く．また，線分を延長する．
コンパス ⋯ 与えられた 1 点を中心として，与えられた半径の円をかく．

◀ 定規の目盛りを用いて，線分の長さを測ることはできないものとする．

A3.2.9　基本作図

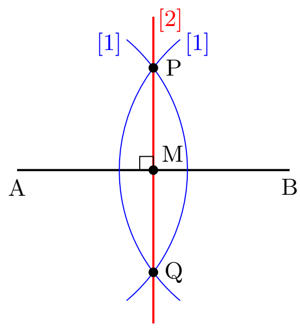
作図の手順
(i) 求める図形が作図できたとして，それらを決定するための条件を解析し，作図の方法を考える（**解析**）．
(ii) 求める図形の作図の手順を述べる（**作図**）．
(iii) 作図によって得られた図形が条件を満たすことを確認する（**証明**）．

(1) **直線外の点を通る直線の垂線**
[1] 点 P を中心として，直線 l に交わる円をかき，直線 l との交点を A，B とする．
[2] 2 点 A，B をそれぞれ中心とする等しい半径の円をかき，交点の 1 つを Q とする．
[3] 直線 PQ を引く．

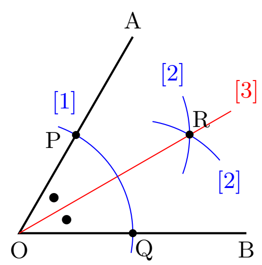


◀ M は線分 AB の中点である．

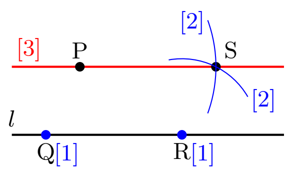
(2) **線分 AB の垂直二等分線**
[1] 線分 AB の両端の点 A，B をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく．
[2] [1] の 2 つの円の交点を P，Q として，直線 PQ を引く．これが線分 AB の垂直二等分線であり，その垂直二等分線と線分 AB との交点 M が線分 AB の中点となる．



(3) **角の二等分線**
[1] 点 O を中心とする円をかき，線分 OA，OB との交点をそれぞれ P，Q とする．
[2] 2 点 P，Q をそれぞれ中心とする等しい半径の円をかき，交点の 1 つを R とする．
[3] 直線 OR を引く．これが ∠AOB の二等分線となる．



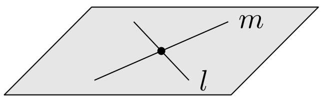
(4) **直線外の点を通る直線の平行線**
[1] 直線 l 上に 2 点 Q，R をとる．
[2] 点 R を中心とする半径 PQ の円をかき，点 P を中心とする半径 QR の円をかく．この 2 つの円の交点を S とする．
[3] 直線 PS を引く．

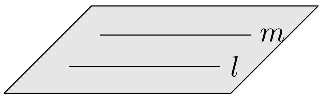


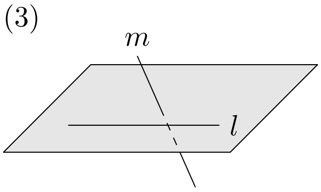
A3.3 空間図形

A3.3.1 2 直線間の位置関係

(1) 1 点で交わる
同じ平面上にあり，ただ 1 つの共有点をもつ．
(2) 平行
同じ平面上にあり，共有点はない．このとき，$l /\!/ m$ と表す．
(3) ねじれの位置
同じ平面上にない．l と m は共有点をもたず，平行でもない．

(1)


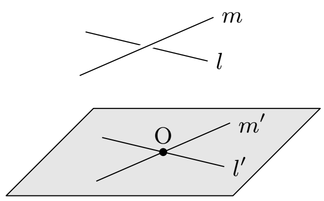
(2)


(3)


◀ (3) は，1 つの平面上にある (1)，(2) とは違い，空間内のみで成り立つ概念であるので注意すること．

A3.3.2 2 直線のなす角

空間内の 2 直線がねじれの位置にあるとき，空間内に 1 点 O をとり，O を通り l，m に平行な直線をそれぞれ l'，m' とする．このとき，l' と m' のなす角は点 O のとり方によらず一定であり，そのなす角を **2 直線 l と m のなす角**という．

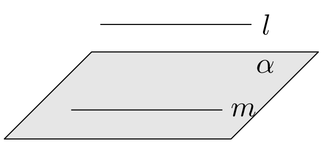


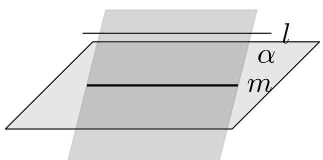
◀ 2 直線がねじれの位置にある場合でも，2 直線のなす角を考えることができる．

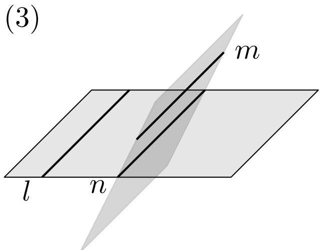
数学 A
A3.3

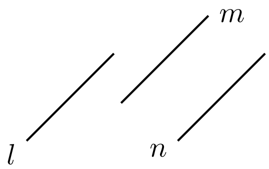
A3.3.3 直線と平面の平行

(1) 2 直線 l，m が平行のとき，m を含み，l を含まない平面 α は l に平行である．
(2) 直線 l と平面 α が平行のとき，l を含む平面と α との交線 m は l に平行である．
(3) 2 直線 l，m が平行のとき，1 つの直線を含み，もう 1 つの直線を含まない 2 平面の交線を n とすれば，l と n，m と n は平行である．
(4) 3 直線 l，m，n について，$l /\!/ m$，$m /\!/ n$ ならば，$l /\!/ n$ である．

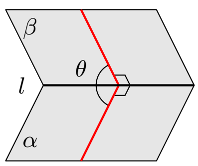
(1)


(2)


(3)


(4)


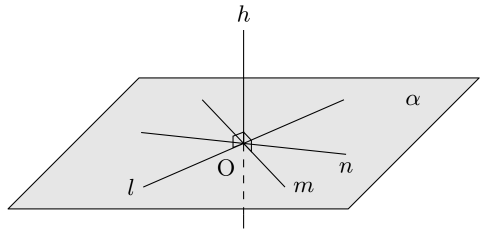
◀ なお，交わる 2 平面の交線上の点から，それぞれの平面上に，交線に対して垂直に引いた 2 直線のなす角を 2 平面 α，β のなす角という．



A3.3.4　直線と平面の垂直

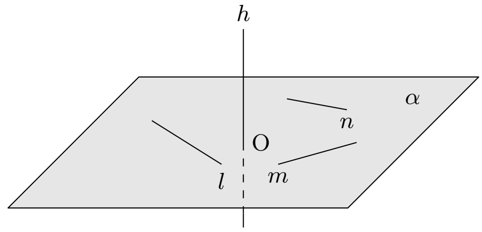
(1) 直線 h と平面 α の交点を O とするとき，O を通り α 上に引いた 2 直線 l，m に h が垂直のとき，h は O を通る α 上の任意の直線 n に垂直である．

(1)

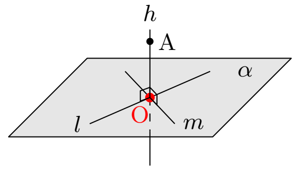


(2) 直線 h と平面 α があり，h が α 上の平行ではない 2 直線 l，m に垂直のとき，h は α 上の任意の直線 n に垂直である．

(2)



◀ なお，平面 α 上にない点 A を通る α の垂線が，平面 α と点 O で交わるとき，その交点を点 A から平面 α 上に下ろした垂線の足という．



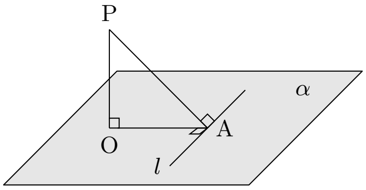
A3.3.5　三垂線の定理

平面 α 上の直線 l，直線 l 上の点 A，l 上にないα 上の点 O，平面 α 上にない点 P があるとき，

(1) $\mathrm{PO} \perp \alpha$，$\mathrm{OA} \perp l \Longrightarrow \mathrm{PA} \perp l$

(2) $\mathrm{PO} \perp \alpha$，$\mathrm{PA} \perp l \Longrightarrow \mathrm{OA} \perp l$

(3) $\mathrm{PA} \perp l$，$\mathrm{OA} \perp l$，$\mathrm{PO} \perp \mathrm{OA} \Longrightarrow \mathrm{PO} \perp \alpha$



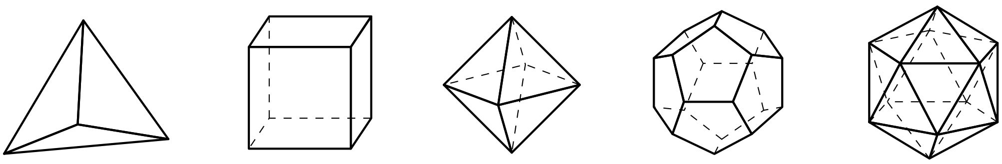
◀ 三垂線の定理は実用的な定理ではないといわれることもある．

A3.3.6　多面体・オイラーの定理

(1) 三角柱，四角錐などのように，いくつかの多角形で囲まれた空間図形を**多面体**という．

(2) 多面体のうち，どの 2 つの頂点を結んだ線分も多面体内に含まれるものを**凸多面体**という．

凸多面体のうち，各面が合同な正多角形で，各頂点に集まる面，辺の数が等しいものを**正多面体**という．正多面体は，次の 5 種類しかないことが知られている．



正四面体　　正六面体　　正八面体　　正十二面体　　正二十面体

◀ これらの 5 種類の正多面体をプラトン立体ということもある．また，正多面体の各面の形は，正三角形，正方形，正五角形のいずれかである．

(3) 凸多面体で，頂点，辺，面の数をそれぞれ v，e，f とすると，

$$\boldsymbol{v - e + f = 2}$$

が成り立つ．これを**オイラーの定理**という．

◀ オイラーの（多面体）定理ともいう．

A4 数学と人間の活動

A4.1 約数と倍数

A4.1.1 約数と倍数，素数と合成数

(1) 2 つの整数 a, b について，ある整数 k を用いて $a = bk$ と表されるとき，b は a の**約数**といい，a は b の**倍数**という．

(2) 倍数の判定法

2 の倍数 $\cdots$ 一の位が偶数

3 の倍数 $\cdots$ 各位の数の和が 3 の倍数

4 の倍数 $\cdots$ 下 2 桁が 4 の倍数または 00

5 の倍数 $\cdots$ 一の位が 0 または 5

6 の倍数 $\cdots$ 2 の倍数かつ 3 の倍数

8 の倍数 $\cdots$ 下 3 桁が 8 の倍数または 000

9 の倍数 $\cdots$ 各位の数の和が 9 の倍数

10 の倍数 $\cdots$ 一の位が 0

◀ 00 を 4 の倍数と捉えることもできる（0 は 4 の倍数）.

◀ 000 を 8 の倍数と捉えることもできる（0 は 8 の倍数）.

(3) 2 以上の自然数において，1 とその数以外に約数をもたない数を**素数**といい，素数ではない数を**合成数**という．ただし，1 は素数でも合成数でもない．

整数がいくつかの整数の積で表されるとき，その積の 1 つ 1 つの整数をもとの整数の**因数**という．とくに，素数である因数を**素因数**といい，自然数を素数の積の形に表すことを**素因数分解**するという．

◀ 素数は小さい順に，

2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

と並んでおり，この列は限りなく続く（素数は無限に存在する）.

(4) 自然数 N が $N = p^a q^b r^c \cdots$ と素因数分解されているとき，

(i) N の約数の個数は，

$$\boldsymbol{(a+1)(b+1)(c+1)\cdots} \textbf{ (個)}$$

(ii) N の約数の総和は，

$$\boldsymbol{(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)(1+r+r^2+\cdots+r^c)\cdots}$$

◀ 素因数分解の表し方は，素数の積の順序の違いを除けば，ただ 1 通りである（素因数分解の一意性）.

A4.1.2 最大公約数と最小公倍数

(1) 2 つ以上の整数に共通する約数をそれらの整数の**公約数**といい，公約数のうち最大のものを**最大公約数**という．また，2 つ以上の整数に共通する倍数をそれらの整数の**公倍数**といい，公倍数のうち正で最小のものを**最小公倍数**という．

(2) 2 つの自然数 a, b の最大公約数が 1 であるとき，a, b は**互いに素**であるという．

(3) 2 つの自然数 a, b の最大公約数を g，最小公倍数を l とする．$a = ga'$, $b = gb'$（a', b' は互いに素な自然数）とすると，次のことが成り立つ．

$$l = a'b'g, \quad ab = gl$$

◀ 最大公約数（Greatest Common Divisor）は頭文字をとり，G.C.D と表されることがある．なお，Divisor を Measure, Factor に変えて，G.C.M や G.C.F と表されることもある．また，最小公倍数（Least Common Multiple）は頭文字をとり，L.C.M と表される．

数学 A A4.1

One math

A4.1.3 整数の除法と余りによる分類

整数 a と正の整数 b について，

$$a = bq + r \quad (0 \leqq r < b)$$

を満たす整数 q，r をそれぞれ，a を b で割ったときの**商**，**余り**という．$r = 0$ のとき，a は b で割り切れるという．また，$r \neq 0$ のとき，a は b で割り切れないという．

◀ 例：$13 = 6 \cdot 2 + 1$ から，13 を 6 で割ったときの商は 2，余りは 1 である．また，$-20 = 8 \cdot (-3) + 4$ から，-20 を 8 で割ったときの商は -3，余りは 4 である．

(2) 余りによる整数の分類

すべての整数 n は，正の整数 m が与えられているとき，次のいずれかの形で表される．

$$mk,\ mk+1,\ mk+2,\ \cdots,\ mk+(m-1) \quad (k \text{ は整数})$$

(3) 割り算の余りの性質

m を正の整数とし，2 つの整数 a，b を m で割ったときの余りをそれぞれ r，r' とすると，次のことが成り立つ．

(i) $a+b$ を m で割った余りは，$r+r'$ を m で割った余りに等しい．

(ii) $a-b$ を m で割った余りは，$r-r'$ を m で割った余りに等しい．

(iii) ab を m で割った余りは，rr' を m で割った余りに等しい．

(iv) a^n を m で割った余りは，r^n を m で割った余りに等しい（n は自然数）．

A4.1.4 合同式

合同式は学習指導要領の範囲外の内容であるため，場合によっては省略してもよい（整数の問題を考えるときに便利なものであるため，興味がある人は取り組んで欲しい）．

以下，a，b，c，d を整数，m，n を自然数とする．

(1) a，b を m で割ったときの余りが等しいとき，a と b は **m を法として合同である**といい，$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$ と表す．また，このような式を**合同式**という．

◀ 合同という用語は図形においても用いられていたが，ここでは整数に関する合同を考えている．なお，mod は「法として」を意味するラテン語の modulo の略であり，mod. と表されることもある．

(2) 合同式の性質

反射律 $\cdots\boldsymbol{a \equiv a \pmod{m}}$

対称律 $\cdots\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$ **のとき，**$\boldsymbol{b \equiv a \pmod{m}}$

推移律 $\cdots\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$，$\boldsymbol{b \equiv c \pmod{m}}$ **のとき，** $\boldsymbol{a \equiv c \pmod{m}}$

(3) $a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$ のとき，次のことが成り立つ．

(i) $a+c \equiv b+d \pmod{m}$　　(ii) $a-c \equiv b-d \pmod{m}$

(iii) $ac \equiv bd \pmod{m}$　　(iv) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

A4.2 ユークリッドの互除法と不定方程式，記数法

A4.2.1 ユークリッドの互除法

次の操作を余りが 0 となるまで繰り返して，2 つの自然数 a, b の最大公約数を求める方法を**ユークリッドの互除法**または単に**互除法**という．

[1] a を b で割ったときの余りを r とする．

[2] $r=0$ のとき，このときの b が最大公約数である．$r>0$ のとき，b を a に，r を b とおいて [1] に戻る．

◀ 割る数が次々と変わっていくことから，互除法といわれている．

A4.2.2 1 次不定方程式と整数の性質

a, b, c を整数とし，$a \neq 0$, $b \neq 0$ とする．このとき，1 次方程式 $ax+by=c$ を **1 次不定方程式** といい，1 次不定方程式を満たす整数 x, y の組を，この方程式の**整数解**という．また，この方程式のすべての整数解を求めることを，**1 次不定方程式を解く**という．

◀ 不定方程式は，ディオファントス方程式ともいわれる．また，不定方程式は必ずしも整数解をもつとは限らない．例えば，$6x+2y=3$ は左辺は偶数であるが，右辺は奇数であるからこの方程式を満たす整数 x, y は存在しない．

(1) **方程式 $\boldsymbol{ax+by=0}$ ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は互いに素) の整数解**

方程式を変形すると，$ax=-by$

a, b は互いに素であるから，x は b の倍数である．

よって，k を整数として，$x=bk$ と表される．

ここで，$x=bk$ を $ax=-by$ に代入することにより，$y=-ak$

(2) **方程式 $\boldsymbol{ax+by=c}$ ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は互いに素) の整数解**

(1) のような右辺が 0 のときに帰着させるために，1 組の整数解を見つける．

方程式 $ax+by=c \cdots$ (i) の 1 組の解を $x=p$, $y=q$ とすると，$ap+bq=c \cdots$ (ii)

(i)−(ii) より $a(x-p)+b(y-q)=0$

すなわち，$a(x-p)=-b(y-q) \cdots$ (iii)

a, b は互いに素であるから，$x-p$ は b の倍数である．

よって，k を整数として，$x-p=bk$ と表される．

(iii) に代入して，$y-q=-ak$

したがって，解は $x=bk+p$, $y=-ak+q$　(k は整数)

A4.2.3 記数法

n は 1 より大きい整数であるとする．このとき，0 から $n-1$ までの n 個の数字を用いて，n で位が 1 つ繰り上がるように数を表す方法を **$\boldsymbol{n}$ 進法**という．

10 進法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$	16
2 進法	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	$\cdots$	10000

n 進数では，その数の右下に (n) と記す．

◀ 一般に，10 進法では右下の (n) を省略する．

例：**2 進法の** $1010_{(2)}$ **を 10 進法で表す．**

$$1010_{(2)}=1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+0=10$$

例：**10 進法の 30 を 2 進法で表す．**

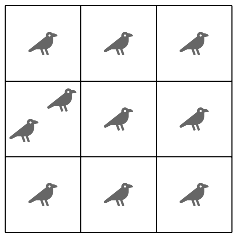
30 を右のように 2 で割ると，

$$30=1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2+0=11110_{(2)}$$

2) 30　余り
2) 15 $\cdots$ 0
2) 7 $\cdots$ 1
2) 3 $\cdots$ 1
　 1 $\cdots$ 1
順に並べると，11110

A4.2.4　部屋割り論法

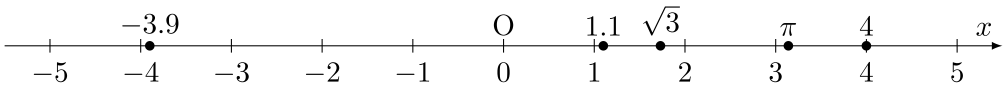
「n 個の部屋に $n+1$ 人を入れるとき，2 人以上入っている部屋が少なくとも 1 つは存在する」
このような考え方を**部屋割り論法**または鳩の巣原理という．
部屋割り論法は，次の形でも使われる．
「n 個の部屋に n 人を入れるとき，相部屋がない場合，どの部屋にも 1 人ずつ人が入っている」



◀ 例：10 匹の鳩を 9 個のマスに入れるとき，少なくとも 1 つのマスに 2 匹の鳩が入る．なお，「鳩の巣原理」は誤訳であるといわれることもある．

A4.2.5　ガウス記号

x，y を実数，n を整数とする．このとき，x について，x 以下の最大の整数を $[\boldsymbol{x}]$ と表す（[ ] を**ガウス記号**という）．また，次の性質が成り立つ．
(i) $[x] \leqq x < [x]+1$ より，$\boldsymbol{x-1<[x] \leqq x}$
(ii) $\boldsymbol{[x]+[y] \leqq [x+y]}$
(iii) $\boldsymbol{[x+n]=[x]+n}$
例：$[1.1]=1$，$[4]=4$，$[-3.9]=-4$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$



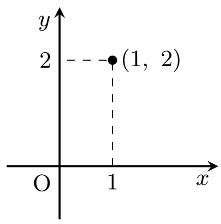
◀ 国際的には $\lfloor x \rfloor$ を用いる方が一般的である（床を意味する floor という）．なお，実数 x について，n を整数とするとき，

$$n \leqq x < n+1 \iff \lfloor x \rfloor = n$$

が成り立つ．

A4.2.6　格子点

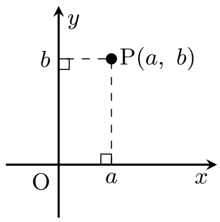
xy 平面において，x 座標，y 座標がともに整数である点を**格子点**という．
例：$(1,\ 2)$ や $(-3,\ 2)$ などは格子点であり，$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ は格子点ではない．



◀ なお，x 座標，y 座標がともに有理数である点を有理点という．

A4.2.7　平面上の点の位置

平面上に点 O をとり，O で互いに直交する 2 本の数直線を，右の図のように定める．これらの直線をそれぞれ $\boldsymbol{x}$ **軸**および $\boldsymbol{y}$ **軸**といい，まとめて**座標軸**という．

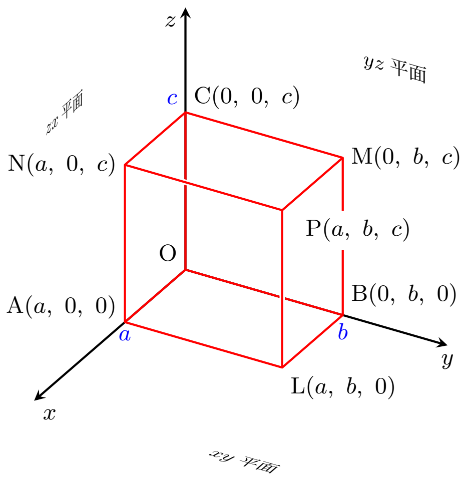


◀ x 軸と y 軸は，原点 O (origin) を通って直交する．なお，進んだ数学（主に大学以降）では直交しない座標軸を考えることもある．

平面上に座標軸を定めると，その平面上の点 P の位置は，右上の図のように 2 つの実数の組 (a, b) で示される．この組 (a, b) を点 P の**座標**といい，この点 P を $\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ と記す．座標が定められた平面を**座標平面**という．また，点 O は座標平面の **原点**といい，原点 O の座標は (0, 0) である．

A4.2.8　空間の点の位置

空間上に点 O をとり，O で互いに直交する 3 本の数直線を，右の図のように定める．これらの直線をそれぞれ $\boldsymbol{x}$ **軸**，$\boldsymbol{y}$ **軸**，$\boldsymbol{z}$ **軸**という．
空間上に座標軸を定めると，その空間上の点 P の位置は，右の図のように 3 つの実数の組 (a, b, c) で示される．この組 (a, b, c) を点 P の**座標**といい，座標が (a, b, c) である点 P を P(a, b, c) と記す．座標の定められた空間を**座標空間**という．また，点 O は座標空間の **原点**といい，原点 O の座標は (0, 0, 0) である．



◀ x 軸と y 軸が定める平面を xy 平面，y 軸と z 軸が定める平面を yz 平面，z 軸と x 軸が定める平面を zx 平面という．

A4.2.9　2 点間の距離

(1) 座標平面において，点 A(x_1, y_1)，点 B(x_2, y_2)，および原点 O(0, 0) があるとする．このとき，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

◀ 三平方の定理からわかる．

とくに，$\mathrm{OA} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$ である．
(2) 座標空間において，点 A(x_1, y_1, z_1)，点 B(x_2, y_2, z_2)，および原点 O(0, 0, 0) があるとする．このとき，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

◀ 座標平面と同様に，三平方の定理からわかる．

とくに，$\mathrm{OA} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$ である．

索引

基本事項一覧

【数学 I】第 1 章　数と式

【数学 I】第 2 章　集合と命題

【数学 I】第 3 章　2 次関数

【数学 I】第 4 章　図形と計量

【数学 I】第 5 章　データの分析

【数学 A】第 1 章　場合の数

【数学 A】第 2 章　確率

【数学 A】第 3 章　図形の性質

【数学 A】第 4 章　数学と人間の活動

ギリシャ文字の表

大文字	小文字	読み方
A	α	alpha（アルファ）
B	β	beta（ベータ）
Γ	γ	gamma（ガンマ）
Δ	δ	delta（デルタ）
E	ϵ, ε	epsilon（イプシロン）
Z	ζ	zeta（ゼータ）
H	η	eta（イータ）
Θ	θ, ϑ	theta（シータ）
I	ι	iota（イオタ）
K	κ	kappa（カッパ）
Λ	λ	lambda（ラムダ）
M	μ	mu（ミュー）

大文字	小文字	読み方
N	ν	nu（ニュー）
Ξ	ξ	xi（クシー）
O	o	omicron（オミクロン）
Π	π, ϖ	pi（パイ）
P	ρ, ϱ	rho（ロー）
Σ	σ, ς	sigma（シグマ）
T	τ	tau（タウ）
Υ	υ	upsilon（ウプシロン）
Φ	ϕ, φ	phi（ファイ）
X	χ	chi（カイ）
Ψ	ψ	psi（プサイ）
Ω	ω	omega（オメガ）

著者紹介

著者：犬飼 シムラ（いぬかい・しむら）

早稲田大学教育学部数学科を卒業し，高等学校の公立学校教員として勤務している．専門は函数解析，数学教育など．好きなものは，漫画，犬，動物，スポーツ，サウナとのこと．神奈川県在住との噂がある．

表紙デザイン：PGF/Ti*k*Z を使用して作成
本文：LaTeX を使用して作成
図版：PGF/Ti*k*Z を使用して作成

One More（数学 I・A）基本事項まとめ

2025年 5月 6日　初版公開
2026年 4月 7日　第 2 版公開

著者： 犬飼（いぬかい） シムラ
発行： Onemath

I · A

Onemath