I

One More (数学 I)

書き込み式ワークブック

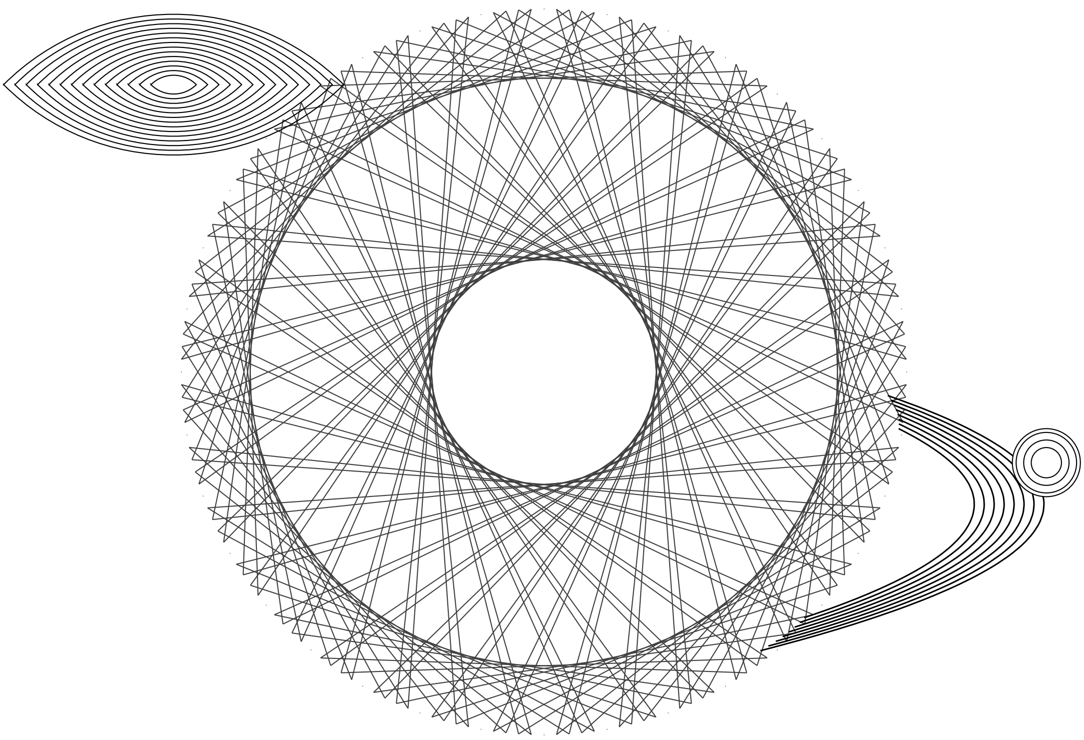
Onemath

One math

One More 数学 I

One More 数学 I

書き込み式ワークブック



第 I 部

数学 I

目次

問題一覧へのリンク

PDF 版からは各ページの右下のフッターにあるロゴに「問題一覧」へのリンク機能がついています．印刷時にページを参照するときや，タイトルから例題を探したいときに便利です．

One math

ロゴにリンク機能あり

第 1 章　数と式

1 章：数と式（再生リスト）

1　数と式

1 節 式の展開と因数分解（pp.7-23），2 節 実数（pp.28-37），3 節 1 次不等式（pp.44-52）

問題一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.1.1	★		
I1.1.2	★★		
I1.1.3	★		
I1.1.4	★		
I1.1.5	★★		
I1.1.6	★★		
I1.1.7	★★		
I1.1.8	★		
I1.1.9	★		
I1.1.10	★★		
I1.1.11	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.1.12	★★		
I1.1.13	★★		
I1.1.14	★★		
I1.1.15	★★★		
I1.1.16	★★★		
I1.2.1	★		
I1.2.2	★		
I1.2.3	★★		
I1.2.4	★★		
I1.2.5	★★★		
I1.2.6	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.2.7	★★★		
I1.2.8	★★★		
I1.2.9	★★★		
I1.3.1	★★		
I1.3.2	★		
I1.3.3	★		
I1.3.4	★★		
I1.3.5	★★		
I1.3.6	★★★		
I1.3.7	★★		
I1.3.8	★★★		

節末問題 1.1，節末問題 1.2，節末問題 1.3

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.1.1	★		
I1.1.2	★★		
I1.1.3	★★		
I1.1.4	★★		
I1.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.2.1	★		
I1.2.2	★★		
I1.2.3	★★		
I1.2.4	★★		
I1.2.5	★★		
I1.2.6	★★★		
I1.2.7	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.3.1	★★		
I1.3.2	★★		
I1.3.3	★★		
I1.3.4	★★★		
I1.3.5	★★★		
I1.3.6	★★★		

章末問題 1

番号	難易度	1 回目	2 回目
I1.1	★★		
I1.2	★★★★		
I1.3	★★★		
I1.4	★★★		
I1.5	★★		

チェック例

○ ··· 考え方を理解し，解くことができた．　△ ··· 理解が不十分である．　× ··· 解くことができなかった．

1.1 式の展開と因数分解

問題 I1.1.1 ★ 解答 p.260

▶ 節末 I1.1.1 【多項式の整理と次数，定数項】

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$5 + x^4 - 3x^3 + 2x - 4x + 3x^2 - 9 - x^4$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．

$$4b^2 - 3ab^2 + ab - 6a + 7a^2 - 3 + 2b^3, \quad [b],\ [a \text{ と } b]$$

問題 I1.1.2 ★★ 解答 p.261　【多項式の加法・減法】

$A = 2x^2 - 4x + 3$, $B = 3x^2 + x - 7$ について，次の式を計算せよ．

(1) $A + B$　　(2) $A - B$

(3) $3A - 2B$　　(4) $4(A + B) - (2A - 3B)$

問題 I1.1.3 ★ 解答 p.262

▶ 節末 I1.1.2 【多項式の乗法】

次の計算をせよ.

(1) $3x^2y \times (-4xy^2)^2$

(2) $5abc^2(2a^2 - 3b + 4c)$

(3) $(x-3)(x^2+4x-7)$

(4) $(x^3 - 2x + 5)(3x^2 - x + 4)$

問題 I1.1.4 ★ 解答 p.262　　**【乗法公式を用いた展開】**

次の式を展開せよ.

(1) $(x+3)^2$　(2) $(k-2)^2$　(3) $(x+2y)(x-2y)$

(4) $(x-2y)(x-5y)$　(5) $(4a+2b)(3a+b)$　(6) $(2x-y-z)^2$

問題 I1.1.5 ★★ 解答 p.263　【乗法公式（3 次）を用いた展開】

次の式を展開せよ.

(1) $(x+3)^3$

(2) $(2x-5y)^3$

(3) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$

(4) $(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2)$

(5) $(x-3)^3(x+3)^3$

(6) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

問題 I1.1.6 ★★ 解答 p.264

▶ 節末 I1.1.3 ▶ 章末 I1.1 【おき換えを用いた展開】

次の式を展開せよ.

(1) $(x+2y-3)(x+2y+5)$

(2) $(4a-3b+c)(4a+3b-c)$

(3) $(p+q-r+s)(p+q+r-s)$

問題 I1.1.7 ★★ 解答 p.265

【掛ける順序や組み合わせを工夫した展開】

次の式を展開せよ.

(1) $(x-4)(x-5)(x+2)(x+3)$

(2) $(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)\left(x^4+9\right)$

(3) $(m-n)^2\left(m^2+mn+n^2\right)^2$

問題 I1.1.8 ★ 解答 p.265　【因数分解の基本】

次の式を因数分解せよ．

(1) $4x^3y^2+8x^2y^2+12xy^3$　(2) $ab-b-a+1$　(3) $x^2-14x+49$

(4) $25m^3-20m^2+4m$　(5) $9y^2-(y-2)^2$　(6) $x^2+7x+10$

問題 I1.1.9 ★ 解答 p.266　　【たすき掛けを用いた因数分解】

次の式を因数分解せよ.

(1) $2x^2+5x+3$　　(2) $4x^2-11x-3$　　(3) $6x^2+13xy+6y^2$

問題 I1.1.10 ★★ 解答 p.266

▶ 節末 I1.1.4 【因数分解（3 次式）】

次の式を因数分解せよ.

(1) x^3-27

(2) $27m^3+8n^3$

(3) $x^3-6x^2+12x-8$

(4) x^3-4x^2-x+4

問題 I1.1.11 ★★ 解答 p.267

▶ 節末 I1.1.4 【因数分解の工夫（次数の低い文字に着目）】

次の式を因数分解せよ．

(1) $9x^2+3xy+y-1$

(2) $x^3+x^2y+3xy+y^2+2y-8$

(3) $xy+xz-y^2-z^2-2yz$

問題 I1.1.12 ★★ 解答 p.267

▶ 節末 I1.1.4 【因数分解の工夫（次数が同じ場合）】

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 8y - 3$

(2) $3x^2 + 11xy + 10y^2 - x - 3y - 4$

問題 I1.1.13　★★　解答 p.268

▶ 節末 I1.1.4 【因数分解の工夫 (おき換え)】

次の式を因数分解せよ.

(1) $(x+3y)^2-5(x+3y)+6$

(2) $\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-3\right)-4$

(3) $(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)+24$

問題 I1.1.14　★★　解答 p.269　▶ 章末 I1.2 【因数分解（対称式，交代式）】

次の式を因数分解せよ．

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

(2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

1 回目：　2 回目：

問題 I1.1.15 ★★★ 解答 p.269

▶ 節末 I1.1.5 【因数分解（$a^3+b^3+c^3-3abc$ の形）】

次の式を因数分解せよ.

(1) $p^3+q^3+3pq-1$

(2) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

問題 I1.1.16 ★★★ 解答 p.270

▶ 節末 I1.1.5 【因数分解（ax^4+bx^2+c の形）】

次の式を因数分解せよ．

(1) x^4-11x^2+18　　(2) x^4+4x^2+16　　(3) $x^4-8x^2y^2+4y^4$

節末問題 1.1 式の展開と因数分解

節末 I1.1.1 ★ 解答（節末）p.271

▶ 問題 I1.1.1

1 回目：
2 回目：

ある多項式に $5x^2-3x+1$ を加えるところを誤って引いたので，答えが $-3x^2+12x-5$ になった．正しい答えを求めよ．

節末 I1.1.2 ★★ 解答（節末）p.271

▶ 問題 I1.1.3

1 回目：
2 回目：

$\left(x^3 - 4x^2 + 2x + 3\right)\left(x^3 + x^2 - x + 2\right)$ の展開式において，x^5 と x^3 の係数を求めよ．

節末 I1.1.3 ★★ 解答（節末）p.271

▶ 問題 I1.1.6

次の式を展開せよ.

(1) $\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+x-1\right)$　　(2) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

1 回目：
2 回目：

節末 I1.1.4 ★★ 解答（節末）p.272

▶ 問題 I1.1.10 ▶ 問題 I1.1.11 ▶ 問題 I1.1.12 ▶ 問題 I1.1.13

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2y+2xy^2+x^2+4y^2+3xy+x+2y-2$　(2) $(x+y)^4-(x-y)^4$

(3) $(x+y)^3+z^3$　(4) x^6-1

1 回目：
2 回目：

(5) a^6-7a^3-8　(6) $\left(x^2+6x+3\right)\left(x^2+6x+7\right)+4$

節末 I1.1.5 ★★★ 解答（節末）p.273

▶ 問題 I1.1.15 ▶ 問題 I1.1.16

次の式を因数分解せよ．

(1) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$ (2) $4x^4+7x^2y^2+16y^4$

1 回目：
2 回目：

1.2 実数

問題 I1.2.1 ★ 解答 p.274　▶ 節末 I1.2.1 【循環小数】

(1) 次の分数を小数の形に直し，循環小数の表し方で書け．

(i) $\frac{2}{7}$　　(ii) $\frac{5}{12}$　　(iii) $\frac{7}{15}$

(2) 次の循環小数を分数の形で表せ．

(i) $0.\dot{4}$　　(ii) $0.\dot{3}\dot{6}$

問題 I1.2.2 ★ 解答 p.274

▶ 節末 I1.2.2 【平方根の計算】

次の式を計算せよ．

(1) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{27}$

(2) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

(3) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$

(4) $(\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{3})$

問題 I1.2.3 ★★ 解答 p.275

▶ 節末 I1.2.3 ▶ 節末 I1.2.4 【分母の有理化】

次の式の分母を有理化して簡単にせよ.

(1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$　(2) $\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　(3) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$　(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

問題 I1.2.4 ★★ 解答 p.276　　▶ 節末 I1.2.5 【2 重根号】

次の 2 重根号を簡単な形にせよ.

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$　　(2) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$　　(3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}$　　(4) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}$

問題 I1.2.5 ★★★ 解答 p.276　　【対称式 x^n+y^n の値】

$x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $x+y$　(2) xy　(3) x^2+y^2　(4) x^3+y^3　(5) x^4+y^4

問題 I1.2.6 ★★ 解答 p.277

【対称式の値】

$x - \frac{1}{x} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$　(2) $x + \frac{1}{x}$　(3) $x^3 + \frac{1}{x^3}$　(4) $x^6 + \frac{1}{x^6}$

問題 I1.2.7 ★★★ 解答 p.277 ▶ 節末 I1.2.6 ▶ 章末 I1.3 **【3 文字の対称式の値】**

$x+y+z=3$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=-2$ を満たす実数 x, y, z に対して，次の式の値を求めよ．

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ (2) $x^2+y^2+z^2$ (3) $x^3+y^3+z^3$

問題 I1.2.8 ★★★ 解答 p.278 【式の値】

$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $2\alpha^2 - 2\alpha - 1$ (2) α^8

問題 I1.2.9 ★★★ 解答 p.278

▶ 節末 I1.2.7 【整数部分と小数部分】

$\frac{3}{4-\sqrt{7}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) $a+\frac{1}{b}$ の値を求めよ．

1 回目：　2 回目：

節末問題 1.2 実数

節末 I1.2.1 ★ 解答（節末）p.279

▶ 問題 I1.2.1

1 回目：
2 回目：

循環小数の積 $0.\dot{1}\dot{5} \times 0.\dot{5}\dot{4}$ を，1 つの既約分数で表せ.

節末 I1.2.2 ★★ 解答（節末）p.279

▶ 問題 I1.2.2

$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{6}$ のとき，$\sqrt{16x^2 - 24x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{36x^2 - 60x + 25}$ を簡単にせよ．

1 回目：
2 回目：

節末 I1.2.3 ★★ 解答（節末）p.279

▶ 問題 I1.2.3

1 回目：
2 回目：

次の式を計算せよ.

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

節末 I1.2.4 ★★ 解答（節末）p.280

▶ 問題 I1.2.3

1 回目：
2 回目：

次の式の分母を有理化して計算せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

節末 I1.2.5 ★★ 解答（節末）p.280

▶ 問題 I1.2.4

1 回目：
2 回目：

次の式を簡単な形にせよ．

$$\sqrt{4+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$$

節末 I1.2.6 ★★★ 解答（節末）p.281

▶ 問題 I1.2.7

1 回目：
2 回目：

実数 $a,\ b,\ c$ が $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=14,\ abc=-2$ を満たすとき, $(a+b)(b+c)(c+a)$ の値を求めよ.

節末 I1.2.7 ★★★ 解答（節末）p.281

▶ 問題 I1.2.9

$\frac{1}{4-\sqrt{11}}$ の整数部分を a，小数部分を b とし，$10b$ の整数部分を c，小数部分を d とするとき，次の値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

(1) a　　(2) $10b$　　(3) c　　(4) d

1.3 1 次不等式

問題 I1.3.1 ★★ 解答 p.282 【不等式の性質】

$-3 < x < 2$, $-1 < y < 4$ のとき，次の式のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $x+2$ (2) $3x$ (3) $x+y$ (4) $x-y$ (5) $3x-2y$

問題 I1.3.2 ★ 解答 p.282　【1 次不等式（基本）】

次の 1 次不等式を解け.

(1) $5x+1<3x-4$　(2) $4(2x-3)>3(x+2)$　(3) $\frac{2x+3}{4}-\frac{x-1}{6} \geqq \frac{1}{3}$

問題 I1.3.3 ★ 解答 p.283 【1 次不等式，連立 1 次不等式】

次の不等式，連立 1 次不等式を解け.

(1) $\begin{cases} 4x-1>2x+3 \\ 2x+5 \leqq 3(x-1) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+4 \geqq 3-x \\ x-2<0 \end{cases}$

(3) $2x+1 \leqq 3x-4 < -4x-7$

問題 I1.3.4 ★★ 解答 p.284

▶ 節末 I1.3.1 【不等式を満たす整数の解】

(1) 不等式 $3x-1<2x+5$ を満たす自然数 x の値をすべて求めよ.

(2) 次の連立不等式を満たす整数 x がちょうど 2 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ.

$$\begin{cases} 3x+a<4x \\ 3x>4x-7 \end{cases}$$

1 回目： 2 回目：

問題 I1.3.5 ★★ 解答 p.284

▶ 節末 I1.3.2 ▶ 節末 I1.3.3 【1 次不等式の文章題】

(1) 1 個 100 円のペンと 1 個 180 円のノートを合わせて 20 個買い，200 円のケースに入れて息子に渡したい．文具代とケース代の合計金額を 3500 円以下にするとき，ノートは最大で何個まで買うことができるか.

(2) 連続する 4 つの整数の和が 90 以上になるもののうち，その和が最小となる 4 つの数を求めよ.

問題 I1.3.6 ★★★ 解答 p.285

▶ 節末 I1.3.4 ▶ 章末 I1.4 【文字を含む 1 次不等式】

a を定数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) x の不等式 $ax + 2 > 0$ を解け．

(2) x の不等式 $(a-1)x \leqq a^2 - a$ を解け．

問題 I1.3.7 ★★ 解答 p.285

▶ 節末 I1.3.5 ▶ 章末 I1.4 【絶対値記号を含む方程式・不等式 1】

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x+2|=3$　　(2) $|x-5| \leqq 4$　　(3) $|x+1|>2$

問題 I1.3.8 ★★★ 解答 p.286

▶ 節末 I1.3.5 ▶ 章末 I1.5 【絶対値記号を含む方程式・不等式 2】

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x+2|=3x$

(2) $|x+2|-|x-1| \geqq x$

1 回目：　2 回目：

One math

節末問題 1.3 1次不等式

節末 I1.3.1 ★★ 解答（節末）p.287

▶ 問題 I1.3.4

連立不等式 $\begin{cases} x > 4a-3 \\ 3x-2 > 8(x-1) \end{cases}$ の解について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ．

1回目：

2回目：

(1) 解に 0 が含まれる．

(2) 解に含まれる整数がちょうど 4 個存在する．

節末 I1.3.2 ★★　解答（節末）p.287

▶ 問題 I1.3.5

1 回目：
2 回目：

整数 x は 4 の倍数であり，x を 15 で割ったところ，割り切れなかった．そこで $\frac{x}{15}$ を計算し，その小数第 1 位を四捨五入したところ，4 になった．このとき，整数 x をすべて求めよ．

節末 I1.3.3 ★★　解答（節末）p.288

▶ 問題 I1.3.5

(1) 駅から自宅までの道のりは 30 km である．この道のりを，初めは時速 5 km で歩き，途中からは時速 10 km で走ると，掛かった時間は 5 時間以内であった．時速 5 km で歩いた道のりはどれほどであるか.

1 回目：

2 回目：

(2) 7% の食塩水と 10% の食塩水がある．7% の食塩水 500 g と 10% の食塩水を何 g か混ぜ合わせて，8% 以上 8.5% 以下の食塩水を作りたい．10% の食塩水を何 g 以上何 g 以下混ぜればよいか.

節末 I1.3.4 ★★★ 解答（節末）p.289

▶ 問題 I1.3.6

1 回目：
2 回目：

次の不等式を解け．ただし，a，b は定数とする．

(1) $ax > b$

(2) $(a+b)x \leqq a^2 - b^2$

節末 I1.3.5 ★★★ 解答（節末）p.290

▶ 問題 I1.3.7 ▶ 問題 I1.3.8

次の方程式を解け．

1 回目：

2 回目：

(1) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=6$　(2) $x^2+|x+3|+|x-2|=6$

節末 I1.3.6 ★★★　解答（節末）p.291

▶ 問題 I1.3.7 ▶ 問題 I1.3.8

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|2x-3| < 3x$

(2) $|x-3| + |x-5| \leqq 5$

(3) $||x-2|+4| = 3x$

1 回目：

2 回目：

章末問題 1 数と式

1.4 章末問題 1

章末 I1.1 ★★ 解答（章末）p.292

▶ 問題 I1.1.6

1 回目：
2 回目：

次の式を展開せよ．

$$(x+y+z)^2-(y+z-x)^2+(z+x-y)^2-(x+y-z)^2$$

章末 I1.2 ★★★★ 解答（章末）p.292

▶ 問題 I1.1.14

1 回目：
2 回目：

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

(2) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

章末 I1.3 ★★★ 解答（章末）p.293

▶ 問題 I1.2.7

1 回目：

2 回目：

$x+y+z=0$ のとき，$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ の値を求めよ．

章末 I1.4 ★★★　解答（章末）p.293

▶ 問題 I1.3.6 ▶ 問題 I1.3.7

1 回目：
2 回目：

不等式 $|ax+2| \leqq b$ の解が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき a, b の値を求めよ.

章末 I1.5 ★★ 解答（章末）p.294

▶ 問題 I1.3.8

1 回目：

2 回目：

$x = 2a - 1$ のとき，$\sqrt{x^2 + 8a} + \sqrt{a^2 - x}$ を簡単にせよ．

第 2 章　集合と命題

2　集合と命題

1 節 集合と論理（pp.64-80）

問題一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I2.1.1	★		
I2.1.2	★		
I2.1.3	★★		
I2.1.4	★★★		
I2.1.5	★★		
I2.1.6	★★★★		
I2.1.7	★		
I2.1.8	★		
I2.1.9	★★		
I2.1.10	★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I2.1.11	★★★		
I2.1.12	★		
I2.1.13	★★		
I2.1.14	★★★		
I2.1.15	★★		
I2.1.16	★★★		

節末問題 2.1

番号	難易度	1 回目	2 回目
I2.1.1	★		
I2.1.2	★★		
I2.1.3	★★★		
I2.1.4	★★★		
I2.1.5	★★		
I2.1.6	★★★★		

章末問題 2

番号	難易度	1 回目	2 回目
I2.1	★★★		
I2.2	★★★		
I2.3	★★		
I2.4	★★★		
I2.5	★★		

チェック例

○… 考え方を理解し，解くことができた．　△… 理解が不十分である．　×… 解くことができなかった．

2.1 集合と論理

問題 I2.1.1 ★ 解答 p.295 【集合の表し方】

(1) $A=\{x \mid x$ は 20 以下の奇数$\}$ とする．次の $\boxed{}$ の中に，$\in$ または $\notin$ のいずれか適するものを書き入れよ．

(i) $7\ \boxed{}\ A$　　(ii) $12\ \boxed{}\ A$

(2) 次の集合を要素を書き並べて表せ．

(i) 16 の正の約数全体の集合　　(ii) $\{x \mid -5 \leqq x < 3,\ x$ は整数$\}$

(3) 次の 2 つの集合 $A,\ B$ の間に成り立つ包含関係をいえ．

(i) $A=\{4n+1 \mid 0 \leqq n \leqq 1,\ n$ は整数$\}$，$B=\{2n-1 \mid -1 \leqq n \leqq 3,\ n$ は整数$\}$

(ii) $A=\{2n+1 \mid n=0,\ 1\}$，$B=\{x \mid (x-1)(x-3)=0,\ x$ は整数$\}$

問題 I2.1.2 ★　解答 p.296　【2 つの集合の共通部分と和集合，補集合】

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A,\ B$ を $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$，$B=\{1,\ 5,\ 6,\ 9,\ 12\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B$　(2) $\overline{A}\cap B$　(3) $\overline{A\cap B}$

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$　(5) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$

問題 I2.1.3 ★★ 解答 p.297

▶ 節末 I2.1.2 【不等式で表される集合】

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A=\{x \mid x+3<0\}$, $B=\{x \mid |x+3| \leqq 1\}$ とするとき，次の集合を求めよ.

(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap \overline{B}$　　(3) $\overline{A \cap B}$

問題 I2.1.4 ★★★ 解答 p.298 【集合の要素の決定】

$U = \{x \mid x$ は実数$\}$ を全体集合とする．U の部分集合

$$A = \left\{3,\ a+2,\ a^2-a-11\right\},\quad B = \left\{3,\ 7,\ a^2-15,\ a^2-3a+2\right\}$$

とする．$A \cap B = \{1,\ 3\}$ であるとき，定数 a の値を求めよ．

問題 I2.1.5 ★★ 解答 p.299 【3 つの集合の共通部分，和集合】

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A，B，C を $A = \{n \mid n$ は 10 の正の約数$\}$，$B = \{n \mid n$ は偶数$\}$，$C = \{n \mid n$ は 14 の正の約数$\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A \cap B \cap C$

(2) $(A \cup B) \cap C$

(3) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

(4) $\overline{(\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})}$

問題 I2.1.6 ★★★★ 解答 p.300　▶ 章末 I2.1 【集合の包含関係・相等の証明】

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

(1) $A = \{6x+5 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3x-1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ であるとき，$A \subset B$

(2) $A = \{5x+2y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4x+3y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$ であるとき，$A = B$

1 回目：　2 回目：

問題 I2.1.7 ★ 解答 p.301

▶ 節末 I2.1.3 【命題の真偽】

次の命題の真偽を調べよ．また，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x^2 = 16$ ならば，$x = 4$

(2) $x - y = 0$ ならば，$x = y = 0$

(3) $x^2 + y^2 = 0$ ならば，$x = y = 0$

(4) xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である．

問題 I2.1.8 ★ 解答 p.301　【命題の真偽と集合】

次の命題の真偽を，集合の考えを用いて調べよ．

(1) n を自然数とする．n が 1 桁の正の奇数ならば，n は 15 の正の約数である．

(2) 実数 x について，$|x| < 3$ ならば，$x > -4$

問題 I2.1.9 ★★ 解答 p.302

▶ 節末 I2.1.4 【必要条件・十分条件】

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x = 2$ は，$x^2 < 10$ であるための $\boxed{}$.

(2) $x + y > 10$ は，$x > 5$ かつ $y > 5$ であるための $\boxed{}$.

(i) 必要条件であるが十分条件ではない (ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である (iv) 必要条件でも十分条件でもない

問題 I2.1.10 ★ 解答 p.302 【条件の否定】

次の条件の否定を述べよ．ただし，x，y を実数とする．

(1) $0 \leqq x < 5$

(2) x は 1 でも 2 でもない

(3) $x = 0$ または $x = 2$

(4) x，y の少なくとも一方は 1 である．

問題 I2.1.11 ★★★ 解答 p.303 【「すべて」「ある」の否定】

次の命題の否定を述べよ．また，もとの命題とその否定の真偽を答えよ．

(1) ある整数 k について，$k^2 = 3k$

(2) 任意の実数 x，y について，$(x+y)^2 > x^2 + y^2$

問題 I2.1.12 ★ 解答 p.303　　【逆・裏・対偶】

次の命題の逆，裏，対偶を述べよ．また，それらの真偽を調べよ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x=-3$ ならば，$x^2=9$

(2) $x+y>2$ ならば，x，y の少なくとも 1 つは 1 より大きい．

問題 I2.1.13 ★★ 解答 p.304

► 節末 I2.1.5 ► 章末 I2.2 ► 章末 I2.3 【対偶を用いた証明 1】

次の命題を証明せよ．ただし，a，b を整数とする．

(1) a^3 が偶数ならば，a は偶数である．

(2) a^2+b^2 が奇数ならば，積 ab は偶数である．

問題 I2.1.14 ★★★ 解答 p.304　【対偶を用いた証明 2】

次の命題を証明せよ．ただし，a, b, c は整数とする．

$a^2+b^2+c^2$ が偶数ならば，a, b, c のうち少なくとも 1 つは偶数である．

1 回目：　2 回目：

問題 I2.1.15 ★★ 解答 p.305

▶ 節末 I2.1.6 【背理法を用いた証明 1】

(1) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ.

(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを用いて, $\sqrt{3}-1$ が無理数であることを証明せよ.

問題 I2.1.16 ★★★ 解答 p.306

▶ 節末 I2.1.6 ▶ 章末 I2.4 【背理法を用いた証明 2】

a, b を有理数とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい．

(1) $a+b\sqrt{3}=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ であることを証明せよ．

(2) $a(2+\sqrt{3})+b(5-\sqrt{3})=13+3\sqrt{3}$ を満たす a, b の値を求めよ．

節末問題 2.1 集合と論理，論証

節末 I2.1.1 ★ 解答（節末）p.307

$P=\{a,\ b,\ c\}$ の部分集合をすべて求めよ．

1 回目：
2 回目：

節末 I2.1.2 ★★ 解答（節末）p.307

▶ 問題 I2.1.3

1 回目：
2 回目：

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A = \{x \mid |x-1| < \sqrt{6}\}$，$B = \{x \mid -a \leqq x \leqq a\}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) $A \supset B$ となる a の値の範囲を求めよ．

(2) $A \cup B$ に属する整数の個数が 9 個となる a の値の範囲を求めよ．

節末 I2.1.3 ★★★ 解答（節末）p.308

▶ 問題 I2.1.7

1 回目：
2 回目：

次の命題の真偽を調べよ．また，真のときにはその証明をし，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x，y は実数とし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$ は無理数であることを用いてもよい．

(1) x が無理数，y が有理数ならば，$x+y$ は無理数である．

(2) x^2-x が有理数ならば，x は有理数である．

(3) x，y がともに無理数ならば，$x+y$，x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である．

節末 I2.1.4 ★★★ 解答（節末）p.308

▶ 問題 I2.1.9

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，a，b，c は実数とする．

(1) $a=b$ は，$ac=bc$ であるための $\boxed{}$

(2) $a=b=c$ は，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ であるための $\boxed{}$

(3) $a^2>b^2$ は，$a>b$ であるための $\boxed{}$

1 回目：
2 回目：

(i) 必要条件であるが十分条件ではない　(ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

節末 I2.1.5 ★★ 解答（節末）p.309

▶ 問題 I2.1.13

1 回目：
2 回目：

次の命題が成り立つことを対偶を用いて証明せよ．

x，y がともに正の数のとき，$x^2+y^2 \geqq 4$ ならば，$x \geqq \sqrt{2}$ または $y \geqq \sqrt{2}$ である．

節末 I2.1.6 ★★★★ 解答（節末）p.309

▶ 問題 I2.1.15 ▶ 問題 I2.1.16

整数 a, b を係数とする 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が有理数の解 r をもつならば，r は整数であることを証明せよ．

1 回目：
2 回目：

章末問題 2 集合と命題

2.2 章末問題 2

章末 I2.1 ★★★ 解答（章末）p.310

▶ 問題 I2.1.6

1 回目：

2 回目：

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

$$A = \{5x + 2y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\} \text{ であるとき，} A = \mathbb{Z}$$

章末 I2.2 ★★★ 解答（章末）p.310

▶ 問題 I2.1.13

次の命題の真偽を調べよ．また，真のときにはその証明をし，偽のときには具体的な反例を挙げよ．ただし，a, b を自然数とする．

1 回目：
2 回目：

(1) a が奇数かつ b が奇数ならば，a^2+b^2 が偶数

(2) a^2+b^2 が偶数ならば，a が偶数かつ b が偶数

(3) a^2+b^2 が奇数ならば，a が奇数または b が奇数

章末 I2.3 ★★ 解答（章末）p.311

▶ 問題 I2.1.13

1 回目：
2 回目：

次の命題を証明せよ．ただし，m, n は正の整数，$m > n$ とする．

$$\frac{m+n}{m-n} \text{ が既約分数ならば，} \frac{n}{m} \text{ は既約分数である．}$$

章末 I2.4 ★★★　解答（章末）p.311

▶ 問題 I2.1.16

1 回目：
2 回目：

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ はともに有理数であることを証明せよ．ただし，a，b を正の有理数とする．

章末 I2.5 ★★ 解答（章末）p.312

三角形の内角で，$60°$ 以上のものが少なくとも 1 つ存在することを証明せよ．

1 回目：

2 回目：

第 3 章　2 次関数

3　2 次関数

1 節 2 次関数のグラフ（pp.92-104），2 節 2 次関数の最大・最小と決定（pp.109-122），
3 節 2 次方程式と 2 次不等式（pp.128-164）

問題一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.1.1	★		
I3.1.2	★		
I3.1.3	★		
I3.1.4	★		
I3.1.5	★		
I3.1.6	★★		
I3.1.7	★★		
I3.1.8	★		
I3.1.9	★★★		
I3.1.10	★★		
I3.1.11	★★★		
I3.1.12	★★★		
I3.2.1	★		
I3.2.2	★★		
I3.2.3	★★★		
I3.2.4	★★★		
I3.2.5	★★★		
I3.2.6	★★★		
I3.2.7	★★★		
I3.2.8	★★★		
I3.2.9	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.2.10	★★		
I3.2.11	★★		
I3.2.12	★★		
I3.2.13	★★★		
I3.3.1	★		
I3.3.2	★★		
I3.3.3	★★★		
I3.3.4	★★		
I3.3.5	★		
I3.3.6	★★		
I3.3.7	★★		
I3.3.8	★★★		
I3.3.9	★		
I3.3.10	★★		
I3.3.11	★★		
I3.3.12	★★		
I3.3.13	★★		
I3.3.14	★		
I3.3.15	★★		
I3.3.16	★		
I3.3.17	★		

番号	難易度	チェック	動画視聴
I3.3.18	★★		
I3.3.19	★★★		
I3.3.20	★★		
I3.3.21	★★★		
I3.3.22	★★★		
I3.3.23	★★★		
I3.3.24	★★★		
I3.3.25	★★★		
I3.3.26	★★★		
I3.3.27	★★		
I3.3.28	★★★		
I3.3.29	★★★★		
I3.3.30	★★★		
I3.3.31	★★★		
I3.3.32	★★★		
I3.3.33	★★		
I3.3.34	★★★★		
I3.3.35	★★★★		
I3.3.36	★★★		

節末問題 3.1，節末問題 3.2，節末問題 3.3

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.1.1	★		
I3.1.2	★★		
I3.1.3	★★		
I3.1.4	★★		
I3.1.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.2.1	★★		
I3.2.2	★★★★		
I3.2.3	★★		
I3.2.4	★★★		
I3.2.5	★★★		
I3.2.6	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.3.1	★★		
I3.3.2	★★★		
I3.3.3	★★★		
I3.3.4	★★★★		
I3.3.5	★★★		

章末問題 3

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.1	★★★		
I3.2	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.3	★★★		
I3.4	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I3.5	★★★		

チェック例

○・・・ 考え方を理解し，解くことができた．　△・・・ 理解が不十分である．　×・・・ 解くことができなかった．

3.1　2 次関数のグラフ

問題 I3.1.1 ★　解答 p.313　　▶ 節末 I3.1.1 【関数の値 $f(a)$】

関数 $f(x) = 4x^2 - x + 5$ について，次の値を求めよ．

(1) $f(2)$　　(2) $f\left(-\frac{3}{2}\right)$　　(3) $f(3a)$

(4) $f(2a+1)$　　(5) $f(a^2-1)$

問題 I3.1.2 ★　解答 p.314　【関数の値域】

次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ．

(1) $y = -2x + 5\ (-2 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = x^2\ (-1 \leqq x \leqq 2)$

問題 I3.1.3　★　解答 p.315　**【値域から 1 次関数の係数決定】**

関数 $y = ax + b\ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 8，最小値が 2 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

1 回目：　2 回目：

問題 I3.1.4 ★ 解答 p.316 【2次関数のグラフ 1】

次の2次関数のグラフは，2次関数 $y=-x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか．また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

(1) $y=-x^2+3$ (2) $y=-(x-2)^2$ (3) $y=-(x+1)^2-4$

問題 I3.1.5 ★ 解答 p.316　【2 次関数のグラフ 2】

次の 2 次関数のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

(1) $y = 2x^2 + 8x + 3$　　(2) $y = -x^2 + 6x - 8$

1 回目：　2 回目：

問題 I3.1.6 ★★ 解答 p.317 【2 次関数のグラフの平行移動 1】

放物線 $y = x^2 - 6x + 5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

問題 I3.1.7 ★★ 解答 p.318 【2 次関数のグラフの平行移動 2】

(1) 放物線 $y = x^2 + 4x + 1$ は放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ をどのように平行移動したものか.

(2) x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y = -2x^2 + 5x - 7$ になるような放物線 C の方程式を求めよ.

問題 I3.1.8 ★ 解答 p.319

▶ 節末 I3.1.3 【2 次関数のグラフの対称移動】

放物線 $y = -x^2 + 4x - 5$ を，次のように移動した放物線の方程式を求めよ．

(1) x 軸に関して対称移動　　(2) y 軸に関して対称移動　　(3) 原点に関して対称移動

問題 I3.1.9 ★★★ 解答 p.320

▶ 節末 I3.1.4 【2 次関数の平行移動と対称移動】

放物線 $y = ax^2 + bx + c \cdots$(i) を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，さらに y 軸に関して対称移動すると，放物線 $y = -x^2 + 6x + 4 \cdots$(ii) になった．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

1 回目：　2 回目：

問題 I3.1.10　★★　解答 p.321　【絶対値記号を含む関数のグラフ 1】

次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = |2x+3|$　　(2) $y = |x^2-4x+3|$

問題 I3.1.11 ★★★ 解答 p.321

▶ 節末 I3.1.5 【絶対値記号を含む関数のグラフ 2】

関数 $y = |x+2| + |x-4|$ のグラフをかけ.

問題 I3.1.12 ★★★ 解答 p.322 【絶対値記号を含む関数のグラフ 3】

不等式 $|x+4|+|2x-1| \leqq -2x+2$ をグラフを利用して解け.

節末問題 3.1 2 次関数のグラフ

節末 I3.1.1 ★ 解答（節末）p.323

▶ 問題 I3.1.1

1 回目：
2 回目：

関数 $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ について，$f(f(a))$ の値を求めよ．

節末 I3.1.2 ★★　解答（節末）p.323

2 つの放物線 $y = 3x^2 - 18x + 25$ と $y = ax^2 + 8x + b$ の頂点が一致するように定数 $a,\ b$ の値を定めよ.

1 回目：
2 回目：

節末 I3.1.3 ★★　解答（節末）p.324

▶ 問題 I3.1.8

1 回目：
2 回目：

数学 I
3.1

$y = ax^2 + bx + c$ で表される放物線が点 $(1,\ -2)$ に関して放物線 $y = -3x^2$ と点対称であるとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ.

節末 I3.1.4 ★★ 解答（節末）p.324

▶ 問題 I3.1.9

1 回目：

2 回目：

放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ を x 軸方向に 3 だけ平行移動し，さらに直線 $y = 2$ に関して折り返してできる放物線の方程式を求めよ．

節末 I3.1.5 ★★★ 解答（節末）p.325

▶ 問題 I3.1.11

1 回目：
2 回目：

数学 I
3.1

次の関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ.

(1) $f(x) = |x-2| + |x-4| + |x-6|$　　(2) $f(x) = |x + |2x-10||$

3.2　2 次関数の最大・最小と決定

問題 I3.2.1　★　解答 p.326　【2 次関数の最大・最小】

次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

(1) $y = -3x^2 + 6x + 2$　　(2) $y = 4x^2 + 8x - 1$

問題 I3.2.2 ★★ 解答 p.326 **【定義域が定められたときの 2 次関数の最大・最小】**

次の定義域における 2 次関数 $y = -x^2 + 4x + 1$ の最大値，最小値を求めよ．

(1) $0 \leqq x < 2$ (2) $1 < x \leqq 4$

問題 I3.2.3 ★★★ 解答 p.327

▶ 節末 I3.2.1 【最大・最小による係数の決定】

関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 2b \ (-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -1 のとき，定数 a, b の値を求めよ．

問題 I3.2.4 ★★★ 解答 p.328　**【定義域が拡大するときの最大・最小】**

(1) $a>0$ とする．関数 $f(x)=x^2-4x+6\ (0 \leqq x \leqq a)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $a>0$ とする．関数 $f(x)=-x^2+6x-8\ (0 \leqq x \leqq a)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

問題 I3.2.5 ★★★ 解答 p.329 **【軸が移動するときの最大・最小】**

(1) 関数 $f(x)=x^2-2ax+3\ (0 \leqq x \leqq 3)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=x^2-2ax+5\ (1 \leqq x \leqq 4)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

問題 I3.2.6 ★★★ 解答 p.330　▶ 節末 I3.2.2 【定義域が変化するときの最大・最小】

(1) 関数 $f(x)=x^2-2x+3\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=x^2-4x+5\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．

問題 I3.2.7 ★★★ 解答 p.331　【最小値の最大値】

x の 2 次関数 $y=-x^2+4ax-5a^2+3a+6$ の最大値を M とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) 最大値 M を a を用いて表せ．

(2) a の値が $-2 \leqq a \leqq 3$ で変化するとき，M の最小値を求めよ．

問題 I3.2.8　★★★　解答 p.331

▶ 節末 I3.2.3 【おき換えを用いた最大・最小】

関数 $y=\left(x^2-4x\right)^2+6\left(x^2-4x\right)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t=x^2-4x$ とおいて，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) y を t の式で表し，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

1 回目：　　2 回目：

問題 I3.2.9 ★★★ 解答 p.332

【条件付きの2変数関数の最大・最小1】

$x+3y=6$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) x^2+y^2 の最小値を求めよ．

(2) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ のとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ．

問題 I3.2.10 ★★ 解答 p.332 【2 次関数の最大・最小の文章題】

直角を挟む 2 辺の長さの和が 10 である直角三角形において，斜辺の長さが最小となる直角三角形を求め，その斜辺の長さを求めよ．

問題 I3.2.11　★★　解答 p.333　　【2 次関数の決定 1】

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が点 $(-2,\ 3)$ で，点 $(1,\ 6)$ を通る．

(2) 軸が直線 $x = 2$ で，2 点 $(0,\ -4)$，$(3,\ 5)$ を通る．

問題 I3.2.12　★★　解答 p.334

▶ 節末 I3.2.6 【2 次関数の決定 2】

次の 3 点を通るような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ.

(1) $(1,\ 7),\ (3,\ 7),\ (-2,\ -8)$　　(2) $(-1,\ 0),\ (4,\ 0),\ (2,\ -12)$

問題 I3.2.13 ★★★ 解答 p.335

【2 次関数の決定 3】

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が x 軸上にあり，2 点 $(1,\ 4)$，$(-3,\ 36)$ を通る．

(2) 放物線 $y=3x^2$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 9)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある．

節末問題 3.2 2 次関数の最大・最小と決定

節末 I3.2.1 ★★ 解答（節末）p.336

▶ 問題 I3.2.3

1 回目：
2 回目：

関数 $y = x^2 - 6x + k + 3\ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値の和が 0 であるとき，定数 k の値とそのときの最大値，最小値を求めよ．

節末 I3.2.2 ★★★★　解答（節末）p.337

▶ 問題 I3.2.6

1 回目：
2 回目：

2 次関数 $y=-2x^2+8x$ について，次の問いに答えよ．

(1) この関数のグラフの頂点，x 軸の共有点，y 軸の共有点の座標を求め，グラフをかけ．

(2) $a \leqq x \leqq a+1$ における関数の最大値が 6 であるような定数 a の値を求めよ．

節末 I3.2.3 ★★ 解答（節末）p.338

▶ 問題 I3.2.8

a を定数として，関数 $y=\left(x^2-4x\right)^2+2a\left(x^2-4x\right)+a+2$ の最小値を m とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) m を a の式で表せ．

(2) m を最大にする a の値を求めよ．

1回目：

2回目：

節末 I3.2.4 ★★★ 解答（節末）p.339

▶ 問題 I3.2.11 ▶ 問題 I3.2.12

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は，頂点の座標が $(3,\ 7)$ で，点 $(6,\ -5)$ を通る．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

節末 I3.2.5 ★★★ 解答（節末）p.339

$a > 0,\ b > 0,\ a + b = 1$ のとき，$a^3 + b^3$ の最小値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

節末 I3.2.6 ★★★ 解答（節末）p.340

▶ 問題 I3.2.12

1 回目：
2 回目：

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が，$f(-2) = f(4) = 0$ を満たし，その最大値が 9 であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

3.3　2 次方程式と 2 次不等式

問題 I3.3.1　★　解答 p.341　【2 次方程式の解 1】

次の 2 次方程式を解け.

(1) $4x^2 - 7x + 2 = 0$　　(2) $x^2 - 8x - 5 = 0$

(3) $16x^2 + 8x + 1 = 0$　　(4) $6x^2 - 11x + 3 = 0$

問題 I3.3.2 ★★ 解答 p.342　【2 次方程式の解 2】

次の 2 次方程式を解け.

(1) $-0.25x^2+2x-1=0$

(2) $3\sqrt{3}x^2-12x+12\sqrt{3}=0$

(3) $(x+1)^2-6(x+1)+5=0$

問題 I3.3.3　★★★　解答 p.343

【方程式の解（係数が文字のとき）】

次の方程式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax^2 + (a+3)x + 3 = 0$

(2) $(a^2 - 2a)x^2 = a - 2$

問題 I3.3.4 ★★ 解答 p.344　【2 次方程式の係数決定】

(1) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 4 と -5 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

(2) 2 次方程式 $x^2+ax-8=0$ の解の 1 つが $x=a$ のとき，定数 a の値を求めよ．また，そのときの他の解を求めよ．

問題 I3.3.5 ★ 解答 p.345 【実数解の個数と判別式】

次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ.

(1) $x^2 - 4x + 1 = 0$

(2) $4x^2 + 2x + 3 = 0$

(3) $2x^2 - 6 = 0$

(4) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

問題 I3.3.6 ★★ 解答 p.346 【2 次方程式が実数解をもつ条件 1】

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．

(1) x についての 2 次方程式 $x^2+2kx+3k+10=0$ が重解をもつような k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．

(2) x についての 2 次方程式 $x^2-2kx+k^2+4k-8=0$ の実数解の個数を調べよ．

問題 I3.3.7　★★　解答 p.346　▶ 節末 I3.3.1 【2 次方程式が実数解をもつ条件 2】

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2-2x-k+2=0,\ x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$ がともに実数解をもたないような定数 k の値の範囲を求めよ.

問題 I3.3.8　★★★　解答 p.347　【2 次方程式の共通解】

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2+(k+3)x+8=0,\quad x^2+5x+4k=0$ が共通な実数解をもつとき，定数 k の値と，そのときの共通解を求めよ．

問題 I3.3.9 ★ 解答 p.348 【放物線と x 軸の共有点の座標】

次の放物線は x 軸と共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - 3x - 10$ (2) $y = -x^2 + 4x - 4$ (3) $y = 3x^2 - 2x + 6$

問題 I3.3.10 ★★ 解答 p.349 【2 次関数のグラフと x 軸の位置関係】

(1) 2 次関数 $y = x^2 - 2kx + 4k - 3$ のグラフが，x 軸と接するような定数 k の値を求め，その接点の座標を求めよ．

(2) 2 次関数 $y = x^2 + 2kx + k^2 + 3k + 9$ のグラフが，x 軸と共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

問題 I3.3.11 ★★ 解答 p.350 【x 軸から切り取る線分の長さ】

(1) 2次関数 $y=-2x^2+3x+4$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ.

(2) 放物線 $y=-x^2+4x+2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが 6 であるとき，定数 k の値を求めよ.

問題 I3.3.12 ★★ 解答 p.351　【2 次関数のグラフと係数の符号】

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようなとき，次の値の符号を調べよ．ただし，$a < 0$ とする．

(1) a　　(2) b　　(3) c

(4) $b^2 - 4ac$　　(5) $a + b + c$

問題 I3.3.13　★★　解答 p.352

【2 次の連立方程式】

次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x^2 - 3x - y = -1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 3y - 9 = 0 \\ x^2 - y^2 + x + y = 0 \end{cases}$

問題 I3.3.14 ★ 解答 p.353　　【放物線と直線の共有点の座標 1】

次の 2 つの関数のグラフは共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y = x^2 - 4x + 2,\ y = -x$　　(2) $y = -x^2 + 3x + 2,\ y = 4x + 7$

(3) $y = x^2 - 6x + 10,\ y = -x^2 + 2x + 2$

問題 I3.3.15 ★★ 解答 p.354　▶ 章末 I3.2 【放物線と直線の共有点の座標 2】

次の放物線と直線の共有点の個数を調べよ．ただし，k を定数とする．

(1) 放物線 $y=2x^2+4x-3$，直線 $y=-2x+k$

(2) 放物線 $y=-x^2+3x+k+1$，直線 $y=-x+2$

問題 I3.3.16 ★ 解答 p.355　【2 次不等式 1】

次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2 - 8x + 12 > 0$　(2) $x^2 - 3x + 1 > 0$　(3) $-3x^2 + 5x + 2 \geqq 0$

問題 I3.3.17　★　解答 p.356　【2 次不等式 2】

次の 2 次不等式を解け.

(1) $-2x^2+4x-2<0$　　(2) $x^2+4x+5>0$

(3) $x^2-6x+9 \leqq 0$　　(4) $-x^2+4x-4>0$

問題 I3.3.18　★★　解答 p.356

▶ 節末 I3.3.3 【連立 2 次不等式】

次の連立不等式を解け.

(1) $\begin{cases} x^2+2x-3 \leqq 0 \\ 2x^2+3x+1>0 \end{cases}$

(2) $2x-1 \leqq x^2-1 \leqq 2x+3$

問題 I3.3.19 ★★★ 解答 p.357 【文字係数の 2 次不等式】

次の 2 次不等式を解け．ただし，a を定数とする．

(1) $x^2 - 4ax + 3a^2 > 0$

(2) $ax^2 - 5ax + 4a < 0$

問題 I3.3.20 ★★ 解答 p.358 【不等式の係数決定】

2 次不等式 $2ax^2 + bx + 1 \leqq 0$ の解が $x \leqq -\frac{1}{2}$，$3 \leqq x$ となるとき，定数 a，b の値を求めよ．

問題 I3.3.21 ★★★ 解答 p.359 【2 次方程式が実数解をもつ条件 3】

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．

(1) x についての 2 次方程式 $4x^2 - kx + k - 3 = 0$ が実数解をもたないような k の値の範囲を求めよ．

(2) x についての方程式 $(k+3)x^2 + 2(k-1)x - 2 = 0$ の実数解の個数を求めよ．

問題 I3.3.22 ★★★ 解答 p.360　【すべての実数について成り立つ不等式】

次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ.

(1) すべての実数 x について，2 次不等式 $x^2+kx-2k>0$ が成り立つ.

(2) 2 次不等式 $kx^2-2\sqrt{2}x+k+1>0$ が解をもたない.

問題 I3.3.23　★★★　解答 p.361　　【ある区間で常に成り立つ不等式】

$-1 \leqq x \leqq 9$ のすべての x の値に対して，不等式 $x^2-2ax+a+6>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

問題 I3.3.24 ★★★ 解答 p.362　【2 次不等式が整数解をもつ条件】

x についての不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0,\ x^2-x-12>0$ を満たす整数 x がちょうど 3 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ.

問題 I3.3.25　★★★　解答 p.362　【方程式の解の存在範囲 1】

2 次方程式 $x^2 - 2ax - a + 2 = 0$ の異なる 2 つの実数解が，ともに 2 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

問題 I3.3.26　★★★　解答 p.363　【方程式の解の存在範囲 2】

2 次方程式 $x^2 - 4ax + 3 = 0$ が，$1 < x < 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

問題 I3.3.27 ★★ 解答 p.363　【方程式の解の存在範囲 3】

2 次方程式 $x^2 - ax + 3a^2 - 20 = 0$ の異なる 2 つの実数解のうち，1 つは 4 より大きく，他の 1 つは 4 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

問題 I3.3.28　★★★　解答 p.364　　【方程式の解の存在範囲 4】

2 次方程式 $ax^2-(a+1)x-2=0$ が，$-1<x<1$ の範囲に 1 つの解があり，$3<x<5$ の範囲に他の解があるような定数 a の値の範囲を定めよ．

問題 I3.3.29 ★★★★ 解答 p.365 【方程式の解の存在範囲 5】

2 次方程式 $x^2 - 2ax + (a+2) = 0$ が，$1 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

問題 I3.3.30 ★★★ 解答 p.366 【2 次方程式が実数解をもつ条件 4】

2 つの 2 次方程式 $x^2 - 6x + a^2 = 0$, $x^2 - 2(a-1)x - a^2 - 10a + 1 = 0$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつ．

(2) 2 つの方程式の少なくとも一方が実数解をもつ．

(3) 2 つの方程式のどちらか一方のみが実数解をもつ．

問題 I3.3.31 ★★★ 解答 p.367 【条件付きの 2 変数関数の最大・最小 2】

実数 x, y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$x+y^2$ の最大値，最小値と，そのときの x, y の値を求めよ．

問題 I3.3.32　★★★　解答 p.368　【条件なし 2 変数関数】

次の関数の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ．

(1) x，y の関数 $P = x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 5$ の最小値を求めよ．

(2) x，y の関数 $Q = x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 4y + 7$ の最小値を求めよ．

問題 I3.3.33 ★★ 解答 p.368　【2 次不等式の文章題】

長さ 40 cm の針金を 2 つに分け，それぞれを折り曲げて正方形を 2 つ作る．2 つの正方形の面積の和が 52 cm^2 以上になるようにするには，針金をどのように切ればよいか．短い方の針金の長さの範囲を求めよ．

問題 I3.3.34 ★★★★ 解答 p.369 【2 つの放物線の大小関係 1】

2 つの 2 次関数 $f(x) = x^2 + 3ax + 20$，$g(x) = -x^2 + 7ax - 15$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) すべての実数 x に対して $f(x) > g(x)$

(2) ある実数 x に対して $f(x) < g(x)$

問題 I3.3.35 ★★★★ 解答 p.369　【2 つの放物線の大小関係 2】

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2-4x+5$, $g(x)=-x^2+a-3$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1) $-1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

(2) $-1 \leqq x \leqq 3$ を満たすある実数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

問題 I3.3.36 ★★★ 解答 p.370

▶ 節末 I3.3.4 【絶対値記号を含む 2 次方程式（定数分離）】

方程式 $|x^2 - 4x + 3| = x + a$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，a は定数とする．

節末問題 3.3　2 次方程式と 2 次不等式

節末 I3.3.1 ★★　解答（節末）p.371

▶ 問題 I3.3.7

1 回目：
2 回目：

2 次方程式 $x^2+4x+7a=0$，$2x^2-6x-a=0$ がともに実数解をもつ整数 a の個数を求めよ．

節末 I3.3.2 ★★★　解答（節末）p.371

実数 x，y が $x^2+y^2=13$ のもとで，$x-ay$ の最大値が 7 となるとき，定数 a の値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

数学 I
3.3

節末 I3.3.3 ★★★ 解答（節末）p.372

▶ 問題 I3.3.18

1 回目：

2 回目：

(1) 不等式 $3x^4 - 7x^2 + 2 > 0$ を解け.

(2) 不等式 $\left(x^2 - 3x + 2\right)^2 - 4\left(x^2 - 3x + 2\right) + 3 \leqq 0$ を解け.

節末 I3.3.4 ★★★★ 解答（節末）p.373

▶ 問題 I3.3.36

1 回目：
2 回目：

a を定数とする．x についての方程式 $|(x-3)(x-5)| = ax - 2a + \frac{1}{2}$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

節末 I3.3.5 ★★★　解答（節末）p.374

2 次不等式 $x^2 - 3x - 4 < |x - 2|$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

1 回目：
2 回目：

章末問題 3　2 次関数

3.4　章末問題 3

章末 I3.1 ★★★　解答（章末）p.375

実数 x，y が $x^2 - xy + y^2 + y - 5 = 0$ を満たすとき，y の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である．

1 回目：
2 回目：

章末 I3.2 ★★　解答（章末）p.375

▶ 問題 I3.3.15

1 回目：

2 回目：

2 つの放物線 $y = x^2 + 4$, $y = -x^2 + 4x$ の両方に接する直線の方程式を求めよ．

章末 I3.3 ★★★　解答（章末）p.376

a，b は自然数で，2 次方程式 $x^2 + 2ax + 4a - 4b = 0$ が重解 α をもつとき，a，b，α の値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

章末 I3.4 ★★★ 解答（章末）p.376

a, b を異なる実数とするとき，x に関する方程式 $(x-3a)(x-3b)-(3x-4a-5b)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつことを証明せよ．

1 回目：
2 回目：

章末 I3.5 ★★★　解答（章末）p.377

方程式 $4x^2+7xy+4y^2=15$ を満たす x, y に対して，$u=x+y$, $v=xy$ とおく．

(1) $u^2-4v \geqq 0$ を示せ.

(2) u, v の間に成り立つ等式を求めよ.

(3) $k=u+v$ がとる値の範囲を求めよ

1 回目：

2 回目：

数学 I
3.4

第 4 章　図形と計量

4 章：図形と計量（再生リスト）：

4　図形と計量

1 節 三角比の定義・性質（pp.175-191），2 節 正弦定理と余弦定理（pp.196-203），
3 節 図形の計量（pp.208-219）

数学 I
4.0

問題一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.1.1	★		
I4.1.2	★★		
I4.1.3	★★★		
I4.1.4	★		
I4.1.5	★★		
I4.1.6	★		
I4.1.7	★★		
I4.1.8	★★★		
I4.1.9	★★★		
I4.1.10	★★		
I4.1.11	★★		
I4.1.12	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.1.13	★★★		
I4.1.14	★★★		
I4.1.15	★★★★		
I4.1.16	★★★★		
I4.2.1	★		
I4.2.2	★★		
I4.2.3	★★		
I4.2.4	★★		
I4.2.5	★★★		
I4.2.6	★★★		
I4.2.7	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.3.1	★★		
I4.3.2	★★		
I4.3.3	★★		
I4.3.4	★★		
I4.3.5	★★★		
I4.3.6	★★		
I4.3.7	★★		
I4.3.8	★★		
I4.3.9	★★★		
I4.3.10	★★★★		
I4.3.11	★★★		

節末問題 4.1，節末問題 4.2，節末問題 4.3

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.1.1	★★★		
I4.1.2	★★★		
I4.1.3	★★		
I4.1.4	★★★		
I4.1.5	★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.2.1	★★		
I4.2.2	★★★		
I4.2.3	★★★		
I4.2.4	★★★		
I4.2.5	★★★		

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.3.1	★★		
I4.3.2	★★★		
I4.3.3	★★★		
I4.3.4	★★★		
I4.3.5	★★★		

章末問題 4

番号	難易度	1 回目	2 回目
I4.1	★★		
I4.2	★★★★		
I4.3	★★★		
I4.4	★★★★		
I4.5	★★★		

チェック例

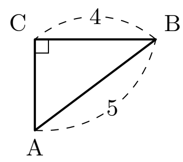
○ · · · 考え方を理解し，解くことができた．　△ · · · 理解が不十分である．　× · · · 解くことができなかった．

4.1 三角比の定義・性質

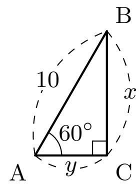
問題 I4.1.1 ★ 解答 p.378

【直角三角形の三角比】

(1) 右の図のような三角形において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．



(2) 右の図のような三角形において，x，y の値を求めよ．



問題 I4.1.2 ★★ 解答 p.378 【三角比を用いた測量】

水平な道路をまっすぐに歩いている人が，あるビルの頂点 P を見上げたところ，A 地点でその仰角が 30° であった．その後，A 地点から 30m 進んで B 地点に到達したとき，再び仰角を測ると 45° であった．この人の目の高さが地面から 1.5m であるとき，このビルの高さを求めよ．

問題 I4.1.3 ★★★ 解答 p.379　▶ 節末 I4.1.1 【15 度の三角比】

二等辺三角形 ABC において $AB = AC$, $BC = 1$, $\angle A = 36°$ とし，$\angle B$ の二等分線と辺 AC の交点を D とするとき，次の値を求めよ.

(1) 辺 BD の長さ　(2) 辺 AB の長さ　(3) $\sin 18°$

問題 I4.1.4 ★ 解答 p.379

▶ 節末 I4.1.2 【三角比の相互関係 1】

A は鋭角とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\sin A = \frac{4}{5}$ のとき，$\cos A$ と $\tan A$ の値を求めよ．

(2) $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ．

問題 I4.1.5　★★　解答 p.380　【余角・補角の三角比】

(1) $\sin 55^\circ$, $\cos 125^\circ$ を 45° 以下の三角比で表せ．また，$\sin 35^\circ \cos 125^\circ + \sin 55^\circ \cos 145^\circ$ を簡単にせよ．

(2) △ABC の 3 つの内角 ∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とするとき，等式 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B+C}{2} = 1$ が成り立つことを証明せよ．

問題 I4.1.6 ★ 解答 p.381

▶ 節末 I4.1.3 【三角比を含む方程式 1】

次の方程式を満たす θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$　　(2) $2\cos\theta + 1 = 0$　　(3) $\tan\theta + 1 = 0$

問題 I4.1.7 ★★ 解答 p.381 【三角比の相互関係 2】

(1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．ただし，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ とする．

(2) $\tan\beta = -2$ のとき，$\sin\beta$，$\cos\beta$ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ$ とする．

問題 I4.1.8 ★★★ 解答 p.382

▶ 節末 I4.1.4 ▶ 章末 I4.1 【三角比の式の値】

$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$　　(3) $\sin\theta + \cos\theta$

問題 I4.1.9 ★★★ 解答 p.382 【三角比を含む方程式 2】

次の等式を満たす θ の値を求めよ.

(1) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0 \ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(2) $2\cos^2\theta + 7\sin\theta - 5 = 0 \ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

問題 I4.1.10 ★★ 解答 p.383

▶ 節末 I4.1.5 【2 直線のなす角】

2 直線 $x-\sqrt{3}y=0\cdots$(i)，$x+\sqrt{3}y=0\cdots$(ii) について，次の問いに答えよ．

(1) 直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を求めよ．

(2) 2 直線 (i)，(ii) のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を求めよ．

問題 I4.1.11 ★★ 解答 p.383 【三角比を含む不等式 1】

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

問題 I4.1.12 ★★ 解答 p.384 【三角比を含む不等式 2】

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\tan\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (2) $\tan\theta > -1$

問題 I4.1.13 ★★★ 解答 p.384 【三角比を含む不等式 3】

次の不等式を解け．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 > 0$

(2) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 \geqq 0$

問題 I4.1.14 ★★★ 解答 p.385 【三角比を含む 2 次関数の最大・最小】

関数 $y = \sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

問題 I4.1.15 ★★★★ 解答 p.385

▶ 章末 I4.2 【三角比を含む方程式の解の個数 1】

方程式 $3\sin^2\theta+\cos\theta-a=0\ \ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.

問題 I4.1.16 ★★★★ 解答 p.386 ▶ 章末 I4.2 【三角比を含む方程式の解の個数 2】

方程式 $2\cos^2\theta + a\cos\theta + 1 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.

節末問題 4.1　三角比の定義・性質

節末 I4.1.1 ★★★　解答（節末）p.387

▶ 問題 I4.1.3

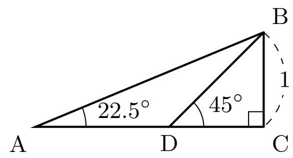
1 回目：
2 回目：

数学 I
4.1

右の図のような直角三角形 ABC を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを求めよ．

(2) $\sin 22.5^\circ$，$\cos 22.5^\circ$，$\tan 22.5^\circ$ の値を求めよ．



節末 I4.1.2 ★★★ 解答（節末）p.388

▶ 問題 I4.1.4

1 回目：
2 回目：

鋭角 θ が $\tan\theta = \frac{5}{12}$ を満たすとき，$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ の値を求めよ．

節末 I4.1.3 ★★ 解答（節末）p.388

▶ 問題 I4.1.6

1 回目：

2 回目：

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において，$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \cos\theta = 0$ を満たす θ の値を求めよ.

節末 I4.1.4 ★★★ 解答（節末）p.389

▶ 問題 I4.1.8

1 回目：

2 回目：

$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ < \theta < 45^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta + \cos\theta$ (3) $\sin\theta - \cos\theta$ (4) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

節末 I4.1.5 ★★ 解答（節末）p.390

▶ 問題 I4.1.10

1 回目：
2 回目：

2 直線 $\sqrt{3}x+y=0\cdots$(i)，$ax+by+2=0\cdots$(ii) がある．直線 (ii) は点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を通り，2 直線 (i)，(ii) のなす角は 30° である．このとき，定数 a，b の値を求めよ．

数学 I
4.1

4.2 正弦定理と余弦定理

問題 I4.2.1 ★ 解答 p.391 【正弦定理】

△ABC において，次の値を求めよ．ただし，外接円の半径を R とする．

(1) $a=3$, $A=60°$, $C=45°$ のとき，c, R

(2) $R=1$, $a=\sqrt{3}$ のとき，A

数学 I 4.2

問題 I4.2.2 ★★ 解答 p.392 【余弦定理】

△ABC において，次の値を求めよ．

(1) $a=6,\ b=4,\ C=120^\circ$ のとき，c

(2) $a=5,\ b=7,\ c=8$ のとき，B

(3) $a=2,\ c=\sqrt{6},\ C=60^\circ$ のとき，b

問題 I4.2.3 ★★ 解答 p.393

▶ 節末 I4.2.2 【三角形の辺と角 1】

次の場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

(1) $b=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ c=2,\ A=135^\circ$

(2) $a=2\sqrt{2},\ b=2,\ c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

問題 I4.2.4 ★★ 解答 p.394

▶ 節末 I4.2.2 【三角形の辺と角 2】

$\triangle$ABC において，$b=2\sqrt{2}$，$c=2$，$C=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

問題 I4.2.5 ★★★ 解答 p.395　【正弦定理と余弦定理の利用】

$\triangle$ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ が成り立つとき，最大の角の大きさを求めよ．

問題 I4.2.6 ★★★ 解答 p.396

▶ 節末 I4.2.4 【三角形の成立条件】

3 辺の長さが 2, 3, x である三角形について，次の問いに答えよ．

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) この三角形が鈍角三角形となるような x の値の範囲を求めよ．

問題 I4.2.7 ★★★ 解答 p.397　▶ 節末 I4.2.5 【三角形の形状の決定】

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か.

(1) $a\sin A = b\sin B$　　(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B$

節末問題 4.2 正弦定理と余弦定理

節末 I4.2.1 ★★ 解答（節末）p.398

△ABC の頂点 A，B，C の対辺をそれぞれ a，b，c とする．$C = 60°$ のとき，$\frac{b}{c^2-a^2} + \frac{a}{c^2-b^2}$ の値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

節末 I4.2.2 ★★★ 解答（節末）p.398

▶ 問題 I4.2.3 ▶ 問題 I4.2.4

△ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{6}$，$B=45°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

1 回目：

2 回目：

節末 I4.2.3 ★★★ 解答（節末）p.399

△ABC において，$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，$R=\sqrt{3}$ が成り立つとき，$\cos A$，a，b，c を求めよ．

1 回目：
2 回目：

節末 I4.2.4 ★★★ 解答（節末）p.399

▶ 問題 I4.2.6

1 回目：
2 回目：

△ABC において，$\mathrm{AB}=x-1$，$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BC}=x+1$ のとき，次の問いに答えよ.

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) △ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ.

(3) △ABC の 1 つの内角が 120° であるとき，x の値，外接円の半径を求めよ.

節末 I4.2.5 ★★★ 解答（節末）p.400

▶ 問題 I4.2.7

1 回目：
2 回目：

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か．

$$(a-b)\sin^2 C = a\sin^2 A - b\sin^2 B$$

4.3 図形の計量

問題 I4.3.1 ★★ 解答 p.401 【三角形の面積】

次のような △ABC の面積 S を求めよ.

(1) $a=5,\ c=\sqrt{10},\ B=45^\circ$

(2) $a=7,\ b=5,\ c=8$

1 回目： 2 回目：

問題 I4.3.2 ★★ 解答 p.402

▶ 節末 I4.3.1 【多角形の面積】

(1) 1 辺の長さが 1 の正八角形の面積 S を求めよ.

(2) 半径 1 の円に内接する正十二角形の面積 S を求めよ.

問題 I4.3.3 ★★ 解答 p.403

▶ 節末 I4.3.2 【三角形の内接円と外接円の半径】

△ABC において，$a=4$，$b=5$，$c=6$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos A$，$\sin A$

(2) △ABC の面積 S

(3) △ABC の内接円の半径 r

(4) △ABC の外接円の半径 R

問題 I4.3.4 ★★ 解答 p.403　　【円に内接する四角形 1】

円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB} = 8$, $\mathrm{BC} = 4$, $\mathrm{CD} = 4$, $\angle\mathrm{BCD} = 120^\circ$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 対角線 BD の長さ　　(2) AD の長さ　　(3) 四角形 ABCD の面積

問題 I4.3.5 ★★★ 解答 p.404　▶ 節末 I4.3.3 【円に内接する四角形 2】

円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\mathrm{DA}=1$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos B$　　(2) 四角形 ABCD の面積 S

問題 I4.3.6 ★★ 解答 p.405 【角の二等分線の長さ】

$\triangle$ABC において，AB $= 4$，BC $= 6$，CA $= 5$ とする．$\angle$A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，$\angle$B の二等分線が線分 AD と交わる点を I とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 線分 AD の長さ

(2) 線分 AI の長さ

問題 I4.3.7 ★★ 解答 p.405 【中線定理】

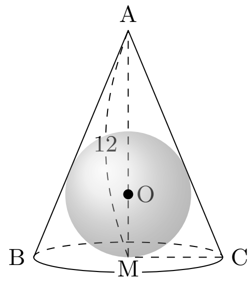
$\mathrm{AB}=5,\ \mathrm{BC}=10,\ \mathrm{CA}=6$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AM の長さを求めよ．

問題 I4.3.8 ★★ 解答 p.406 【空間図形の測量】

水平な地面に垂直に立つ木があり，木の頂点を A，その真下の地面上の点を D とする．また，地面上で互いに 200 m 離れた 2 点 B，C を定め，$\angle\mathrm{ABC}$, $\angle\mathrm{ACB}$, $\angle\mathrm{ACD}$ を測定したところ，それぞれ 75°，60°，60° であった．このとき，木の高さ AD を求めよ．

問題 I4.3.9 ★★★ 解答 p.407

▶ 節末 I4.3.5 【円錐に内接する球】



右の図のように，底面の半径 5，高さが 12 の直円錐があり，球 O と側面，底面の中心 M で接している．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 円錐の母線の長さを求めよ．

(2) 球 O の半径を求めよ．

(3) 球 O の体積 V と表面積 S を求めよ．

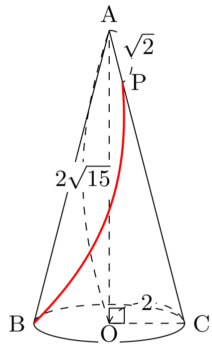
数学 I 4.3

問題 I4.3.10 ★★★★ 解答 p.407　　▶ 章末 I4.5 【正四面体の計量】

四面体 ABCD において，$\triangle$BCD は 1 辺の長さが 4 の正三角形であり，$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADC} = 90^\circ, \mathrm{AD} = 2$ である．このとき，頂点 D から平面 ABC に下ろした垂線 DH の長さを求めよ．

問題 I4.3.11 ★★★ 解答 p.408

【空間図形における最短距離】



底面の中心が O で半径が 2，高さが $2\sqrt{15}$ の直円錐がある．直円錐の頂点を A，底面の直径の両端を B，C とし，線分 AC 上に $\mathrm{AP}=\sqrt{2}$ となる点 P をとる．側面上において，点 B から点 P までに至る最短距離を求めよ．

節末問題 4.3 図形の計量

節末 I4.3.1 ★★ 解答（節末）p.409

▶ 問題 I4.3.2

半径 a の円に内接する正 n 角形の面積，および外接する正 n 角形の面積を，それぞれ a と n を用いて表せ.

1 回目：

2 回目：

節末 I4.3.2 ★★★ 解答（節末）p.410

▶ 問題 I4.3.3

1 回目：
2 回目：

△ABC において，$\frac{\sin A}{13} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{7}$ が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ．

(2) △ABC の内接円の半径が 1 のとき，△ABC の面積，△ABC の外接円の半径を求めよ．

節末 I4.3.3 ★★★ 解答（節末）p.411

▶ 問題 I4.3.5

1 回目：

2 回目：

円に内接する四角形 ABCD がある．$\mathrm{AB}=3$, $\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\sqrt{3}$, $\mathrm{DA}=2$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{BAD}$ と対角線 BD の長さを求めよ．

(2) 2 つの対角線 AC と BD の交点を E とする．$\mathrm{BE}:\mathrm{ED}$ と BE の長さを求めよ．

節末 I4.3.4 ★★★ 解答（節末）p.412

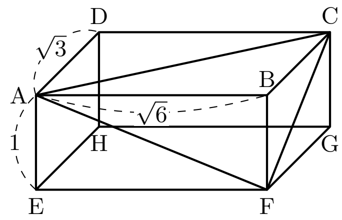
$\mathrm{AB} = \sqrt{6},\ \mathrm{AD} = \sqrt{3},\ \mathrm{AE} = 1$ である右の図のような直方体 ABCD − EFGH がある．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\angle\mathrm{ACF}$

(2) $\triangle\mathrm{ACF}$ の面積

(3) 四面体 BAFC の体積

(4) B から平面 AFC に下ろした垂線の長さ



1 回目：

2 回目：

数学 I 4.3

節末 I4.3.5 ★★★　解答（節末）p.412

▶ 問題 I4.3.9

1 回目：
2 回目：

底面の半径 $\sqrt{5}$ の直円錐に半径 1 の球が内接している．このとき，この直円錐の体積を求めよ．

章末問題 4 図形と計量

4.4 章末問題 4

章末 I4.1 ★★ 解答（章末）p.413

▶ 問題 I4.1.8

1 回目：
2 回目：

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\tan^3\theta + \frac{1}{\tan^3\theta}$ の値を求めよ．

章末 I4.2 ★★★★ 解答（章末）p.413

▶ 問題 I4.1.15 ▶ 問題 I4.1.16

$\sin^2\theta + 2a\cos\theta - 3 = 0$ が $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲に解をもつための定数 a の値の範囲を求めよ．

1 回目：

2 回目：

章末 I4.3 ★★★ 解答（章末）p.414

三角形 ABC の辺 BC を $8:5$ に内分する点を D とする．$\mathrm{AB}=7$, $\mathrm{AC}=5\sqrt{3}$, $\mathrm{AD}=5$ であるとき，次の値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

(1) $\angle\mathrm{ADB}$ の大きさ (2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積

章末 I4.4 ★★★★ 解答（章末）p.415

1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC がある．辺 AB，AC 上に，それぞれ頂点とは異なる点 D，E を，$\mathrm{AD}=\mathrm{CE}$ を満たすようにとる．また，四角形 DBCE の面積を S とする．

1 回目：

2 回目：

(1) DE の長さの最小値を求めよ．

(2) 面積 S の最小値とそのときの AD の長さを求めよ．

章末 I4.5 ★★★ 解答（章末）p.416

▶ 問題 I4.3.10

1 回目：
2 回目：

1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD について，辺 BC 上に BE : EC = 1 : 2 となるように点 E をとり，辺 CD の中点を M，$\angle\mathrm{EAM} = \theta$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos\theta$　　(2) $\triangle\mathrm{AEM}$ の面積 S

第 5 章　データの分析

5 章：データの分析（再生リスト）：

5　データの分析

1 節 データの整理と分析（pp.230-244）

問題一覧

番号	難易度	1 回目	2 回目
I5.1.1	★		
I5.1.2	★		
I5.1.3	★		
I5.1.4	★★		
I5.1.5	★★		
I5.1.6	★★		
I5.1.7	★★		
I5.1.8	★★		
I5.1.9	★★		
I5.1.10	★★		
I5.1.11	★★		
I5.1.12	★		
I5.1.13	★★		
I5.1.14	★★		

節末問題 5.1

番号	難易度	1 回目	2 回目
I5.1.1	★★		
I5.1.2	★★		
I5.1.3	★★		

章末問題 5

番号	難易度	1 回目	2 回目
I5.1	★★		
I5.2	★★		
I5.3	★★★		
I5.4	★★★		
I5.5	★★★		

チェック例

○… 考え方を理解し，解くことができた．　△… 理解が不十分である．　×… 解くことができなかった．

5.1　データの整理と分析

問題 I5.1.1 ★ 解答 p.417　【度数分布表，ヒストグラム】

次のデータは，ある月の A 市の毎日の降水量の記録である．

3.5,　7.2,　2.1,　9.1,　6.1,　4.3,　2.9,　3.7,　5.8,　0.0,
2.1,　8.4,　0.7,　1.2,　5.0,　4.9,　3.3,　6.7,　7.8,　2.5,
1.0,　6.2,　1.6,　4.0,　2.3,　0.8,　3.9,　1.5,　0.0,　5.5 (mm)

(1) 階級の幅を 2 mm として，度数分布表を作成せよ．ただし，階級は 0 mm から区切り始めるものとする．
(2) (1) で作った度数分布表をもとにヒストグラムをかけ．

問題 I5.1.2 ★ 解答 p.417　　【平均値，中央値】

次のデータは，A クラス 6 人，B クラス 5 人の 10 点満点のテストの得点である．

A クラス：7，8，6，9，5，8（点）　　B クラス：4，5，6，7，3（点）

(1) A クラスのデータの平均値と B クラスのデータの平均値をそれぞれ求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．

(2) A クラスと B クラスを合わせた 11 人のデータの平均値を求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．

(3) A クラスのデータの中央値と B クラスのデータの中央値をそれぞれ求めよ．

問題 I5.1.3 ★ 解答 p.418

【平均値の値】

右の表は，ある家庭の 10 日間の 1 日の電気使用量（整数）の記録である．

(1) このデータの平均値の最小値と最大値を求めよ．

(2) 10 日間の電気使用量の平均は 12（kWh）であり，各日の電気使用量は x，18，15，13，12，10，10，8，7，6 (kWh) であった．x の値を求めよ．

使用量の階級（kWh）	日数
5 以上 10 未満	3
10 ～15	4
15 ～20	3
計	10

問題 I5.1.4　★★　解答 p.418　【四分位数と箱ひげ図】

次のデータは，ある学生が過去 12 ヶ月間に記録した月ごとの読書冊数である．このデータの箱ひげ図をかけ．ただし，外れ値がある場合は，外れ値を示して箱ひげ図をかけ．

$$13,\ 15,\ 14,\ 17,\ 16,\ 19,\ 18,\ 20,\ 21,\ 23,\ 25,\ 32\ (\text{冊})$$

問題 I5.1.5 ★★ 解答 p.419

▶ 節末 I5.1.1 【箱ひげ図の読み取り】

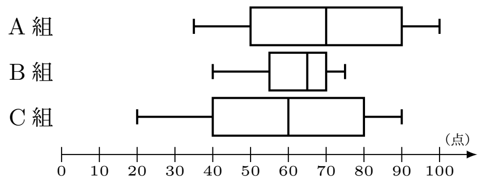
右の図は，生徒数がいずれも 36 人の A 組，B 組，C 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．

(1) 上位 9 人の散らばりが最も小さい組はどれか．

(2) 70 点以上の生徒が 18 人以上いる組はどれか．

(3) 75 点をとった生徒が上位から 14 番目，45 点をとった生徒が上位から 23 番目であった組はどれか．

(4) 全体の散らばりが最も大きい組はどれか．

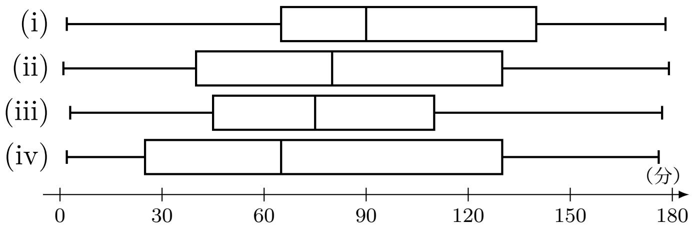


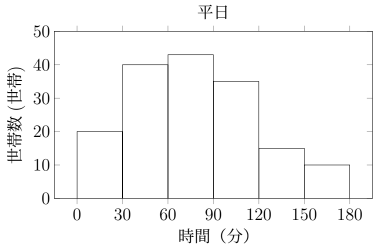
数学 I
5.1

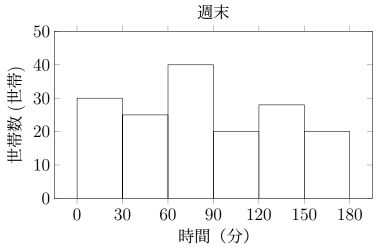
問題 I5.1.6 ★★ 解答 p.420

【ヒストグラムと箱ひげ図】

右のヒストグラムは，ある地域の 163 世帯について，ある電化製品の週末の電力使用時間（分）を調査した結果である．平日，週末の電力使用時間に対応する箱ひげ図を，左下の (i)〜(iv) からそれぞれ 1 つずつ選べ．







問題 I5.1.7 ★★ 解答 p.421 【分散と標準偏差】

下の表は A，B の 2 つの倉庫で 1 日あたりの荷物の搬入量（単位: 箱）を 10 日間調査した結果である．

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 倉庫の搬入量 (箱)	8	6	6	7	7	8	8	7	6	7
B 倉庫の搬入量 (箱)	5	4	5	6	4	5	5	7	4	5

(1) A 倉庫，B 倉庫それぞれの搬入量の平均値 $\overline{a}$，$\overline{b}$，分散 ${s_a}^2$，${s_b}^2$，標準偏差 s_a，s_b を求めよ．ただし，$\sqrt{3}=1.73$，$\sqrt{5}=2.24$ とし，標準偏差は小数第 2 位を四捨五入して答えよ．

(2) (1) から，A 倉庫，B 倉庫の 2 つの倉庫の搬入量の散らばりはどちらが大きいか．

問題 I5.1.8 ★★ 解答 p.422

▶ 章末 I5.1 ▶ 章末 I5.2 【データの値の決定】

右の表はクラス A とクラス B の 4 日間における生徒の読書ページ数のデータである．

(1) クラス A の読書ページ数の平均値と分散を求めよ．

(2) クラス B の 1 日目から 4 日目までの読書ページ数の平均値は 12 ページ，分散は 30.5 であるとき，クラス B の読書ページ数 a, b を求めよ．ただし，$a < b$ とする．

日数	クラス A	クラス B
1	5	a
2	8	16
3	7	12
4	6	b

問題 I5.1.9 ★★ 解答 p.423

▶ 節末 I5.1.2 【データの修正】

次のデータは，あるクラスの 12 人の生徒があるテストで得た点数を並べたものである．

80，85，90，88，76，94，89，92，81，84，87，80（点）

(1) このデータの平均値を求めよ．

(2) このデータに誤りが見つかり，正しくは 92 点が 88 点，94 点が 98 点であった．この誤りを修正すると，平均値，分散は，修正前から増加するか，減少するか，変化しないかを答えよ．

問題 I5.1.10 ★★ 解答 p.423

▶ 章末 I5.3 ▶ 章末 I5.4 【変量の変換】

変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ が $\overline{x}=50$，分散 ${s_x}^2=36$ であるとする．このとき，次の式によって得られる変量 y のデータについて，平均値 $\overline{y}$，分散 ${s_y}^2$，標準偏差 s_y を求めよ．

(1) $y=x-20$　(2) $y=3x$　(3) $y=-2x+10$　(4) $y=\frac{x-50}{6}$

数学 I
5.1

問題 I5.1.11 ★★ 解答 p.424 **【仮平均を利用したデータの平均値，分散】**

次のような変量 x のデータがある．このとき，次の問いに答えよ．

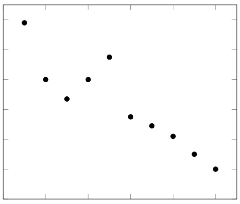
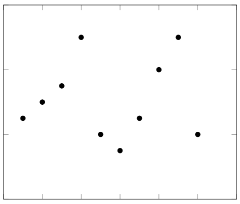
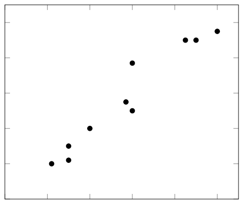
$$550,\ 620,\ 590,\ 570,\ 610,\ 630,\ 560,\ 580,\ 590,\ 600$$

(1) $y = x - 600$ とおくことにより，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ．

(2) $z = \frac{x-600}{10}$ とおくことにより，変量 x のデータの分散を求めよ．

問題 I5.1.12 ★ 解答 p.424 【散布図と相関関係】

あるクラスの 10 名の生徒について，2 つの指標 X，Y でテスト結果を評価した．指標 X の評価値の分散は $\frac{33}{4}$，指標 Y の評価値の分散は $\frac{33}{4}$ で，X と Y の評価値の共分散は $-\frac{15}{2}$ であった．このとき，X と Y の評価値の相関係数を求めよ．また，X と Y の評価値として対応する散布図を次の (i)〜(iii) から選べ．

(i)

(ii)

(iii)


問題 I5.1.13　★★　解答 p.425　　▶ 章末 I5.5【相関係数の計算】

次の表は，5 名の生徒 A，B，C，D，E の運動時間 x（時間）と体力テストの点数 y（点）を測定した結果である．このとき，x と y の相関係数 r を求めよ．

	A	B	C	D	E
運動時間 x（時間）	8	6	8	5	8
点数 y（点）	10	12	15	10	13

問題 I5.1.14 ★★ 解答 p.425 ▶ 節末 I5.1.3 【仮説検定の考え方】

ある商品に新機能を追加し，20 人に対しアンケートをとったところ，15 人が「新機能が役立つ」と回答した．この結果から，新機能が役立つと判断してよいか．仮説検定により，基準となる確率を 0.05 として考察せよ．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 20 回投げて，表が出た回数を記録する実験を 200 セット行ったところ次の表のようになったとして，この結果を用いよ．

表が出た回数	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	計
度数	1	2	6	12	16	23	25	31	27	21	16	8	6	3	2	1	200

数学 I 5.1

節末問題 5.1 データの整理と分析

節末 I5.1.1 ★★ 解答（節末）p.426

▶ 問題 I5.1.5

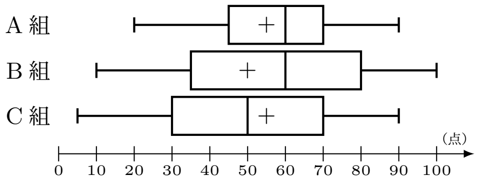
右の図は，生徒数がいずれも 40 人の A 組，B 組，C 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．次の (i)〜(iv) の記述のうち，適切ではないものを答えよ．

(i) B 組の合計得点は A 組の合計得点より小さい．

(ii) A 組と B 組において，得点が 60 点以上の人数は同じである．

(iii) B 組で得点が 50 点以上の人数は 20 人以上である．

(iv) B 組の生徒が，A 組，B 組，C 組全体の最高得点をとっている．



1 回目：
2 回目：

節末 I5.1.2 ★★ 解答（節末）p.426

▶ 問題 I5.1.9

10 人の社員に対して作業時間を記録した．記録したところ，作業時間の平均値は 20 ，分散は 4.5 であった．しかし，この 10 人のうち 2 人の作業時間が右の表のように修正された．修正後の 10 人の作業時間の平均値と分散を求めよ．

社員	修正前	修正後
A	18	22
B	17	23

1 回目：

2 回目：

節末 I5.1.3 ★★　解答（節末）p.427

▶ 問題 I5.1.14

ある地域で A 地区と B 地区の 2 か所のうちどちらかに新しい公園を建設する案があり，住民投票の結果，B 地区を支持した住民が 60 人中 43 人であった．一般に，B 地区の方が住民にとって望ましい建設地であると判断してよいであろうか．もし A 地区と B 地区を何も考えずに選ぶ場合，それぞれが選ばれる確率は 0.5 とし，起こる割合が 5% 以下であればほとんど起こりえないと判断するものとする．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 60 枚投げて，表が出た枚数を記録する実験を 1000 セット行ったところ右の表のようになったとして，この結果を用いよ．

表の枚数	回数
0 ～ 30	540
31	99
32	91
33	86
34	54
35	43
36	32
37	20
38	11
39	8
40	6
41	4
42	3
43	2
44	1
45	0
46	0

1 回目：
2 回目：

数学 I
5.1

One math

章末問題 5　データの分析

5.2　章末問題 5

章末 I5.1 ★★　解答（章末）p.428

▶ 問題 I5.1.8

1 回目：

2 回目：

任意の連続する 4 個の自然数の分散 s^2 を求めよ．

章末 I5.2 ★★　解答（章末）p.428

▶ 問題 I5.1.8

変量 x についてのデータの値が p, q, r, s, t であるとする．データ p, q, r の平均値が 12，分散が 4 であり，データ s, t の平均値が 10，分散が 2 であるとするとき，変量 x の次の値を求めよ．

1 回目：
2 回目：

(1) 平均値　　(2) 分散

数学 I
5.2

章末 I5.3 ★★★ 解答（章末）p.429

▶ 問題 I5.1.10

ある実験で得られた n 個の測定値 x_1，x_2，x_3，$\ldots$，x_n の平均が m，分散が σ^2 である．
p，q $(p > 0$，$q > 0)$ を正の定数とするとき，次の問いに答えよ．

1 回目：
2 回目：

(1) $(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + (x_3 - x)^2 + \cdots + (x_n - x)^2$ を最小にする x の値を求めよ．
(2) $x_1 + p$，$x_2 + p$，$x_3 + p$，$\ldots$，$x_n + p$ の平均値および分散を求めよ．
(3) qx_1，qx_2，qx_3，$\ldots$，qx_n の平均値および分散を求めよ．

章末 I5.4 ★★★　解答（章末）p.430

▶ 問題 I5.1.10

ある学校で，120 人の生徒が定期テストを受験した．得点の平均値が m 点，標準偏差が s 点である試験において，得点が x 点である受験者の偏差値は $50+\frac{10(x-m)}{s}$ で与えられる．A さんのこのテストの得点は 78 点であり，偏差値は 58 であった．また，このテストの得点の平均値は 66 点であった．

1 回目：
2 回目：

(1) 120 人の生徒の得点の標準偏差を求めよ．

(2) 後日，この定期テストを新たに 60 人が受験し，受験者数は合計で 180 人となった．その結果，試験の得点の平均値が 67 点となり，A さんの偏差値は 55 となった．新たに受験した 60 人の受験者の得点について，平均値と標準偏差をそれぞれ求めよ．

章末 I5.5 ★★★ 解答（章末）p.431

▶ 問題 I5.1.13

右の表は，ある数学クラスの学生 10 人がそれぞれ試験 A（代数）と試験 B（幾何）の得点を 0，1，2 の 3 段階で評価したときの得点を，2 次元の度数分布表にまとめたものである．試験 A の得点 x と試験 B の得点 y の相関係数 r を小数第 3 位まで求めよ．ただし，$\sqrt{70} = 8.3666$ とする．

A\B	0	1	2	計
0	2	2	0	4
1	0	1	1	2
2	0	1	3	4
計	2	4	4	10

1 回目：
2 回目：

数学 I
5.2

One math

6 略解

6.1 問題，節末・章末問題の略解

図やグラフ，表，証明などは省略しています．問題，節末・章末問題の略解を載せています．

問題 1.1

I1.1.1 (1) $-3x^3+3x^2-2x-4$ 次数は 3，定数項は -4
(2) b に着目：次数は 3，定数項は $7a^2-6a-3$
a と b に着目：次数は 3，定数項は -3

I1.1.2 (1) $5x^2-3x-4$
(2) $-x^2-5x+10$
(3) $-14x+23$
(4) $25x^2-x-43$

I1.1.3 (1) $48x^4y^5$ (2) $10a^3bc^2-15ab^2c^2+20abc^3$
(3) $x^3+x^2-19x+21$ (4) $3x^5-x^4-2x^3+17x^2-13x+20$

I1.1.4 (1) x^2+6x+9 (2) k^2-4k+4
(3) x^2-4y^2 (4) $x^2-7xy+10y^2$
(5) $12a^2+10ab+2b^2$ (6) $4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4zx$

I1.1.5 (1) $x^3+9x^2+27x+27$
(2) $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$
(3) $27x^3-8$ (4) $125a^3+8b^3$
(5) $x^6-27x^4+243x^2-729$ (6) x^6-64

I1.1.6 (1) $x^2+4xy+4y^2+2x+4y-15$
(2) $16a^2-9b^2+6bc-c^2$
(3) $p^2+q^2-r^2-s^2+2pq+2rs$

I1.1.7 (1) $x^4-4x^3-19x^2+46x+120$
(2) x^8-72x^4-729 (3) $m^6-2m^3n^3+n^6$

I1.1.8 (1) $4xy^2(x^2+2x+3y)$ (2) $(a-1)(b-1)$
(3) $(x-7)^2$ (4) $m(5m-2)^2$
(5) $4(2y-1)(y+1)$ (6) $(x+2)(x+5)$

I1.1.9 (1) $(x+1)(2x+3)$ (2) $(x-3)(4x+1)$
(3) $(2x+3y)(3x+2y)$

I1.1.10 (1) $(x-3)(x^2+3x+9)$
(2) $(3m+2n)(9m^2-6mn+4n^2)$
(3) $(x-2)^3$ (4) $(x-4)(x-1)(x+1)$

I1.1.11 (1) $(3x+1)(3x+y-1)$
(2) $(x^2+2x+y+4)(x+y-2)$ (3) $(y+z)(x-y-z)$

I1.1.12 (1) $(x+y-3)(x+3y+1)$
(2) $(x+2y+1)(3x+5y-4)$

I1.1.13 (1) $(x+3y-2)(x+3y-3)$
(2) $(x^2-2x-4)(x-1)^2$ (3) $x(x+5)(x^2+5x-2)$

I1.1.14 (1) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
(2) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

I1.1.15 (1) $(p+q-1)(p^2+q^2-pq+p+q+1)$
(2) $3(x-y)(y-z)(z-x)$

I1.1.16 (1) $(x+3)(x-3)(x^2-2)$
(2) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
(3) $(x^2+2xy-2y^2)(x^2-2xy-2y^2)$

節末 1.1

$\boxed{\textbf{I1.1.1}}$ $7x^2+6x-3$

$\boxed{\textbf{I1.1.2}}$ x^4の係数：-3 x^3の係数：11

$\boxed{\textbf{I1.1.3}}$ (1) $x^6+x^4-x^2-1$
(2) $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$\boxed{\textbf{I1.1.4}}$ (1) $(x+2)(y+1)(x+2y-1)$
(2) $8xy(x^2+y^2)$
(3) $(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)$
(4) $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$
(5) $(a+1)(a-2)(a^2-a+1)(a^2+2a+4)$
(6) $(x+1)^2(x+5)^2$

$\boxed{\textbf{I1.1.5}}$ (1) $3(y-z)(z-x)(x+y-2z)$
(2) $(2x^2+3xy+4y^2)(2x^2-3xy+4y^2)$

問題 1.2

I1.2.1
(1) (i) $\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$
(ii) $\frac{5}{12}=0.41\dot{6}$
(iii) $\frac{7}{15}=0.4\dot{6}$
(2) (i) $0.\dot{4}=\frac{4}{9}$ (ii) $0.\dot{3}\dot{6}=\frac{4}{11}$

I1.2.2 (1) $3\sqrt{3}$ (2) 4 (3) $4\sqrt{14}$ (4) $9+2\sqrt{35}$

I1.2.3 (1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}$
(3) $5\sqrt{2}-2\sqrt{11}$ (4) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

I1.2.4 (1) $2-\sqrt{3}$ (2) $3+\sqrt{3}$
(3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ (4) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$

I1.2.5 (1) 8 (2) 1 (3) 62 (4) 488 (5) 3842

I1.2.6 (1) 11 (2) $\pm\sqrt{13}$ (3) $\pm 10\sqrt{13}$ (4) 1298

I1.2.7 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 7 (3) 12

I1.2.8 (1) 0 (2) $\frac{97+56\sqrt{3}}{16}$

I1.2.9 (1) $a=2,\ b=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$ (2) $a+\frac{1}{b}=4+\sqrt{7}$

節末 1.2

$\boxed{\textbf{I1.2.1}}$ $\frac{10}{121}$

$\boxed{\text{I1.2.2}}$ $-3x-1$

$\boxed{\text{I1.2.3}}$ 9

$\boxed{\text{I1.2.4}}$ $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}$

$\boxed{\text{I1.2.5}}$ $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\boxed{\text{I1.2.6}}$ $-\frac{11}{2}$

$\boxed{\text{I1.2.7}}$ (1) 1 (2) $-2+2\sqrt{11}$ (3) 4 (4) $2\sqrt{11}-6$

問題 1.3

I1.3.1 (1) $-1<x+2<4$ (2) $-9<3x<6$
(3) $-4<x+y<6$ (4) $-7<x-y<3$
(5) $-17<3x-2y<8$

I1.3.2 (1) $x<-\frac{5}{2}$ (2) $x>\frac{18}{5}$ (3) $x \geqq -\frac{7}{4}$

I1.3.3 (1) $x \geqq 8$ (2) $-\frac{1}{3} \leqq x < 2$ (3) 解なし

I1.3.4 (1) $x=1,2,3,4,5$ (2) $4 \leqq a < 5$

I1.3.5 (1) 16 個 (2) 21，22，23，24

I1.3.6 (1) $a>0$ のとき，$x>-\frac{2}{a}$
$a=0$ のとき，すべての実数
$a<0$ のとき，$x<-\frac{2}{a}$
(2) $a>1$ のとき，$x \leqq a$
$a=1$ のとき，すべての実数
$a<1$ のとき，$x \geqq a$

I1.3.7 (1) $x=1,\ -5$ (2) $1 \leqq x \leqq 9$
(3) $x<-3,\ x>1$

I1.3.8 (1) $x=1$ (2) $x \leqq -3$ または $-1 \leqq x \leqq 3$

節末 1.3

$\boxed{\text{I1.3.1}}$ (1) $a<\frac{3}{4}$ (2) $0 \leqq a < \frac{1}{4}$

$\boxed{\text{I1.3.2}}$ $x=56,\ 64$

$\boxed{\text{I1.3.3}}$ (1) 20 km 以下 (2) 250 g 以上 500 g 以下

$\boxed{\text{I1.3.4}}$ (1) $a>0$ のとき，$x>\frac{b}{a}$
$a=0,\ b<0$ のとき，すべての実数
$a=0,\ b \geqq 0$ のとき，解なし
$a<0$ のとき，$x<\frac{b}{a}$
(2) $a+b>0$ のとき，$x \leqq a-b$
$a+b=0$ のとき，すべての実数
$a+b<0$ のとき，$x \geqq a-b$

$\boxed{\text{I1.3.5}}$ (1) $x=5,\ -1$ (2) $x=1,\ -1$

$\boxed{\text{I1.3.6}}$ (1) $x>\frac{3}{5}$ (2) $\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{13}{2}$ (3) $x=\frac{3}{2}$

章末 1

(I1.1) $8xz$

(I1.2) (1) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
(2) $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

(I1.3) -3

(I1.4) $a=-2,\ b=6$

(I1.5) $\begin{cases} 3a & (1 \leqq a) \\ a+2 & \left(-\frac{1}{2} \leqq a < 1\right) \\ -3a & \left(a < -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

問題 2.1

I2.1.1 (1) (i) $7 \in A$ (ii) $12 \notin A$
(2) (i) $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ (ii) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
(3) (i) $A \subset B$ (ii) $A = B$

I2.1.2 (1) $\{5,\ 9\}$ (2) $\{1,\ 6,\ 12\}$
(3) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}$
(4) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}$ (5) $\{5,\ 9\}$

I2.1.3 (1) $\{\,x \mid x \leqq -2\}$ (2) $\{\,x \mid x < -4\}$
(3) $\{\,x \mid x < -4,\ x \geqq -3\}$

I2.1.4 $a = 4$

I2.1.5 (1) $\{2\}$ (2) $\{1,\ 2,\ 14\}$
(3) $\{1,\ 2,\ 14\}$ (4) $\{1,\ 2,\ 7,\ 10,\ 14\}$

I2.1.6 (1) 略 (2) 略

I2.1.7 (1) 偽，反例：$x = -4$
(2) 偽，反例：$x = 1$ $y = 1$ (3) 真
(4) 偽，反例：$x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{2}$

I2.1.8 (1) 偽 (2) 真

I2.1.9 (1) (ii) (2) (i)

I2.1.10 (1) $x < 0$ または $x \geqq 5$
(2) $x = 1$ または $x = 2$ (3) $x \neq 0$ かつ $x \neq 2$
(4) $x \neq 1$ かつ $y \neq 1$

I2.1.11 (1) 命題：真 否定：偽
(2) 命題：偽 否定：真

I2.1.12 (1) 逆：偽 裏：偽 対偶：真
(2) 逆：偽 裏：偽 対偶: 真

I2.1.13 (1) 略 (2) 略

I2.1.14 略

I2.1.15 (1) 略 (2) 略

I2.1.16 (1) 略 (2) $a = 4,\ b = 1$

節末 2.1

I2.1.1 $\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}$

I2.1.2 (1) $0 < a < \sqrt{6} - 1$ (2) $4 \leqq a < 5$

I2.1.3 (1) 真 (2) 偽，反例：$x^2 - x = 1$
(3) 偽，反例：$x = \sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}$

I2.1.4 (1) (ii) (2) (iii) (3) (iv)

I2.1.5 略

I2.1.6 略

章末 2

I2.1 略

I2.2 (1) 真 (2) 偽，反例：$a = 3,\ b = 3$ (3) 真

I2.3 略

I2.4 略

I2.5 略

数学 I
6.1

問題 3.1

I3.1.1 (1) 19 (2) $\frac{31}{2}$ (3) $36a^2-3a+5$
(4) $16a^2+14a+8$ (5) $4a^4-9a^2+10$

I3.1.2 (1) 略 値域：$-1 \leqq y \leqq 9$ (2) 略 値域：$0 \leqq y \leqq 4$

I3.1.3 $(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\right),\ \left(-\frac{3}{2},\ \frac{13}{2}\right)$

I3.1.4 (1) 略 軸：y 軸 頂点：$(0,\ 3)$
(2) 略 軸：$x=2$ 頂点：$(2,\ 0)$
(3) 略 軸：$x=-1$ 頂点：$(-1,\ -4)$

I3.1.5 (1) 略 軸：$x=-2$ 頂点：$(-2,\ -5)$
(2) 略 軸：$x=3$ 頂点：$(3,\ 1)$

I3.1.6 $y=x^2-10x+18$ または $y=(x-5)^2-7$

I3.1.7 (1) x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動
(2) $y=-2x^2+13x-28$

I3.1.8 (1) $y=x^2-4x+5$ (2) $y=-x^2-4x-5$
(3) $y=x^2+4x+5$

I3.1.9 $a=-1,\ b=-10,\ c=-9$

I3.1.10 (1) 略 (2) 略

I3.1.11 略

I3.1.12 $-5 \leqq x \leqq -3$

節末 3.1

$\boxed{\textbf{I3.1.1}}$ $27a^4-36a^3+42a^2-20a+10$

$\boxed{\textbf{I3.1.2}}$ $a=-\frac{4}{3},\ b=-14$

$\boxed{\textbf{I3.1.3}}$ $a=3,\ b=-12,\ c=8$

$\boxed{\textbf{I3.1.4}}$ $y=-(x-5)^2+7$

$\boxed{\textbf{I3.1.5}}$ (1) $x=4$ のとき，最小値 4
(2) $x=5$ のとき，最小値 5

問題 3.2

I3.2.1 (1) 最大値 5，最小値はない
(2) 最小値 -5，最大値はない

I3.2.2 (1) 最小値 1，最大値はない (2) 最大値 5，最小値 1

I3.2.3 $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right),\ \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$

I3.2.4

(1) $\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき，} & x=a \text{ で最小値 } a^2-4a+6 \\ 2 \leqq a \text{ のとき，} & x=2 \text{ で最小値 } 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0<a<6 \text{ のとき，} & x=0 \text{ で最小値 } -8 \\ a=6 \text{ のとき，} & x=0,\ 6 \text{ で最小値 } -8 \\ 6<a \text{ のとき，} & x=a \text{ で最小値 } -a^2+6a-8 \end{cases}$

I3.2.5

(1) $\begin{cases} a<\frac{3}{2} \text{ のとき，} & x=3 \text{ で最大値 } -6a+12 \\ a=\frac{3}{2} \text{ のとき，} & x=0,\ 3 \text{ で最大値 } 3 \\ \frac{3}{2}<a \text{ のとき，} & x=0 \text{ で最大値 } 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a<1 \text{ のとき，} & x=1 \text{ で最小値 } -2a+6 \\ 1 \leqq a \leqq 4 \text{ のとき，} & x=a \text{ で最小値 } -a^2+5 \\ 4<a \text{ のとき，} & x=4 \text{ で最小値 } -8a+21 \end{cases}$

I3.2.6

(1) $\begin{cases} a<-1 \text{ のとき，} & x=a+2 \text{ で最小値 } a^2+2a+3 \\ -1 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき，} & x=1 \text{ で最小値 } 2 \\ 1<a \text{ のとき，} & x=a \text{ で最小値 } a^2-2a+3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a<1 \text{ のとき，} & x=a \text{ で最大値 } a^2-4a+5 \\ a=1 \text{ のとき，} & x=1,\ 3 \text{ で最大値 } 2 \\ a>1 \text{ のとき，} & x=a+2 \text{ で最大値 } a^2+1 \end{cases}$

I3.2.7 (1) $M=-a^2+3a+6$ (2) 最小値 -4

I3.2.8 (1) $t \geqq -4$ (2) $x=1,\ 3$ のとき，最小値 -9

I3.2.9 (1) 最小値 $\frac{18}{5}$ (2) 最大値 36

I3.2.10 斜辺の長さが $5\sqrt{2}$，直角を挟む 2 辺の長さがともに 5 の直角二等辺三角形

I3.2.11 (1) $y=\frac{1}{3}(x+2)^2+3$ (2) $y=-3(x-2)^2+8$

I3.2.12 (1) $y=-x^2+4x+4$ (2) $y=2(x+1)(x-4)$

I3.2.13 (1) $y=4x^2,\ y=(x-3)^2$
(2) $y=3x^2-3,\ y=3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$

節末 3.2

$\boxed{\textbf{I3.2.1}}$ $k=-2$，最大値 8，最小値 -8

$\boxed{\textbf{I3.2.2}}$ (1) 頂点 $(2, 8)$，x 軸との交点 $(0, 0)$，$(4, 0)$，
y 軸との交点 $(0, 0)$ (2) $a=0,\ 3$

$\boxed{\textbf{I3.2.3}}$ (1) $m=\begin{cases} -7a+18 & (a>4) \\ -a^2+a+2 & (a \leqq 4) \end{cases}$ (2) $a=\frac{1}{2}$

$\boxed{\textbf{I3.2.4}}$ $a=-\frac{4}{3},\ b=8,\ c=-5$

$\boxed{\textbf{I3.2.5}}$ 最小値 $\frac{1}{4}$

$\boxed{\textbf{I3.2.6}}$ $a=-1,\ b=2,\ c=8$

問題 3.3

I3.3.1 (1) $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}$ (2) $x=4\pm\sqrt{21}$
(3) $x=-\frac{1}{4}$ (4) $x=\frac{1}{3},\ \frac{3}{2}$

I3.3.2 (1) $x=4\pm2\sqrt{3}$ (2) $x=2\sqrt{3}$ (3) $x=4,\ 0$

I3.3.3 (1) $a=0$ のとき，$x=-1$
$a \neq 0$ のとき，$x=-1,\ -\frac{3}{a}$
(2) $a \leqq 0$ のとき，解なし
$a=2$ のとき，すべての実数
$0<a<2,\ 2<a$ のとき $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$

I3.3.4 (1) $a=1$, $b=-20$
(2) $a=2$ のとき，$x=-4$
$a=-2$ のとき，$x=4$

I3.3.5 (1) 2 個 (2) 0 個 (3) 2 個 (4) 1 個

I3.3.6 (1) $k=5$ のとき，$x=-5$
$k=-2$ のとき，$x=2$
(2) $k<2$ のとき，2 個
$k=2$ のとき，1 個
$k>2$ のとき，0 個

I3.3.7 $-\frac{7}{4}<k<1$

I3.3.8 $k=-9$, $x=4$

I3.3.9 (1) 共有点を 2 個もち，その座標は，(5, 0), (−2, 0)
(2) 共有点を 1 個もち，その座標は，(2, 0)
(3) 共有点をもたない．

I3.3.10 (1) $k=3$ のとき，(3, 0)
$k=1$ のとき，(1, 0)
(2) $k\leqq-3$

I3.3.11 (1) $\frac{\sqrt{41}}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$

I3.3.12 (1) $a<0$ (2) $b>0$ (3) $c>0$
(4) $b^2-4ac>0$ (5) $a+b+c>0$

I3.3.13 (1) (1, −1), (5, 11)
(2) $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, (−1, 1), (1, 2)

I3.3.14 (1) 共有点を 2 個もち，その座標は，(2, −2), (1, −1)
(2) 共有点をもたない．
(3) 共有点を 1 個もち，その座標は，(2, 2)

I3.3.15 (1) $k>-\frac{15}{2}$ のとき，2 個
$k=-\frac{15}{2}$ のとき，1 個
$k<-\frac{15}{2}$ のとき，0 個
(2) $k>-3$ のとき，2 個
$k=-3$ のとき，1 個
$k<-3$ のとき，0 個

I3.3.16 (1) $x<2$, $6<x$ (2) $x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x$
(3) $-\frac{1}{3}\leqq x\leqq 2$

I3.3.17 (1) 1 以外のすべての実数 (2) すべての実数
(3) $x=3$ (4) 解なし

I3.3.18 (1) $-3\leqq x<-1$, $-\frac{1}{2}<x\leqq 1$
(2) $1-\sqrt{5}\leqq x\leqq 0$, $2\leqq x\leqq 1+\sqrt{5}$

I3.3.19 (1) $a>0$ のとき，$x<a$, $3a<x$
$a=0$ のとき，$x\neq 0$
$a<0$ のとき，$x<3a$, $a<x$
(2) $a>0$ のとき，$1<x<4$
$a<0$ のとき，$x<1$, $x>4$

I3.3.20 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

I3.3.21 (1) $4<k<12$
(2) $k<-3$, $-3<k<-1$, $5<k$ のとき，2 個
$k=-3$, $k=-1$, $k=5$ のとき，1 個
$-1<k<5$ のとき，0 個

I3.3.22 (1) $-8<k<0$ (2) $k\leqq-2$

I3.3.23 $-\frac{7}{3}<a<3$

I3.3.24 $-7\leqq a<-6$, $7<a\leqq 8$

I3.3.25 $a<-2$, $1<a<\frac{6}{5}$

I3.3.26 $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$

I3.3.27 $-\frac{2}{3}<a<2$

I3.3.28 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{6}$

I3.3.29 $2\leqq a<3$

I3.3.30 (1) $0\leqq a\leqq 3$ (2) $a\leqq-4$, $-3\leqq a$
(3) $a\leqq-4$, $-3\leqq a<0$, $3<3$

I3.3.31 $x=\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$
$x=-1$, $y=0$ のとき，最小値 -1

I3.3.32 (1) $x=2$, $y=-\frac{1}{3}$ のとき，最小値 $\frac{2}{3}$
(2) $x=6$, $y=-2$ のとき，最小値 -1

I3.3.33 0 cm より長く，16 cm 以下であればよい．

I3.3.34 (1) $-\frac{\sqrt{70}}{2}<a<\frac{\sqrt{70}}{2}$ (2) $a<-\frac{\sqrt{70}}{2}$, $a>\frac{\sqrt{70}}{2}$

I3.3.35 (1) $a>22$ (2) $a>4$

I3.3.36 $a<-3$ のとき，0 個
$a=-3$ のとき，1 個
$-3<a<-\frac{3}{4}$ のとき，2 個
$a=-\frac{3}{4}$ のとき，3 個
$-\frac{3}{4}<a<-1$ のとき，4 個
$a=-1$ のとき，3 個
$a>-1$ のとき，2 個

節末 3.3

I3.3.1 5 個

I3.3.2 $a=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$

I3.3.3 (1) $x<-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}<x$
(2) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}\leqq x\leqq\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

I3.3.4 $-\frac{1}{6}<a<4-\sqrt{14}$

I3.3.5 $1-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{6}$

章末 3

I3.1 最大値は 2，最小値は $-\frac{10}{3}$

I3.2 $y=4$, $y=4x$

I3.3 $a=2$, $b=1$, $\alpha=-2$

I3.4 略

I3.5 (1) 略 (2) $4u^2-v=15$ (3) $-\frac{241}{16}\leqq k\leqq 3$

数学 I 6.1

問題 4.1

I4.1.1 (1) $\sin A = \frac{4}{5}$，$\cos A = \frac{3}{5}$，$\tan A = \frac{4}{3}$
(2) $x = 5\sqrt{3}$，$y = 5$

I4.1.2 $16.5 + 15\sqrt{3}$ (m)

I4.1.3 (1) $\mathrm{BD} = 1$　(2) $\mathrm{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$　(3) $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

I4.1.4 (1) $\cos A = \frac{3}{5}$，$\tan A = \frac{4}{3}$
(2) $\sin A = \frac{1}{3}$，$\cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

I4.1.5 (1) $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ$，$\cos 125^\circ = -\sin 35^\circ$，
$\sin 35^\circ \cos 125^\circ + \sin 55^\circ \cos 145^\circ = -1$
(2) 略

I4.1.6 (1) $\theta = 30^\circ$，150°　(2) $\theta = 120^\circ$　(3) $\theta = 135^\circ$

I4.1.7 (1) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$
(2) $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

I4.1.8 (1) $\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$　(2) $\sin^3\theta - \cos^3\theta = \frac{11}{16}$
(3) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

I4.1.9 (1) $\theta = 60^\circ$　(2) $\theta = 30^\circ$，150°

I4.1.10 (1) 30°　(2) 60°

I4.1.11 (1) $60^\circ < \theta < 120^\circ$　(2) $135^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$

I4.1.12 (1) $90^\circ < \theta \leqq 150^\circ$
(2) $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$，$135^\circ < \theta \leqq 180^\circ$

I4.1.13 (1) $60^\circ < \theta < 90^\circ$
(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ$，$150^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\theta = 90^\circ$

I4.1.14 $\theta = 120^\circ$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$
$\theta = 0^\circ$ のとき，最小値 -1

I4.1.15 $1 \leqq a < \frac{37}{12}$

I4.1.16 $-3 \leqq a < -2\sqrt{2}$

節末 4.1

I4.1.1 (1) $\mathrm{AB} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$
(2) $\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，$\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$

I4.1.2 $\frac{26}{5}$

I4.1.3 $\theta = 120^\circ$

I4.1.4 (1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{\sqrt{15}}{3}$　(3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　(4) $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

I4.1.5 $a = 2$，$b = 0$ または $a = -1$，$b = -\sqrt{3}$

問題 4.2

I4.2.1 (1) $c = \sqrt{6}$，$R = \sqrt{3}$　(2) $A = 60^\circ$，120°

I4.2.2 (1) $c = \sqrt{76}$　(2) $B = 60^\circ$　(3) $b = 1 + \sqrt{3}$

I4.2.3 (1) $a = 2\sqrt{2}$，$C = 30^\circ$，$B = 15^\circ$
(2) $A = 45^\circ$，$B = 30^\circ$，$C = 105^\circ$

I4.2.4 $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$，$A = 105^\circ$，$B = 45^\circ$ または $a = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，$A = 15^\circ$，$B = 135^\circ$

I4.2.5 $C = 120^\circ$

I4.2.6 (1) $1 < x < 5$　(2) $1 < x < \sqrt{5}$，$\sqrt{13} < x < 5$

I4.2.7 (1) $\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ の二等辺三角形
(2) $\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ の二等辺三角形または $C = 90^\circ$ の直角三角形

節末 4.2

I4.2.1 0

I4.2.2 $A = 75^\circ$，$C = 60^\circ$，$a = \sqrt{3}+1$ または $A = 15^\circ$，$C = 120^\circ$，$a = \sqrt{3} - 1$

I4.2.3 $\cos A = -\frac{1}{2}$，$a = 3$，$b = \frac{15}{7}$，$c = \frac{9}{7}$

I4.2.4 (1) $x > 2$　(2) $2 < x < 4$　(3) $x = \frac{5}{2}$，$R = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

I4.2.5 $\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ の二等辺三角形または $C = 120^\circ$ の三角形

問題 4.3

I4.3.1 (1) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$　(2) $10\sqrt{3}$

I4.3.2 (1) $2 + 2\sqrt{2}$　(2) 3

I4.3.3 (1) $\cos A = \frac{3}{4}$，$\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$　(2) $\frac{15\sqrt{7}}{4}$
(3) $\frac{\sqrt{7}}{2}$　(4) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

I4.3.4 (1) $4\sqrt{3}$　(2) 4　(3) $12\sqrt{3}$

I4.3.5 (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　(2) 2

I4.3.6 (1) $\frac{10}{3}$　(2) 2

I4.3.7 $\frac{\sqrt{22}}{2}$

I4.3.8 $50\sqrt{3} + 150$ (m)

I4.3.9 (1) 13　(2) $\frac{10}{3}$　(3) $V = \frac{4000}{81}\pi$，$S = \frac{400}{9}\pi$

I4.3.10 $\sqrt{3}$

I4.3.11 $5\sqrt{2}$

節末 4.3

I4.3.1 内接する正 n 角形の面積：$\frac{1}{2}na^2\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$
外接する正 n 角形の面積：$na^2\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

I4.3.2 (1) $\cos A = -\frac{1}{2}$，$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(2) $S = \frac{14\sqrt{3}}{3}$，$R = \frac{13}{3}$

I4.3.3 (1) $\cos\angle\mathrm{BAD} = \frac{7}{18}$，$\mathrm{BD} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
(2) $\mathrm{BE} : \mathrm{ED} = 3 : 2$，$\mathrm{BE} = \sqrt{3}$

I4.3.4 (1) 60°　(2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(4) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

I4.3.5 $\frac{25\pi}{6}$

章末 4

I4.1 $-\frac{65}{8}$

(I4.2) $a \leqq -\frac{3}{2}$

(I4.3) (1) 60°　(2) $\frac{65\sqrt{3}}{4}$

(I4.4) (1) 最小値 $\frac{3}{2}$
(2) $\mathrm{AD} = \frac{3}{2}$ のとき，最小値 $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$

(I4.5) (1) $\frac{\sqrt{21}}{6}$　(2) $\frac{3\sqrt{35}}{2}$

問題 5.1

I5.1.1 (1) 略　(2) 略

I5.1.2 (1) A クラスの平均値は 7.17，B クラスの平均値は 5
(2) 全体の平均値は 6.18
(3) A クラスの中央値は 7.5，B クラスの中央値は 5

I5.1.3 (1) 平均値の最小値は 10，最大値は 14
(2) $x = 21$

I5.1.4 略

I5.1.5 (1) B 組　(2) A 組　(3) C 組　(4) C 組

I5.1.6 平日は (iii)，週末は (ii)

I5.1.7 (1) $\overline{a} = 7$，$s_a^2 = 0.6$，$s_a \fallingdotseq 0.8$，
$\overline{b} = 5$，$s_b^2 = 0.8$，$s_b \fallingdotseq 0.9$
(2) B 倉庫

I5.1.8 (1) 平均値 6.5　分散：1.25
(2) $a = 3$，$b = 17$

I5.1.9 (1) 85.5
(2) 平均値は変化しない．分散は増加する

I5.1.10 (1) $\overline{y} = 30$，$s_y^2 = 36$，$s_y = 6$
(2) $\overline{y} = 150$，$s_y^2 = 324$，$s_y = 18$
(3) $\overline{y} = -90$，$s_y^2 = 144$，$s_y = 12$
(4) $\overline{y} = 0$，$s_y^2 = 1$，$s_y = 1$

I5.1.11 (1) 590　(2) 600

I5.1.12 相関係数は $-\frac{10}{11}$，散布図は (i)

I5.1.13 0.5

I5.1.14 新機能が役立つとは判断できない

節末 5.1

I5.1.1 (ii)

I5.1.2 平均値：21　分散：3.5

I5.1.3 B 地区の方が望ましい建設地であると判断してよい．

章末 5

(I5.1) 1.25

(I5.2) (1) 11.2　(2) 4.16

(I5.3) (1) $x = m$ のとき，最小値をとる．
(2) 平均値 $m + p$，分散 σ^2　(3) 平均値 qm，分散 $q^2\sigma^2$

(I5.4) (1) 15　(2) 平均値 69　標準偏差 $2\sqrt{249}$

(I5.5) 0.747

数学 I
6.1

第 II 部

解答

目次（解答）

数と式（解答）

式の展開と因数分解（解答）

解答 I1.1.1 ★ 問題 p.7

問題文

(1) 次の多項式を x について降べきの順に整理し，次数と定数項を求めよ．

$$5+x^4-3x^3+2x-4x+3x^2-9-x^4$$

(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項を求めよ．

$$4b^2-3ab^2+ab-6a+7a^2-3+2b^3, \quad [b], \ [a \text{ と } b]$$

(1) $5+x^4-3x^3+2x-4x+3x^2-9-x^4$

$=(x^4-x^4)+(-3x^3)+(3x^2)+(2x-4x)+(5-9)$

$=\boldsymbol{-3x^3+3x^2-2x-4}$

よって，**次数は 3，定数項は -4**

◀ 同類項をまとめ，降べきの順（次数の高い順）に整理する．

◀ $-3x^3$ より，最も高い次数は 3 である．

(2) b に着目すると，

$$\begin{aligned} 4b^2-3ab^2+ab-6a+7a^2-3+2b^3 &= (4-3a)b^2+ab+2b^3+7a^2-6a-3 \\ &= 2b^3+(4-3a)b^2+ab+7a^2-6a-3 \end{aligned}$$

よって，b に着目したとき，**次数は 3 ，定数項は $7a^2-6a-3$**

◀ 着目した文字以外の文字を定数として考える．

また，a と b に着目すると，

$$4b^2-3ab^2+ab-6a+7a^2-3+2b^3 = 2b^3-3ab^2+ab+7a^2+4b^2-6a-3$$

よって，a と b に着目したとき，**次数は 3，定数項は -3**

◀ b^3 があるため，最も高い次数は 3 である（次数は掛け合わせた文字の総数）．

解答 I1.1.2 ★★　問題 p.8

問題文

$A = 2x^2 - 4x + 3$，$B = 3x^2 + x - 7$ について，次の式を計算せよ．

(1) $A + B$　　(2) $A - B$

(3) $3A - 2B$　　(4) $4(A + B) - (2A - 3B)$

(1) $A + B = (2x^2 - 4x + 3) + (3x^2 + x - 7)$

$= (2x^2 + 3x^2) + (-4x + x) + (3 - 7)$

$= \boldsymbol{5x^2 - 3x - 4}$

◀ 同類項をまとめて計算する．

(2) $A - B = (2x^2 - 4x + 3) - (3x^2 + x - 7)$

$= 2x^2 - 4x + 3 - 3x^2 - x + 7$

$= (2x^2 - 3x^2) + (-4x - x) + (3 + 7)$

$= \boldsymbol{-x^2 - 5x + 10}$

◀ $-(3x^2 + x - 7)$ は括弧を外すと，各項の係数の符号が変わる（分配法則）．

(3) $3A - 2B = 3(2x^2 - 4x + 3) - 2(3x^2 + x - 7)$

$= 6x^2 - 12x + 9 - 6x^2 - 2x + 14$

$= (6x^2 - 6x^2) + (-12x - 2x) + (9 + 14)$

$= \boldsymbol{-14x + 23}$

◀ この行は省略してもよい．

(4) $4(A + B) - (2A - 3B)$

$=4A + 4B - 2A + 3B$

$=2A + 7B$

$=2(2x^2 - 4x + 3) + 7(3x^2 + x - 7)$

$=4x^2 - 8x + 6 + 21x^2 + 7x - 49$

$=\boldsymbol{25x^2 - x - 43}$

◀ A，B について整理する．

解答 I1.1.3 ★ 問題 p.9

問題文

次の計算をせよ．

(1) $3x^2y\times(-4xy^2)^2$　　(2) $5abc^2(2a^2-3b+4c)$

(3) $(x-3)(x^2+4x-7)$　　(4) $(x^3-2x+5)(3x^2-x+4)$

(1) $3x^2y\times(-4xy^2)^2=3x^2y\times(-4)^2x^2(y^2)^2=3x^2y\times16x^2y^4$

$=3\cdot16x^{2+2}y^{1+4}=\boldsymbol{48x^4y^5}$

◀ $(-4xy^2)^2$ を先に計算する．

◀ 係数の積，文字の積をそれぞれ計算する．

(2) $5abc^2(2a^2-3b+4c)=5abc^2\cdot2a^2+5abc^2\cdot(-3b)+5abc^2\cdot4c$

$=\boldsymbol{10a^3bc^2-15ab^2c^2+20abc^3}$

◀ $A(B+C)=AB+AC$ より，次のことがいえる．

$A(B+C+D)=AB+AC+AD$

(3) $(x-3)(x^2+4x-7)=x(x^2+4x-7)-3(x^2+4x-7)$

$=x^3+4x^2-7x-3x^2-12x+21$

$=\boldsymbol{x^3+x^2-19x+21}$

◀ $(A+B)(C+D+E)$
$=AC+AD+AE$
$+BC+BD+BE$

(4) $(x^3-2x+5)(3x^2-x+4)$

$=x^3(3x^2-x+4)-2x(3x^2-x+4)+5(3x^2-x+4)$

$=3x^5-x^4+4x^3-6x^3+2x^2-8x+15x^2-5x+20$

$=\boldsymbol{3x^5-x^4-2x^3+17x^2-13x+20}$

◀ 降べきの順に整理する．

解答 1.1

解答 I1.1.4 ★ 問題 p.10

問題文

次の式を展開せよ．

(1) $(x+3)^2$　　(2) $(k-2)^2$　　(3) $(x+2y)(x-2y)$

(4) $(x-2y)(x-5y)$　　(5) $(4a+2b)(3a+b)$　　(6) $(2x-y-z)^2$

(1) $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot3+3^2=\boldsymbol{x^2+6x+9}$

◀ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2) $(k-2)^2=k^2-2\cdot k\cdot2+2^2=\boldsymbol{k^2-4k+4}$

◀ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3) $(x+2y)(x-2y)=x^2-(2y)^2=\boldsymbol{x^2-4y^2}$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(4) $(x-2y)(x-5y)=x^2+\{(-2y)+(-5y)\}x+(-2y)\cdot(-5y)=\boldsymbol{x^2-7xy+10y^2}$

◀ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(5) $(4a+2b)(3a+b)=4\cdot3a^2+(4\cdot b+2b\cdot3)a+2b\cdot b=\boldsymbol{12a^2+10ab+2b^2}$

◀ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(6) $(2x-y-z)^2=\{2x+(-y)+(-z)\}^2$

$=(2x)^2+(-y)^2+(-z)^2$

$+2\cdot(2x)\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot(2x)$

$=\boldsymbol{4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4zx}$

◀ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

【別解】 $(2x-y-z)^2=\{(2x-y)-z\}^2=(2x-y)^2-2(2x-y)z+z^2$

$=\left(4x^2-4xy+y^2\right)-4xz+2yz+z^2$

$=\boldsymbol{4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4zx}$

◀ $2x-y=A$ とおくと，$(A-z)^2=A^2-2Az+z^2$

◀ 輪環の順に整理するとよい．

One math

解答 I1.1.5 ★★ 問題 p.11

問題文

次の式を展開せよ．

(1) $(x+3)^3$ (2) $(2x-5y)^3$

(3) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$ (4) $(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2)$

(5) $(x-3)^3(x+3)^3$ (6) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

(1) $(x+3)^3 = x^3+3x^2\cdot 3+3x\cdot 3^2+3^3$
$= \boldsymbol{x^3+9x^2+27x+27}$

◀ $(a+b)^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(2x-5y)^3 = (2x)^3-3(2x)^2\cdot 5y+3\cdot 2x\cdot(5y)^2-(5y)^3$
$= \boldsymbol{8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3}$

◀ $(a-b)^3$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $(3x-2)(9x^2+6x+4) = (3x-2)\{(3x)^2+3x\cdot 2+2^2\}$
$= (3x)^3-2^3$
$= \boldsymbol{27x^3-8}$

◀ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$

(4) $(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2) = (5a+2b)\{(5a)^2-5a\cdot 2b+(2b)^2\}$
$= (5a)^3+(2b)^3$
$= \boldsymbol{125a^3+8b^3}$

◀ $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a^3-b^3$

(5) $(x-3)^3(x+3)^3 = \{(x-3)(x+3)\}^3$
$= (x^2-9)^3$
$= (x^2)^3-3(x^2)^2\cdot 9+3x^2\cdot 9^2-9^3$
$= \boldsymbol{x^6-27x^4+243x^2-729}$

◀ 先に 3 次の乗法公式を用いて展開してもよいが，計算に手間が掛かる．そこで，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の利用を考える．

(6) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$
$=(x^3+8)(x^3-8)$
$=\boldsymbol{x^6-64}$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

解答 I1.1.6 ★★ 問題 p.12

問題文

次の式を展開せよ．

(1) $(x+2y-3)(x+2y+5)$ (2) $(4a-3b+c)(4a+3b-c)$

(3) $(p+q-r+s)(p+q+r-s)$

(1) $(x+2y-3)(x+2y+5)$

$=\{(x+2y)-3\}\{(x+2y)+5\}$

$=(x+2y)^2+2(x+2y)-15$

$=\boldsymbol{x^2+4xy+4y^2+2x+4y-15}$

◀ $x+2y=A$ とおくと，

$(A-3)(A+5)$

$=A^2+2A-15$

(2) $(4a-3b+c)(4a+3b-c)$

$=\{4a+(-3b+c)\}\{4a-(-3b+c)\}$

$=(4a)^2-(-3b+c)^2$

$=16a^2-\left(9b^2-6bc+c^2\right)$

$=\boldsymbol{16a^2-9b^2+6bc-c^2}$

◀ $-(3b-c)$ とくくると，共通する部分が $3b-c$ となる．

◀ $3b-c=A$ とおくと，

$(4a+A)(4a-A)$

$=16a^2-A^2$

(3) $(p+q-r+s)(p+q+r-s)$

$=\{(p+q)+(r-s)\}\{(p+q)-(r-s)\}$

$=(p+q)^2-(r-s)^2$

$=\left(p^2+2pq+q^2\right)-\left(r^2-2rs+s^2\right)$

$=\boldsymbol{p^2+q^2-r^2-s^2+2pq+2rs}$

◀ $p+q-r+s$

$=(p+q)+(r-s)$

◀ $p+q=A$，$r-s=B$ とおくと，$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

解答 I1.1.7 ★★　問題 p.13

問題文

次の式を展開せよ．

(1) $(x-4)(x-5)(x+2)(x+3)$　　(2) $(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)\left(x^4+9\right)$

(3) $(m-n)^2\left(m^2+mn+n^2\right)^2$

(1)
$$
\begin{aligned}
&(x-4)(x-5)(x+2)(x+3)\\
=&(x-4)(x+2)\times(x-5)(x+3)\\
=&\left(x^2-2x-8\right)\left(x^2-2x-15\right)\\
=&\left\{\left(x^2-2x\right)-8\right\}\left\{\left(x^2-2x\right)-15\right\}\\
=&\left(x^2-2x\right)^2-23\left(x^2-2x\right)+120\\
=&x^4-4x^3+4x^2-23x^2+46x+120\\
=&\boldsymbol{x^4-4x^3-19x^2+46x+120}
\end{aligned}
$$

◀ 共通する部分が見つかるように，組み合わせを工夫する．

( )( )( )( )

◀ $x^2-2x=A$ とおくと，

$(A-8)(A-15)$

$=A^2-23A+120$

(2)
$$
\begin{aligned}
&(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)\left(x^4+9\right)\\
=&\left(x^2-9\right)\left(x^2+9\right)\left(x^4+9\right)\\
=&\left(x^4-81\right)\left(x^4+9\right)\\
=&x^8+9x^4-81x^4-729\\
=&\boldsymbol{x^8-72x^4-729}
\end{aligned}
$$

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を利用して，$(x-3)(x+3)$ を先に計算する．

◀ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を再度利用する．

(3)
$$
\begin{aligned}
&(m-n)^2\left(m^2+mn+n^2\right)^2\\
=&\left\{(m-n)\left(m^2+mn+n^2\right)\right\}^2\\
=&\left(m^3-n^3\right)^2\\
=&\boldsymbol{m^6-2m^3n^3+n^6}
\end{aligned}
$$

◀ $A^2B^2=(AB)^2$

解答 I1.1.8 ★　問題 p.14

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $4x^3y^2+8x^2y^2+12xy^3$　(2) $ab-b-a+1$　(3) $x^2-14x+49$

(4) $25m^3-20m^2+4m$　(5) $9y^2-(y-2)^2$　(6) $x^2+7x+10$

(1) $4x^3y^2+8x^2y^2+12xy^3=\boldsymbol{4xy^2(x^2+2x+3y)}$

◀ 4，8，12 の最大公約数は 4 である．

(2) $ab-b-a+1=(a-1)b-(a-1)=\boldsymbol{(a-1)(b-1)}$

◀ b について整理すると，共通因数 $a-1$ が見つかる．

(3) $x^2-14x+49=x^2-2\cdot x\cdot 7+7^2=\boldsymbol{(x-7)^2}$

◀ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(4)
$$
\begin{aligned}
25m^3-20m^2+4m&=m(25m^2-20m+4)\\
&=m\{(5m)^2-2\cdot 5m\cdot 2+2^2\}\\
&\boldsymbol{m(5m-2)^2}
\end{aligned}
$$

◀ 先に m をくくり出す．

(5)
$$
\begin{aligned}
9y^2-(y-2)^2&=\{3y+(y-2)\}\{3y-(y-2)\}\\
&=(3y+y-2)(3y-y+2)\\
&=(4y-2)(2y+2)\\
&=\boldsymbol{4(2y-1)(y+1)}
\end{aligned}
$$

◀ 括弧を外すときは符号に注意すること．

(6) $x^2+7x+10=x^2+(2+5)x+5\cdot 2=\boldsymbol{(x+2)(x+5)}$

◀ 和が 7，積が 10 になる数を探す．

解答 I1.1.9 ★　問題 p.15

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $2x^2+5x+3$　　(2) $4x^2-11x-3$　　(3) $6x^2+13xy+6y^2$

(1) $2x^2+5x+3=\boldsymbol{(x+1)(2x+3)}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & 1 & \longrightarrow 2 \\ 2 & & 3 & \longrightarrow 3 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

(2) $4x^2-11x-3=\boldsymbol{(x-3)(4x+1)}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & -3 & \rightarrow -12 \\ 4 & & 1 & \longrightarrow 1 \\ \hline & & & -11 \end{array}$$

(3) $6x^2+13xy+6y^2=\boldsymbol{(2x+3y)(3x+2y)}$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \times & 3y & \longrightarrow 9y \\ 3 & & 2y & \longrightarrow 4y \\ \hline & & & 13y \end{array}$$

◀ y を忘れないように注意すること．

解答 I1.1.10 ★★　問題 p.16

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) x^3-27　　(2) $27m^3+8n^3$

(3) $x^3-6x^2+12x-8$　　(4) x^3-4x^2-x+4

(1)
$$\begin{aligned} x^3-27 &= x^3-3^3 \\ &= (x-3)\{x^2+x\cdot 3+3^2\} \\ &= \boldsymbol{(x-3)(x^2+3x+9)} \end{aligned}$$

◀ a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2)
$$\begin{aligned} 27m^3+8n^3 &= (3m)^3+(2n)^3 \\ &= (3m+2n)\{(3m)^2-3m\cdot 2n+(2n)^2\} \\ &= \boldsymbol{(3m+2n)(9m^2-6mn+4n^2)} \end{aligned}$$

◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) $x^3-6x^2+12x-8=\boldsymbol{(x-2)^3}$

◀ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$=(a-b)^3$

【別解】
$$\begin{aligned} x^3-6x^2+12x-8 &= (x^3-8)+(-6x^2+12x) \\ &= (x-2)(x^2+2x+4)-6x(x-2) \\ &= (x-2)\{x^2+2x+4-6x\} \\ &= (x-2)(x^2-4x+4) \\ &= (x-2)(x-2)^2 \\ &= \boldsymbol{(x-2)^3} \end{aligned}$$

◀ 組み合わせを工夫する．
◀ $x^3-8=x^3-2^3$
◀ $x-2$ をくくり出す．

(4)
$$\begin{aligned} x^3-4x^2-x+4 &= (x^3-4x^2)-(x-4) \\ &= x^2(x-4)-1(x-4) \\ &= (x-4)(x^2-1) \\ &= \boldsymbol{(x-4)(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

◀ $x-4$ をくくり出す．

解答 1.1

解答 I1.1.11 ★★ 問題 p.17

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $9x^2+3xy+y-1$　(2) $x^3+x^2y+3xy+y^2+2y-8$

(3) $xy+xz-y^2-z^2-2yz$

(1) $9x^2+3xy+y-1=(3x+1)y+9x^2-1$

$=(3x+1)y+(3x+1)(3x-1)$

$=\mathbf{(3x+1)(3x+y-1)}$

◀ y について整理する．

◀ $3x+1$ をくくり出す．

(2) $x^3+x^2y+3xy+y^2+2y-8$

$=y^2+(x^2+3x+2)y+(x^3-8)$

$=y^2+(x^2+3x+2)y+(x-2)(x^2+2x+4)$

$=\left\{y+(x^2+2x+4)\right\}\left\{y+(x-2)\right\}$

$=\mathbf{(x^2+2x+y+4)(x+y-2)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & x^2+2x+4 & \to & x^2+2x+4 \\ 1 & & x-2 & \longrightarrow & x-2 \\ \hline & & & & x^2+3x+2 \end{array}$$

◀ y について整理する．

◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
を用いて因数分解する．さらに，全体を y の 2 次式と考えて，たすき掛けを用いて因数分解する．

(3) $xy+xz-y^2-z^2-2yz$

$=(y+z)x-(y^2+2yz+z^2)$

$=(y+z)x-(y+z)^2$

$=(y+z)\{x-(y+z)\}$

$=\mathbf{(y+z)(x-y-z)}$

◀ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

解答 1.1

解答 I1.1.12 ★★ 問題 p.18

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2+4xy+3y^2-2x-8y-3$　(2) $3x^2+11xy+10y^2-x-3y-4$

(1) $x^2+4xy+3y^2-2x-8y-3$

$=x^2+(4y-2)x+\left(3y^2-8y-3\right)$

$=x^2+(4y-2)x+(y-3)(3y+1)\cdots$(i)

$=\{x+(y-3)\}\{x+(3y+1)\}\cdots$(ii)

$=\mathbf{(x+y-3)(x+3y+1)}$

(i)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & & -8 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & y-3 & \longrightarrow & y-3 \\ 1 & & 3y+1 & \longrightarrow & 3y+1 \\ \hline & & & & 4y-2 \end{array}$$

◀ 先に，(i) のように $10y^2-3y-4$ をたすき掛けを用いて因数分解する．次に，(ii) のように全体を x の 2 次式と考えて，たすき掛けを用いて因数分解する．

(2) $3x^2+11xy+10y^2-x-3y-4$

$=3x^2+(11y-1)x+(10y^2-3y-4)$

$=3x^2+(11y-1)x+(2y+1)(5y-4)\cdots$(i)

$=\{x+(2y+1)\}\{3x+(5y-4)\}\cdots$(ii)

$=\mathbf{(x+2y+1)(3x+5y-4)}$

◀ y について整理して，因数分解してもよい．

(i)
$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 1 & \longrightarrow & 5 \\ 5 & & -4 & \longrightarrow & -8 \\ \hline & & & & -3 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2y+1 & \longrightarrow & 6y+3 \\ 3 & & 5y-4 & \longrightarrow & 5y-4 \\ \hline & & & & 11y-1 \end{array}$$

解答 I1.1.13 ★★ 問題 p.19

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $(x+3y)^2-5(x+3y)+6$　(2) $\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-3\right)-4$

(3) $(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)+24$

(1) $(x+3y)^2-5(x+3y)+6$

$=\{(x+3y)-2\}\{(x+3y)-3\}$

$=\boldsymbol{(x+3y-2)(x+3y-3)}$

◀ $x+3y=A$ とおくと，

A^2-5A+6

$=(A-2)(A-3)$

(2) $\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-3\right)-4$

$=\left(x^2-2x\right)\left\{\left(x^2-2x\right)-3\right\}-4$

$=\left(x^2-2x\right)^2-3\left(x^2-2x\right)-4$

$=\left\{\left(x^2-2x\right)-4\right\}\left\{\left(x^2-2x\right)+1\right\}$

$=\left(x^2-2x-4\right)\left(x^2-2x+1\right)$

$=\boldsymbol{\left(x^2-2x-4\right)(x-1)^2}$

◀ $x^2-2x=A$ とおくと，

$A(A-3)-4$

$=A^2-3A-4$

$=(A-4)(A+1)$

(3) $(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)+24$

$=(x-1)(x+6)\times(x+1)(x+4)+24$

$=\left(x^2+5x-6\right)\left(x^2+5x+4\right)+24$

$=\left\{\left(x^2+5x\right)-6\right\}\left\{\left(x^2+5x\right)+4\right\}+24$

$=\left(x^2+5x\right)^2-2\left(x^2+5x\right)$

$=\left(x^2+5x\right)\left\{\left(x^2+5x\right)-2\right\}$

$=\boldsymbol{x(x+5)\left(x^2+5x-2\right)}$

◀ 共通する部分が現れるように，組み合わせを工夫する．

(　)(　)(　)(　)

◀ $x^2+5x=A$ とおくと，

$(A-6)(A+4)+24$

$=A^2-2A$

$=A(A-2)$

解答 I1.1.14 ★★ 問題 p.20

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$　　(2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(1)　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$= \left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}(b+c)+abc$

$= (b+c)a^2+\left\{(b+c)^2+bc\right\}a+(b+c)bc$

◀ a について整理する．

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & b+c & \longrightarrow & (b+c)^2 \\ b+c & & bc & \longrightarrow & bc \\ \hline & & & & (b+c)^2+bc \end{array}$$

$= \{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

◀ たすき掛けを用いて因数分解する．

$= \boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

(2)　$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=a^2b-ab^2+bc(b-c)+ac^2-a^2c$

$=(b-c)a^2-\left(b^2-c^2\right)a+bc(b-c)$

◀ a について整理する．

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\left\{a^2-(b+c)a+bc\right\}$

◀ $b-c$ をくくり出す．

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

◀ このままでも正答であるが，輪環の順に整理するとよい．

$= \boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

解答 I1.1.15 ★★★ 問題 p.21

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $p^3+q^3+3pq-1$　　(2) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

(1)　$p^3+q^3+(-1)^3+3pq$

$=p^3+q^3+(-1)^3-3p\cdot q\cdot(-1)$

$=\{p+q+(-1)\}\{p^2+q^2+(-1)^2-p\cdot q-q\cdot(-1)-(-1)\cdot p\}$

$=\boldsymbol{(p+q-1)(p^2+q^2-pq+p+q+1)}$

(2) $x-y=a,\ y-z=b,\ z-x=c$ とおく．

$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$ より，

$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

$= a^3+b^3+c^3$

$= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc$

◀ $a+b+c=0$

$= 3abc$

$= \boldsymbol{3(x-y)(y-z)(z-x)}$

解答 I1.1.16 ★★★ 問題 p.22

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) x^4-11x^2+18 (2) x^4+4x^2+16 (3) $x^4-8x^2y^2+4y^4$

(1) $x^4-11x^2+18=(x^2-9)(x^2-2)=\boldsymbol{(x+3)(x-3)(x^2-2)}$

◀ $x^2=A$ とおくと，

$A^2-11A+18=(A-9)(A-2)$

(2)
$$\begin{aligned} x^4+4x^2+16 &= (x^4+8x^2+16)-4x^2 \\ &= (x^2+4)^2-(2x)^2 \\ &= \{(x^2+4)+2x\}\{(x^2+4)-2x\} \\ &= \boldsymbol{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)} \end{aligned}$$

◀ x^4 と定数項 16 より，$(x^2+4)^2$ または$(x^2-4)^2$ を作ることを考える．

(3)
$$\begin{aligned} x^4-8x^2y^2+4y^4 &= (x^4-4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2 \\ &= (x^2-2y^2)^2-4x^2y^2 \\ &= \{(x^2-2y^2)+2xy\}\{(x^2-2y^2)-2xy\} \\ &= \boldsymbol{(x^2+2xy-2y^2)(x^2-2xy-2y^2)} \end{aligned}$$

◀ x^4 と $4y^4$ より，$(x^2+2y^2)^2$ または$(x^2-2y^2)^2$ を作ることを考える．

解答（節末）I1.1.1 ★　節末 p.23

問題文

ある多項式に $5x^2-3x+1$ を加えるところを誤って引いたので，答えが $-3x^2+12x-5$ になった．正しい答えを求めよ．

多項式を P とおくと，$P-\left(5x^2-3x+1\right)=-3x^2+12x-5$

したがって，$P=-3x^2+12x-5+\left(5x^2-3x+1\right)=2x^2+9x-4$

◀ 先に P を求める．

よって，正しい答えは，

$$\begin{aligned}P+\left(5x^2-3x+1\right)&=2x^2+9x-4+5x^2-3x+1\\&=\boldsymbol{7x^2+6x-3}\end{aligned}$$

解答（節末）I1.1.2 ★★　節末 p.24

問題文

$\left(x^3-4x^2+2x+3\right)\left(x^3+x^2-x+2\right)$ の展開式において，x^5 と x^3 の係数を求めよ．

x^5 の項を計算すると，$x^3\cdot x^2+(-4x^2)\cdot x^3=(1-4)x^5=-3x^5$

◀ 直接すべての項を展開してもよいが，計算に手間が掛かる．そこで，掛けて x^5，x^3 になるものだけを取り出して考える．

よって，x^5 の係数は $\boldsymbol{-3}$

x^3 の項を計算すると，

$$x^3\cdot 2+(-4x^2)\cdot(-x)+(2x)\cdot x^2+3\cdot x^3=11x^3$$

よって，x^3 の係数は $\boldsymbol{11}$

解答（節末）I1.1.3 ★★　節末 p.25

問題文

次の式を展開せよ．

(1) $\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+x-1\right)$　(2) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

(1)
$$\begin{aligned}&\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+x-1\right)\\&=\left\{\left(x^3+x\right)+\left(x^2+1\right)\right\}\left\{\left(x^3+x\right)-\left(x^2+1\right)\right\}\\&=\left(x^3+x\right)^2-\left(x^2+1\right)^2\\&=\left(x^6+2x^4+x^2\right)-\left(x^4+2x^2+1\right)\\&=x^6+2x^4+x^2-x^4-2x^2-1\\&=\boldsymbol{x^6+x^4-x^2-1}\end{aligned}$$

◀ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(2)
$$\begin{aligned}&(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\\&=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\times\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\\&=\left\{(b+c)^2-a^2\right\}\left\{a^2-(b-c)^2\right\}\\&=-a^4+\left\{(b+c)^2+(b-c)^2\right\}a^2-(b+c)^2(b-c)^2\\&=-a^4+2\left(b^2+c^2\right)a^2-\left(b^2-c^2\right)^2\\&=-a^4+2a^2b^2+2c^2a^2-b^4+2b^2c^2-c^4\\&=\boldsymbol{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}\end{aligned}$$

◀ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

◀ 輪環の順に整理するとよい．

解答 1.1

One math

解答（節末）I1.1.4 ★★ 節末 p.26

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $x^2y+2xy^2+x^2+4y^2+3xy+x+2y-2$　(2) $(x+y)^4-(x-y)^4$

(3) $(x+y)^3+z^3$　(4) x^6-1

(5) a^6-7a^3-8　(6) $\left(x^2+6x+3\right)\left(x^2+6x+7\right)+4$

(1)
$$
\begin{aligned}
&x^2y+2xy^2+x^2+4y^2+3xy+x+2y-2\\
=&(y+1)x^2+\left(2y^2+3y+1\right)x+4y^2+2y-2\\
=&(y+1)x^2+(y+1)(2y+1)x+2(y+1)(2y-1)\\
=&(y+1)\left\{x^2+(2y+1)x+2(2y-1)\right\}\\
=&(y+1)(x+2)\{x+(2y-1)\}\\
=&\boldsymbol{(x+2)(y+1)(x+2y-1)}
\end{aligned}
$$

◀ 先に，(i) のように 2 をくくり出して，$2y^2+y-1$ をたすき掛けを用いて因数分解する．次に，(ii) のように波括弧内の全体を x の 2 次式と考えて，たすき掛けを用いて因数分解する．

(i)
$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 1 & \longrightarrow & 2\\
2 & & -1 & \longrightarrow & -1\\
\hline
 & & & & 1
\end{array}
$$

(ii)
$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 2 & \longrightarrow & 2\\
1 & & 2y-1 & \longrightarrow & 2y-1\\
\hline
 & & & & 2y+1
\end{array}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&(x+y)^4-(x-y)^4\\
&=\left\{(x+y)^2+(x-y)^2\right\}\left\{(x+y)^2-(x-y)^2\right\}\\
&=\left(x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2\right)\\
&\quad\times\{(x+y)+(x-y)\}\{(x+y)-(x-y)\}\\
&=\left(2x^2+2y^2\right)(2x)(2y)=\boldsymbol{8xy\left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned}
$$

◀ $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

(3)
$$
\begin{aligned}
(x+y)^3+z^3&=\{(x+y)+z\}\left\{(x+y)^2-(x+y)\cdot z+z^2\right\}\\
&=\boldsymbol{(x+y+z)\left(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2\right)}
\end{aligned}
$$

◀ $x+y=A$ とおくと，
A^3+z^3
$=(A+z)(A^2-Az+z^2)$

(4)
$$
\begin{aligned}
x^6-1&=\left(x^3\right)^2-1^2\\
&=\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)\\
&=\boldsymbol{(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x+1)\left(x^2-x+1\right)}
\end{aligned}
$$

◀ $x^3=A$ とおくと，
$A^2-1=(A+1)(A-1)$

なお，$x^2=A$ とおいて，3 次の乗法公式を用いてもよい．

(5)
$$
\begin{aligned}
&a^6-7a^3-8\\
=&\left(a^3+1\right)\left(a^3-8\right)\\
=&(a+1)\left(a^2-a+1\right)(a-2)\left(a^2+2a+4\right)\\
=&\boldsymbol{(a+1)(a-2)\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+2a+4\right)}
\end{aligned}
$$

◀ $a^3=A$ とおくと，
A^2-7A-8
$=(A+1)(A-8)$

(6)
$$
\begin{aligned}
&\left(x^2+6x+3\right)\left(x^2+6x+7\right)+4\\
&=\left\{\left(x^2+6x\right)+3\right\}\left\{\left(x^2+6x\right)+7\right\}+4\\
&=\left(x^2+6x\right)^2+10\left(x^2+6x\right)+25=\left(x^2+6x+5\right)^2\\
&=\{(x+1)(x+5)\}^2=\boldsymbol{(x+1)^2(x+5)^2}
\end{aligned}
$$

解答（節末）I1.1.5 ★★★ 節末 p.27

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$　(2) $4x^4+7x^2y^2+16y^4$

(1) $(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$

$=(x-z)^3+(y-z)^3+(-x-y+2z)^3$

$x-z=a$，$y-z=b$，$-x-y+2z=c$ とおくと，$a+b+c=0$ より，

$$\begin{aligned}&(x-z)^3+(y-z)^3+(-x-y+2z)^3=a^3+b^3+c^3\\&=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc\\&=3abc\\&=3(x-z)(y-z)(-x-y+2z)\\&=\boldsymbol{3(y-z)(z-x)(x+y-2z)}\end{aligned}$$

◀ $-(x+y-2z)^3$
$=(-x-y+2z)^3$

◀ $a+b+c=0$

(2) $$\begin{aligned}4x^4+7x^2y^2+16y^4&=\left(4x^4+16x^2y^2+16y^4\right)-9x^2y^2\\&=4\left(x^4+4x^2y^2+4y^4\right)-(3xy)^2\\&=4\left(x^2+2y^2\right)^2-(3xy)^2\\&=\left\{2\left(x^2+2y^2\right)+3xy\right\}\left\{2\left(x^2+2y^2\right)-3xy\right\}\\&=\boldsymbol{\left(2x^2+3xy+4y^2\right)\left(2x^2-3xy+4y^2\right)}\end{aligned}$$

◀ $4x^4$ と $16y^4$ より，$(2x^2+2y^2)^2$ または $(2x^2-2y^2)$ を作ることを考える．

実数（解答）

解答 I1.2.1 ★ 問題 p.28

問題文

(1) 次の分数を小数の形に直し，循環小数の表し方で書け．

(i) $\frac{2}{7}$　　(ii) $\frac{5}{12}$　　(iii) $\frac{7}{15}$

(2) 次の循環小数を分数の形で表せ．

(i) $0.\dot{4}$　　(ii) $0.\dot{3}\dot{6}$

(1)

(i) $\dfrac{2}{7} = 0.285714285714\ldots = \mathbf{0.\dot{2}8571\dot{4}}$

(ii) $\dfrac{5}{12} = 0.41666\ldots = \mathbf{0.41\dot{6}}$

(iii) $\dfrac{7}{15} = 0.46666\ldots = \mathbf{0.4\dot{6}}$

(2)

(i) $x = 0.\dot{4}$ とおく．右のように計算して，

$$9x = 4$$

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 4.44\ldots \\ - & x = & 0.44\ldots \\ \hline & 9x = & 4 \end{array}$$

よって，$x = \mathbf{\frac{4}{9}}$

◀ 循環する部分が 1 桁であるので，両辺を 10^1 $(= 10)$ 倍する．

(ii) $x = 0.\dot{3}\dot{6}$ とおく．右のように計算して，

$$99x = 36$$

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 36.363\ldots \\ - & x = & 0.363\ldots \\ \hline & 99x = & 36 \end{array}$$

よって，$x = \frac{36}{99} = \mathbf{\frac{4}{11}}$

◀ 循環する部分が 2 桁であるので，両辺を 10^2 $(= 100)$ 倍する．

解答 I1.2.2 ★ 問題 p.29

問題文

次の式を計算せよ．

(1) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{27}$　　(2) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

(3) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$　　(4) $(\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{3})$

(1) $$3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{27} = 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - 2\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{3^3}$$
$$= 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = \mathbf{3\sqrt{3}}$$

◀ 素因数分解し，根号内を小さい数にする．

(2) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2 = 6 - 2 = \mathbf{4}$

◀ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(3) $$(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$
$$- \{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2\}$$
$$= 7 + 2\sqrt{14} + 2 - (7 - 2\sqrt{14} + 2) = \mathbf{4\sqrt{14}}$$

◀ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $(a > 0,\ b > 0)$

(4) $$(\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2$$
$$= 5 + 2\sqrt{35} + 7 - 3 = \mathbf{9 + 2\sqrt{35}}$$

◀ $(\sqrt{5} + \sqrt{7}) = A$ とおくと，$(A + \sqrt{3})(A - \sqrt{3}) = A^2 - 3$

解答 I1.2.3 ★★　問題 p.30

問題文

次の式の分母を有理化して簡単にせよ．

(1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$　　(2) $\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

(3) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$　　(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

◀ 分母，分子に $\sqrt{3}$ を掛ける．

【別解】 $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}}$

◀ $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2=4$

(3)
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}&=\frac{\sqrt{10}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}-\frac{2(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}\\
&=\frac{\sqrt{50}+2\sqrt{10}}{5-4}-\frac{2(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{11-10}\\
&=5\sqrt{2}+2\sqrt{10}-2(\sqrt{11}+\sqrt{10})\\
&=\boldsymbol{5\sqrt{2}-2\sqrt{11}}
\end{aligned}$$

◀ 第 1 項と第 2 項の分母，分子にそれぞれ，$\sqrt{5}+2$，$\sqrt{11}+\sqrt{10}$ を掛ける．

(4)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}&=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}\\
&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}\\
&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\\
&=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}\\
&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}
\end{aligned}$$

◀ $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$ より，$(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$ と項を分けて，$(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}$ を掛ける．

◀ 更に分母を有理化する．

解答 I1.2.4 ★★ 問題 p.31

問題文

次の 2 重根号を簡単な形にせよ．

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$　(2) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$

(3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}$　(4) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}$

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\times 3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

◀ $\sqrt{3}-2$ は誤りであるので注意すること．

(2) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{(9+3)+2\sqrt{9\times 3}}=\mathbf{3+\sqrt{3}}$

◀ $6\sqrt{3}=2\times 3\sqrt{3}$
$=3\sqrt{3^2\cdot 3}=3\sqrt{27}$

(3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}=\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{(7+3)-2\sqrt{7\times 3}}=\mathbf{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

◀ $\sqrt{84}=\sqrt{2^2\cdot 21}=2\sqrt{21}$

(4)
$$\sqrt{8+3\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{16+2\sqrt{63}}{2}}=\frac{\sqrt{(9+7)+2\sqrt{9\times 7}}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{9}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}}$$

◀ $\frac{\sqrt{8+3\sqrt{7}}}{1}$ の分母，分子に $\sqrt{2}$ を掛ける．

解答 I1.2.5 ★★★ 問題 p.32

問題文

$x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $x+y$　(2) xy　(3) x^2+y^2　(4) x^3+y^3　(5) x^4+y^4

(1)
$$x+y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(5-2\sqrt{15}+3)+(5+2\sqrt{15}+3)}{5-3}=\mathbf{8}$$

◀ $x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4-\sqrt{15}$，$y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=4+\sqrt{15}$ のように，x，y のそれぞれの分母を有理化してから，$x+y$，xy の値を計算してもよい．

(2) $xy=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\mathbf{1}$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot 1=64-2=\mathbf{62}$

◀ (1)，(2) で求めた $x+y=8$，$xy=1$ を利用する．

(4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8^3-3\cdot 1\cdot 8=512-24=\mathbf{488}$

【別解】 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=8\cdot(62-1)=\mathbf{488}$

◀ a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(5) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=62^2-2\cdot 1^2=3844-2=\mathbf{3842}$

◀ $(x^2+y^2)^2$
$=x^4+2x^2y^2+y^4$

解答 1.2

解答 I1.2.6 ★★ 問題 p.33

問題文

$x-\frac{1}{x}=3$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$　(2) $x+\frac{1}{x}$　(3) $x^3+\frac{1}{x^3}$　(4) $x^6+\frac{1}{x^6}$

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}=3^2+2=\mathbf{11}$

◀ $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

【別解】 $x-\dfrac{1}{x}=3$ の両辺を 2 乗すると，$x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=9$

よって，$x^2+\frac{1}{x^2}=\mathbf{11}$

(2) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=11+2=13$

よって，$x+\frac{1}{x}=\pm\boldsymbol{\sqrt{13}}$

◀ (1) の結果より，

$$x^2+\frac{1}{x^2}=11$$

(3)
$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\\&=\pm\sqrt{13}(11-1)=\pm\mathbf{10}\boldsymbol{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

◀ x^3+y^3
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

◀ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ を用いて求めてもよい．

(4)
$$\begin{aligned}x^6+\frac{1}{x^6}&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3-3x^2\cdot\frac{1}{x^2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\\&=11^3-3\cdot11=\mathbf{1298}\end{aligned}$$

◀ x^3+y^3
$=(x+y)^3-3xy(x+y)$

【別解】 $x^6+\dfrac{1}{x^6}=\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)^2-2=(\pm10\sqrt{13})^2-2=1300-2=\mathbf{1298}$

◀ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

解答 I1.2.7 ★★★ 問題 p.34

問題文

$x+y+z=3$，$xy+yz+zx=1$，$xyz=-2$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の式の値を求めよ．

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$　(2) $x^2+y^2+z^2$　(3) $x^3+y^3+z^3$

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz}{x\cdot yz}+\frac{zx}{y\cdot zx}+\frac{xy}{z\cdot xy}=\frac{yz+zx+xy}{xyz}=\frac{1}{-2}=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2)
$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\&=3^2-2\cdot1\\&=9-2=\mathbf{7}\end{aligned}$$

◀ $(x+y+z)^2$
$=x^2+y^2+z^2$
$\quad+2(xy+yz+zx)$

(3)
$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3&=(x^3+y^3+z^3-3xyz)+3xyz\\&=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)+3xyz\\&=3\cdot(7-1)+3\cdot(-2)=\mathbf{12}\end{aligned}$$

解答 I1.2.8 ★★★ 問題 p.35

問題文

$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $2\alpha^2-2\alpha-1$　　(2) α^8

(1) $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ より，$2\alpha-1=\sqrt{3}$

両辺を 2 乗すると，$(2\alpha-1)^2=(\sqrt{3})^2$

したがって，$4\alpha^2-4\alpha-2=0$

よって，$\boldsymbol{2\alpha^2-2\alpha-1=0}$

(2) (1) より，$\alpha^2=\alpha+\frac{1}{2}$

$\alpha^8=\left(\alpha^4\right)^2$ であるから，

$$\alpha^4=(\alpha^2)^2=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2=\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+\alpha+\frac{1}{4}=2\alpha+\frac{3}{4}$$

したがって，

$$\alpha^8=\left(\alpha^4\right)^2=\left(2\alpha+\frac{3}{4}\right)^2=4\alpha^2+3\alpha+\frac{9}{16}=4\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+3\alpha+\frac{9}{16}=7\alpha+\frac{41}{16}$$

よって，

$$\alpha^8=7\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{41}{16}=\frac{56(1+\sqrt{3})+41}{16}=\boldsymbol{\frac{97+56\sqrt{3}}{16}}$$

◀ 右辺を根号のみの形にする．

◀ $\alpha^2=\alpha+\frac{1}{2}$ を用いて，次数を下げる．なお，解答では α^8 に $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ を代入しているが，α^4 に $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ を代入して，その結果を 2 乗することで α^8 を求めてもよい．

解答 I1.2.9 ★★★ 問題 p.36

問題文

$\frac{3}{4-\sqrt{7}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．

(1) a，b の値を求めよ．　　(2) $a+\frac{1}{b}$ の値を求めよ．

(1) $\dfrac{3}{4-\sqrt{7}}=\dfrac{3(4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$

$2<\sqrt{7}<3$ であるから，$6<4+\sqrt{7}<7$

したがって，$\frac{6}{3}<\frac{4+\sqrt{7}}{3}<\frac{7}{3}$

ゆえに，$a=\mathbf{2}$

よって，

$$b=\frac{4+\sqrt{7}}{3}-a=\frac{4+\sqrt{7}}{3}-2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}-2}{3}}$$

(2) (1) より，

$$a+\frac{1}{b}=2+1\div\left(\frac{\sqrt{7}-2}{3}\right)=2+\frac{3}{\sqrt{7}-2}=2+\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\boldsymbol{4+\sqrt{7}}$$

◀ 分母を有理化する．

◀ $2^2<7<3^2$ より，$2<\sqrt{7}<3$

◀ $\frac{6}{3}=2\ldots$，$\frac{7}{3}=2.333\ldots$

◀ 小数部分は，

(もとの数) − (整数部分)

で求められる．

解答
1.2

One math

解答（節末）I1.2.1 ★ 節末 p.37

問題文

循環小数の積 $0.\dot{1}\dot{5} \times 0.\dot{5}\dot{4}$ を，1 つの既約分数で表せ．

$x = 0.\dot{1}\dot{5}$ とおくと，$100x = 15.1515\ldots$
したがって，$100x - x = 15$
これより，$x = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$
また，$y = 0.\dot{5}\dot{4}\ldots$ とおくと $100y = 54.5454\ldots$
したがって，$100y - y = 54$
これより，$y = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$
よって，

$$0.\dot{1}\dot{5} \times 0.\dot{5}\dot{4} = xy = \frac{5}{33} \cdot \frac{6}{11} = \frac{30}{363} = \mathbf{\frac{10}{121}}$$

◀ $0.\dot{1}\dot{5}$ を既約分数で表す．

◀ $0.\dot{5}\dot{4}$ を既約分数で表す．

解答（節末）I1.2.2 ★★ 節末 p.38

問題文

$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{6}$ のとき，$\sqrt{16x^2 - 24x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{36x^2 - 60x + 25}$ を簡単にせよ．

$$\begin{aligned} &\sqrt{16x^2 - 24x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{36x^2 - 60x + 25} \\ =&\sqrt{(4x-3)^2} - \sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(6x-5)^2} \end{aligned}$$

$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{6}$ のとき，$4x - 3 > 0$，$x + 3 > 0$，$6x - 5 < 0$ であるから，

$$\begin{aligned} &\sqrt{16x^2 - 24x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{36x^2 - 60x + 25} \\ =&(4x-3) - (x+3) + \{-(6x-5)\} \\ =&\mathbf{-3x - 1} \end{aligned}$$

◀ $\sqrt{a^2} = |a|$ を利用する．

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

解答（節末）I1.2.3 ★★ 節末 p.39

問題文

次の式を計算せよ．

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

与えられた式の各項を有理化すると，

$$S = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

となり，途中の項が打ち消し合うから，

$$S = -\sqrt{1} + \sqrt{100}$$

よって，

$$S = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = \mathbf{9}$$

◀ 例えば $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}$ は，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \\ =&\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})} \\ =&\sqrt{2}-\sqrt{1} \end{aligned}$$

となる．他の項も同様に分母の有理化を行う．

解答（節末）I1.2.4 ★★ 節末 p.40

問題文

次の式の分母を有理化して計算せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}\\
=&\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}\\
&+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}\\
=&\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}\\
=&\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\\
=&\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{6}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}}
\end{aligned}$$

◀ $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$ であることに着目して，第 1 項と第 2 項の分母を有理化する．

【別解】

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}\\
&=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{-6-2\sqrt{15}}\\
&=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}+3}=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{15}-3)}{(\sqrt{15}+3)(\sqrt{15}-3)}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}}
\end{aligned}$$

◀ 第 1 項と第 2 項の分母を通分する．

◀ 分母，分子に $\sqrt{15}-3$ を掛けて，分母を有理化する．

解答 1.2

解答（節末）I1.2.5 ★★ 節末 p.41

問題文

次の式を簡単な形にせよ．

$$\sqrt{4+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times1}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1$$

◀ 先に，$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ を簡単な形にする．和が 4，積が 3 になる 2 つの数は，3 と 1 である．

よって，

$$\begin{aligned}
\sqrt{4+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}&=\sqrt{4+4(\sqrt{3}+1)}\\
&=\sqrt{4+4\sqrt{3}+4}\\
&=\sqrt{8+4\sqrt{3}}\\
&=\sqrt{(6+2)+2\sqrt{6\times2}}\\
&=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}\\
&=\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

◀ $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$ を簡単な形にする．$4\sqrt{3}=2\sqrt{12}$ であり，和が 8，積が 12 になる 2 つの数は，6 と 2 である．

解答（節末）I1.2.6 ★★★ 節末 p.42

問題文

実数 a, b, c が $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=14$, $abc=-2$ を満たすとき,$(a+b)(b+c)(c+a)$ の値を求めよ.

$a+b+c=3\cdots$(i) より,

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=(3-c)(3-a)(3-b)\\&=27-9a-9b-9c+3ab+3bc+3ca-abc\\&=27-9(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc\cdots\text{(ii)}\end{aligned}$$

◀ (i) を移項して, $a+b=3-c$, $b+c=3-a$, $c+a=3-b$

また, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ より,

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\\&=\frac{3^2-14}{2}=\frac{9-14}{2}=-\frac{5}{2}\cdots\text{(iii)}\end{aligned}$$

よって, $abc=-2$, (i), (iii) を (ii) に代入すると,

$$(a+b)(b+c)(c+a)=27-9\cdot3+3\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-(-2)=\boldsymbol{-\frac{11}{2}}$$

解答（節末）I1.2.7 ★★★ 節末 p.43

問題文

$\frac{1}{4-\sqrt{11}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とし, $10b$ の整数部分を c, 小数部分を d とするとき, 次の値を求めよ.

(1) a　　(2) $10b$　　(3) c　　(4) d

(1)

$$\frac{1}{4-\sqrt{11}}=\frac{4+\sqrt{11}}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}=\frac{4+\sqrt{11}}{5}$$

◀ 分母を有理化する.

$3<\sqrt{11}<4$ であるから, $7<4+\sqrt{11}<8$

◀ $3^2<11<4^2$ より, $3<\sqrt{11}<4$

したがって, $\frac{7}{5}<\frac{4+\sqrt{11}}{5}<\frac{8}{5}$

◀ $\frac{7}{5}=1.4$, $\frac{8}{5}=1.6$

よって, $a=\mathbf{1}$

(2) $a+b=\frac{4+\sqrt{11}}{5}$ であるから,

$$b=\frac{4+\sqrt{11}}{5}-a=\frac{4+\sqrt{11}}{5}-1=\frac{-1+\sqrt{11}}{5}$$

◀ 小数部分は,

(もとの数) − (整数部分)

で求められる.

よって, $10b=10\cdot\frac{-1+\sqrt{11}}{5}=2(-1+\sqrt{11})=\boldsymbol{-2+2\sqrt{11}}$

(3) (2) より, $10b=-2+2\sqrt{11}=2\sqrt{11}-2$

ここで, $6<2\sqrt{11}<7$ であるから, $4<2\sqrt{11}-2<5$

◀ $6^2<(2\sqrt{11})^2<7^2$ より, $6<2\sqrt{11}<7$

よって, $c=\mathbf{4}$

(4) $10b=c+d$ より, $c+d=2\sqrt{11}-2$

よって, $d=(2\sqrt{11}-2)-c=(2\sqrt{11}-2)-4=\boldsymbol{2\sqrt{11}-6}$

◀ (もとの数)

=(整数部分) + (小数部分)

1 次不等式（解答）

解答 I1.3.1 ★★　問題 p.44

> 問題文
> $-3 < x < 2$，$-1 < y < 4$ のとき，次の式のとりうる値の範囲を求めよ．
>
> (1) $x+2$　　(2) $3x$　　(3) $x+y$　　(4) $x-y$　　(5) $3x-2y$

(1) $-3 < x < 2$ の各辺に 2 を加えると，$\boldsymbol{-1 < x+2 < 4}$

◀ $a < b \Rightarrow a+c < b+c$

(2) $-3 < x < 2$ の各辺に 3 を掛けると，$\boldsymbol{-9 < 3x < 6}$

◀ $c > 0$，$a < b \Rightarrow ac < bc$

(3) $-3 < x < 2$ の各辺に y を加えると，$-3+y < x+y < 2+y$

◀ $-3 < x < 2$，$-1 < y < 4$ の各辺を足し合わせて，$-4 < x+y < 6$ としてもよい．

$-1 < y$ より，$-3+(-1) < -3+y$

また，$y < 4$ より，$2+y < 2+4$

したがって，$-4 < x+y$，$x+y < 6$

よって，$\boldsymbol{-4 < x+y < 6}$

(4) $-1 < y < 4$ の各辺に -1 を掛けると，$1 > -y > -4$

◀ 不等式の両辺に負の数を掛けるときは，不等号の向きが変わる．

すなわち，$-4 < -y < 1$

したがって，$-3 < x < 2$，$-4 < -y < 1$ より，$-3+(-4) < x+(-y) < 2+1$

よって，$\boldsymbol{-7 < x-y < 3}$

(5) (2) より，$-9 < 3x < 6$

$-1 < y < 4$ の各辺に -2 を掛けると，$2 > -2y > -8$

◀ 不等号の向きが変わる．

すなわち，$-8 < -2y < 2$

したがって，$-9 < 3x < 6$，$-8 < -2y < 2$ より，$-9+(-8) < 3x+(-2y) < 6+2$

よって，$\boldsymbol{-17 < 3x-2y < 8}$

解答 I1.3.2 ★　問題 p.45

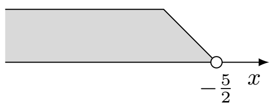
> 問題文
> 次の 1 次不等式を解け．
>
> (1) $5x+1 < 3x-4$　　(2) $4(2x-3) > 3(x+2)$　　(3) $\frac{2x+3}{4} - \frac{x-1}{6} \geqq \frac{1}{3}$

(1) 移項すると，$5x-3x < -4-1$

◀ 移項すると符号が変わる．

整理すると，$2x < -5$

よって，$\boldsymbol{x < -\frac{5}{2}}$

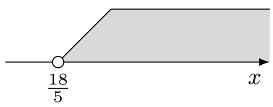


(2) 展開すると，$8x-12 > 3x+6$

移項すると，$8x-3x > 6+12$

整理すると，$5x > 18$

よって，$\boldsymbol{x > \frac{18}{5}}$



(3) 両辺に 12 を掛けると，$3(2x+3)-2(x-1) \geqq 4$

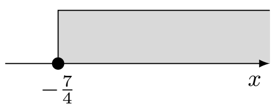
◀ 不等式の両辺に，4，6，3 の最小公倍数 12 を掛ける．

展開すると，$6x+9-2x+2 \geqq 4$

整理すると，$4x+11 \geqq 4$

移項すると，$4x \geqq -7$

よって，$\boldsymbol{x \geqq -\frac{7}{4}}$



解答 I1.3.3 ★ 問題 p.46

問題文

次の不等式，連立 1 次不等式を解け．

(1) $\begin{cases} 4x-1>2x+3 \\ 2x+5 \leqq 3(x-1) \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+4 \leqq 3-x \\ x-2<0 \end{cases}$

(3) $2x+1 \leqq 3x-4 < -4x-7$

(1) $4x-1>2x+3$ より，$2x>4$

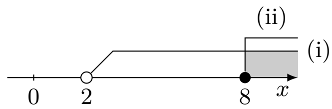
したがって，$x>2 \cdots$ (i)

また，$2x+5 \leqq 3(x-1)$ より，$2x+5 \leqq 3x-3$

移項すると，$-x \leqq -8$

したがって，$x \geqq 8 \cdots$ (ii)

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，$\boldsymbol{x \geqq 8}$



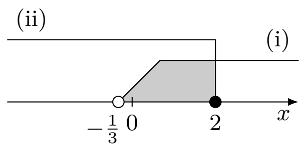
(2) $2x+4 \geqq 3-x$ より，$3x \geqq -1$

したがって，$x \geqq -\frac{1}{3} \cdots$ (i)

また，$x-2<0$ より，$x<2 \cdots$ (ii)

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，

$$\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leqq x < 2}$$



(3) $2x+1 \leqq 3x-4 < -4x-7$ より，$\begin{cases} 2x+1 \leqq 3x-4 \\ 3x-4 < -4x-7 \end{cases}$

$2x+1 \leqq 3x-4$ より，$-x \leqq -5$

したがって，$x \geqq 5 \cdots$ (i)

また，$3x-4<-4x-7$ より，$7x<-3$

したがって，$x<-\frac{3}{7} \cdots$ (ii)

(i) と (ii) の共通範囲はない．

よって，**解なし**

◀ 共通範囲がないので解なしと答える．

解答 I1.3.4 ★★ 問題 p.47

問題文

(1) 不等式 $3x-1<2x+5$ を満たす自然数 x の値をすべて求めよ．

(2) 次の連立不等式を満たす整数 x がちょうど 2 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

$$\begin{cases} 3x+a<4x \\ 3x>4x-7 \end{cases}$$

(1) 与えられた不等式より，$x<6$

◀ 6 は含まない．

したがって，x は自然数であるから，$\boldsymbol{x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}$

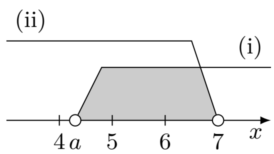
(2) $3x+a<4x$ を解くと，$-x<-a$ より，$x>a$ $\cdots$(i)

$3x>4x-7$ を解くと，$-x>-7$ より，$x<7$ $\cdots$(ii)

◀ $A<B<C$ より，$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$

(i)，(ii) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 2 個となるのは右の図のような場合である．

よって，$\boldsymbol{4 \leqq a < 5}$



◀ 数直線を用いるとよい．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

解答 I1.3.5 ★★ 問題 p.48

問題文

(1) 1 個 100 円のペンと 1 個 180 円のノートを合わせて 20 個買い，200 円のケースに入れて息子に渡したい．文具代とケース代の合計金額を 3500 円以下にするとき，ノートは最大で何個まで買うことができるか．

(2) 連続する 4 つの整数の和が 90 以上になるもののうち，その和が最小となる 4 つの数を求めよ．

(1) ノートを x 個買うとすると，ペンは $(20-x)$ 個買うことになる．このとき，文具代とケース代の合計金額は，$100(20-x)+180x+200$ （円）

◀ 求めるものを x とおく．

これが 3500 円以下であるから，$100(20-x)+180x+200 \leqq 3500$

整理すると，$80x \leqq 1300$

したがって，$x \leqq \frac{1300}{80} = 16.25$

◀ x は整数であるので注意すること．

これを満たす最大の整数 x は $x=16$ である．

よって，ノートは **16 個**まで買うことができる．

(2) 連続する 4 つの整数は，一番小さい数を x とおくと，x，$x+1$，$x+2$，$x+3$ と表すことができる．このとき，

$$\begin{aligned} x+(x+1)+(x+2)+(x+3) &\geqq 90 \\ 4x+6 &\geqq 90 \\ x &\geqq \frac{84}{4} = 21 \end{aligned}$$

したがって，連続する 4 つの整数の和が 90 以上になる最小の整数 x は 21 である．

よって，求める 4 つの数は，**21，22，23，24**

解答 I1.3.6 ★★★ 問題 p.49

問題文

a を定数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) x の不等式 $ax+2>0$ を解け．　(2) x の不等式 $(a-1)x \leqq a^2-a$ を解け．

(1) $ax+2>0$ より，$ax>-2$

(i) $a>0$ のとき，$x>-\frac{2}{a}$

(ii) $a=0$ のとき，不等式は $0 \cdot x>-2$

したがって，解はすべての実数

(iii) $a<0$ のとき，不等式は $x<-\frac{2}{a}$

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>0} & \textbf{のとき，} & \boldsymbol{x>-\frac{2}{a}} \\ \boldsymbol{a=0} & \textbf{のとき，} & \textbf{すべての実数} \\ \boldsymbol{a<0} & \textbf{のとき，} & \boldsymbol{x<-\frac{2}{a}} \end{cases}$$

◀ x がどのような値でも，$0>-2$ が成り立つので，すべての実数 x について成り立つ．

◀ $a<0$ より，負の数 a で割るので，不等号の向きが変わる．

(2) $(a-1)x \leqq a^2-a$ より，$(a-1)x \leqq a(a-1)$

(i) $a-1>0$ すなわち，$a>1$ のとき，$x \leqq a$

(ii) $a-1=0$ すなわち，$a=1$ のとき，$0 \cdot x \leqq 0$

これを満たす x の値はすべての実数．したがって，解は**すべての実数**

(iii) $a-1<0$ すなわち，$a<1$ のとき，$x \geqq a$

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>1} & \textbf{のとき，} & \boldsymbol{x \leqq a} \\ \boldsymbol{a=1} & \textbf{のとき，} & \textbf{すべての実数} \\ \boldsymbol{a<1} & \textbf{のとき，} & \boldsymbol{x \geqq a} \end{cases}$$

◀ $0 \leqq 0$ はすべての x で成り立つ．

◀ $a<1$ より，負の数 $a-1$ で割るので，不等号の向きが変わる．

解答 1.3

解答 I1.3.7 ★★ 問題 p.50

問題文

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x+2|=3$　(2) $|x-5| \leqq 4$　(3) $|x+1|>2$

(1) $|x+2|=3$ より，$x+2=\pm 3$

よって，$\boldsymbol{x=1,\ -5}$

(2) $|x-5| \leqq 4$ より，$-4 \leqq x-5 \leqq 4$

よって，$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 9}$

(3) $|x+1|>2$ より，$x+1<-2$，$2<x+1$

よって，$\boldsymbol{x<-3,\ x>1}$

◀ $x+2=X$ とおくと，$|X|=3$
よって，$X=\pm 3$

◀ $x-5=X$ とおくと，$|X| \leqq 4$
よって，$-4 \leqq X \leqq 4$

◀ $x+1=X$ とおくと，$|X|>2$
よって，$X<-2$，$2<X$

解答 I1.3.8 ★★★ 問題 p.51

問題文

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x+2|=3x$　　(2) $|x+2|-|x-1|\geqq x$

(1) (i) $x+2\geqq 0$，すなわち，$x\geqq -2$ のとき

$x+2=3x$ より，$2x=2$

したがって，$x=1$

これは，$x\geqq -2$ を満たす．

(ii) $x+2<0$，すなわち，$x<-2$ のとき

$-(x+2)=3x$ より，$-x-2=3x$

したがって，$-4x=2$ より，$x=-\frac{1}{2}$

これは，$x<-2$ を満たさない．

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{x=1}$

◀ $x+2=X$ とおくと，

$$|X|=\begin{cases} X & (X\geqq 0) \\ -X & (X<0) \end{cases}$$

であるので，X が 0 以上のときと負のときで場合分けをする．

◀ 求めた x の値が x の条件を満たす否かを調べる．

(2) (i) $x\geqq 1$ のとき

$x+2-(x-1)\geqq x$ より，$x\leqq 3$

したがって，$x\geqq 1$ より，$1\leqq x\leqq 3$

(ii) $-2\leqq x<1$ のとき

$(x+2)+(x-1)\geqq x$ より，$x\geqq -1$

したがって，$-2\leqq x<1$ より，$-1\leqq x<1$

(iii) $x<-2$ のとき

$-(x+2)+(x-1)\geqq x$ より，$x\leqq -3$

したがって，$x<-2$ より，$x\leqq -3$

よって，(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{x\leqq -3}$ **または** $\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 3}$

◀ $x\geqq 1$ のとき，$|x+2|=x+2$，$|x-1|=x-1$

◀ $-2\leqq x<1$ のとき，$|x+2|=x+2$，$|x-1|=-(x-1)$

◀ $x<-2$ のとき，$|x+2|=-(x+2)$，$|x-1|=-(x-1)$

解答（節末）I1.3.1 ★★ 節末 p.52

問題文

連立不等式 $\begin{cases} x > 4a-3 \\ 3x-2 > 8(x-1) \end{cases}$ の解について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 解に 0 が含まれる．

(2) 解に含まれる整数がちょうど 4 個存在する．

$x > 4a-3 \cdots$ (i) とする．

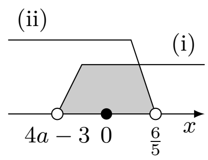
$3x-2 > 8(x-1)$ より，$3x-2 > 8x-8$

よって，$x < \frac{6}{5} \cdots$ (ii)

(1) $x=0$ は (ii) に含まれるから，$x=0$ が (i) の解に含まれる範囲を考える．

このとき，$4a-3<0$

◀

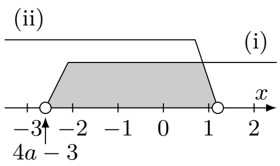


よって，$\boldsymbol{a < \frac{3}{4}}$

(2) (i)，(ii) を同時に満たす整数が存在するから，(i) と (ii) に共通範囲があり，

$$4a-3 < x < \frac{6}{5}$$

$\frac{6}{5}=1.2$ であるから，(i)，(ii) より，不等式を満たす整数がちょうど 4 個となるのは右の図の場合である．



したがって，$-3 \leqq 4a-3 < -2$

◀ 等号を含むか否かに注意すること．例えば $4a-3=-3$ のとき，共通範囲の不等式は $-3 < x < \frac{6}{5}$ となり，解に含まれる整数は 4 つとなる．

ゆえに，$0 \leqq 4a < 1$

よって，$\boldsymbol{0 \leqq a < \frac{1}{4}}$

解答（節末）I1.3.2 ★★ 節末 p.53

問題文

整数 x は 4 の倍数であり，x を 15 で割ったところ，割り切れなかった．そこで $\frac{x}{15}$ を計算し，その小数第 1 位を四捨五入したところ，4 になった．このとき，整数 x をすべて求めよ．

$\frac{x}{15}$ の小数第 1 位を四捨五入すると 4 となることから，

$$3.5 \leqq \frac{x}{15} < 4.5$$

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

各辺を 15 倍すると，$52.5 \leqq x < 67.5$

よって，この範囲にある 15 で割り切れない 4 の倍数を求めると，

$$x = \boldsymbol{56,\ 64}$$

◀ 60 は 4 の倍数である．

解答（節末）I1.3.3 ★★ 節末 p.54

問題文

(1) 駅から自宅までの道のりは 30 km である．この道のりを，初めは時速 5 km で歩き，途中からは時速 10 km で走ると，掛かった時間は 5 時間以内であった．時速 5 km で歩いた道のりはどれほどであるか．
(2) 7% の食塩水と 10% の食塩水がある．7% の食塩水 500 g と 10% の食塩水を何 g か混ぜ合わせて，8% 以上 8.5% 以下の食塩水を作りたい．10% の食塩水を何 g 以上何 g 以下混ぜればよいか．

(1) 時速 5 km で歩いた道のりを x km とすると，歩いた時間は，$\frac{x}{5}$ （時間）

◀ 求めるものを x とおく．

また，時速 10 km で走った道のりを $(30-x)$ km とすると，走った時間は，$\frac{30-x}{10}$（時間）

◀ (時間) $=\frac{(\text{道のり})}{(\text{速さ})}$

これらを合わせて 5 時間以内であるから，

$$\frac{x}{5}+\frac{30-x}{10} \leqq 5$$

両辺に 10 を掛けると，

$$\begin{aligned} 2x+30-x &\leqq 50 \\ x &\leqq 20 \end{aligned}$$

よって，時速 5 km で歩いた道のりは，**20 km 以下** である．

(2) 10% の食塩水を x g 混ぜるとする．

◀ 求めるものを x とおく．

7% の食塩水 500 g に含まれる食塩の量は，$500\times 0.07=35$ (g)

10% の食塩水 x g に含まれる食塩の量は，$0.10x$ (g)

◀ (食塩の質量)
=(食塩水の質量) × (濃度)

7% の食塩水 500 g に 10% の食塩水を x g 混ぜると，食塩水の量は $(500+x)$ g となるから，その濃度が 8% 以上 8.5% 以下になるための条件は，

$$8 \leqq \frac{35+0.10x}{500+x}\times 100 \leqq 8.5$$

◀ (濃度) $=\frac{(\text{食塩の質量})}{(\text{食塩水の質量})}$

各辺に $500+x$ を掛けて，

◀ $500+x$ は正であるので，不等号の向きは変わらず，1 次不等式の形に変形することができる．

$$8(500+x) \leqq 3500+10x \leqq 8.5(500+x)$$

ゆえに，$4000+8x \leqq 3500+10x \leqq 4250+8.5x$

$4000+8x \leqq 3500+10x$ より，$2x \geqq 500$

すなわち，$x \geqq 250 \cdots$ (i)

$3500+10x \leqq 4250+8.5x$ より，$1.5x \leqq 750$

すなわち，$x \leqq 500 \cdots$ (ii)

(i)，(ii) より，$250 \leqq x \leqq 500$

よって，10% の食塩水を **250 g 以上 500 g 以下** だけ混ぜればよい．

解答（節末）I1.3.4 ★★★ 節末 p.55

問題文

次の不等式を解け．ただし，a，b は定数とする．

(1) $ax > b$　　(2) $(a+b)x \leqq a^2 - b^2$

(1) (i) $a > 0$ のとき

両辺を a で割ると，$x > \frac{b}{a}$

(ii) $a = 0$ のとき

$0 \cdot x > b$ となるから，

（ア）$b < 0$ のとき，解はすべての実数

（イ）$b \geqq 0$ のとき，解なし

(iii) $a < 0$ のとき

両辺を a で割ると $x < \frac{b}{a}$

◀ $a < 0$ より，不等号の向きが変わる．

◀ b の符号によって，さらに b の場合分けが必要となる．

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 0} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x > \frac{b}{a}} \\ \boldsymbol{a = 0} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{b < 0} \textbf{ ならば解はすべての実数} \\ & \boldsymbol{b \geqq 0} \textbf{ ならば解なし} \\ \boldsymbol{a < 0} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x < \frac{b}{a}} \end{cases}$$

(2) $(a+b)x \leqq a^2 - b^2$ より，$(a+b)x \leqq (a+b)(a-b)$

(i) $a + b > 0$ のとき

両辺を $a+b$ で割ると $x \leqq a - b$

(ii) $a + b = 0$ のとき

不等式は，$0 \cdot x \leqq 0$ となり，x の値に関わらず成り立つ．

したがって，解はすべての実数

(iii) $a + b < 0$ のとき

両辺を $a+b$ で割ると $x \geqq a - b$

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+b > 0} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x \leqq a-b} \\ \boldsymbol{a+b = 0} \textbf{ のとき，} & \textbf{解はすべての実数} \\ \boldsymbol{a+b < 0} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x \geqq a-b} \end{cases}$$

解答（節末）I1.3.5 ★★★ 節末 p.56

問題文

次の方程式，不等式を解け．

(1) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=6$　　(2) $x^2+|x+3|+|x-2|=6$

(1) 方程式の左辺を変形すると，$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=6$

◀ $\sqrt{a^2}=|a|$ を利用する．

すなわち，$|x-1|+|x-3|=6$

(i) $x \geqq 3$ のとき

$(x-1)+(x-3)=6$ より，$x=5$

これは $x \geqq 3$ を満たす．

(ii) $1 \leqq x < 3$ のとき

$$(x-1)-(x-3)=6$$

これは，$2=6$ となり，不適である．

(iii) $x<1$ のとき

$-(x-1)-(x-3)=6$ より，$x=-1$

これは $x<1$ を満たす．

◀ $|\ |$ 内の式について，$x-1=0$ の解は $x=1$ であり，$x-3=0$ の解は $x=3$ となる．これより，$x<1$，$1 \leqq x<3$，$3 \leqq x$ の場合に分ける．

よって，(i)～(iii) より，$\boldsymbol{x=5,\ -1}$

(2) (i) $2 \leqq x$ のとき

$x^2+(x+3)+(x-2)=6$ より，$x^2+2x-5=0$

これを解くと，$x=-1\pm\sqrt{6}$

これらのうち，$2 \leqq x$ を満たすものはない．

◀ $2^2<(\sqrt{6})^2<3^2$ より，$2<\sqrt{6}<3$

(ii) $-3 \leqq x < 2$ のとき

$x^2+(x+3)-(x-2)=6$ より，$x^2=1$

これを解くと，$x=1,\ -1$

これらは，$-3 \leqq x<2$ を満たす．

(iii) $x<-3$ のとき

$x^2-(x+3)-(x-2)=6$ より，$x^2-2x-7=0$

これを解くと，$x=1\pm2\sqrt{2}$

これらのうち，$x<-3$ を満たすものはない．

◀ $2^2<(2\sqrt{2})^2<3^2$ より，$2<2\sqrt{2}<3$

よって，(i)～(iii) から，求める解は $\boldsymbol{x=1,\ -1}$

解答 1.3

One math

解答（節末）I1.3.6 ★★★ 節末 p.57

問題文

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|2x-3|<3x$　　　(2) $|x-3|+|x-5|\leqq 5$

(3) $||x-2|+4|=3x$

(1)　(i) $2x-3\geqq 0$，すなわち，$x\geqq \frac{3}{2}$ のとき

$2x-3<3x$ より，$x>-3$

したがって，$x\geqq\frac{3}{2}$ より，$\frac{3}{2}\leqq x$

(ii) $2x-3<0$，すなわち，$x<\frac{3}{2}$ のとき

$-(2x-3)<3x$ より，$5x>3$

したがって，$x>\frac{3}{5}$

ゆえに，$x<\frac{3}{2}$ より，$\frac{3}{5}<x<\frac{3}{2}$

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{\frac{3}{5}<x}$

(2)　(i) $x\geqq 5$ のとき

◀ $x\geqq 5$ のとき，$|x-3|=x-3$，$|x-5|=x-5$

$(x-3)+(x-5)\leqq 5$ より，$x\leqq\frac{13}{2}$

したがって，$x\geqq 5$ より，$5\leqq x\leqq\frac{13}{2}$

(ii) $3\leqq x<5$ のとき

◀ $3\leqq x<5$ のとき，$|x-3|=x-3$，$|x-5|=-(x-5)$

$(x-3)-(x-5)\leqq 5$ より，$2\leqq 5$ となり，これは成り立っている．

したがって，$3\leqq x<5$

(iii) $x<3$ のとき

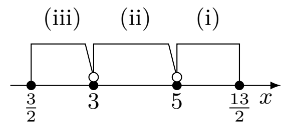
◀ $x<3$ のとき，$|x-3|=-(x-3)$，$|x-5|=-(x-5)$

$-(x-3)-(x-5)\leqq 5$ より，$x\geqq\frac{3}{2}$

したがって，$x<3$ より，$\frac{3}{2}\leqq x<3$

よって，(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{\frac{3}{2}\leqq x\leqq\frac{13}{2}}$

◀ (i)〜(iii) の範囲を数直線で表すと次のようになる．



(3)

$$
||x-2|+4|=\begin{cases}|x-2+4| & (x\geqq 2)\\ |-(x-2)+4| & (x<2)\end{cases}
$$
$$
=\begin{cases}|x+2| & (x\geqq 2)\\ |-x+6| & (x<2)\end{cases}
$$
$$
=\begin{cases}x+2 & (x\geqq 2)\\ -x+6 & (x<2)\end{cases}
$$

◀ 先に，$x-2$ の絶対値記号を外し，$x-2\geqq 0$ と $x-2<0$ で場合分けをする．

◀ $x\geqq 2$ のとき，$x+2>0$
$x<2$ のとき，$-x+6>0$

(i) $x\geqq 2$ のとき

$x+2=3x$ より，$x=\frac{2}{2}=1$

これは，$x\geqq 2$ を満たさない．

(ii) $x<2$ のとき

$-x+6=3x$ より，$6=4x$ より，$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

これは，$x<2$ を満たす．

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

章末問題 1（解答）

解答（章末）I1.1 ★★ 章末 p.58

問題文

次の式を展開せよ．

$$(x+y+z)^2-(y+z-x)^2+(z+x-y)^2-(x+y-z)^2$$

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^2-(y+z-x)^2+(z+x-y)^2-(x+y-z)^2\\
=&\{(x+y+z)+(y+z-x)\}\{(x+y+z)-(y+z-x)\}\\
&+\{(z+x-y)+(x+y-z)\}\{(z+x-y)-(x+y-z)\}\\
=&2(y+z)\cdot 2x+2x\cdot 2(z-y)\\
=&4xy+4xz+4xz-4xy=\boldsymbol{8xz}
\end{aligned}$$

◀ $A^2-B^2+C^2-D^2$
$=(A+B)(A-B)$
$+(C+D)(C-D)$

解答（章末）I1.2 ★★★★ 章末 p.59

問題文

次の式を因数分解せよ．

(1) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$　　(2) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

(1) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$$\begin{aligned}
&=(b-c)a^3-\left(b^3-c^3\right)a+bc\left(b^2-c^2\right)\\
&=(b-c)\left\{a^3-\left(b^2+bc+c^2\right)a+bc(b+c)\right\}\\
&=(b-c)\left\{(c-a)b^2+c(c-a)b-a\left(c^2-a^2\right)\right\}\\
&=(b-c)(c-a)\left\{b^2+c\cdot b-a(c+a)\right\}\\
&=(b-c)(c-a)\left\{(b-a)c+\left(b^2-a^2\right)\right\}\\
&=(b-c)(c-a)(b-a)\{c+(b+a)\}\\
&=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}
\end{aligned}$$

◀ a について整理する．
◀ $b-c$ をくくり出す．
◀ 波括弧内を b について整理する．
◀ $c-a$ をくくり出す．
◀ 波括弧内を c について整理する．
◀ $b-a$ をくくり出す．

(2) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

$$\begin{aligned}
&=a^4-2\left(b^2+c^2\right)a^2+b^4-2b^2c^2+c^4\\
&=a^4-2\left(b^2+c^2\right)a^2+\left(b^2-c^2\right)^2\\
&=a^4-2\left(b^2+c^2\right)a^2+\{(b+c)(b-c)\}^2\\
&=a^4-\left\{(b+c)^2+(b-c)^2\right\}a^2+(b+c)^2(b-c)^2\\
&=\left\{a^2-(b+c)^2\right\}\left\{a^2-(b-c)^2\right\}\\
&=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\\
&=\boldsymbol{(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)}
\end{aligned}$$

◀ a について整理する．
◀ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
◀ 次の式は公式として覚えてもよい．
$(x+y)^2+(x-y)^2$
$=2\left(x^2+y^2\right)$

解答 1.4

解答（章末）I1.3 ★★★ 章末 p.60

問題文

$x+y+z=0$ のとき，$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ の値を求めよ．

$x+y+z=0$ より，$z=-(x+y)$
これより，与えられた式を z について整理すると，

$$\begin{aligned}
&x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)z+\frac{x+y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\\
&=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)+\frac{x+y}{-(x+y)}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\\
&=-\left(1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1\right)-1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\mathbf{-3}
\end{aligned}$$

【別解】 $x+y+z=0$ より，$y+z=-x$，$z+x=-y$，$x+y=-z$
よって，

$$\begin{aligned}
&x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\\
&=\frac{-x}{x}+\frac{-y}{y}+\frac{-z}{z}=\mathbf{-3}
\end{aligned}$$

◀ 展開して，分母が同じものをまとめる．

解答（章末）I1.4 ★★★ 章末 p.61

問題文

不等式 $|ax+2|\leqq b$ の解が $-2\leqq x\leqq 4$ のとき a，b の値を求めよ．

$|ax+2|\leqq b$ より，$-b\leqq ax+2\leqq b$
よって，$-b-2\leqq ax\leqq b-2$

◀ $|x|<a\ (a>0)$ の解は，$-a<x<a$

(i) $a>0$ のとき
$\frac{-b-2}{a}\leqq x\leqq\frac{b-2}{a}$ より，$\frac{-b-2}{a}=-2$，$\frac{b-2}{a}=4$
これを解いて，$a=-2$，$b=-6$
これは，$a>0$ を満たさないので不適である．

◀ $\frac{-b-2}{a}=-2$，$\frac{b-2}{a}=4$ の各辺を足し合わせるなどして，連立させて a の値を求める．

(ii) $a=0$ のとき
このとき，解は $-2\leqq x\leqq 4$ とはならないので不適である．

(iii) $a<0$ のとき
$\frac{b-2}{a}\leqq x\leqq\frac{-b-2}{a}$ より，$\frac{b-2}{a}=-2$，$\frac{-b-2}{a}=4$
これを解いて，$a=-2$，$b=6$
これは，$a<0$ を満たす．

◀ $\frac{b-2}{a}=-2$，$\frac{-b-2}{a}=4$ の各辺を足し合わせるなどして，連立させて a の値を求める．

(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=6}$

解答（章末）I1.5 ★★ 章末 p.62

問題文

$x = 2a - 1$ のとき，$\sqrt{x^2 + 8a} + \sqrt{a^2 - x}$ を簡単にせよ．

$x = 2a - 1$ を与えられた式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(2a-1)^2 + 8a} + \sqrt{a^2 - (2a-1)} \\
&= \sqrt{4a^2 + 4a + 1} + \sqrt{a^2 - 2a + 1} \\
&= \sqrt{(2a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2} \\
&= |2a+1| + |a-1|
\end{aligned}$$

◀ $|\ |$ 内の式について，$2a+1 = 0$ の解は $a = -\frac{1}{2}$ であり，$a - 1 = 0$ の解は $a = 1$ となる．これより，$a < -\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2} \leqq a < 1$，$1 \leqq a$ の場合に分ける．

よって，

$$\begin{aligned}
|2a+1| + |a-1| &= \begin{cases} (2a+1) + (a-1) & (1 \leqq a) \\ (2a+1) - (a-1) & \left(-\frac{1}{2} \leqq a < 1\right) \\ -(2a+1) - (a-1) & (a < -\frac{1}{2}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \boldsymbol{3a} & (\boldsymbol{1 \leqq a}) \\ \boldsymbol{a+2} & \left(\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq a < 1}\right) \\ \boldsymbol{-3a} & (\boldsymbol{a < -\frac{1}{2}}) \end{cases}
\end{aligned}$$

集合と命題（解答）

集合と論理（解答）

解答 I2.1.1 ★ 問題 p.64

問題文

(1) $A=\{x \mid x$ は 20 以下の奇数$\}$ とする．次の $\boxed{}$ の中に，$\in$ または $\notin$ のいずれか適するものを書き入れよ．

(i) $7\ \boxed{}\ A$　　(ii) $12\ \boxed{}\ A$

(2) 次の集合を要素を書き並べて表せ．

(i) 16 の正の約数全体の集合　　(ii) $\{x \mid -5 \leqq x < 3,\ x$ は整数$\}$

(3) 次の 2 つの集合 $A,\ B$ の間に成り立つ包含関係をいえ．

(i) $A=\{4n+1 \mid 0 \leqq n \leqq 1,\ n$ は整数$\}$，$B=\{2n-1 \mid -1 \leqq n \leqq 3,\ n$ は整数$\}$

(ii) $A=\{2n+1 \mid n=0,\ 1\}$，$B=\{x \mid (x-1)(x-3)=0,\ x$ は整数$\}$

(1) (i) 7 は 20 以下の奇数であるから，$\boldsymbol{7 \in A}$

(ii) 12 は 20 以下の奇数ではないから，$\boldsymbol{12 \notin A}$

(2) (i) $\boldsymbol{\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}}$

(ii) $\boldsymbol{\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}}$

(3) (i)
$$A=\{4\cdot 0+1,\ 4\cdot 1+1\}=\{1,\ 5\},$$
$$B=\{2\cdot(-1)-1,\ 2\cdot 0-1,\ 2\cdot 1-1,\ 2\cdot 2-1,\ 2\cdot 3-1\}$$
$$=\{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5\}$$
よって，$\boldsymbol{A \subset B}$

◀ 例えば，B の要素 -3 は A に属さないから，$B \subset A$ ではない．

(ii) $A=\{2\cdot 0+1,\ 2\cdot 1+1\}=\{1,\ 3\}$

また，$(x-1)(x-3)=0$ を解くと，$x=1,\ 3$

したがって，$B=\{1,\ 3\}$

よって，$\boldsymbol{A=B}$

解答 I2.1.2 ★ 問題 p.65

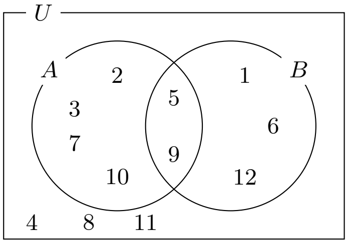
問題文

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A，B を $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$，$B=\{1,\ 5,\ 6,\ 9,\ 12\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B$　　(2) $\overline{A}\cap B$　　(3) $\overline{A\cap B}$

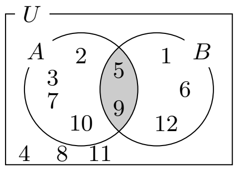
(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(5) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$

与えられた条件をもとに，U，A，B をベン図で表すと，下の図のようになる．



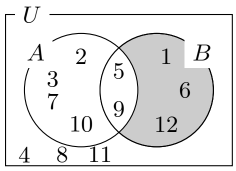
(1) $A\cap B$ は，A と B の共通部分であるから，

$$A\cap B=\mathbf{\{5,\ 9\}}$$



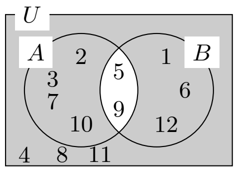
(2) $\overline{A}\cap B$ は B の要素のうち，$A\cap B$ の要素ではないものであるから，

$$\overline{A}\cap B=\mathbf{\{1,\ 6,\ 12\}}$$



(3) $\overline{A\cap B}$ は，$A\cap B$ の補集合である．
よって，(1) より，

$$\overline{A\cap B}=\mathbf{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}}$$



(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$ は, $\overline{A}$ と $\overline{B}$ の和集合である．
$\overline{A}=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 11,\ 12\}$，$\overline{B}=\{2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11\}$ より，

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\mathbf{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}}$$

(5) ド・モルガンの法則より，$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B$ となり，$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$ は，A と B の共通部分である．
よって，(1) より，

$$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B=\mathbf{\{5,\ 9\}}$$

◀ $\overline{(\overline{A})}=A$，$\overline{(\overline{B})}=B$

◀ U から $\overline{A}\cup\overline{B}$ を除いたものである．

解答 2.1

One math

解答 I2.1.3 ★★ 問題 p.66

問題文

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A=\{x \mid x+3<0\}$, $B=\{x \mid |x+3| \leqq 1\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap \overline{B}$　　(3) $\overline{A \cap B}$

$x+3<0$ より，$x<-3$

よって，$A=\{x \,|\, x<-3\}$

$|x+3| \leqq 1$ より，$-1 \leqq x+3 \leqq 1$

すなわち，$-4 \leqq x \leqq -2$

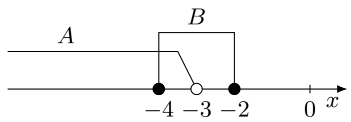
よって，$B=\{x \mid -4 \leqq x \leqq -2\}$

◀ 集合 A, B の条件を表す不等式を解く．

◀ $|x| \leqq a$ $(a>0)$ の解は，$-a \leqq x \leqq a$

(1) 右の数直線より，

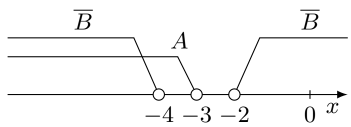
$$A \cup B = \boldsymbol{\{x \,|\, x \leqq -2\}}$$



◀ $A \cap B$ は共通部分である．

(2) $\overline{B}=\{x \mid x<-4,\ -2<x\}$ であるから，右の数直線より，

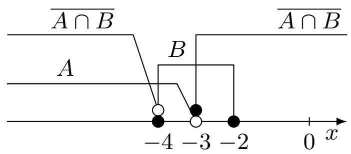
$$A \cap \overline{B} = \boldsymbol{\{x \mid x<-4\}}$$



◀ 端点を含むか否かをよく考える．

(3) 右の数直線より，$A \cap B=\{x \mid -4 \leqq x<-3\}$ であるから，

$$\overline{A \cap B} = \boldsymbol{\{x \mid x<-4,\ -3 \leqq x\}}$$



解答
2.1

解答 I2.1.4 ★★★ 問題 p.67

問題文

$U=\{x \mid x$ は実数$\}$ を全体集合とする．U の部分集合

$$A=\left\{3,\ a+2,\ a^2-a-11\right\},\quad B=\left\{3,\ 7,\ a^2-15,\ a^2-3a+4\right\}$$

とする．$A\cap B=\{1,\ 3\}$ であるとき，定数 a の値を求めよ．

$A\cap B=\{1,\ 3\}$ より，$1\in A$ であるから，$a+2=1$ または $a^2-a-11=1$

(i) $a+2=1$，すなわち，$a=-1$ のとき

$$A=\{-9,\ 1,\ 3\},\quad B=\{-14,\ 3,\ 7,\ 8\}$$

したがって，$1\notin B$ となるから，不適である．

(ii) $a^2-a-11=1$，すなわち，$a^2-a-12=0$ のとき

$$(a+3)(a-4)=0$$

したがって $a=-3,\ 4$

（ア）$a=4$ のとき

$$A=\{1,\ 3,\ 6\},\quad B=\{1,\ 3,\ 7,\ 8\}$$

したがって，$A\cap B=\{1,\ 3\}$ となるから，条件に適する．

（イ）$a=-3$ のとき

$$A=\{-1,\ 1,\ 3\},\quad B=\{-6,\ 3,\ 7,\ 22\}$$

したがって，$1\notin B$ となるから，不適である．

よって，(i)，(ii) より，求める a の値は $a=\mathbf{4}$

◀ $a=-1$ のとき，$a^2-a-11=(-1)^2-(-1)-11=-9$
a^2-15，a^2-3a+4 も同様に計算すると，それぞれ -14，8 となる．

◀ $a=4$ のとき，$a+2=4+2=6$
a^2-15，a^2-3a+4 も同様に計算すると，それぞれ 1，8 となる．

◀ $a=-3$ のとき，$a+2=(-3)+2=-1$
a^2-15，a^2-3a+4 も同様に計算すると，それぞれ -6，22 となる．

解答 I2.1.5 ★★　問題 p.68

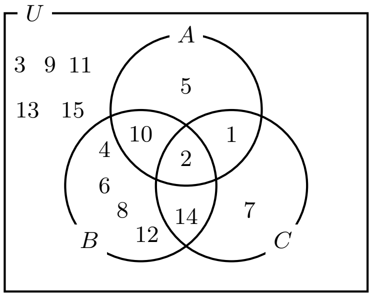
問題文

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A，B，C を $A=\{n \mid n$ は 10 の正の約数$\}$，$B=\{n \mid n$ は偶数$\}$，$C=\{n \mid n$ は 14 の正の約数$\}$ とするとき，次の集合を求めよ．

(1) $A\cap B\cap C$　　(2) $(A\cup B)\cap C$

(3) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$　　(4) $\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap\overline{C})}$

$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$，$C=\{1,\ 2,\ 7,\ 14\}$ であり，与えられた条件をもとに，U，A，B，C をベン図で表すと．下の図のようになる．



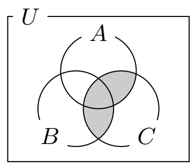
(1) $A\cap B\cap C$ は，A，B，C の共通部分であるから，

$$A\cap B\cap C=\mathbf{\{2\}}$$

(2) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$ より，

$$(A\cup B)\cap C=\mathbf{\{1,\ 2,\ 14\}}$$

◀ $(A\cup B)\cap C$



(3) $A\cap C=\{1,\ 2\}$，$B\cap C=\{2,\ 14\}$ より，

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\mathbf{\{1,\ 2,\ 14\}}$$

◀ (2)，(3) の結果より，
$(A\cup B)\cap C$
$=(A\cap C)\cup(A\cap C)$

(4) ド・モルガンの法則より，

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap\overline{C})}&=\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})}\cap\overline{(\overline{B}\cap\overline{C})}\\&=(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{C}})\cap(\overline{\overline{B}}\cup\overline{\overline{C}})\\&=(A\cup C)\cap(B\cup C)\\&=(A\cap B)\cup C\\&=\mathbf{\{1,\ 2,\ 7,\ 10,\ 14\}}\end{aligned}$$

解答 2.1

解答 I2.1.6 ★★★★ 問題 p.69

問題文

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

(1) $A = \{6x+5 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3x-1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ であるとき，$A \subset B$

(2) $A = \{5x+2y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4x+3y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$ であるとき，$A = B$

(1) $\alpha \in A$ とすると，$\alpha = 6x+5$ $(x \in \mathbb{Z})$ と表すことができる．

このとき，$\alpha = 6(x+1)-1 = 3 \cdot 2(x+1)-1$

$2(x+1) = y$ とおくと，$\alpha = 3y-1$ $(y \in \mathbb{Z})$

したがって，$\alpha \in B$

よって，$\alpha \in A$ ならば $\alpha \in B$ が成り立つから，$A \subset B$ ■

◀ $\alpha \in B$ を示すために，$6n+5$ を $3\times$ (整数) -1 の形で表す．

(2) (i) $\alpha \in A$ とすると，$\alpha = 5x+2y$ $(x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z})$ と表すことができる．

$5 = 4\times2+3\times(-1)$, $2 = 4\times(-1)+3\times2$ より，

$$\alpha = \{4\times2+3\times(-1)\}x+\{4\times(-1)+3\times2\}y = 4(2x-y)+3(-x+2y)$$

$x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ より，$2x-y \in \mathbb{Z}$, $-x+2y \in \mathbb{Z}$ であるから，$\alpha \in B$

したがって，$A \subset B$ が成り立つ．

(ii) $\beta \in B$ とすると，$\beta = 4x+3y$ $(x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z})$ と表すことができる．

$4 = 5\times0+2\times2$, $3 = 5\times1+2\times(-1)$ より，

$$\beta = \{5\times0+2\times2\}x+\{5\times1+2\times(-1)\}y = 5y+2(2x-y)$$

$x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ より，$2x-y \in \mathbb{Z}$ であるから，$\beta \in A$

したがって，$B \subset A$ が成り立つ．

よって，(i), (ii) より，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるから，$A = B$ が成り立つ． ■

解答 I2.1.7 ★ 問題 p.70

問題文

次の命題の真偽を調べよ．また，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x，y は実数とする．
(1) $x^2=16$ ならば，$x=4$
(2) $x-y=0$ ならば，$x=y=0$
(3) $x^2+y^2=0$ ならば，$x=y=0$
(4) xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である．

(1) $x=-4$ のとき，$x^2=16$ であるが，$x=4$ ではない．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{x=-4}$

◀ $x^2=16$ を解くと，$x=4,\ -4$

(2) $x=1$，$y=1$ のとき，$x-y=0$ であるが，$x=y=0$ ではない．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{y=1}$

(3) $x^2 \geqq 0$，$y^2 \geqq 0$ であるから，$x^2+y^2=0$ ならば，$x^2=0$ かつ $y^2=0$
したがって，$x=y=0$
よって，命題は**真**である．

(4) $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき，$xy=2$ であるが，x，y は無理数である．
よって，命題は**偽**である．
反例は，$\boldsymbol{x=\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{y=\sqrt{2}}$

◀ 2 は有理数である．

解答
2.1

解答 I2.1.8 ★ 問題 p.71

問題文

次の命題の真偽を，集合の考えを用いて調べよ．
(1) n を自然数とする．n が 1 桁の正の奇数ならば，n は 15 の正の約数である．
(2) 実数 x について，$|x|<3$ ならば，$x>-4$

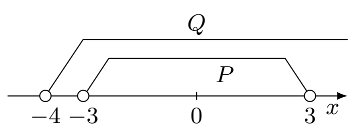
(1) $P=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$Q=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$ とおくと，$7 \notin Q$ であるから，$P \subset Q$ は成り立たない．
よって，命題は**偽**である．

◀ 7，9 が反例である．

(2) $P=\{x \mid |x|<3\}$，$Q=\{x \mid x>-4\}$ とおく．
$|x|<3$ より，$-3<x<3$

◀ $|x|<a$（$a>0$）の解は，$-a<x<a$

P，Q を数直線上に表すと，右の図のようになる．
したがって，$P \subset Q$ が成り立つ．



よって，命題は**真**である．

One math

解答 I2.1.9 ★★ 問題 p.72

問題文

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，x，y は実数とする．

(1) $x=2$ は，$x^2<10$ であるための $\boxed{}$．

(2) $x+y>10$ は，$x>5$ かつ $y>5$ であるための $\boxed{}$．

(i) 必要条件であるが十分条件ではない　(ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

(1) 「$x=2 \Longrightarrow x^2<10$」は，真である． ◀ $2^2<10$

「$x^2<10 \Longrightarrow x=2$」は，偽である．反例は，$x=3$ ◀ $3^2<10$

よって，**(ii) 十分条件であるが必要条件ではない**

(2) 「$x+y>10 \Longrightarrow x>5$ かつ $y>5$」は，偽である．反例は，$x=10$，$y=1$

「$x>5$ かつ $y>5 \Longrightarrow x+y>10$」は，真である．

よって，**(i) 必要条件であるが十分条件ではない**

解答 I2.1.10 ★ 問題 p.73

問題文

次の条件の否定を述べよ．ただし，x，y を実数とする．

(1) $0 \leqq x<5$　(2) x は 1 でも 2 でもない

(3) $x=0$ または $x=2$　(4) x，y の少なくとも一方は 1 である．

(1) 「$0 \leqq x<5$」は，「$x \geqq 0$ かつ $x<5$」のことである．

よって，否定は，「$\boldsymbol{x<0}$ **または** $\boldsymbol{x \geqq 5}$」

(2) 「x は 1 でも 2 でもない」は，「$x \neq 1$ かつ $x \neq 2$」のことである．

よって，否定は，「$\boldsymbol{x=1}$ **または** $\boldsymbol{x=2}$」 ◀ x は 1 または 2 である．

(3) 否定は，「$\boldsymbol{x \neq 0}$ **かつ** $\boldsymbol{x \neq 2}$」

(4) 「x，y の少なくとも一方は 1 である」は「$x=1$ または $y=1$」のことである．

よって，否定は，「$\boldsymbol{x \neq 1}$ **かつ** $\boldsymbol{y \neq 1}$」 ◀ x も y も 1 ではない．

解答 I2.1.11 ★★★ 問題 p.74

問題文

次の命題の否定を述べよ．また，もとの命題とその否定の真偽を答えよ．
(1) ある整数 k について，$k^2 = 3k$
(2) 任意の実数 x，y について，$(x+y)^2 > x^2 + y^2$

(1) 否定は，「**すべての整数 $\boldsymbol{k}$ について，$\boldsymbol{k^2 \neq 3k}$**」
これは，$k = 3$ のとき，$k^2 = 3k$ であるから，$k^2 \neq 3k$ は成り立たない．
よって，否定は**偽**である．
また，もとの命題は $k = 3$ のとき，$k^2 = 3k$ であるから，**真**である．

◀ $k = 0$ も反例である．

(2) 否定は，「**ある実数 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ について，$\boldsymbol{(x+y)^2 \leqq x^2 + y^2}$**」
これは，$x = 0$，$y = 0$ のとき，$(x+y)^2 = x^2 + y^2 = 0$
よって，否定は**真**である．
また，もとの命題は，$x = 1$，$y = -1$ とすると，$(x+y)^2 = (1-1)^2 = 0$ であり，$x^2 + y^2 = 2$ である．
よって，**偽**である．

解答 I2.1.12 ★ 問題 p.75

問題文

次の命題の逆，裏，対偶を述べよ．また，それらの真偽を調べよ．ただし，x，y は実数とする．
(1) $x = -3$ ならば，$x^2 = 9$
(2) $x + y > 2$ ならば，x，y の少なくとも 1 つは 1 より大きい．

(1) 逆は，「**$\boldsymbol{x^2 = 9}$ ならば，$\boldsymbol{x = -3}$**」
これは，**偽**である．反例は，$x = 3$
裏は，「**$\boldsymbol{x \neq -3}$ ならば，$\boldsymbol{x^2 \neq 9}$**」
これは，**偽**である．反例は，$x = 3$

◀ 裏の反例は，逆の反例と同じものでよい．

対偶は，「**$\boldsymbol{x^2 \neq 9}$ ならば，$\boldsymbol{x \neq -3}$**」
これは，もとの命題が真 $\left(x = -3 \text{ ならば，} x^2 = 9\right)$ であるから，**真**である．

(2) 逆は，「**$\boldsymbol{x > 1}$ または $\boldsymbol{y > 1}$ ならば，$\boldsymbol{x + y > 2}$**」
これは，**偽**である．反例は，$x = 2$，$y = -1$
裏は，「**$\boldsymbol{x + y \leqq 2}$ ならば，$\boldsymbol{x \leqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \leqq 1}$**」
これは，**偽**である．反例は，$x = 2$，$y = -1$
対偶は，「**$\boldsymbol{x \leqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \leqq 1}$ ならば，$\boldsymbol{x + y \leqq 2}$**」
これは，明らかに成り立つから，**真**である．

◀ $x \leqq 1$ かつ $y \leqq 1$ より，辺々を足し合わせると，$x+y \leqq 2$

解答 2.1

One math

解答 I2.1.13 ★★ 問題 p.76

問題文

次の命題を証明せよ．ただし，a，b を整数とする．
(1) a^3 が偶数ならば，a は偶数である．
(2) a^2+b^2 が奇数ならば，積 ab は偶数である．

(1) もとの命題の対偶「a が奇数ならば，a^3 は奇数である」を証明する．
a は奇数であるとき，整数 k を用いて $a=2k+1$ と表せるから，

◀ $a=2k-1$ としてもよい．

$$a^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1=2\left(4k^3+6k^2+3k\right)+1$$

k は整数より，$4k^3+6k^2+3k$ も整数であるから，a^3 は奇数である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

◀ $4k^3+6k^2+3k$ が整数であることを記すように注意すること．

(2) もとの命題の対偶「積 ab が奇数ならば，a^2+b^2 は偶数である」を証明する．
ab は奇数であるとき，a，b はともに奇数であり，整数 k，l を用いて $a=2k+1$，$b=2l+1$ と表せるから，

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(2k+1)^2+(2l+1)^2\\&=4k^2+4k+1+4l^2+4l+1\\&=2\left(2k^2+2k+2l^2+2l+1\right)\end{aligned}$$

k，l は整数より，$2k^2+2l^2+2k+2l+1$ も整数であるから，a^2+b^2 は偶数である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

解答 I2.1.14 ★★★ 問題 p.77

問題文

次の命題を証明せよ．ただし，a，b，c は整数とする．

$a^2+b^2+c^2$ が偶数ならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数である．

もとの命題の対偶「a，b，c がすべて奇数ならば，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である」を証明する．a，b，c がすべて奇数であるとき，整数 l，m，n を用いて $a=2l+1$，$b=2m+1$，$c=2n+1$ と表せるから，

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(2l+1)^2+(2m+1)^2+(2n+1)^2\\&=2\left(2l^2+2m^2+2n^2+2l+2m+2n+1\right)+1\end{aligned}$$

◀ $2\times$（整数）$+1$ の形になるように，式変形する．

$2l^2+2m^2+2n^2+2l+2m+2n+1$ は整数であるから，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ． ■

解答 2.1

解答 I2.1.15 ★★ 問題 p.78

問題文

(1) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．
(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを用いて，$\sqrt{3}-1$ が無理数であることを証明せよ．

(1) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{3}=\frac{m}{n}\ (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数})$$

と表される．
このとき，$\sqrt{3}n=m$
両辺を 2 乗すると，$3n^2=m^2\cdots(\mathrm{i})$
$3n^2$ は 3 の倍数であるから，m^2 も 3 の倍数である．
したがって，m は 3 の倍数となる．
$m=3k$ (k は整数) とおくと，(i) より $3n^2=(3k)^2$
すなわち，$n^2=3k^2$
$3k^2$ は 3 の倍数であるから，n^2 は 3 の倍数である．
したがって，n は 3 の倍数となる．
ゆえに，m，n はともに 3 の倍数となり，互いに素であることに矛盾する．
よって，$\sqrt{3}$ は無理数である．■
(2) $\sqrt{3}-1$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{3}-1=r\ (r \text{ は有理数})$$

と表される．
整理すると，$\sqrt{3}=r+1$
$r+1$ は有理数であるから，$\sqrt{3}$ も有理数となる．
これは，$\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する．
よって，$\sqrt{3}-1$ は無理数である．■

◀ 結論の否定を仮定する（無理数ではないことから，有理数であると仮定する）．

◀ m^2 が 3 の倍数ならば，m も 3 の倍数である．

◀ m，n がともに 3 を約数にもつことから，互いに素であることに反する．

◀ (有理数) + (有理数) = (有理数)

解答 2.1

One math

解答 I2.1.16 ★★★ 問題 p.79

問題文

a，b を有理数とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい．
(1) $a+b\sqrt{3}=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ であることを証明せよ．
(2) $a(2+\sqrt{3})+b(5-\sqrt{3})=13+3\sqrt{3}$ を満たす a，b の値を求めよ．

(1) $b \neq 0$ と仮定する．
$a+b\sqrt{3}=0$ より，$\sqrt{3}=-\frac{a}{b}$
ここで，a，b は有理数より，$-\frac{a}{b}$ も有理数であるが，これは $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する．
したがって，$b=0$ である．
これを $a+b\sqrt{3}=0$ に代入すると，$a=0$
よって，a，b が有理数のとき，$a+b\sqrt{3}=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ である． ■

◀ $b=0$ であることのみを導いている．

(2) $a(2+\sqrt{3})+b(5-\sqrt{3})=13+3\sqrt{3}$ を整理すると，

$$(2a+5b-13)+(a-b-3)\sqrt{3}=0$$

◀ $\sqrt{3}$ について整理する．

a，b が有理数より，$2a+5b-13$，$a-b-3$ は有理数である．したがって，(1) より，

$$\begin{cases} 2a+5b-13=0 \\ a-b-3=0 \end{cases}$$

◀ $2a+5b-13$，$a-b-3$ がともに有理数であることを記すように注意すること．

よって，これを解いて，$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=1}$

解答（節末）I2.1.1 ★ 節末 p.80

問題文

$P=\{a,\ b,\ c\}$ の部分集合をすべて求めよ．

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}$$

◀ $\varnothing$ や P も部分集合である．また，$\{\varnothing\}$ は空集合の集合となり，$\varnothing$ とは意味が異なるので波括弧をつけないように注意すること．

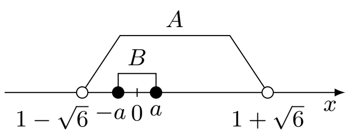
解答（節末）I2.1.2 ★★ 節末 p.81

問題文

実数全体を全体集合とし，その 2 つの部分集合を $A=\{x \mid |x-1|<\sqrt{6}\}$，$B=\{x \mid -a \leqq x \leqq a\}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．
(1) $A \supset B$ となる a の値の範囲を求めよ．
(2) $A \cup B$ に属する整数の個数が 9 個となる a の値の範囲を求めよ．

(1) 不等式 $|x-1|<\sqrt{6}$ を解くと
$-\sqrt{6}<x-1<\sqrt{6}$ より，$1-\sqrt{6}<x<1+\sqrt{6}$
したがって，$A=\{x \mid 1-\sqrt{6}<x<1+\sqrt{6}\}$ であるから，右の数直線より，$A \supset B$ となるのは

$$1-\sqrt{6}<-a$$



◀ $|x|<a$（$a>0$）の解は，$-a<x<a$

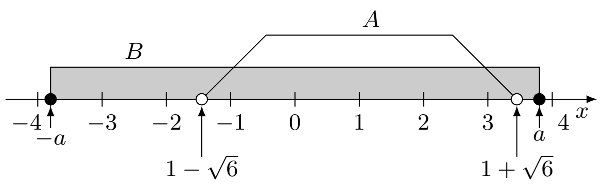
よって，$a>0$ より，$\boldsymbol{0<a<-1+\sqrt{6}}$

◀ $a>0$ を忘れないように注意すること．

(2) A に属する整数は，-1，0，1，2，3 の 5 個であるから，$A \cup B$ に属する整数が，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4 の 9 個になればよい．

よって，右の数直線より，

$$\boldsymbol{4 \leqq a<5}$$



◀ 等号を含むか否かに注意すること．

解答
2.1

解答（節末）I2.1.3 ★★★ 節末 p.82

問題文

次の命題の真偽を調べよ．また，真のときにはその証明をし，偽のときは具体的な反例を挙げよ．ただし，x，y は実数とし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$ は無理数であることを用いてもよい．
(1) x が無理数，y が有理数ならば，$x+y$ は無理数である．
(2) x^2-x が有理数ならば，x は有理数である．
(3) x，y がともに無理数ならば，$x+y$，x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である．

(1) x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ が有理数であると仮定すると，

$$x=(x+y)-y$$

◀ (有理数) − (有理数) = (有理数)

となる．しかし，これは左辺が無理数，右辺が有理数となり，x が無理数であることに矛盾する．
したがって，x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ は無理数である．
よって，命題は**真**である．
(2) $x^2-x=1$ とすると，$x^2-x-1=0$
これを解いて，$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

◀ $ax^2+bx+c=0$ の解は，
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\sqrt{5}$ は無理数であるから，x は無理数である．
よって，命題は**偽**である．反例は，$\boldsymbol{x^2-x=1}$
(3) $x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$ のとき，x，y はともに無理数であるが，$x+y=0$，$x^2+y^2=4$ であるから，$x+y$，x^2+y^2 はどちらも無理数ではない．
よって，命題は**偽**である．反例は，$\boldsymbol{x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}}$

解答 2.1

解答（節末）I2.1.4 ★★★ 節末 p.83

問題文

次の $\boxed{}$ に最も適するものを，(i)〜(iv) から選べ．ただし，a，b，c は実数とする．
(1) $a=b$ は，$ac=bc$ であるための $\boxed{}$．
(2) $a=b=c$ は，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ であるための $\boxed{}$．
(3) $a^2>b^2$ は，$a>b$ であるための $\boxed{}$．

(i) 必要条件であるが十分条件ではない　(ii) 十分条件であるが必要条件ではない

(iii) 必要十分条件である　(iv) 必要条件でも十分条件でもない

(1) 「$a=b \Longrightarrow ac=bc$」は，真である．
「$ac=bc \Longrightarrow a=b$」は，偽である．反例は，$a=1$，$b=2$，$c=0$
よって，**(ii) 十分条件であるが必要条件ではない**

(2)
$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$
$$\iff a=b=c$$

◀ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$ はそれぞれ，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0$ と式変形することができる．展開して，同値の関係が成り立つことを確かめるとよい．

よって，**(iii) 必要十分条件である**

(3) 「$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$」は，偽である．反例は，$a=-1$，$b=0$
「$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$」は，偽である．反例は，$a=0$，$b=-1$
よって，**(iv) 必要条件でも十分条件でもない**

解答（節末）I2.1.5 ★★ 節末 p.84

問題文

次の命題が成り立つことを対偶を用いて証明せよ．

x，y がともに正の数のとき，$x^2+y^2 \geqq 4$ ならば，$x \geqq \sqrt{2}$ または $y \geqq \sqrt{2}$ である．

もとの命題の対偶「x，y がともに正の数のとき，$x<\sqrt{2}$ かつ $y<\sqrt{2}$ ならば，$x^2+y^2<4$」を証明する．
x は正の数であり，$x<\sqrt{2}$ より，$x^2<2 \cdots$(i)
y は正の数であり，$y<\sqrt{2}$ より，$y^2<2 \cdots$(ii)
したがって，(i) と (ii) の辺々を足し合わせて，$x^2+y^2<4$
ゆえに，対偶は真である．
よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ．■

◀「$p \Longrightarrow q$」の対偶は，「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

◀ $0<x<\sqrt{2}$ より，$0<x^2<2$

解答（節末）I2.1.6 ★★★★ 節末 p.85

問題文

整数 a，b を係数とする 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が有理数の解 r をもつならば，r は整数であることを証明せよ．

$x^2+ax+b=0$ が有理数の解 r をもつから，

$$r=\frac{m}{n}\ (m \text{ と } n \text{ は 1 以外に公約数をもたない整数，} n \neq 0)$$

と表される．
このとき，$\left(\frac{m}{n}\right)^2+a\cdot\frac{m}{n}+b=0$
すなわち，$m^2+amn+bn^2=0$
したがって，$m^2=-n(am+bn) \cdots$(i)
$n \neq \pm 1$ と仮定すると，n はある素数 p を約数にもつ．
このとき，(i) より m^2 は素数 p を約数にもつ．
m^2 が素数 p を約数にもてば，m も素数 p を約数にもつ．
これは，m と n が 1 以外に公約数をもたないことに矛盾する．
したがって，$n=\pm 1$
よって，r は整数である．■

◀ 有理数の解 r は正であるとは限らないことに注意すること．

◀ $\frac{m}{n}$ が整数ならば，$n=\pm 1$ であることを用いて，$n \neq \pm 1$ を仮定する．

◀ m と n が素数 p を公約数をもつことになる．これは，公約数をもたないことに矛盾する．

章末問題 2（解答）

解答（章末）I2.1 ★★★ 章末 p.86

問題文

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とするとき，次のことを証明せよ．

$$A = \{5x + 2y \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\} \text{ であるとき，} A = \mathbb{Z}$$

(i) $a \in A$ とすると，$a = 5x + 2y$ $(x,\ y \in \mathbb{Z})$ と表すことができる．
$5x + 2y$ は整数であるから，$a \in \mathbb{Z}$
すなわち，$a \in A$ ならば，$a \in \mathbb{Z}$ であるから，$A \subset \mathbb{Z}$
(ii) $a \in \mathbb{Z}$ とすると，$a = 5a + 2(-2a)$ であり，a，$-2a$ はともに整数であるから，

$$5a + 2(-2a) \in A$$

すなわち，$a \in \mathbb{Z}$ ならば，$a \in A$ であるから，$\mathbb{Z} \subset A$
よって，(i)，(ii) より，$A \subset \mathbb{Z}$ かつ $\mathbb{Z} \subset A$ であるから，$A = \mathbb{Z}$ が成り立つ． ■

◀ すべての整数は $5 \times$(整数)$+$ $2 \times$ (整数) で表すことができることを示す．

解答（章末）I2.2 ★★★ 章末 p.87

問題文

次の命題の真偽を調べよ．また，真のときにはその証明をし，偽のときには具体的な反例を挙げよ．ただし，a，b を自然数とする．
(1) a が奇数かつ b が奇数ならば，$a^2 + b^2$ が偶数
(2) $a^2 + b^2$ が偶数ならば，a が偶数かつ b が偶数
(3) $a^2 + b^2$ が奇数ならば，a が奇数または b が奇数

(1) a，b は奇数であるから，$a = 2m + 1$，$b = 2n + 1$ $(m,\ n$ は整数$)$ とおくと，

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \\ &= \left(4m^2 + 4m + 1\right) + \left(4n^2 + 4n + 1\right) \\ &= 2\left(2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1\right) \end{aligned}$$

したがって，$2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1$ は整数であるから，$a^2 + b^2$ は偶数である．
よって，命題は**真**である．
(2) $a = 3$，$b = 3$ のとき，$a^2 + b^2 = 18$ となり，$a^2 + b^2$ は偶数であるが，a，b はともに奇数である．
よって，命題は**偽**である．反例は，$a = \mathbf{3}$，$b = \mathbf{3}$
(3) もとの命題の対偶「a が偶数かつ b が偶数ならば，$a^2 + b^2$ が偶数」が正しいことを証明する．
a，b は偶数であるから，$a = 2m$，$b = 2n$ $(m,\ n$ は整数$)$ とおくと，

$$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 2\left(2m^2 + 2n^2\right)$$

$2m^2 + 2n^2$ は整数であるから，$a^2 + b^2$ は偶数である．
よって，対偶が証明されたので，もとの命題は**真**である．

◀ $2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1$ が整数であることを記すように注意すること．

◀ もとの命題のかわりに，対偶を用いて証明する．

解答（章末）I2.3 ★★　章末 p.88

問題文

次の命題を証明せよ．ただし，m，n は正の整数，$m > n$ とする．

$$\frac{m+n}{m-n} \text{ が既約分数ならば，} \frac{n}{m} \text{ は既約分数である．}$$

もとの命題の対偶「m，n が共通の素因数をもつならば，$m+n$，$m-n$ は共通の素因数をもつ」を証明する．

m，n に共通の素因数を k として，$m = ka$，$n = kb$（a，b は整数）とおくと，

$$m+n = k(a+b),\ m-n = k(a-b)$$

これらは，共通の素因数 k をもつ．

よって，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ．■

◀ もとの命題のかわりに，対偶を用いて証明する．

解答（章末）I2.4 ★★★　章末 p.89

問題文

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ はともに有理数であることを証明せよ．ただし，a，b を正の有理数とする．

$\sqrt{a}+\sqrt{b} = r$（r は正の有理数）とおくと，$\sqrt{b} = r - \sqrt{a} \cdots$ (i)

(i) の両辺を 2 乗すると，$b = (r-\sqrt{a})^2$

したがって，$b = r^2 - 2r\sqrt{a} + a$

ゆえに，$2r\sqrt{a} = r^2 + a - b$

r は正の有理数であるから，両辺を $2r$ $(\neq 0)$ で割って，

$$\sqrt{a} = \frac{r^2+a-b}{2r}$$

ここで，a，b，r は正の有理数であるから，$\frac{r^2+a-b}{2r}$ は有理数であり，$\sqrt{a}$ も有理数となる．

また，$\sqrt{a}$ が有理数のとき，(i) より，$\sqrt{b}$ も有理数である．

よって，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ はともに有理数である．■

◀ 有理数の和．差，積，商（0 の除算は除く）は有理数である．

◀ r と $\sqrt{a}$ が有理数であるから，$\sqrt{b} = r - \sqrt{a}$ も有理数である．

解答 2.2

One math

解答（章末）I2.5 ★★　章末 p.90

問題文

三角形の内角で，$60°$ 以上のものが少なくとも 1 つ存在することを証明せよ．

$\triangle$ABC において，すべての内角が $60°$ 未満であると仮定すると，

◀ 背理法を用いて証明する．

$$\angle \mathrm{A} < 60°,\quad \angle \mathrm{B} < 60°,\quad \angle \mathrm{C} < 60°$$

これらの角度を足し合わせると，

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} < 180°$$

これは，三角形の内角の和が $180°$ であることに矛盾する．

よって，三角形の内角で $60°$ 以上のものが少なくとも 1 存在する．■

2 次関数（解答）

2 次関数のグラフ（解答）

解答 I3.1.1 ★ 問題 p.92

問題文

関数 $f(x) = 4x^2 - x + 5$ について，次の値を求めよ．

(1) $f(2)$　(2) $f\left(-\frac{3}{2}\right)$　(3) $f(3a)$

(4) $f(2a+1)$　(5) $f(a^2-1)$

(1) $f(x)$ に $x = 2$ を代入すると，

$$f(2) = 4 \cdot 2^2 - 2 + 5 = 16 - 2 + 5 = \mathbf{19}$$

◀ $f(x) = 4x^2 - x + 5$ に 2 を代入する．

(2) $f(x)$ に $x = -\frac{3}{2}$ を代入すると，

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 = 4 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 5 = \mathbf{\frac{31}{2}}$$

(3) $f(x)$ に $x = 3a$ を代入すると，

$$f(3a) = 4 \cdot (3a)^2 - (3a) + 5 = \boldsymbol{36a^2 - 3a + 5}$$

(4) $f(x)$ に $x = 2a+1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} f(2a+1) &= 4(2a+1)^2 - (2a+1) + 5 \\ &= 4(4a^2 + 4a + 1) - (2a+1) + 5 \\ &= 16a^2 + 16a + 4 - 2a - 1 + 5 \\ &= \boldsymbol{16a^2 + 14a + 8} \end{aligned}$$

◀ 括弧をつけて $2a+1$ を代入する．

(5) $f(x)$ に $x = a^2 - 1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} f(a^2-1) &= 4(a^2-1)^2 - (a^2-1) + 5 \\ &= 4(a^4 - 2a^2 + 1) - a^2 + 1 + 5 \\ &= 4a^4 - 8a^2 + 4 - a^2 + 1 + 5 \\ &= \boldsymbol{4a^4 - 9a^2 + 10} \end{aligned}$$

解答 I3.1.2 ★ 問題 p.93

問題文

次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ．

(1) $y = -2x + 5\ (-2 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = x^2\ (-1 \leqq x \leqq 2)$

(1) $y = -2x + 5$ において，

$x = -2$ のとき

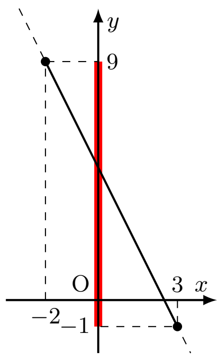
$$y = -2 \cdot (-2) + 5 = 4 + 5 = 9$$

$x = 3$ のとき

$$y = -2 \cdot 3 + 5 = -6 + 5 = -1$$

よって，グラフは右の図のようになる．

値域は $\boldsymbol{-1 \leqq y \leqq 9}$



◀ $y = -2x + 5$ のグラフは，y 切片が 5，傾きが -2 の直線である．

◀ グラフには，定義域の両端の座標を記す．

(2) $y = x^2$ において，

$x = -1$ のとき

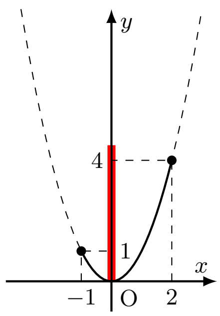
$$y = (-1)^2 = 1$$

$x = 2$ のとき

$$y = 2^2 = 4$$

よって，グラフは右の図のようになる．

値域は $\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 4}$



◀ $y = x^2$ のグラフは，頂点が原点，軸が y 軸であり，下に凸の放物線である．

◀ 定義域の端点が値域の端点になるとは限らないので注意すること．

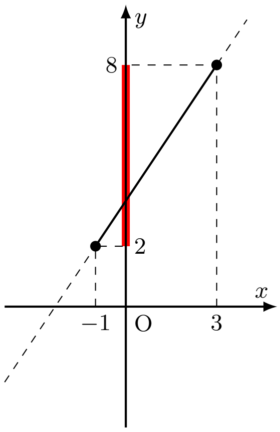
解答 I3.1.3 ★　問題 p.94

問題文

関数 $y = ax + b\ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 8，最小値が 2 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

(i) $a > 0$ のとき

グラフは右の図のようになり，



$$x = -1 \text{ のとき，最小値 } 2$$
$$x = 3 \text{ のとき，最大値 } 8$$

◀ 点 $(-1,\ 2)$ を通る．

◀ 点 $(3,\ 8)$ を通る．

をとるから，

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = 8 \end{cases}$$

◀ 点 $(-1,\ 2)$ を通ることから，$y = ax + b$ に代入して，

$$2 = -a + b$$

点 $(3, 8)$ にも同様の操作を行うと，$a \cdot 3 + b = 8$ が得られる．

したがって，$a = \frac{3}{2}$，$b = \frac{7}{2}$

これは，$a > 0$ を満たす．

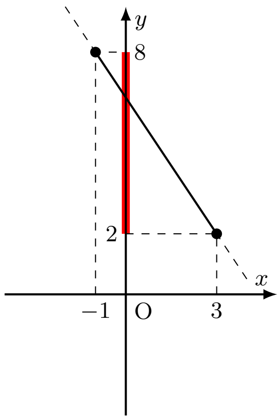
(ii) $a = 0$ のとき

$y = b$（定数関数）となり，最大値と最小値は一致するので，不適である．

◀ x 軸に平行な直線となる．

(iii) $a < 0$ のとき

グラフは右の図のようになり，



$$x = -1 \text{ のとき，最大値 } 8$$
$$x = 3 \text{ のとき，最小値 } 2$$

◀ 点 $(-1,\ 8)$ を通る．

◀ 点 $(3,\ 2)$ を通る．

をとるから，

$$\begin{cases} -a + b = 8 \\ 3a + b = 2 \end{cases}$$

◀ 連立方程式を解く．

したがって，$a = -\frac{3}{2}$，$b = \frac{13}{2}$

これは，$a < 0$ を満たす．

◀ 場合分けの条件を満たすことを確認する．

よって，(i)〜(iii) より，求める a，b の値は，$(a,\ b) = \left(\boldsymbol{\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{\frac{7}{2}}\right)$，$\left(\boldsymbol{-\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{\frac{13}{2}}\right)$

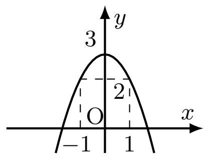
解答 I3.1.4 ★ 問題 p.95

問題文

次の 2 次関数のグラフは，2 次関数 $y=-x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか．また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

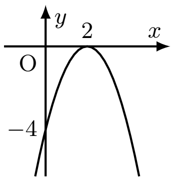
(1) $y=-x^2+3$　　(2) $y=-(x-2)^2$　　(3) $y=-(x+1)^2-4$

(1) y 軸方向に 3 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．
軸は **y 軸**（**直線 $x=0$**）
頂点は点 **(0，3)**



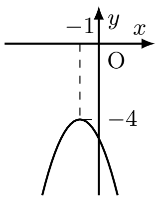
◀ $y=a(x-p)^2+q$ において，$p=0$ の形であるから，y 軸方向にのみ平行移動する．

(2) x 軸方向に 2 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．
軸は直線 **$x=2$**
頂点は点 **(2，0)**

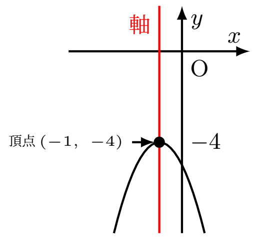


◀ $y=a(x-p)^2+q$ において，$q=0$ の形であるから，x 軸方向にのみ平行移動する．

(3) x 軸方向に -1，y 軸方向に -4 だけ平行移動したものであり，グラフは右の図のようになる．
軸は直線 **$x=-1$**
頂点は点 **(−1，−4)**



◀



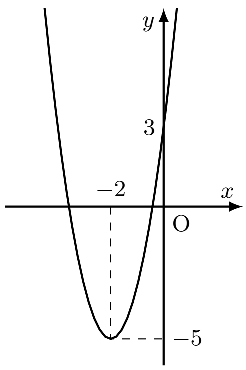
解答 I3.1.5 ★ 問題 p.96

問題文

次の 2 次関数のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ．

(1) $y=2x^2+8x+3$　　(2) $y=-x^2+6x-8$

(1)
$$\begin{aligned} y &= 2x^2+8x+3 \\ &= 2(x^2+4x)+3 \\ &= 2\{(x+2)^2-2^2\}+3 \\ &= 2(x+2)^2-8+3 \\ &= 2(x+2)^2-5 \end{aligned}$$
よって，グラフは右の図のようになる．
軸は直線 **$x=-2$**
頂点は点 **(−2，−5)**

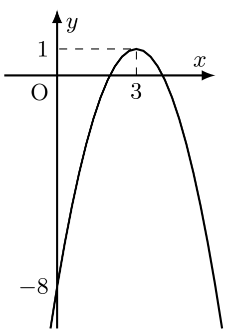


◀ 2 でくくり出す．

◀ x の係数の半分を 2 乗する．

◀ $y=a(x-p)^2+q$ の形であるから，軸や頂点を求めることができ，グラフがかける．

(2)
$$\begin{aligned} y &= -x^2+6x-8 \\ &= -(x^2-6x)-8 \\ &= -\{(x-3)^2-3^2\}-8 \\ &= -(x-3)^2+9-8 \\ &= -(x-3)^2+1 \end{aligned}$$
よって，グラフは右の図のようになる．
軸は直線 **$x=3$**
頂点は点 **(3，1)**



◀ -1 でくくり出す．

◀ x の係数の半分を 2 乗する．

解答 3.1

One math

解答 I3.1.6 ★★　問題 p.97

問題文

放物線 $y = x^2 - 6x + 5$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

放物線 $y = x^2 - 6x + 5$ の x を $x - 2$，y を $y + 3$ におき換えると，

◀ $x - 2$，$y + 3$ におき換える．

$$y + 3 = (x - 2)^2 - 6(x - 2) + 5$$

よって，求める放物線の方程式は，$\boldsymbol{y = x^2 - 10x + 18}$

◀ 移項して整理する．

【別解】

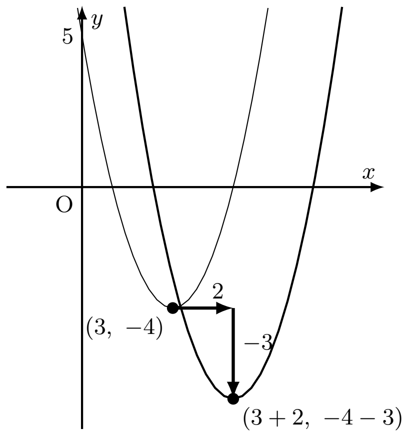
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 5 \\ &= (x^2 - 6x) + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 9 + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 4 \end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

したがって，もとの放物線 $y = x^2 - 6x + 5$ の頂点は点 $(3,\ -4)$ である．

この頂点を平行移動すると，点 $(3+2,\ -4-3)$ すなわち，点 $(5,\ -7)$ になる．

◀ 符号に注意すること．



よって，求める放物線の方程式は，$\boldsymbol{y = (x - 5)^2 - 7}$

◀ x^2 の係数は変わらない．$y = x^2 - 10x + 18$ としてもよい．

解答 3.1

解答 I3.1.7 ★★ 問題 p.98

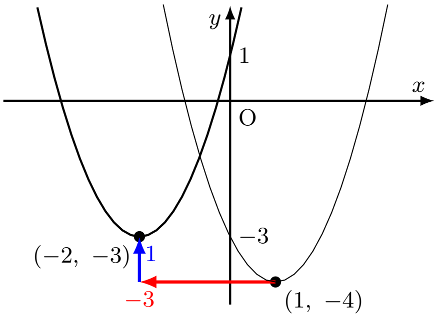
問題文

(1) 放物線 $y=x^2+4x+1$ は放物線 $y=x^2-2x-3$ をどのように平行移動したものか．
(2) x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y=-2x^2+5x-7$ になるような放物線 C の方程式を求めよ．

(1) $y=x^2+4x+1=(x+2)^2-3$ より，頂点は点 $(-2,\ -3)$

$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ より，頂点は点 $(1,\ -4)$

頂点 $(1,\ -4)$ が点 $(-2,\ -3)$ に移されるから，



$$x \text{ 軸方向に } -2-1=-3$$
$$y \text{ 軸方向に } -3-(-4)=1$$

だけ平行移動している．

よって，**x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの**である．

(2) 放物線 $y=-2x^2+5x-7$ において，

$$x \text{ 軸方向に } 2,\ y \text{ 軸方向に } -3$$

だけ平行移動したものが放物線 C である．

したがって，放物線 $y=-2x^2+5x-7$ の x を $x-2$, y を $y+3$ におき換えて，

$$y+3=-2(x-2)^2+5(x-2)-7$$

よって，$\boldsymbol{y=-2x^2+13x-28}$

【別解】 $y=-2x^2+5x-7=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{31}{8}$ より，頂点は点 $\left(\frac{5}{4},\ -\frac{31}{8}\right)$

したがって，放物線 C の頂点は点 $\left(\frac{5}{4}+2,\ -\frac{31}{8}-3\right)$

すなわち，点 $\left(\frac{13}{4},\ -\frac{55}{8}\right)$

よって，放物線 C の方程式は，

$$y=-2\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{55}{8}=\boldsymbol{-2x^2+13x-28}$$

◀ 頂点の座標を求める．

◀ 移動した後の座標から，移動する前の座標を引くことを考える．

◀ 頂点の移動に注目した解法である．

◀ 平行移動しても，x^2 の係数は変わらない．

解答 3.1

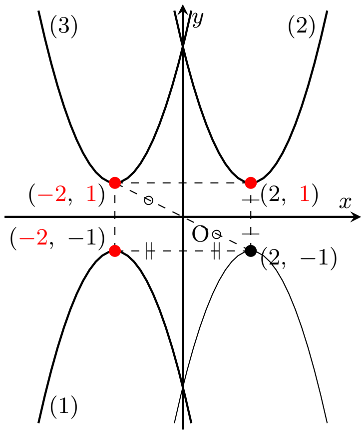
解答 I3.1.8 ★ 問題 p.99

問題文

放物線 $y=-x^2+4x-5$ を，次のように移動した放物線の方程式を求めよ．

(1) x 軸に関して対称移動　(2) y 軸に関して対称移動　(3) 原点に関して対称移動

(1) y を $-y$ におき換えて，$-y=-x^2+4x-5$
よって，$\boldsymbol{y=x^2-4x+5}$
(2) x を $-x$ におき換えて,$y=-(-x)^2+4(-x)-5$
よって，$\boldsymbol{y=-x^2-4x-5}$
(3) x を $-x$,y を $-y$ におき換えて,$-y=-(-x)^2+4(-x)-5$
よって，$\boldsymbol{y=x^2+4x+5}$



【別解】 $y=-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$ より，
頂点は点 $(2,\ -1)$ で上に凸の放物線である．

(1) 点 $(2,\ -1)$ を x 軸に関して対称移動すると，$(2,\ 1)$
移動したグラフは下に凸であるから，$\boldsymbol{y=(x-2)^2+1}$

◀ 答えを記すときは，標準形でも一般形でもよい．

(2) 点 $(2,\ -1)$ を y 軸に関して対称移動すると，$(-2,\ -1)$
移動したグラフは上に凸であるから，$\boldsymbol{y=-(x+2)^2-1}$
(3) 点 $(2,\ -1)$ を原点に関して対称移動すると，$(-2,\ 1)$
移動したグラフは下に凸であるから，$\boldsymbol{y=(x+2)^2+1}$

◀ x^2 の係数の符号が変わり，下に凸のグラフとなる．

解答 3.1

解答 I3.1.9 ★★★ 問題 p.100

問題文

放物線 $y = ax^2 + bx + c \cdots$ (i) を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，さらに y 軸に関して対称移動すると，放物線 $y = -x^2 + 6x + 4 \cdots$ (ii) になった．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

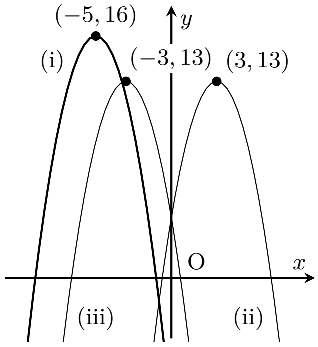
(ii) を y 軸に関して対称移動した放物線の方程式は，

$$y = -(-x)^2 + 6(-x) + 4$$

すなわち，$y = -x^2 - 6x + 4 \cdots$ (iii)

(iii) を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動するから，

$$y - 3 = -(x+2)^2 - 6(x+2) + 4$$



◀ 標準形にして，頂点の移動に注目して解いてもよい．

すなわち，$y = -x^2 - 10x - 9$

よって，$y = -x^2 - 10x - 9$ が (i) と一致するから，係数を比較すると，

◀ $y = ax^2 + bx + c \cdots$ (i) と係数を比較する．

$$a = \mathbf{-1},\quad b = \mathbf{-10},\quad c = \mathbf{-9}$$

【別解】 (i) のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線の方程式は，$y + 3 = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$

したがって，$y = ax^2 + (b-4a)x + (4a-2b+c-3)$

y 軸に関して対称移動すると，

$$y = a(-x)^2 + (b-4a)(-x) + (4a-2b+c-3)$$

ゆえに，$y = ax^2 + (4a-b)x + (4a-2b+c-3)$

したがって，$y = ax^2 + (4a-b)x + (4a-2b+c-3)$ が (ii) と一致するから，係数を比較すると，$a = -1$，$4a - b = 6$，$4a - 2b + c - 3 = 4$

◀ $y = -x^2 + 6x + 4 \cdots$ (ii) と係数を比較する．

よって，これを解いて，$a = \mathbf{-1}$，$b = \mathbf{-10}$，$c = \mathbf{-9}$

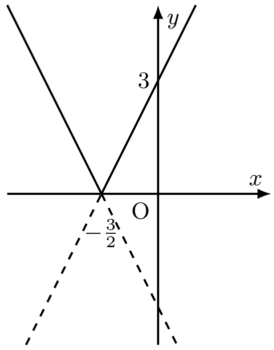
解答 3.1

解答 I3.1.10 ★★ 問題 p.101

問題文

次の関数のグラフをかけ．

(1) $y = |2x+3|$　　(2) $y = |x^2-4x+3|$



(1)　(i) $2x+3 \geqq 0$，すなわち，$x \geqq -\frac{3}{2}$ のとき

$$y = 2x+3$$

(ii) $2x+3 < 0$，すなわち，$x < -\frac{3}{2}$ のとき

$$y = -(2x+3) = -2x-3$$

よって，(i)，(ii) より，**グラフは右上の図のようになる．**

(2)　$x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$ より，
$x^2-4x+3 \geqq 0$ のとき，$x \leqq 1$，$3 \leqq x$
$x^2-4x+3 < 0$ のとき，$1 < x < 3$

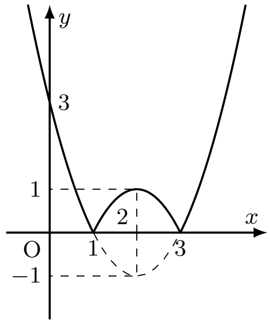
◀ 絶対値記号内が 0 になる値を境に場合分けをする．

(i) $x \leqq 1$，$x \geqq 3$ のとき

$$y = |x^2-4x+3| = x^2-4x+3 = (x-2)^2-1$$

(ii) $1 < x < 3$ のとき

$$y = |x^2-4x+3| = -(x^2-4x+3) = -(x-2)^2+1$$



よって，(i)，(ii) より，**グラフは右上の図のようになる．**

解答 I3.1.11 ★★★ 問題 p.102

問題文

関数 $y = |x+2| + |x-4|$ のグラフをかけ．

(i) $x < -2$ のとき

$$\begin{aligned}|x+2|+|x-4| &= -(x+2)-(x-4)\\ &= -2x+2\end{aligned}$$

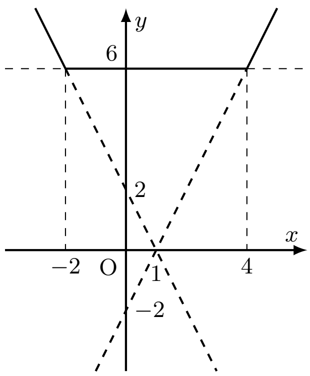
(ii) $-2 \leqq x < 4$ のとき

$$\begin{aligned}|x+2|+|x-4| &= (x+2)-(x-4)\\ &= 6\end{aligned}$$

◀ 定数関数 $y=6$ となる．

(iii) $x \geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned}|x+2|+|x-4| &= (x+2)+(x-4)\\ &= 2x-2\end{aligned}$$



よって，(i)〜(iii) より，**グラフは右上の図のようになる．**

◀ グラフは繋がっている．

解答 3.1

解答 I3.1.12 ★★★ 問題 p.103

問題文

不等式 $|x+4|+|2x-1| \leqq -2x+2$ をグラフを利用して解け.

$y=|x+4|+|2x-1|$ とおく.

(i) $x<-4$ のとき

$$y=-(x+4)-(2x-1)=-3x-3$$

(ii) $-4 \leqq x < \frac{1}{2}$ のとき

$$y=(x+4)-(2x-1)=-x+5$$

(iii) $\frac{1}{2} \leqq x$ のとき

$$y=(x+4)+(2x-1)=3x+3$$

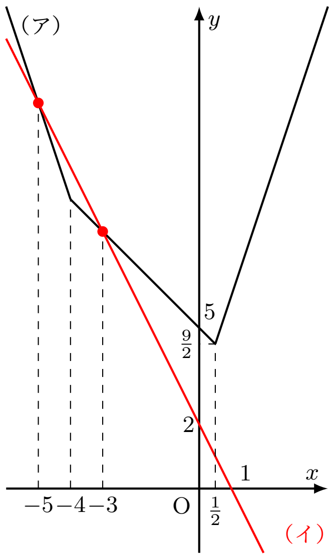
したがって,(i)〜(iii) より,関数 $y=|x+4|+|2x-1|$ のグラフは右の図の（ア）となる. 一方, 関数 $y=-2x+2$ のグラフは右の図の（イ）となる. 右の図より,（ア）と（イ）のグラフは, $x<-4$ または $-4 \leqq x < \frac{1}{2}$ の範囲で交わる.

（ア）と（イ）のグラフの交点の x 座標は, $x<-4$ のとき, $-3x-3=-2x+2$ より, $x=-5$

$-4 \leqq x < \frac{1}{2}$ のとき, $-x+5=-2x+2$ より, $x=-3$

よって, 不等式 $|x+4|+|2x-1| \leqq -2x+2$ の解は,

$$\boldsymbol{-5 \leqq x \leqq -3}$$



◀ 2 つの関数のグラフをかいて, グラフの上下関係を利用して不等式の解を求める.

解答 3.1

解答（節末）I3.1.1 ★ 節末 p.104

問題文

関数 $f(x)=3x^2-2x+2$ について，$f(f(a))$ の値を求めよ．

$f(x)$ の式に，$x=f(a)=3a^2-2a+2$ を代入して，

$$\begin{aligned} f(f(a)) &= 3\left(3a^2-2a+2\right)^2-2\left(3a^2-2a+2\right)+2 \\ &= \mathbf{27a^4-36a^3+42a^2-20a+10} \end{aligned}$$

◀ $(x+y+z)^2$
$=x^2+y^2+z^2$
$+2xy+2yz+2zx$

解答（節末）I3.1.2 ★★ 節末 p.105

問題文

2 つの放物線 $y=3x^2-18x+25$ と $y=ax^2+8x+b$ の頂点が一致するように定数 a，b の値を定めよ．

$$y=3x^2-18x+25=3\left(x^2-6x\right)+25=3(x-3)^2-2,$$

$$\begin{aligned} y &= ax^2+8x+b \\ &= a\left(x^2+\frac{8}{a}x\right)+b \\ &= a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2-a\left(\frac{4}{a}\right)^2+b \\ &= a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2-\frac{16}{a}+b \end{aligned}$$

◀ $y=ax^2+8x+b$ は放物線であるから，$a\neq 0$

よって，2 つの放物線の頂点の座標は，それぞれ，

$$(3,\ -2),\ \left(-\frac{4}{a},\ -\frac{16}{a}+b\right)$$

与えられた条件より，

$$3=-\frac{4}{a},\ -2=-\frac{16}{a}+b$$

これを解くと，$a=\mathbf{-\frac{4}{3}}$，$b=\mathbf{-14}$

◀ 連立方程式を解く．

【別解】 放物線 $y=3x^2-18x+25$ の頂点は，点 $(3,\ -2)$

したがって，2 つの放物線の頂点が一致するための条件は，$y=ax^2+8x+b$ が $y=a(x-3)^2-2\cdots$(i) と表されることであるから，(i) を展開すると，

$$y=ax^2-6ax+9a-2$$

これと $y=ax^2+8x+b$ の係数を比較すると，$8=-6a$，$b=9a-2$

これを解くと，$a=\mathbf{-\frac{4}{3}}$，$b=\mathbf{-14}$

解答 3.1

解答（節末）I3.1.3 ★★ 節末 p.106

問題文

$y = ax^2 + bx + c$ で表される放物線が点 $(1,\ -2)$ に関して放物線 $y = -3x^2$ と点対称であるとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

放物線 $y = -3x^2$ の頂点は点 $(0,\ 0)$

この点を点 $(1,\ -2)$ に関して対称に移動すると，点 $(2,\ -4)$ となる．

◀ 対称に移動した点 $(x,\ y)$ は，$\frac{x+0}{2} = 1,\ \frac{y+0}{2} = -2$ より，点 $(2,\ -4)$ と x 座標，y 座標を求めることができる．

もとのグラフの x^2 の係数が -3 であるから，移動したグラフは下に凸の放物線であり，x^2 の係数は 3 である．

したがって，点 $(1,\ -2)$ に関して放物線 $y = -3x^2$ と点対称である放物線の方程式は

$$y = 3(x-2)^2 - 4 = 3x^2 - 12x + 8$$

よって，$a = \mathbf{3},\ b = \mathbf{-12},\ c = \mathbf{8}$

解答（節末）I3.1.4 ★★ 節末 p.107

問題文

放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ を x 軸方向に 3 だけ平行移動し，さらに直線 $y = 2$ に関して折り返してできる放物線の方程式を求めよ．

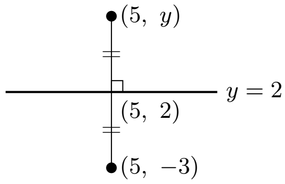
$$y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$$

したがって，もとの放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ の頂点は点 $(2,\ -3)$ である．

この頂点を x 軸方向に 3 だけ平行移動すると，点 $(5,\ -3)$ となる．

さらに，直線 $y = 2$ に関して折り返すと，頂点は点 $(5,\ 7)$ となる．

◀ $\frac{y+(-3)}{2} = 2$ より，折り返したグラフの頂点の y 座標は 7 である．



もとのグラフの x^2 の係数が 1 であるから，移動したグラフは上に凸の放物線であり，x^2 の係数は -1 である．

よって，$\boldsymbol{y = -(x-5)^2 + 7}$

解答（節末）I3.1.5 ★★★ 節末 p.108

問題文

次の関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(1) $f(x)=|x-2|+|x-4|+|x-6|$　　(2) $f(x)=|x+|2x-10||$

(1) $x<2$ のとき

$$f(x)=-(x-2)-(x-4)-(x-6)=-3x+12$$

◀ $x-2<0,\ x-4<0,\ x-6<0$

$2\leqq x<4$ のとき

$$f(x)=(x-2)-(x-4)-(x-6)=-x+8$$

◀ $x-2\geqq 0,\ x-4<0,\ x-6<0$

$4\leqq x<6$ のとき

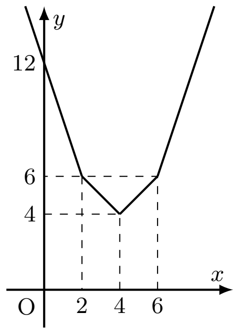
$$f(x)=(x-2)+(x-4)-(x-6)=x$$

◀ $x-2>0,\ x-4\geqq 0,\ x-6<0$

$6\leqq x$ のとき

$$f(x)=(x-2)+(x-4)+(x-6)=3x-12$$

◀ $x-2>0,\ x-4>0,\ x-6\geqq 0$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=4}$ で**最小値 4** をとる．

(2) $2x-10\geqq 0$，すなわち，$x\geqq 5$ のとき

◀ 先に，$2x-10$ の絶対値記号を外し，$2x-10\geqq 0,\ 2x-10<0$ で場合分けをする．

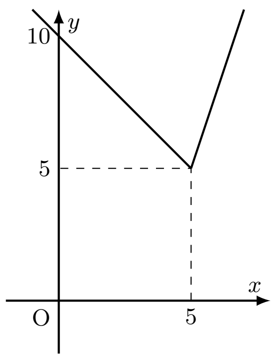
$$f(x)=|x+2x-10|=|3x-10|$$

$x\geqq 5$ より，$3x-10>0$ であるから，$f(x)=3x-10$

$2x-10<0$，すなわち，$x<5$ のとき

$$f(x)=|x-(2x-10)|=|10-x|$$

$x<5$ より，$10-x>0$ であるから，$f(x)=-x+10$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになるから，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=5}$ で**最小値 5** をとる．

2 次関数の最大・最小と決定（解答）

解答 I3.2.1 ★　問題 p.109

問題文

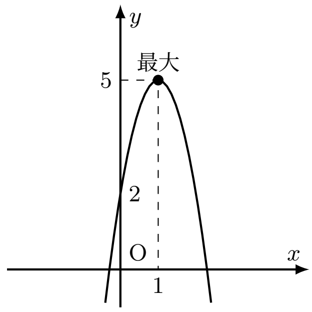
次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

(1) $y=-3x^2+6x+2$　　(2) $y=4x^2+8x-1$

(1)
$$\begin{aligned} y &= -3x^2+6x+2 \\ &= -3(x^2-2x)+2 \\ &= -3\{(x-1)^2-1^2\}+2 \\ &= -3(x-1)^2+5 \end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

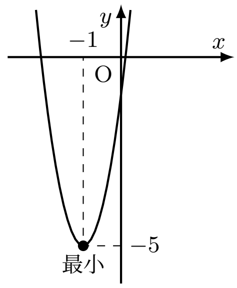
よって，$x=1$ のとき，**最大値 5，最小値はない．**



(2)
$$\begin{aligned} y &= 4x^2+8x-1 \\ &= 4(x^2+2x)-1 \\ &= 4\{(x+1)^2-1^2\}-1 \\ &= 4(x+1)^2-5 \end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

よって，$x=-1$ のとき，**最小値 -5，最大値はない．**



解答 I3.2.2 ★★　問題 p.110

問題文

次の定義域における 2 次関数 $y=-x^2+4x+1$ の最大値，最小値を求めよ．

(1) $0 \leqq x < 2$　　(2) $1 < x \leqq 4$

◀ 平方完成する．

$$y=-x^2+4x+1=-\{(x-2)^2-4\}+1=-(x-2)^2+5$$

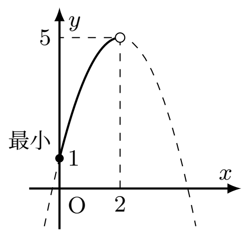
◀ 軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ 5)$ の上に凸の放物線である．

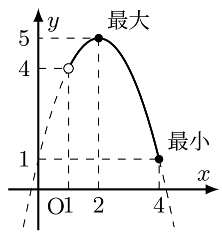
(1) $x=0$ のとき，$y=1$，$x=2$ のとき，$y=5$

したがって，$0 \leqq x < 2$ のとき，グラフは右の図のようになる．

よって，$x=0$ のとき，**最小値 1，最大値はない．**

◀ $0 \leqq x < 2$ より，$x=2$ は定義域に含まれないので，最大値はない．





(2) $x=1$ のとき，$y=4$，$x=4$ のとき，$y=1$

したがって，$1 < x \leqq 4$ のとき，グラフは右の図のようになる．

よって，$x=2$ のとき，**最大値 5**，$x=4$ のとき，**最小値 1**

解答 I3.2.3 ★★★ 問題 p.111

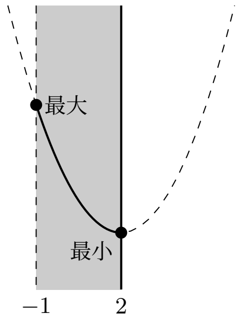
問題文

関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 2b$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -1 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

$$f(x) = ax^2 - 4ax + 2b = a(x-2)^2 - 4a + 2b$$

(i) $a > 0$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ は, $x = -1$ のとき, 最大値 $5a+2b$, $x = 2$ のとき，最小値 $-4a+2b$ をとる．



◀ 軸から遠い方の端点である $x = -1$ のとき，最大となる．

したがって，$\begin{cases} 5a + 2b = 5 \\ -4a + 2b = -1 \end{cases}$

ゆえに，$a = \frac{2}{3}$，$b = \frac{5}{6}$

これは $a > 0$ を満たす．

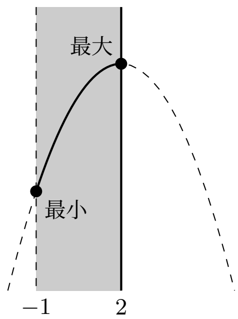
◀ 場合分けの条件を満たすことを確認する．

(ii) $a = 0$ のとき

$f(x) = 2b$ で一定の値をとり，最大値 5，最小値 -1 をとることはないから，不適である．

(iii) $a < 0$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ は, $x = 2$ のとき, 最大値 $-4a+2b$, $x = -1$ のとき，最小値 $5a+2b$ をとる．



◀ 軸から遠い方の端点である $x = -1$ のとき，最小となる．

したがって，$\begin{cases} -4a + 2b = 5 \\ 5a + 2b = -1 \end{cases}$

ゆえに，$a = -\frac{2}{3}$，$b = \frac{7}{6}$

これは $a < 0$ を満たす．

よって，(i)〜(iii) より，求める a，b の値は，$(a,\ b) = \boldsymbol{\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{6}\right),\ \left(-\frac{2}{3},\ \frac{7}{6}\right)}$

解答 3.2

解答 I3.2.4 ★★★ 問題 p.112

問題文

(1) $a>0$ とする．関数 $f(x)=x^2-4x+6\ (0 \leqq x \leqq a)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

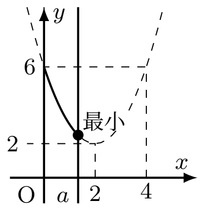
(2) $a>0$ とする．関数 $f(x)=-x^2+6x-8\ (0 \leqq x \leqq a)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(1)　$f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$ $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$

(i) $0<a<2$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a$ のとき最小となり，最小値 $f(a)=a^2-4a+6$

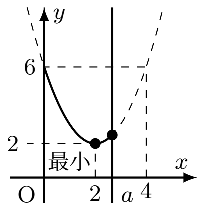


◀ 定義域 $0 \leqq x \leqq a$ に軸が含まれるとき，最小となる点は頂点となるので，軸を含むか否かで場合分けをする．

(ii) $2 \leqq a$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=2$ のとき最小となり，最小値 $f(2)=2$



よって，(i)，(ii) より，

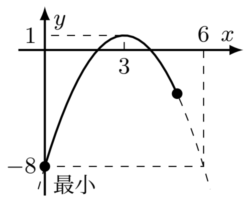
$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a<2\ のとき，} & \boldsymbol{x=a\ で最小値\ a^2-4a+6} \\ \boldsymbol{2 \leqq a\ のとき，} & \boldsymbol{x=2\ で最小値\ 2} \end{cases}$$

(2)　$f(x)=-x^2+6x-8=-(x-3)^2+1$ $y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=3$．

(i) $0<a<6$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=0$ のとき最小となり，最小値 $f(0)=-8$

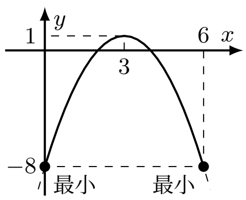


◀ $x=0$ の方が軸から遠いので，$x=0$ で最小となる．

(ii) $a=6$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=0,\ 6$ のとき最小となり，最小値 $f(0)=f(6)=-8$

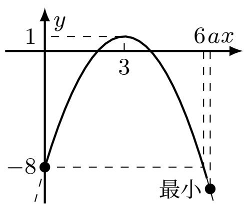


◀ 定義域の両端における y 座標が等しくなる．

(iii) $6<a$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a$ のとき最小となり，最小値 $f(a)=-a^2+6a-8$



◀ $x=a$ の方が軸から遠いので，$x=a$ で最小となる．

よって，(i)〜(iii) より，

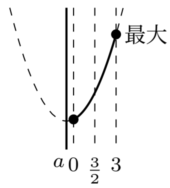
$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a<6\ のとき，} & \boldsymbol{x=0\ で最小値\ -8} \\ \boldsymbol{a=6\ のとき，} & \boldsymbol{x=0,\ 6\ で最小値\ -8} \\ \boldsymbol{6<a\ のとき，} & \boldsymbol{x=a\ で最小値\ -a^2+6a-8} \end{cases}$$

解答 I3.2.5 ★★★ 問題 p.113

問題文
(1) 関数 $f(x)=x^2-2ax+3\ (0\leqq x\leqq 3)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．
(2) 関数 $f(x)=x^2-2ax+5\ (1\leqq x\leqq 4)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

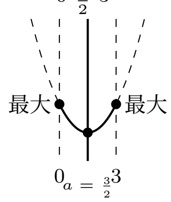
(1)　$y=x^2-2ax+3=(x-a)^2-a^2+3$
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$

(i) $a<\frac{3}{2}$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=3$ のとき最大となり，最大値 $f(3)=-6a+12$

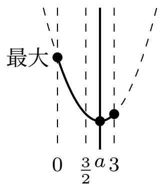


◀ 軸が定義域の中央である $x=\frac{3}{2}$ より左側にあるとき，右側にあるときで場合分けをする．

(ii) $a=\frac{3}{2}$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=0,\ 3$ のとき最大となり,最大値 $f(0)=f(3)=3$



(iii) $\frac{3}{2}<a$ のとき
グラフは右の図のようになる．
$x=0$ のとき最大となり，最大値 $f(0)=3$



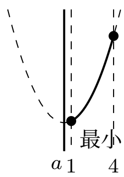
◀ $x=0$ の方が軸から遠いので，$x=0$ で最大となる．

よって，(i)〜(iii) より，

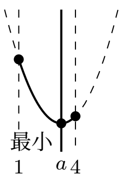
$$\begin{cases} \boldsymbol{a<\frac{3}{2}} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=3} \textbf{ で最大値 } \boldsymbol{-6a+12} \\ \boldsymbol{a=\frac{3}{2}} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=0,\ 3} \textbf{ で最大値} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{\frac{3}{2}<a} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=0} \textbf{ で最大値} \boldsymbol{3} \end{cases}$$

(2)　$y=x^2-2ax+5=(x-a)^2-a^2+5$
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$

(i) $a<1$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域より左側にある．
$x=1$ のとき最小となり，最小値 $f(1)=-2a+6$

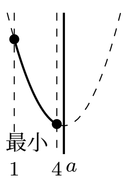


(ii) $1\leqq a\leqq 4$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域内にある．
$x=a$ のとき最小となり，最小値 $f(a)=-a^2+5$



◀ 頂点で最小値をとる．

(iii) $4<a$ のとき
グラフは右の図のようになり，軸は定義域より右側にある．
$x=4$ のとき最小となり，最小値 $f(4)=-8a+21$



よって，(i)〜(iii) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=1} \textbf{ で最小値 } \boldsymbol{-2a+6} \\ \boldsymbol{1\leqq a\leqq 4} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=a} \textbf{ で最小値} \boldsymbol{-a^2+5} \\ \boldsymbol{4<a} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=4} \textbf{ で最小値} \boldsymbol{-8a+21} \end{cases}$$

解答 I3.2.6 ★★★ 問題 p.114

問題文

(1) 関数 $f(x)=x^2-2x+3\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=x^2-4x+5\ (a \leqq x \leqq a+2)$ について，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(1)　$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

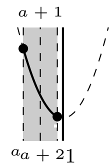
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=1$

◀ 軸が定義域の左側にあるとき，区間内にあるとき，右側にあるときで場合分けをする．

(i) $a+2<1$，すなわち，$a<-1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

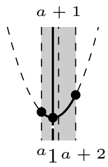
$x=a+2$ で最小となり，最小値 $f(a+2)=a^2+2a+3$



(ii) $a \leqq 1 \leqq a+2$，すなわち，$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

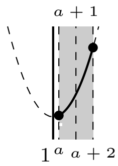
$x=1$ で最小となり，最小値 $f(1)=2$



(iii) $1<a$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a$ で最小となり，最小値 $f(a)=a^2-2a+3$



よって，(i)〜(iii) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<-1\ のとき，} & \boldsymbol{x=a+2\ で最小値\ a^2+2a+3} \\ \boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 1\ のとき，} & \boldsymbol{x=1\ で最小値\ 2} \\ \boldsymbol{1<a\ のとき，} & \boldsymbol{x=a\ で最小値\ a^2-2a+3} \end{cases}$$

(2)　$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

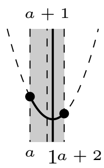
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$

(i) $a+1<2$，すなわち，$a<1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a$ で最大となり，最大値 $f(a)=a^2-4a+5$

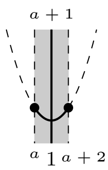
◀ $x=a$ の方が軸から遠いので，$x=a$ で最大となる．



(ii) $a+1=2$，すなわち，$a=1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=1,\ 3$ で最大となり，最大値 $f(1)=f(3)=2$

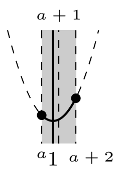


(iii) $2<a+1$，すなわち，$a>1$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a+2$ で最大となり，最大値 $f(a+2)=a^2+1$

◀ $x=a+2$ の方が軸から遠いので，$x=a+2$ で最大となる．



よって，(i)〜(iii) より，

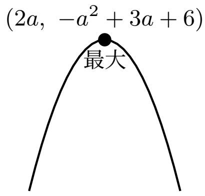
$$\begin{cases} \boldsymbol{a<1\ のとき，} & \boldsymbol{x=a\ で最大値\ a^2-4a+5} \\ \boldsymbol{a=1\ のとき，} & \boldsymbol{x=1,\ 3\ で最大値\ 2} \\ \boldsymbol{a>1\ のとき，} & \boldsymbol{x=a+2\ で最大値\ a^2+1} \end{cases}$$

解答 I3.2.7 ★★★ 問題 p.115

問題文

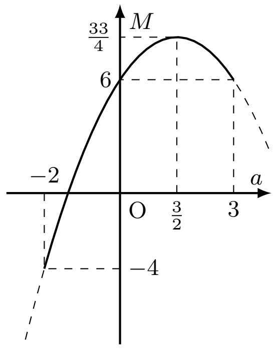
x の 2 次関数 $y=-x^2+4ax-5a^2+3a+6$ の最大値を M とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．
(1) 最大値 M を a を用いて表せ．
(2) a の値が $-2 \leqq a \leqq 3$ で変化するとき，M の最小値を求めよ．

(1)
$$\begin{aligned} y &= -x^2+4ax-5a^2+3a+6 \\ &= -\left\{(x-2a)^2-(2a)^2\right\}-5a^2+3a+6 \\ &= -(x-2a)^2-a^2+3a+6 \end{aligned}$$
グラフは右の図のようになる．
よって, y は $x=2a$ で最大値 $\boldsymbol{M=-a^2+3a+6}$



◀ 平方完成する．

(2)
$$\begin{aligned} M &= -a^2+3a+6 \\ &= -\left(a^2-3a\right)+6 \\ &= -\left\{\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+6 \\ &= -\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{33}{4} \end{aligned}$$
グラフは右の図のようになる．
よって，$-2 \leqq a \leqq 3$ の範囲において，a の関数 M は，$a=-2$ で**最小値 -4**



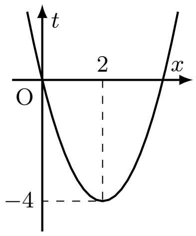
◀ M は a の 2 次式で表される．

解答 I3.2.8 ★★★ 問題 p.116

問題文

関数 $y=\left(x^2-4x\right)^2+6\left(x^2-4x\right)$ について，次の問いに答えよ．
(1) $t=x^2-4x$ とおいて，t のとりうる値の範囲を求めよ．
(2) y を t の式で表し，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(1)
$$\begin{aligned} t &= x^2-4x \\ &= (x-2)^2-4 \end{aligned}$$
グラフは右の図のようになる．
よって，t のとりうる値の範囲は，$\boldsymbol{t \geqq -4}$

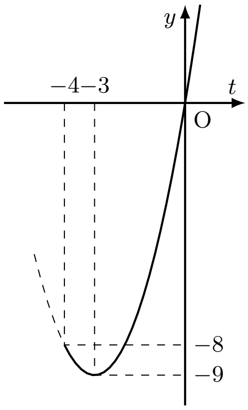


◀ t は x についての 2 次関数となるので，x 軸，y 軸ではなく，x 軸，t 軸であることに注意すること．

(2) $t=x^2-4x$ とおくと，

$$y=t^2+6t=(t+3)^2-9 \cdots \text{(i)}$$

(1) より，$t \geqq -4$ であるから，この範囲で，(i) のグラフをかくと，右の図のようになる．
したがって，$t=-3$ のとき，y は最小値 -9 をとる．
また，$t=-3$ のとき，$x^2-4x=-3$
ゆえに，$x=1,\ 3$
よって，$\boldsymbol{x=1,\ 3}$ **のとき，最小値 -9**



◀ (1) で求めた t の値の範囲を忘れないようにする．また，x 軸ではなく，t 軸であることに注意すること．

解答 3.2

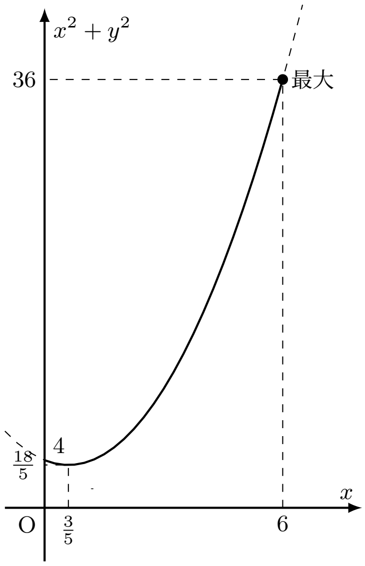
解答 I3.2.9 ★★★ 問題 p.117

問題文

$x+3y=6$ を満たすとき，次の問いに答えよ．
(1) x^2+y^2 の最小値を求めよ．
(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ．

(1) $x+3y=6$ より，$y=2-\frac{x}{3}\cdots$(i)
したがって，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+\left(2-\frac{x}{3}\right)^2 \\ &= x^2+\left(4-\frac{4x}{3}+\frac{x^2}{9}\right) \\ &= \frac{10}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4 \\ &= \frac{10}{9}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{18}{5}\cdots\text{(ii)} \end{aligned}$$



◀ y を代入して，文字を消去する．なお，$x=6-3y$ として，x を代入して，文字を消去してもよい．

ゆえに，$x=\frac{3}{5}$ で最小値 $\frac{18}{5}$
このとき，(i) より，$y=2-\frac{3}{5}\div 3=\frac{9}{5}$
よって，$x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{9}{5}$ のとき，**最小値 $\frac{18}{5}$**
(2) $y \geqq 0$ であるから，(i) より，$2-\frac{x}{3} \geqq 0$
$x \geqq 0$ との共通範囲は，$0 \leqq x \leqq 6\cdots$(iii)

(ii) より，(iii) において，x^2+y^2 は $x=6$ で最大値 36
このとき，(i) より，$y=2-\frac{6}{3}=0$
よって，$x=6$，$y=0$ のとき，**最大値 36**

解答 I3.2.10 ★★ 問題 p.118

問題文

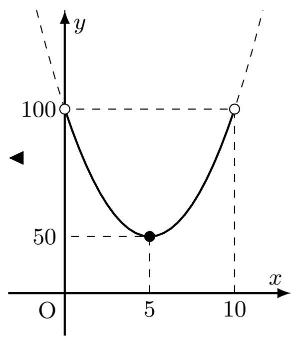
直角を挟む 2 辺の長さの和が 10 である直角三角形において，斜辺の長さが最小となる直角三角形を求め，その斜辺の長さを求めよ．

直角を挟む 2 辺のうち一方の辺の長さを x とすると，他方の辺の長さは $10-x$ である．
また，$x>0$，$10-x>0$ であるから，$0<x<10$
斜辺の長さを l とすると，

$$l^2=x^2+(10-x)^2=2x^2-20x+100=2\left(x^2-10x\right)+100=2(x-5)^2+50$$

$0<x<10$ において，l^2 は $x=5$ で最小値 50 をとる．

◀



このとき，他方の辺の長さは $10-5=5$
ここで，$l>0$ であるから，l^2 が最小となるとき，l も最小となる．
よって，求める直角三角形は，**直角を挟む 2 辺の長さがともに 5 の直角二等辺三角形**で，斜辺の長さは，$\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

解答 3.2

解答 I3.2.11 ★★ 問題 p.119

問題文

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．
(1) 頂点が点 $(-2,\ 3)$ で，点 $(1,\ 6)$ を通る．
(2) 軸が直線 $x=2$ で，2 点 $(0,\ -4)$, $(3,\ 5)$ を通る．

(1) 頂点が点 $(-2,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は，

$$y=a(x+2)^2+3$$

と表される．

◀ 頂点が与えられているので，標準形を用いる．

この関数のグラフが点 $(1,\ 6)$ を通るから，

$$6=a(1+2)^2+3$$

◀ $y=a(x+2)^2+3$ に，$x=1$, $y=6$ を代入する．

したがって，$a=\frac{1}{3}$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}(x+2)^2+3}$

(2) 軸が直線 $x=2$ であるから，求める 2 次関数は，

$$y=a(x-2)^2+q$$

と表される．

◀ 軸が与えられているので，標準形を用いる．

この関数のグラフが 2 点 $(0,\ -4)$, $(3,\ 5)$ を通るから，

$$-4=a(0-2)^2+q,\quad 5=a(3-2)^2+q$$

◀ $x=0$, $y=-4$ と $x=3$, $y=5$ を，それぞれ $y=a(x-2)^2+q$ に代入する．

したがって，$4a+q=-4$, $a+q=5$

◀ 連立方程式を解く．

これを解いて，$a=-3$, $q=8$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=-3(x-2)^2+8}$

解答 I3.2.12 ★★ 問題 p.120

問題文

次の 3 点を通るような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(1) $(1,\ 7)$，$(3,\ 7)$，$(-2,\ -8)$　　(2) $(-1,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(2,\ -12)$

(1) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．
この関数のグラフが 3 点 $(1,\ 7)$，$(3,\ 7)$，$(-2,\ -8)$ を通るから，

$$\begin{cases} 7=a+b+c\cdots\text{(i)} \\ 7=9a+3b+c\cdots\text{(ii)} \\ -8=4a-2b+c\cdots\text{(iii)} \end{cases}$$

◀ $y=ax^2+bx+c$ に (i) は $x=1$，$y=7$，(ii) は $x=3$，$y=7$，(iii) は $x=-2$，$y=-8$ をそれぞれ代入している．

(ii) $-$ (i) より，$0=8a+2b$，すなわち，$4a+b=0\cdots$(iv)
(ii) $-$ (iii) より，$15=5a+5b$，すなわち，$a+b=3\cdots$(v)
(iv)，(v) を解いて，$a=-1$，$b=4$
したがって，これを (i) に代入すると，$c=4$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=-x^2+4x+4}$

◀ c を消去して，a，b についての連立方程式 (iv)，(v) を解く．

(2) x 軸との共有点の座標が $(-1,\ 0)$，$(4,\ 0)$ であるから，求める 2 次関数は，

$$y=a(x+1)(x-4)$$

と表される．
この関数のグラフが点 $(2,\ -12)$ を通るから，

$$-12=a(2+1)(2-4)$$

したがって，$a=2$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=2(x+1)(x-4)}$

◀ $y=2x^2-6x-8$ でもよい．

解答 3.2

One math

解答 I3.2.13 ★★★ 問題 p.121

問題文

次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．
(1) 頂点が x 軸上にあり，2 点 $(1,\ 4)$，$(-3,\ 36)$ を通る．
(2) 放物線 $y=3x^2$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 9)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある．

(1) 頂点が x 軸上にあるから，求める 2 次関数は，$y=a(x-p)^2$ と表される．
このグラフが 2 点 $(1,\ 4)$，$(-3,\ 36)$ を通るから，

$$a(1-p)^2=4\cdots(\mathrm{i}),\quad a(p+3)^2=36\cdots(\mathrm{ii})$$

◀ 求める 2 次関数は $y=a(x-p)^2+q$ と表される．頂点が x 軸上にあることから，$q=0$ とする．

(i)×9 と (ii) より，$9a(1-p)^2=a(p+3)^2$
$a\neq 0$ であるから，$9(1-p)^2=(p+3)^2$
したがって，$p^2-3p=0$
この方程式を解いて，$p=0,\ 3$
(i) より，$p=0$ のとき $a=4$，$p=3$ のとき $a=1$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=4x^2}$**，**$\boldsymbol{y=(x-3)^2}$

(2) 放物線 $y=3x^2$ を平行移動したもので，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，頂点の座標を $(p,\ 2p-3)$ とすると，求める 2 次関数は，$y=3(x-p)^2+2p-3\cdots(\mathrm{i})$ と表される．

◀ 頂点 $(p,\ q)$ が直線 $y=2x-3$ 上にある．よって，$q=2p-3$ から，頂点の座標を $(p,\ 2p-3)$ とすることができる．

この関数のグラフが点 $(2,\ 9)$ を通るから，$3(2-p)^2+2p-3=9$
したがって，$3(4-4p+p^2)+2p-3=9$
ゆえに，$p(3p-10)=0$
これを解いて，$p=0$，$p=\frac{10}{3}$
(i) より，$p=0$ のとき，$y=3(x-0)^2+2\cdot 0-3=3x^2-3$
また，$p=\frac{10}{3}$ のとき，$y=3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+2\cdot\frac{10}{3}-3=3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$
よって，求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=3x^2-3}$**，**$\boldsymbol{y=3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{11}{3}}$

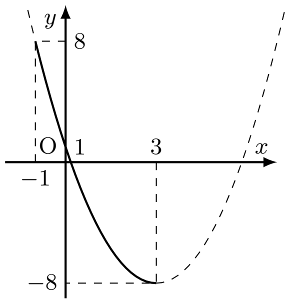
解答（節末）I3.2.1 ★★ 節末 p.122

問題文

関数 $y = x^2 - 6x + k + 3\ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値の和が 0 であるとき，定数 k の値とそのときの最大値，最小値を求めよ．

$$y = x^2 - 6x + k + 3 = (x-3)^2 + k - 6$$

◀ 平方完成する．



したがって，グラフは右の図のようになる．
グラフより，$x = -1$ のとき，最大値 $k + 10$，$x = 3$ のとき，最小値 $k - 6$ をとる．
最大値と最小値の和が 0 であるから，

$$(k+10) + (k-6) = 0$$

よって，$k = \mathbf{-2}$
また，$x = -1$ のとき，**最大値 8**，$x = 3$ のとき，**最小値 −8**

解答 3.2

解答（節末）I3.2.2 ★★★★ 節末 p.123

問題文

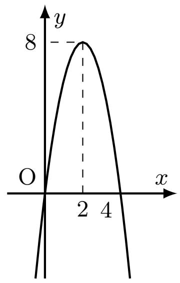
2 次関数 $y=-2x^2+8x$ について，次の問いに答えよ．
(1) この関数のグラフの頂点，x 軸の共有点，y 軸の共有点の座標を求め，グラフをかけ．
(2) $a \leqq x \leqq a+1$ における関数の最大値が 6 であるような定数 a の値を求めよ．

(1) $f(x)=-2x^2+8x$ とすると，

$$f(x)=-2x^2+8x=-2(x^2-4x)=-2(x-2)^2+8$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は，$\mathbf{(2,\ 8)}$

$f(x)=0$ とすると，$-2x^2+8x=0$
ゆえに，$-2x(x-4)=0$ より，$x=0,\ 4$
したがって，$y=f(x)$ と x 軸の共有点の座標は，
$\mathbf{(0,\ 0)}$，$\mathbf{(4,\ 0)}$
また，$f(0)=0$ より，y 軸の共有点の座標は，$\mathbf{(0,\ 0)}$
よって，$y=f(x)$ の**グラフは右の図のようになる．**



(2) $y=f(x)$ の最大値が 6 であるから，$a \leqq x \leqq a+1$ に軸である直線 $x=2$ は含まれない．

◀ $a \leqq x \leqq a+1$ に軸が含まれる場合は，最大値が 8 となり不適である．

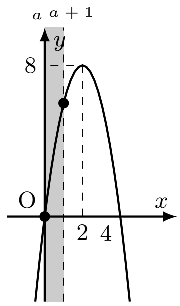
(i) $a+1<2$，すなわち $a<1$ のとき

◀ 軸が $a \leqq x \leqq a+1$ より，右側にあるときを考える．

$f(x)$ は $x=a+3$ のとき最大となるから，

$f(a+1)=-2(a+1)^2+8(a+1)=-2a^2+4a+6$

したがって，$f(a+1)=6$ より，$-2a^2+4a+6=6$
ゆえに，$-2a(a-2)=0$ であるから，$a=0,\ 2$
したがって，$a<1$ より，$a=0$



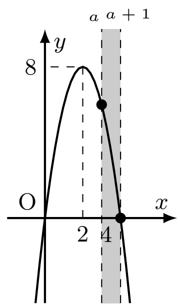
(ii) $2 \leqq a$ のとき

◀ 軸が $a \leqq x \leqq a+1$ より，左側にあるときを考える．

$f(x)$ は $x=a$ のとき最大となるから，

$$f(a)=-2a^2+8a$$

したがって，$f(a)=6$ より，$-2a^2+8a=6$
ゆえに，$(a-1)(a-3)=0$ であるから，$a=1,\ 3$
したがって，$2 \leqq a$ より，$a=3$



よって，(i)，(ii) より，求める a の値は，$a=\mathbf{0,\ 3}$

解答（節末）I3.2.3 ★★　節末 p.124

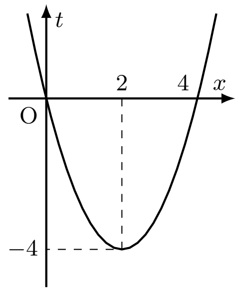
問題文

a を定数として，関数 $y=\left(x^2-4x\right)^2+2a\left(x^2-4x\right)+a+2$ の最小値を m とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) m を a の式で表せ．　　(2) m を最大にする a の値を求めよ．

(1)

$$y=\left(x^2-4x\right)^2+2a\left(x^2-4x\right)+a+2$$



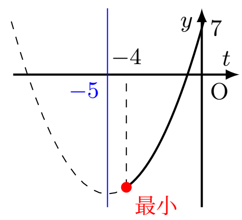
$t=x^2-4x$ とおくと，$t=(x-2)^2-4$ より，$t\geqq -4$
したがって，

◀ グラフより，t のとりうる値の範囲は $t\geqq -4$

$$\begin{aligned}y&=t^2+2at+a+2\\&=(t+a)^2-a^2+a+2\ (t\geqq -4)\end{aligned}$$

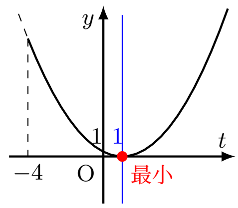
(i) $-a<-4$，すなわち，$a>4$ のとき
y は $t=-4$ のとき，最小値をとる．
したがって，$m=(-4)^2+2a\cdot(-4)+a+2=-7a+18$

◀



(ii) $-a\geqq -4$，すなわち，$a\leqq 4$ のとき
y は $t=-a$ のとき，最小値をとる．
したがって，$m=-a^2+a+2$

◀



よって，(i)，(ii) より，

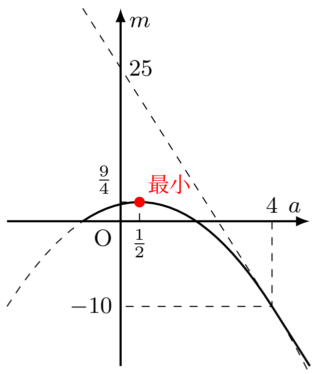
$$\boldsymbol{m=\begin{cases}-7a+18 & (a>4)\\ -a^2+a+2 & (a\leqq 4)\end{cases}}$$

(2) $a>4$ のとき

$$m=-7a+18$$

$a\leqq 4$ のとき

$$m=-a^2+a+2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$



よって，グラフは右の図のようになり，m は $a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\frac{9}{4}$

◀ y の最小値の最大値が $\frac{9}{4}$ である．

解答 3.2

One math

解答（節末）I3.2.4 ★★★ 節末 p.125

問題文

放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，頂点の座標が (3, 7) で，点 (6, −5) を通る．このとき，定数 a, b, c の値を求めよ．

頂点が点 (3, 7) であるから，求める放物線は，

$$y=a(x-3)^2+7$$

と表される．

この放物線が，点 (6, −5) を通るから，

$$-5=a(6-3)^2+7$$

したがって $a=-\frac{4}{3}$

このとき，$y=-\frac{4}{3}(x-3)^2+7=-\frac{4}{3}x^2+8x-5$

これが，$y=ax^2+bx+c$ と一致するので，$b=8$, $c=-5$

よって，$\boldsymbol{a=-\frac{4}{3}}$, $\boldsymbol{b=8}$, $\boldsymbol{c=-5}$

◀ 問題文で $y=ax^2+bx+c$ と与えられていても，$y=a(x-p)^2+q$ などの形に設定し直した方が計算が楽になることもある．

◀ 係数を比較する．

解答（節末）I3.2.5 ★★★ 節末 p.126

問題文

$a>0$, $b>0$, $a+b=1$ のとき，a^3+b^3 の最小値を求めよ．

$a+b=1$ から，$b=1-a\cdots$(i)

$b>0$ であるから，$1-a>0$

したがって，$a<1$

$a>0$ との共通範囲は，$0<a<1\cdots$(ii)

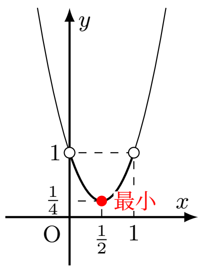
$a^3+b^3=t$ とすると，

$$t=a^3+(1-a)^3=3a^2-3a+1=3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

(ii) において，t は $a=\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{2}$ のとき，(i) から $b=\frac{1}{2}$

よって，$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ のとき，**最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$**



◀ a の値の範囲を求めてから，最小値を考えるように注意すること．

◀ b を代入して，文字を消去する．

解答
3.2

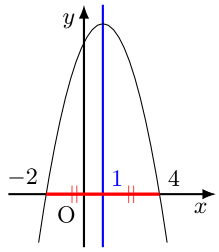
解答（節末）I3.2.6 ★★★　節末 p.127

問題文

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が，$f(-2)=f(4)=0$ を満たし，その最大値が 9 であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

$f(-2)=f(4)=0$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の軸は，2 点 $(-2,\ 0)$，$(4,\ 0)$ を結ぶ線分の中点 $(1,\ 0)$ を通る．

◀ グラフは軸 $x=1$ に関して対称である．



したがって，$f(x)$ は $x=1$ で最大値 9 をとり，$f(x)$ は $f(x)=a(x-1)^2+9\ (a<0)$ と表される．

$f(-2)=0$ から，$9a+9=0$

ゆえに，$a=-1$

これは，$a<0$ を満たす．

したがって，$f(x)=-(x-1)^2+9$

展開すると，$f(x)=-x^2+2x+8$ である．

よって，$a=\mathbf{-1}$，$b=\mathbf{2}$，$c=\mathbf{8}$ となる．

【別解】 $f(-2)=f(4)=0$ であるから，$f(x)=a(x+2)(x-4)$ と表される．

◀ x 軸との交点が 2 つ与えられたときは，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ を用いて考えるとよい．

展開すると，$a(x+2)(x-4)=a(x^2-2x-8)=a(x-1)^2-9a$ であるから，$f(x)=a(x-1)^2-9a$

最大値が 9 であるから，$a<0$ かつ $-9a=9$

したがって，$a=-1$

これは $a<0$ を満たす．

ゆえに，$f(x)=-(x+2)(x-4)=-x^2+2x+8$

よって，$a=\mathbf{-1}$，$b=\mathbf{2}$，$c=\mathbf{8}$

2 次方程式と 2 次不等式（解答）

解答 I3.3.1 ★ 問題 p.128

問題文

次の 2 次方程式を解け.

(1) $4x^2 - 7x + 2 = 0$　　(2) $x^2 - 8x - 5 = 0$

(3) $16x^2 + 8x + 1 = 0$　　(4) $6x^2 - 11x + 3 = 0$

(1) 解の公式より,

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8} = \boldsymbol{\frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}}$$

◀ $a = 4,\ b = -7,\ c = 2$ として,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

に代入する.

(2) 解の公式より,

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \cdot (-5)}}{1} = 4 \pm \sqrt{16 + 5} = \boldsymbol{4 \pm \sqrt{21}}$$

◀ x の係数が偶数であるから,

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

(3) 左辺を因数分解すると，$(4x + 1)^2 = 0$

よって，$4x + 1 = 0$ より，$x = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$

【別解】

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16}}{32} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{32} = \frac{-8 \pm 0}{32} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

◀ 解の公式を用いてもよい.

(4) 左辺を因数分解すると，$(3x - 1)(2x - 3) = 0$

◀ たすき掛けを用いる.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & & -3 & \longrightarrow & -9 \\ \hline & & & & -11 \end{array}$$

したがって，$3x - 1 = 0$ または $2x - 3 = 0$

よって，$\boldsymbol{x = \frac{1}{3},\ \frac{3}{2}}$

【別解】

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{12} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{11 \pm 7}{12}$$

よって，$x = \boldsymbol{\frac{1}{3},\ \frac{3}{2}}$

解答 3.3

解答 I3.3.2 ★★ 問題 p.129

問題文

次の 2 次方程式を解け．

(1) $-0.25x^2+2x-1=0$　　(2) $\sqrt{3}x^2-12x+12\sqrt{3}=0$

(3) $(x+1)^2-6(x+1)+5=0$

(1) 両辺に -4 を掛けると，$x^2-8x+4=0$

よって，

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\cdot 4}}{1}=\mathbf{4\pm 2\sqrt{3}}$$

◀ x^2 の係数が正となるように，-4 を掛ける．

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(2) 両辺に $\sqrt{3}$ を掛けると，$3x^2-12\sqrt{3}x+36=0$

したがって，$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$

左辺を因数分解すると，$(x-2\sqrt{3})^2=0$

よって，$x=\mathbf{2\sqrt{3}}$

◀ x^2 の係数が有理数となるように，$\sqrt{3}$ を掛ける．

◀ $(2\sqrt{3})^2=12$

【別解】 両辺に $\sqrt{3}$ を掛けると，$3x^2-12\sqrt{3}x+36=0$

したがって，$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$

よって，

$$x=\frac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{(-2\sqrt{3})^2-1\cdot 12}}{1}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

◀ x の係数が偶数であるから，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(3) $X=x+1$ とおくと，$X^2-6X+5=0$

したがって，$(X-5)(X-1)=0$

ゆえに，$X=5,\ 1$

すなわち，$x+1=5,\ 1$

よって，$x=\mathbf{4,\ 0}$

【別解】 $(x+1)^2-6(x+1)+5=0$ より，$\{(x+1)-5\}\{(x+1)-1\}=0$

したがって，$(x-4)\cdot x=0$

よって，$x=\mathbf{4,\ 0}$

◀ 共通する部分を 1 つのまとまりと見る．

解答 I3.3.3 ★★★ 問題 p.130

問題文

次の方程式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax^2+(a+3)x+3=0$　　(2) $(a^2-2a)x^2=a-2$

(1)　(i) $a=0$ のとき

方程式は，$3x+3=0$ より，$x=-1$

(ii) $a \neq 0$ のとき

$ax^2+(a+3)x+3=0$ より，$(x+1)(ax+3)=0$

したがって，$x=-1,\ -\frac{3}{a}$

◀ $a=0$ のとき，x^2 の項がなくなるので，x の 1 次方程式になる．

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \longrightarrow & a \\ & \times & & & \\ a & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline & & & & a+3 \end{array}$$

よって，(i)，(ii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=0} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{a \neq 0} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x=-1,\ -\frac{3}{a}} \end{cases}$$

(2)　(i) $a=0$ のとき

方程式は，$0\cdot x^2=0-2$

これを満たす x は存在しないので，解なし

(ii) $a=2$ のとき

方程式は，$0\cdot x^2=0$

これは，x の値に関わらず成り立つ．

したがって，解はすべての実数

(iii) $a \neq 0,\ 2$ のとき

$a^2-2a \neq 0$ から，両辺を a^2-2a で割ると，$x^2=\frac{1}{a}$

（ア）$a>0$ のとき，$x=\pm\sqrt{\frac{1}{a}}=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}=\pm\frac{\sqrt{a}}{a}$

（イ）$a<0$ のとき，解なし

◀ $x^2=\frac{a-2}{a(a-2)}=\frac{1}{a}$

◀ $x^2=\frac{1}{a}$ を解く．

よって，(i)〜(iii) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq 0} \text{ **のとき，**} & \text{**解なし**} \\ \boldsymbol{a=2} \text{ **のとき，**} & \text{**解はすべての実数**} \\ \boldsymbol{0<a<2,\ 2<a} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}} \end{cases}$$

解答 I3.3.4 ★★　問題 p.131

問題文

(1) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 4 と -5 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．
(2) 2 次方程式 $x^2+ax-8=0$ の解の 1 つが $x=a$ のとき，定数 a の値を求めよ．また，そのときの他の解を求めよ．

(1) $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 4 と -5 であるから，$x=4$ と $x=-5$ をそれぞれ代入して，

$$\begin{cases} 4^2+a\cdot 4+b=0 \\ (-5)^2+a\cdot(-5)+b=0 \end{cases}$$

◀ 数学 II で学習する，解と係数の関係を用いても求められる．

すなわち，$\begin{cases} 4a+b=-16\cdots\text{(i)} \\ -5a+b=-25\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

よって，(i)，(ii) を解いて，$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{-20}$

【別解】 2 つの解が 4 と -5 より，もとの 2 次方程式は，$(x-4)(x+5)=0$
したがって，$x^2+x-20=0$
よって，$x^2+ax+b=0$ と係数を比較すると，$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{-20}$

◀ α，β を解にもつ 2 次方程式は，$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と表される．与えられた方程式の x^2 の係数が 1 であることから，$a=1$ である．

(2) $x=a$ が $x^2+ax-8=0$ の解であるから，$a^2+a\cdot a-8=0$
すなわち，$2a^2=8$ より，$a=\pm 2$
(i) $a=2$ のとき
方程式は，$x^2+2x-8=0$
したがって，$(x-2)(x+4)=0$
ゆえに，$x=2$，-4
したがって，他の解は，$\boldsymbol{x=-4}$
(ii) $a=-2$ のとき
方程式は，$x^2-2x-8=0$
したがって，$(x-4)(x+2)=0$
ゆえに，$x=4$，-2
したがって，他の解は，$\boldsymbol{x=4}$

よって，(i)，(ii) より，

$a=2$ のとき，　他の解は，$x=-4$
$a=-2$ のとき，他の解は，$x=4$

解答 I3.3.5 ★ 問題 p.132

問題文

次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ.

(1) $x^2-4x+1=0$　　(2) $4x^2+2x+3=0$

(3) $2x^2-6=0$　　(4) $16x^2-8x+1=0$

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot1=12$$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

【別解】 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot1=3$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

◀ $ax^2+bx+c=0$ において $b=2b'$（x の係数が 2 の倍数）のとき，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい.

(2) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$D=(2)^2-4\cdot4\cdot3=-44$$

$D<0$ であるから，実数解の個数は，**0 個**

(3) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$D=0^2-4\cdot2\cdot(-6)=48$$

◀ $2x^2+0\cdot x-6=0$

$D>0$ であるから，実数解の個数は，**2 個**

(4) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

◀ $16x^2-8x+1$
$=(4x-1)^2$

$$D=(-8)^2-4\cdot16\cdot1=64-64=0$$

$D=0$ であるから，実数解の個数は，**1 個**

【別解】 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，$\frac{D}{4}=(-4)^2-16\cdot1=0$

$D=0$ であるから，実数解の個数は，**1 個**

解答 I3.3.6 ★★ 問題 p.133

問題文

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．
(1) x についての 2 次方程式 $x^2+2kx+3k+10=0$ が重解をもつような k の値を定めよ．また，そのときの解を求めよ．
(2) x についての 2 次方程式 $x^2-2kx+k^2+4k-8=0$ の実数解の個数を調べよ．

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(2k)^2-4\cdot1\cdot(3k+10)=4k^2-12k-40=4(k^2-3k-10)$$

◀ $ax^2+bx+c=0$ における $b=2b'$（x の係数が 2 の倍数）のときであるので，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい．

2 次方程式が重解をもつから，$D=0$
したがって，$k=5,\ -2$
また，重解は，$x=-\frac{2k}{2\cdot1}=-k$
よって，

$k=5$ のとき，　解は，$x=-5$
$k=-2$ のとき，解は，$x=2$

(2) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-2k)^2-4\cdot1\cdot(k^2+4k-8)=-16k+32$$

◀ $ax^2+bx+c=0$ における $b=2b'$（x の係数が 2 の倍数）のときであるので，$\frac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい．

よって，実数解の個数は，k の値によって次のようになる．

$D>0$，すなわち，$k<2$ のとき，2 個
$D=0$，すなわち，$k=2$ のとき，1 個
$D<0$，すなわち，$k>2$ のとき，0 個

解答 I3.3.7 ★★ 問題 p.134

問題文

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2-2x-k+2=0,\ x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$ がともに実数解をもたないような定数 k の値の範囲を求めよ．

2 次方程式 $x^2-2x-(k-2)=0$ の判別式を D_1 とすると，

$$D_1=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-k+2)=4+4k-8=4k-4$$

2 次方程式が実数解をもたないから，$D_1<0$
したがって，$4k-4<0$
ゆえに，$k<1\cdots$(i)

◀ 実数解をもたない条件は，$D<0$ である．

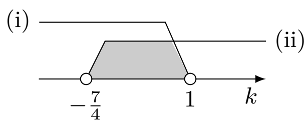
2 次方程式 $x^2+(2k-1)x+(k^2+2)=0$ の判別式を D_2 とすると，

$$D_2=(2k-1)^2-4\cdot1\cdot(k^2+2)=4k^2-4k+1-4k^2-8=-4k-7$$

2 次方程式が実数解をもたないから，$D_2<0$
したがって，$-4k-7<0$
ゆえに，$k>-\frac{7}{4}\cdots$(ii)

よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，

$$\boldsymbol{-\frac{7}{4}<k<1}$$



解答 3.3

解答 I3.3.8 ★★★ 問題 p.135

問題文

x についての 2 つの 2 次方程式 $x^2+(k+3)x+8=0,\quad x^2+5x+4k=0$ が共通な実数解をもつとき，定数 k の値と，そのときの共通解を求めよ．

共通解を α として，2 つの 2 次方程式に $x=\alpha$ を代入すると，

$$\begin{cases} \alpha^2+(k+3)\alpha+8=0\cdots\text{(i)} \\ \alpha^2+5\alpha+4k=0\cdots\text{(ii)} \end{cases}$$

(i)$-$(ii) より，

$$(k-2)\alpha+8-4k=0$$

したがって，$(k-2)(\alpha-4)=0$

ゆえに，$k=2$ または $\alpha=4$

（ア）$k=2$ のとき

もとの 2 つの 2 次方程式は，ともに $x^2+5x+8=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D=5^2-4\cdot1\cdot8=-7$

これは，$D<0$ であるから，共通な実数解をもつことに反する．

◀ 実数解をもたない．

（イ）$\alpha=4$ のとき

(i) に代入すると，$4^2+(k+3)\cdot4+8=0$

◀ (i) か (ii) に代入する．

したがって，$k=-9$

このとき，もとの 2 つの 2 次方程式は，$x^2-6x+8=0$ と $x^2+5x-36=0$ となり，解はそれぞれ，$x=4,\ 2$ と $x=4,\ -9$

したがって，2 つの方程式は共通解 $x=4$ をもつ．

よって，（ア），（イ）より，$\boldsymbol{k=-9}$ **，共通解は，** $\boldsymbol{x=4}$

解答 I3.3.9 ★ 問題 p.136

問題文

次の放物線は x 軸と共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y=x^2-3x-10$　　(2) $y=-x^2+4x-4$　　(3) $y=3x^2-2x+6$

(1) $x^2-3x-10=0$ とすると，$(x-5)(x+2)=0$

したがって，$x=5,\ -2$

よって，x 軸と**共有点を 2 個もち，その座標は，$(5,\ 0)$，$(-2,\ 0)$**

◀ 判別式を D とすると，

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-10)=49$

よって，$D>0$ より，共有点は 2 個である．

(2) $-x^2+4x-4=0$ とすると，$x^2-4x+4=0$

したがって，$(x-2)^2=0$

ゆえに，$x=2$

よって，x 軸と**共有点を 1 個もち，その座標は，$(2,\ 0)$**

◀ 判別式を D とすると，

$$D=4^2-4\cdot1\cdot4=0$$

よって，$D=0$ より，共有点は 1 個（重解）である．また，$(2,\ 0)$ は接点となる．

(3) $3x^2-2x+6=0$ とする．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-2)^2-4\cdot3\cdot6=-68$$

よって，$D<0$ であるから，グラフと x 軸は**共有点をもたない．**

【別解】

$$y=3x^2-2x+6=3\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}+6=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{17}{3}$$

2 次関数のグラフは，下に凸の放物線で，頂点の y 座標は $\frac{17}{3}$ である．

よって，x 軸は**共有点をもたない．**

解答 I3.3.10 ★★ 問題 p.137

問題文

(1) 2 次関数 $y = x^2 - 2kx + 4k - 3$ のグラフが，x 軸と接するような定数 k の値を求め，その接点の座標を求めよ．
(2) 2 次関数 $y = x^2 + 2kx + k^2 + 3k + 9$ のグラフが，x 軸と共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

(1) $x^2 - 2kx + 4k - 3 = 0$ とする．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 1 \cdot (4k - 3) = k^2 - 4k + 3 = (k-3)(k-1)$$

◀ x 軸は直線 $y = 0$ であることから，$y = 0$ とおいた，$x^2 - 2kx + 4k - 3 = 0$ とする．

グラフが x 軸と接するから，$D = 0$
したがって，$(k-3)(k-1) = 0$
ゆえに，$k = 3,\ 1$
グラフの頂点の x 座標は，$x = -\frac{-2k}{2 \cdot 1} = k$ であるから，

$k = 3$ のとき，$x = 3$ であり，$k = 1$ のとき，$x = 1$ である．

よって，接点の座標は，

$k = 3$ のとき，接点$(3,\ 0)$
$k = 1$ のとき，接点$(1,\ 0)$

(2) 共有点の x 座標は，$x^2 + 2kx + k^2 + 3k + 9 = 0$ の実数解である．この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k^2 + 3k + 9) = -3k - 9$$

グラフが x 軸と共有点をもつから，$D \geqq 0$
したがって，$-3k - 9 \geqq 0$
よって，$\boldsymbol{k \leqq -3}$

解答 I3.3.11 ★★ 問題 p.138

問題文

(1) 2 次関数 $y=-2x^2+3x+4$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．
(2) 放物線 $y=-x^2+4x+2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが 6 であるとき，定数 k の値を求めよ．

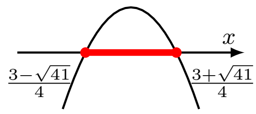
(1) $-2x^2+3x+4=0$ とすると，$2x^2-3x-4=0$

◀ 扱いやすさのために，x^2 の係数を正にする．

したがって，$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-4)}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{9+32}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$

よって，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは，

◀



$$\frac{3+\sqrt{41}}{4}-\frac{3-\sqrt{41}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{41}}{2}}$$

(2) $-x^2+4x+2k=0$ とすると，$x^2-4x-2k=0\cdots$(i)

◀ 扱いやすさのために，x^2 の係数を正にする．

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-2k)=4+2k$$

グラフが x 軸と異なる 2 点で交わるから，$D>0$

◀ x 軸と異なる 2 点で交わらなければ，線分ができない．

したがって，$4+2k>0$ より，$k>-2\cdots$(ii)
このとき，2 次方程式 (i) を解くと，

$$x=2\pm\sqrt{4+2k}$$

切り取る線分の長さが 6 であるから，

$$(2+\sqrt{4+2k})-(2-\sqrt{4+2k})=6$$

ゆえに，$2\sqrt{4+2k}=6$
したがって，$4+2k=9$
これより，$k=\frac{5}{2}$
この値は，(ii) を満たす．
よって，求める定数 k の値は，$\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

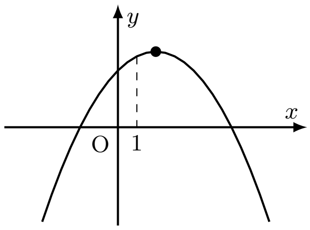
解答 I3.3.12 ★★ 問題 p.139

問題文

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようなとき，次の値の符号を調べよ．ただし，$a < 0$ とする．

(1) a　(2) b　(3) c

(4) $b^2 - 4ac$　(5) $a + b + c$



(1) グラフは上に凸であるから，$\boldsymbol{a < 0}$

(2) 軸は直線 $x = -\frac{b}{2a}$

軸が y 軸より右側にあるから，$-\frac{b}{2a} > 0$

よって，$a < 0$ であるから，$\boldsymbol{b > 0}$

◀ $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

◀ $-\frac{b}{2a} > 0$ から，$\frac{b}{a} < 0$ より，a と b は異符号である．

(3) y 軸との共有点は点 $(0,\ c)$

よって，グラフは y 軸と $y > 0$ の部分で交わっているから，$\boldsymbol{c > 0}$

(4) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると，$D = b^2 - 4ac$

x 軸と異なる 2 点で交わっているから，$D > 0$

よって，$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$

◀ $D = b^2 - 4ac$

(5) $x = 1$ のとき，$y = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$

よって，グラフより，$x = 1$ のとき，$y > 0$ であるから，$\boldsymbol{a + b + c > 0}$

解答 3.3

解答 I3.3.13 ★★ 問題 p.140

問題文

次の連立方程式を解け．

(1) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x^2-3x-y=-1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+3y-9=0 \\ x^2-y^2+x+y=0 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 3x-y=4\cdots\text{(i)} \\ x^2-3x-y=-1\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

(i) より，$y=3x-4$

これを (ii) に代入すると，$x^2-3x-(3x-4)=-1$

整理すると，$x^2-6x+5=0$

したがって，$(x-1)(x-5)=0$

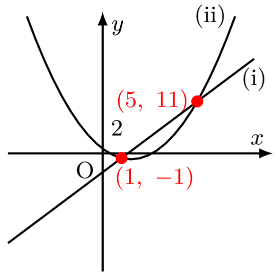
ゆえに，$x=1,\ 5$

$y=3x-4$ に代入すると，$x=1$ のとき，$y=3\cdot1-4=-1$

$x=5$ のとき，$y=3\cdot5-4=11$

よって，$(x,\ y)=\mathbf{(1,\ -1),\ (5,\ 11)}$

◀ $(1,\ -1)$，$(5,\ 11)$ は，与えられた連立方程式 (i)，(ii) を整理した $y=3x-4$（直線），$y=x^2-3x+1$（放物線）の交点を表している．



(2) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+3y-9=0\cdots\text{(i)} \\ x^2-y^2+x+y=0\cdots\text{(ii)} \end{cases}$

(ii) より，$(x+y)(x-y)+(x+y)=0$

したがって，$(x+y)(x-y+1)=0$

ゆえに，$y=-x$ または $y=x+1$

（ア）$y=-x\cdots$(iii) のとき，(iii) を (i) に代入して整理すると，

$$2x^2-x-3=0$$

したがって，$(2x-3)(x+1)=0$ となり，$x=\frac{3}{2},\ -1$

ゆえに，(iii) より，$x=\frac{3}{2}$ のとき，$y=-\frac{3}{2}$，$x=-1$ のとき，$y=1$

（イ）$y=x+1\cdots$(iv) のとき，(iv) を (i) に代入して整理すると，$4x=4$

したがって，$x=1$

ゆえに，(iv) より，$x=1$ のとき，$y=2$

よって，（ア），（イ）より，求める解は，

$$(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right),\ (-1,\ 1),\ (1,\ 2)$$

解答 3.3

解答 I3.3.14 ★ 問題 p.141

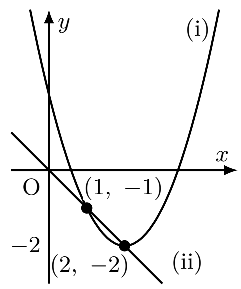
問題文

次の 2 つの関数のグラフは共有点をもつか．もつときは，その座標を求めよ．

(1) $y=x^2-4x+2,\ y=-x$　　(2) $y=-x^2+3x+2,\ y=4x+7$

(3) $y=x^2-6x+10,\ y=-x^2+2x+2$

(1) $\begin{cases} y=x^2-4x+2 & \cdots\text{(i)} \\ y=-x & \cdots\text{(ii)} \end{cases}$ とする．



(i) と (ii) から y を消去すると，$x^2-4x+2=-x$

整理すると，$x^2-3x+2=0$

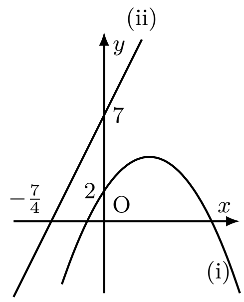
したがって，$(x-2)(x-1)=0$

ゆえに，$x=2,\ 1$

(ii) より，$x=2$ のとき，$y=-2$，$x=1$ のとき，$y=-1$

よって，**共有点を 2 個もち，その座標は，$(2,\ -2)$，$(1,\ -1)$**

(2) $\begin{cases} y=-x^2+3x+2 & \cdots\text{(i)} \\ y=4x+7 & \cdots\text{(ii)} \end{cases}$ とする．



(i) と (ii) から y を消去すると，$-x^2+3x+2=4x+7$

整理すると，$-x^2-x-5=0$

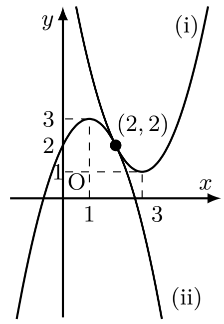
この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=1-20=-19$$

したがって，$D<0$ であるから，この 2 次方程式は実数解をもたない．

よって，放物線 (i) と直線 (ii) は**共有点をもたない．**

(3) $\begin{cases} y=x^2-6x+10 & \cdots\text{(i)} \\ y=-x^2+2x+2 & \cdots\text{(ii)} \end{cases}$ とする．



(i) と (ii) から y を消去すると，$x^2-6x+10=-x^2+2x+2$

整理すると，$x^2-4x+4=0$

したがって，$(x-2)^2=0$

ゆえに，$x=2$

(ii) より，$x=2$ のとき，$y=-2^2+2\cdot2+2=2$

よって，**共有点を 1 個もち，その座標は，$(2,\ 2)$**

解答 I3.3.15 ★★ 問題 p.142

問題文

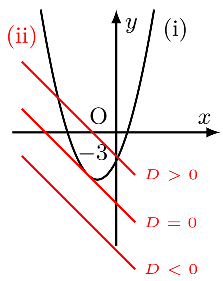
次の放物線と直線の共有点の個数を調べよ．ただし，k を定数とする．

(1) 放物線 $y=2x^2+4x-3$，直線 $y=-2x+k$

(2) 放物線 $y=-x^2+3x+k+1$，直線 $y=-x+2$

(1) $\begin{cases} y=2x^2+4x-3\cdots\text{(i)} \\ y=-2x+k\cdots\text{(ii)} \end{cases}$ とする．

◀ k の値によって，直線 (ii) が変化する．



(i) と (ii) から y を消去すると，$2x^2+4x-3=-2x+k$

整理すると，$2x^2+6x-3-k=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=3^2-2\cdot(-3-k)=9+2(3+k)=2k+15$$

よって，共有点の個数は，k の値によって次のようになる．

$2k+15>0$ のとき，すなわち，$k>-\dfrac{15}{2}$ のとき，2 個

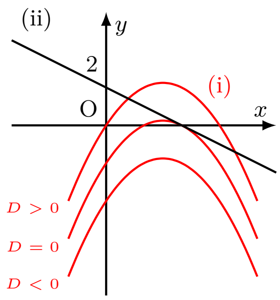
$2k+15=0$ のとき，すなわち，$k=-\dfrac{15}{2}$ のとき，1 個

◀ 放物線と直線が接する．

$2k+15<0$ のとき，すなわち，$k<-\dfrac{15}{2}$ のとき，0 個

(2) $\begin{cases} y=-x^2+3x+k+1\cdots\text{(i)} \\ y=-x+2\cdots\text{(ii)} \end{cases}$ とする．

◀ k の値によって，放物線 (i) が変化する．



(i) と (ii) から y を消去すると，$-x^2+3x+k+1=-x+2$

整理すると，$x^2-4x-k+1=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-k+1)=4+(k-1)=k+3$$

よって，共有点の個数は，k の値によって次のようになる．

$k+3>0$ のとき，すなわち，$k>-3$ のとき，2 個

$k+3=0$ のとき，すなわち，$k=-3$ のとき，1 個

◀ 放物線と直線が接する．

$k+3<0$ のとき，すなわち，$k<-3$ のとき，0 個

解答 I3.3.16 ★ 問題 p.143

問題文

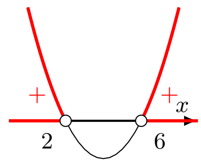
次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2-8x+12>0$　　(2) $x^2-3x+1>0$　　(3) $-3x^2+5x+2 \geqq 0$

(1) 左辺を因数分解すると，

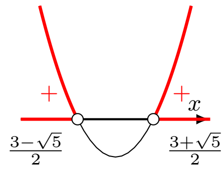
$$(x-2)(x-6)>0$$

よって，不等式の解は，$\boldsymbol{x<2}$ **または** $\boldsymbol{6<x}$



◀ $y=x^2-8x+12$ は x 軸と $x=2,\ 6$ で共有点をもつことがわかる．

(2) $x^2-3x+1=0$ を解くと，$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
よって，不等式の解は，$\boldsymbol{x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ **または** $\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x}$



◀ 解の公式を用いる．

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

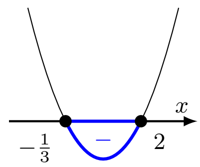
(3) 両辺に -1 を掛けて，

$$3x^2-5x-2 \leqq 0$$

左辺を因数分解すると，

$$(3x+1)(x-2) \leqq 0$$

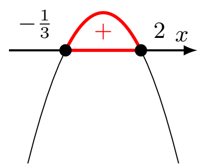
よって，不等式の解は，$\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 2}$



【別解】左辺を因数分解すると，

$$-(3x+1)(x-2) \geqq 0$$

よって，$\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 2}$



◀ $-3x^2+5x+2 \geqq 0$ のグラフをかいて求めてもよい．

解答 I3.3.17 ★　問題 p.144

問題文

次の 2 次不等式を解け．

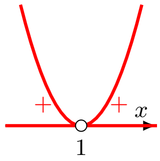
(1) $-2x^2+4x-2<0$　　(2) $x^2+4x+5>0$

(3) $x^2-6x+9 \leqq 0$　　(4) $-x^2+4x-4>0$

(1) $-2x^2+4x-2<0$ より，$2x^2-4x+2>0$

因数分解すると，$2(x-1)^2>0$

よって，不等式の解は，**1 以外のすべての実数**

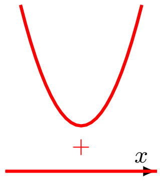


◀ 2 次関数 $y=2x^2-4x+2$ は，$x=1$ のとき，$y=0$ となるから，$x=1$ を除く．なお，$y=-2x^2+4x-2$ を考えてもよい．

(2) 2 次方程式 $x^2+4x+5=0$ の判別式を D とすると，

$$D=4^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4$$

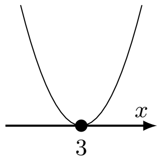
よって，$D<0$ であるから，不等式の解は，**すべての実数**



(3) 左辺を因数分解すると，

$$(x-3)^2 \leqq 0$$

よって，不等式の解は，$x=\mathbf{3}$

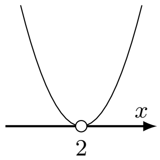


◀ 2 次関数 $y=x^2-6x+9$ は，$x=3$ のとき，$y=0$ であり，それ以外のときは $y>0$ となるから，$y \leqq 0$ となる x の値は $x=3$ のみである．

(4) $-x^2+4x-4>0$ より，$x^2-4x+4<0$

左辺を因数分解すると，$(x-2)^2<0$

よって，不等式の **解はない**



解答 I3.3.18 ★★　問題 p.145

問題文

次の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2+2x-3 \leqq 0 \\ 2x^2+3x+1>0 \end{cases}$　　(2) $2x-1 \leqq x^2-1 \leqq 2x+3$

(1) $x^2+2x-3 \leqq 0$ より，$(x+3)(x-1) \leqq 0$

したがって，$-3 \leqq x \leqq 1 \cdots$ (i)

$2x^2+3x+1>0$ より，$(2x+1)(x+1)>0$

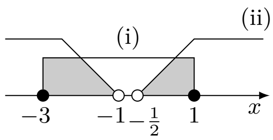
したがって，$x<-1,\ x>-\frac{1}{2} \cdots$ (ii)

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \diagdown\!\!\!\diagup & 1 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & & 1 & \longrightarrow & 2 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$

(i)，(ii) の共通範囲は，右の図のようになる．

よって，$\boldsymbol{-3 \leqq x < -1,\ -\frac{1}{2} < x \leqq 1}$



(2) $2x-1 \leqq x^2-1$ より，$x^2-2x \geqq 0$

因数分解すると，$(x-2)x \geqq 0$

したがって，$x \leqq 0,\ x \geqq 2 \cdots$ (i)

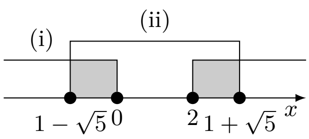
$x^2-1 \leqq 2x+3$ より，$x^2-2x-4 \leqq 0$

$x^2-2x-4=0$ を解くと，$x=1\pm\sqrt{5}$

したがって，$1-\sqrt{5} \leqq x \leqq 1+\sqrt{5} \cdots$ (ii)

(i)，(ii) の共通範囲は，右の図のようになる．

よって，$\boldsymbol{1-\sqrt{5} \leqq x \leqq 0,\ 2 \leqq x \leqq 1+\sqrt{5}}$



解答 I3.3.19 ★★★ 問題 p.146

問題文

次の 2 次不等式を解け．ただし，a を定数とする．

(1) $x^2-4ax+3a^2>0$　　(2) $ax^2-5ax+4a<0$

(1) $x^2-4ax+3a^2>0$ より，$(x-a)(x-3a)>0\cdots$(i)

$y=x^2-4ax+3a^2$ とすると，このグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$x=a,\ 3a$

◀ 2 つの解の大小関係を考えて，場合分けをする．$a>0$ のとき，$a<3a$ となり，$a<0$ のとき，$a>3a$ となる．

（ア）$a>0$ のとき

不等式 (i) の解は，$x<a,\ 3a<x$

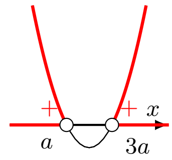
（イ）$a=0$ のとき

不等式 (i) の解は，0 以外のすべての実数

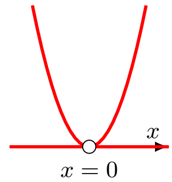
（ウ）$a<0$ のとき

不等式 (i) の解は，$x<3a,\ a<x$

（ア）



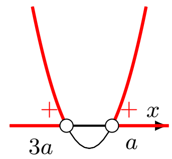
（イ）



よって，（ア）〜（ウ）より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>0\ \text{のとき，}x<a,\ 3a<x} \\ \boldsymbol{a=0\ \text{のとき，}\ 0\ \text{以外のすべての実数}} \\ \boldsymbol{a<0\ \text{のとき，}x<3a,\ a<x} \end{cases}$$

（ウ）



(2) $ax^2-5ax+4a<0$ より，$a\left(x^2-5x+4\right)<0$

したがって，$a(x-1)(x-4)<0\cdots$(ii)

$y=ax^2-5ax+4a$ とすると，このグラフと x 軸との共有点の x 座標は，$x=1,\ 4$

与えられた不等式は 2 次不等式であるから，$a\neq 0$

◀ 問題文では「2 次不等式」となっていることから，$a\neq 0$ である．

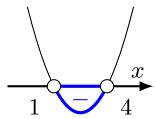
（ア）$a>0$ のとき

不等式 (ii) の解は，$1<x<4$

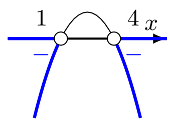
（イ）$a<0$ のとき

不等式 (ii) の解は，$x<1,\ 4<x$

（ア）



（イ）



よって，（ア），（イ）より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>0\ \text{のとき，}1<x<4} \\ \boldsymbol{a<0\ \text{のとき，}x<1,\ 4<x} \end{cases}$$

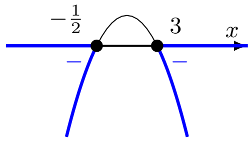
解答 I3.3.20 ★★ 問題 p.147

問題文

2 次不等式 $2ax^2+bx+1 \leqq 0$ の解が $x \leqq -\frac{1}{2}$, $3 \leqq x$ となるとき，定数 a, b の値を求めよ．

$y = 2ax^2+bx+1 \cdots$ (i) とする．

$2ax^2+bx+1 \leqq 0$ の解が $x \leqq -\frac{1}{2}$, $3 \leqq x$ となるのは，
(i) のグラフが右の図のようになるときであるから，$a<0$
このとき，解が $x \leqq -\frac{1}{2}$, $3 \leqq x$ であるから，$y = 2ax^2+bx+1$ のグラフは x 軸と $x=-\frac{1}{2}$, 3 で交わる．



◀ $a>0$ のときは，解は $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ の形になるので不適である．

したがって，2 次方程式 $2ax^2+bx+1=0$ の解は，$x=-\frac{1}{2}$, 3 となる．
ゆえに，$2ax^2+bx+1=0$ に $x=-\frac{1}{2}$, 3 をそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + 1 = 0 \\ 18a+3b+1=0 \end{cases}$$

これを解くと，$a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{3}$ となり，$a<0$ を満たす．
よって，$a = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}$, $b = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$

【別解】 $x \leqq -\frac{1}{2}$, $3 \leqq x$ を解にもつ 2 次不等式のうち，x^2 の係数が 1 のものは，
$(x+\frac{1}{2})(x-3) \geqq 0$ と表される．

◀ $\alpha<\beta$ のとき，$x \leqq \alpha$, $\beta \leqq x \Longleftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta) \geqq 0$

したがって，$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \geqq 0 \cdots$ (i)
$2ax^2+bx+1 \leqq 0 \cdots$ (ii) の定数項が 1 であるから，(i) の両辺に $-\frac{2}{3}$ を掛けて，

$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x+1 \leqq 0$$

よって，(ii) と係数を比較すると，$a = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}$, $b = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$

解答 3.3

解答 I3.3.21 ★★★ 問題 p.148

問題文

次の問いに答えよ．ただし，k を定数とする．
(1) x についての 2 次方程式 $4x^2 - kx + k - 3 = 0$ が実数解をもたないような k の値の範囲を求めよ．
(2) x についての方程式 $(k+3)x^2 + 2(k-1)x + 2 = 0$ の実数解の個数を求めよ．

(1) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D = (-k)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (k-3) = k^2 - 16k + 48$$

2 次方程式が実数解をもたないから，$D < 0$
したがって，$k^2 - 16k + 48 < 0$
因数分解すると，$(k-4)(k-12) < 0$
よって，$\boldsymbol{4 < k < 12}$

◀ k についての 2 次不等式を解く．

(2) $(k+3)x^2 + 2(k-1)x + 2 = 0 \cdots$ (i) とする．

（ア）$k = -3$ のとき，(i) は $-8x + 2 = 0$
これを解くと，$x = \frac{1}{4}$ であり，このとき，実数解の個数は 1 個
（イ）$k \neq -3$ のとき，2 次方程式 (i) の判別式を D とすると，

◀ 問題文では「方程式」となっていることから，x^2 の係数が 0 になる $k = -3$ のときを考える．

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k+3) \cdot 2 = k^2 - 4k - 5 = (k+1)(k-5)$$

$D > 0$ のとき，$(k+1)(k-5) > 0$
これを解くと，$k < -1$，$5 < k$
したがって，$k \neq -3$より，$k < -3$，$-3 < k < -1$，$5 < k$ であり，このとき，実数解の個数は 2 個

◀ $k \neq -3$ であることに注意すること．

$D = 0$ のとき，$(k+1)(k-5) = 0$
これを解くと，$k = -1$，5 であり，このとき，実数解の個数は 1 個
$D < 0$ のとき，$(k+1)(k-5) < 0$
これを解くと，$-1 < k < 5$ であり，このとき，実数解の個数は 0 個

よって，（ア），（イ）より，求める k の値の範囲は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{k < -3,\ -3 < k < -1,\ 5 < k} \text{ のとき，} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k = -3,\ k = -1,\ k = 5} \text{ のとき，} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{-1 < k < 5} \text{ のとき，} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

解答 3.3

解答 I3.3.22 ★★★ 問題 p.149

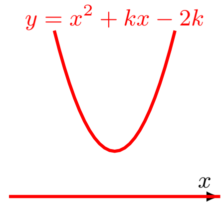
問題文

次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ．

(1) すべての実数 x について，2 次不等式 $x^2+kx-2k>0$ が成り立つ．

(2) 2 次不等式 $kx^2-2\sqrt{2}x+k+1>0$ が解をもたない．

(1) $f(x)=x^2+kx-2k$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，右の図のようになる．
よって，求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが常に上側にある，すなわち，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないことである．



◀ グラフは下に凸で x 軸と共有点をもたないので，$a>0$，$D<0$ である．ここでは，x^2 の係数が正であるので，$a>0$ は成り立っていることから，$D<0$ を考える．

$f(x)=0$ の判別式を D とすると，

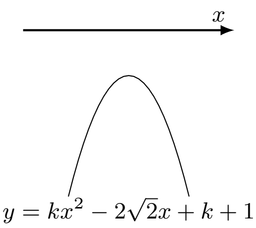
$$D=k^2-4\cdot1\cdot(-2k)=k^2+8k=k(k+8)$$

グラフが x 軸と共有点をもたないから，$D<0$
したがって，$k(k+8)<0$
ゆえに，$-8<k<0$
よって，求める k の値の範囲は，$\boldsymbol{-8<k<0}$

(2) $f(x)=kx^2-2\sqrt{2}x+k+1$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは放物線である．
与えられた不等式は 2 次不等式であるから，$k\neq0$

◀ 問題文では「2 次不等式」となっていることから，$k\neq0$ である．

求める条件は，$kx^2-2\sqrt{2}x+k+1>0$ が解をもたない，すなわち，すべての x について $kx^2-2\sqrt{2}x+k+1\leqq0$ が成り立つことである．つまり，グラフは上に凸の放物線であり，x 軸と共有点をもたない，または x 軸と接することから，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める条件は
$k<0\cdots$(i) かつ $D\leqq0$



◀ $k<0$ を忘れないように注意すること．

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{2})^2-k\cdot(k+1)=-k^2-k+2=-(k+2)(k-1)$$

したがって，$-4(k+2)(k-1)\leqq0$
ゆえに，$k\leqq-2$，$1\leqq k\cdots$(ii)
よって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，$\boldsymbol{k\leqq-2}$

解答 3.3

One math

解答 I3.3.23 ★★★ 問題 p.150

問題文

$-1 \leqq x \leqq 9$ のすべての x の値に対して，不等式 $x^2-2ax+a+6>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+6$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の軸は直線 $x=a$

◀ 軸が区間より左側か，区間内か，右側かで場合分けをする．全部で 3 通りの場合分けとなる．

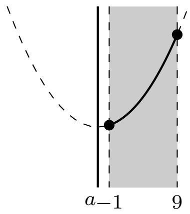
(i) $a<-1$ のとき

$f(x)$ は $x=-1$ で最小となり，最小値は $f(-1)=3a+7$

したがって，$3a+7>0$

ゆえに，$a>-\frac{7}{3}$

これと $a<-1$ より，$-\frac{7}{3}<a<-1$



(ii) $-1 \leqq a \leqq 9$ のとき

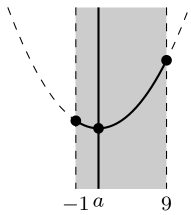
$f(x)$ は $x=a$ で最小となり，最小値は $f(a)=-a^2+a+6$

したがって，$-a^2+a+6>0$

ゆえに，$a^2-a-6<0$

これを解くと，$(a-3)(a+2)<0$ であるから，$-2<a<3$

これと $-1 \leqq a \leqq 9$ より，$-1 \leqq a<3$



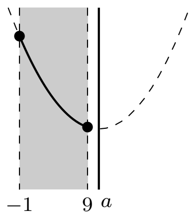
◀ 場合分けの条件である，$-1 \leqq a \leqq 9$ を満たすか否かの確認を忘れないように注意すること．

(iii) $a>9$ のとき

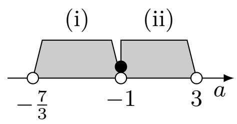
$f(x)$ は $x=9$ で最小となり，最小値は $f(9)=-17a+87$

したがって，$-17a+87>0$ であるから，$a<\frac{87}{17}$

これは $a>9$ を満たさない．



よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{-\frac{7}{3}<a<3}$

◀ 

解答 I3.3.24 ★★★ 問題 p.151

問題文

x についての不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$，$x^2-x-12>0$ を満たす整数 x がちょうど 3 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

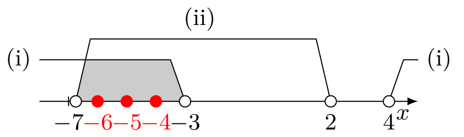
$x^2-x-12>0$ より，$(x+3)(x-4)>0$

したがって，$x<-3,\ 4<x\cdots$(i)

$x^2-(a+2)x+2a<0$ より，$(x-2)(x-a)<0\cdots$(ii)

（ア）$a<2$ のとき，(ii) より，$a<x<2$

これと (i) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 3 個となるのは，右の図のようなときである．



したがって，$-7\leqq a<-6$

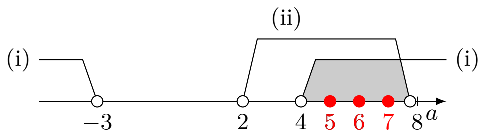
◀ 等号を含むか否かに注意すること．

（イ）$a=2$ のとき，(ii) は解なしで不適である．

◀ $a=2$ のとき，不等式は $(x-2)^2<0$ となり，これを満たす実数 x は存在しない．

（ウ）$a>2$ のとき，(ii) より，$2<x<a$

これと (i) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 3 個となるのは，右の図のようなときである．



したがって，$7<a\leqq 8$

よって，（ア）〜（ウ）より，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{-7\leqq a<-6,\ 7<a\leqq 8}$

解答 I3.3.25 ★★★ 問題 p.152

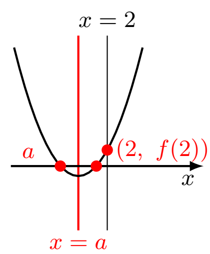
問題文

2 次方程式 $x^2-2ax-a+2=0$ の異なる 2 つの実数解が，ともに 2 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

$y=f(x)=x^2-2ax-a+2$ とし，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とする．

$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$である．

◀ 軸は $x=-\frac{b}{2a}$



$f(x)=0$ の異なる 2 つの実数解が，ともに 2 より小さくなるのは，$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．

したがって，求める条件は，(i) $D>0$，(ii) 軸が $x<2$ の範囲にある，(iii) $f(2)>0$ である．

◀ 判別式，軸，$f(2)$（端点）に注目する．

(i) $\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(-a+2)=a^2+a-2=(a+2)(a-1)$ であり，$D>0$ であるから，$(a+2)(a-1)>0$

◀ 判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 より小さくなる」という条件を用いても同じ結果が得られる．

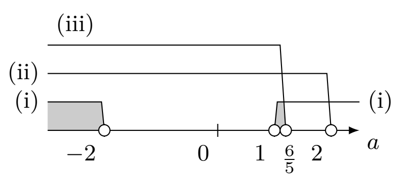
したがって，$a<-2,\ 1<a$

(ii) 軸は直線 $x=a$ であるから，$a<2$

(iii) $f(2)=2^2-2a\cdot 2-a+2=-5a+6$ であり，$f(2)>0$ より，$a<\frac{6}{5}$

よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{a<-2,\quad 1<a<\frac{6}{5}}$$



解答 3.3

One math

解答 I3.3.26 ★★★ 問題 p.153

問題文

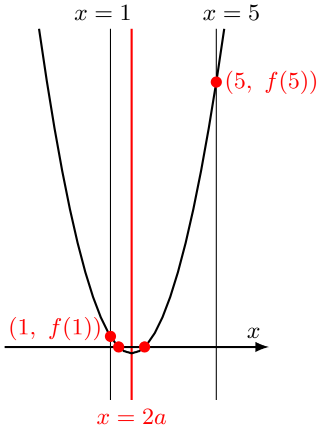
2 次方程式 $x^2 - 4ax + 3 = 0$ が，$1 < x < 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$y = f(x) = x^2 - 4ax + 3$ とし，2 次方程式 $x^2 - 4ax + 3 = 0$ の判別式を D とする．

$y = f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は $x = 2a$ である．

◀ 軸は $x = -\frac{b}{2a}$

$f(x) = 0$ が $1 < x < 5$ に異なる 2 つの実数解をもつのは，$y = f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．



したがって，求める条件は，(i) $D > 0$，(ii) 軸が $1 < x < 5$ の間にある，(iii) $f(1) > 0$，$f(5) > 0$ である．

◀ 判別式，軸，$f(1)$，$f(5)$（端点）に注目する．

(i) $\frac{D}{4} = (-2a)^2 - 1 \cdot 3 = 4a^2 - 3$ であり，$D > 0$ であるから，

$$4a^2 - 3 > 0$$

◀ 判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 より小さくなる」という条件を用いても同じ結果が得られる．

したがって，$a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2} < a$

◀ $(a + \frac{\sqrt{3}}{2})(a - \frac{\sqrt{3}}{2}) > 0$ より，$a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2} < a$

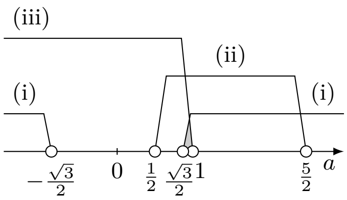
(ii) 軸は直線 $x = 2a$ であるから，$1 < 2a < 5$ より，$\frac{1}{2} < a < \frac{5}{2}$

(iii) $f(1) = 1^2 - 4a \cdot 1 + 3 = -4a + 4$，$f(5) = 5^2 - 4a \cdot 5 + 3 = -20a + 28$ であり，$f(1) > 0$ かつ $f(5) > 0$ より，$4 - 4a > 0$，$-20a + 28 > 0$

したがって，$a < 1$

よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1}$$



解答 I3.3.27 ★★ 問題 p.154

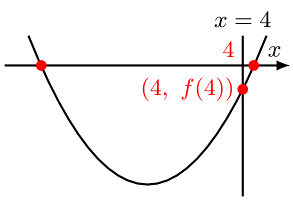
問題文

2 次方程式 $x^2 - ax + 3a^2 - 20 = 0$ の異なる 2 つの実数解のうち，1 つは 4 より大きく，他の 1 つは 4 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ．

$y = f(x) = x^2 - ax + 3a^2 - 20$ とする．

$y = f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線である．

$f(x) = 0$ が 異なる 2 つの実数解をもち，1 つは 4 より大きく，他の 1 つは 4 より小さくなるのは，$y = f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである．



したがって，求める条件は，$f(4) < 0$ である．

$f(4) = 4^2 - a \cdot 4 + 3a^2 - 20 = 3a^2 - 4a - 4 = (3a + 2)(a - 2)$ より，

◀ たすき掛けを用いる．

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & \longrightarrow 2 \\ 1 & -2 & \longrightarrow -6 \\ \hline & & -4 \end{array}$$

$$(3a + 2)(a - 2) < 0$$

よって，$\boldsymbol{-\frac{2}{3} < a < 2}$

解答 I3.3.28 ★★★ 問題 p.155

問題文

2 次方程式 $ax^2-(a+1)x-2=0$ が，$-1<x<1$ の範囲に 1 つの解があり，$3<x<5$ の範囲に他の解があるような定数 a の値の範囲を定めよ．

$f(x)=ax^2-(a+1)x-2$ とする．

与えられた方程式は 2 次方程式であるから，$a \neq 0$

求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが $-1<x<1$，$3<x<5$ の範囲でそれぞれ x 軸と 1 点で交わることである．

すなわち，$f(-1)\cdot f(1)<0$ かつ $f(3)\cdot f(5)<0$

◀ グラフの凹凸に関係なく，$f(-1)\cdot f(1)<0$ かつ $f(3)\cdot f(5)<0$ が求める条件である．$a>0$，$a<0$ のときで場合分けをする必要はないので注意すること．

ここで，$f(-1)=2a-1$，$f(1)=-3$，$f(3)=6a-5$，$f(5)=20a-7$

$f(-1)\cdot f(1)<0$ より，$(2a-1)\cdot(-3)<0$

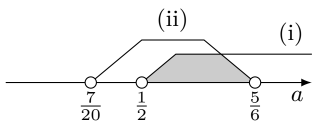
したがって，$a>\frac{1}{2}\cdots$(i)

$f(3)\cdot f(5)<0$ より，$(6a-5)(20a-7)<0$

したがって，$\frac{7}{20}<a<\frac{5}{6}\cdots$(ii)

よって，(i)，(ii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}<a<\frac{5}{6}}$$



これは，$a\neq 0$ を満たす．

解答 I3.3.29 ★★★★ 問題 p.156

問題文

2 次方程式 $x^2-2ax+(a+2)=0$ が，$1<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$f(x)=x^2-2ax+(a+2)$ とする．

(i) すべての解が $1<x<4$ の範囲にあるとき

$y=f(x)$ のグラフが $1<x<4$ の範囲で x 軸と共有点をもつことから，求める条件は，次の（ア）～（ウ）である．

（ア）x 軸と共有点をもつから，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(a+2)=a^2-a-2=(a-2)(a+1)$$

$D\geqq 0$ であるから，$(a-2)(a+1)\geqq 0$

したがって，$a\leqq -1$，$2\leqq a$

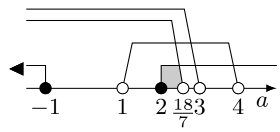
（イ）$y=f(x)$ の軸は直線 $x=a$ であり，軸が $1<x<4$ の間にあるから，$1<a<4$

（ウ）$f(1)=-a+3$，$f(4)=-7a+18$ であるから，$f(1)>0$ より，$a<3$，$f(4)>0$ より，$a<\frac{18}{7}$

したがって，$a<\frac{18}{7}$

◀ 少なくとも 1 つ実数解をもつから，$y=f(x)$ のグラフが x 軸に接する場合，すなわち，$D=0$ の場合も含めて，$D\geqq 0$ となる．

したがって，（ア）～（ウ）より，$2\leqq a<\frac{18}{7}$



(ii) 1 つの解が $1<x<4$，他の解が $x<1$，$4<x$ の範囲にあるとき

$f(1)\cdot f(4)<0$ が成り立つ．

したがって，$(-a+3)(-7a+18)<0$，すなわち，$(a-3)(7a-18)<0$ である．

ゆえに，$\frac{18}{7}<a<3$

◀ $f(1)>0$ かつ $f(4)<0$ または $f(1)<0$ かつ $f(4)>0$，すなわち，$f(1)\cdot f(4)<0$（$f(1)$ と $f(4)$ が異符号）

(iii) 1 つの解が $x=1$ のとき

$-a+3=0$ より，$a=3$ である．このとき，2 次方程式は，$x^2-6x+5=0$ となる．

したがって，$(x-1)(x-5)=0$ より，$x=1$，5 である．

ゆえに，$1<x<4$ の範囲に解はない．

(iv) 1 つの解が $x=4$ のとき

$-7a+18=0$ より，$a=\frac{18}{7}$ である．このとき，2 次方程式は，$x^2-\frac{36}{7}x+\frac{32}{7}=0$ となる．

したがって，$(7x-8)(x-4)=0$ より，$x=\frac{8}{7}$，4

よって，(i)～(iv) より，求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{2\leqq a<3}$

解答 3.3

One math

解答 I3.3.30 ★★★ 問題 p.157

問題文

2 つの 2 次方程式 $x^2-6x+a^2=0$，$x^2-2(a-1)x-a^2-10a+1=0$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつ．

(2) 2 つの方程式の少なくとも一方が実数解をもつ．

(3) 2 つの方程式のどちらか一方のみが実数解をもつ．

2 次方程式 $x^2-6x+a^2=0$ の判別式を D_1 とすると，

◀ 2 つの判別式を考えるので，D_1，D_2 とする．

$$\frac{D_1}{4}=(-3)^2-1\cdot a^2=9-a^2=-(a+3)(a-3)$$

2 次方程式 $x^2-2(a-1)x-a^2-10a+1=0$ の判別式を D_2 とすると，

$$\frac{D_2}{4}=\{-(a-1)\}^2-1\cdot\left(-a^2-10a+1\right)=2a^2+8a=2a(a+4)$$

(1) 2 つの方程式がともに実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$ のときである．

◀ 実数解をもつ条件は，$D>0$，$D=0$ を合わせた，$D\geqq 0$ である．

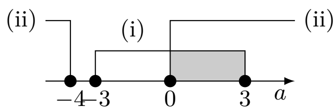
$D_1\geqq 0$ であるから，$-(a+3)(a-3)\geqq 0$

したがって，$-3\leqq a\leqq 3\cdots$(i)

$D_2\geqq 0$ であるから，$2a(a+4)\geqq 0$

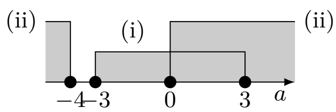
ゆえに，$a\leqq -4$，$0\leqq a\cdots$(ii)

よって,(i) と (ii) の共通範囲を求めると,$\boldsymbol{0\leqq a\leqq 3}$



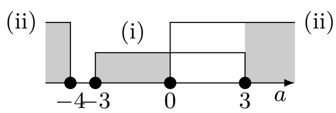
(2) 2 つの方程式の少なくとも一方が実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$ または $D_2\geqq 0$ のときである．

(i)，(ii) より，$\boldsymbol{a\leqq -4}$，$\boldsymbol{-3\leqq a}$



(3) 2 つの方程式のどちらか一方のみが実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$，$D_2\geqq 0$ の一方のみが成り立つことである．

(i) と (ii) の一方のみが成り立つ a の値の範囲を求めると，$\boldsymbol{a\leqq -4}$，$\boldsymbol{-3\leqq a<0}$，$\boldsymbol{3<a}$



解答 I3.3.31 ★★★ 問題 p.158

問題文

実数 x, y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$x+y^2$ の最大値，最小値と，そのときの x, y の値を求めよ．

$x^2+y^2=1$ より，$y^2=1-x^2\cdots$(i)

x, y は実数であるから $y^2 \geqq 0$ ，すなわち，$1-x^2 \geqq 0$

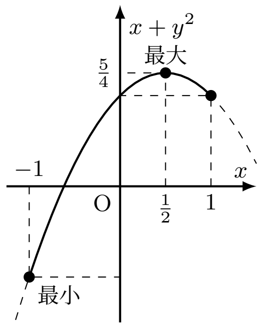
◀ y が実数のとき，$y^2 \geqq 0$ であることを用いて，x の値の範囲を求める．

したがって，$x^2-1 \leqq 0$ であるから，$(x+1)(x-1) \leqq 0$

ゆえに，$-1 \leqq x \leqq 1$

$x+y^2$ に (i) を代入すると，

$$\begin{aligned} x+y^2 &= x+\left(1-x^2\right) \\ &= -x^2+x+1 \\ &= -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \end{aligned}$$



グラフは右の図のようになる．

したがって，$x=\frac{1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$，$x=-1$ のとき，最小値 -1

$x=\frac{1}{2}$ のとき，$y^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ より，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=-1$ のとき，$y^2=1-(-1)^2=0$ より，$y=0$

よって，$x+y^2$ は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{のとき，最大値}\ \frac{5}{4}}$$
$$\boldsymbol{x=-1,\ y=0\ \text{のとき，最小値}\ -1}$$

解答
3.3

解答 I3.3.32 ★★★ 問題 p.159

問題文

次の関数の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ．

(1) x，y の関数 $P=x^2+3y^2-4x+2y+5$ の最小値を求めよ．

(2) x，y の関数 $Q=x^2+4xy+5y^2-4x-4y+7$ の最小値を求めよ．

(1)
$$\begin{aligned}P&=x^2-4x+3y^2+2y+5\\&=(x-2)^2-2^2+3y^2+2y+5\\&=(x-2)^2+3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+1\\&=(x-2)^2+3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

◀ 平方完成する．

◀ さらに平方完成する．

x，y は実数であるから，$(x-2)^2\geqq 0$，$\left(y+\frac{1}{3}\right)^2\geqq 0$

したがって，P は $x-2=0$，$y+\frac{1}{3}=0$ のとき最小となる．

よって，$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

◀ a が実数のとき，$a^2\geqq 0$ であり，等号が成り立つのは，$a=0$ のときであることを用いる．

(2)
$$\begin{aligned}Q&=x^2+4xy+5y^2-4x-4y+7\\&=x^2+2(2y-2)x+5y^2-4y+7\\&=\{x+(2y-2)\}^2-(2y-2)^2+5y^2-4y+7\\&=(x+2y-2)^2+y^2+4y+3\\&=(x+2y-2)^2+(y+2)^2-2^2+3\\&=(x+2y-2)^2+(y+2)^2-1\end{aligned}$$

x，y は実数であるから，$(x+2y-2)^2\geqq 0$，$(y+2)^2\geqq 0$

◀ $(\text{実数})^2\geqq 0$

したがって，Q は $x+2y-2=0$，$y+2=0$ のとき最小となる．

$x+2y-2=0$，$y+2=0$ を解くと，$x=6$，$y=-2$

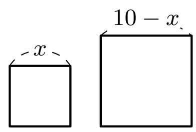
◀ x，y についての連立方程式を解く．

よって，$\boldsymbol{x=6}$，$\boldsymbol{y=-2}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-1}$

解答 I3.3.33 ★★ 問題 p.160

問題文

長さ 40 cm の針金を 2 つに分け，それぞれを折り曲げて正方形を 2 つ作る．2 つの正方形の面積の和が 52 cm^2 以上になるようにするには，針金をどのように切ればよいか．短い方の針金の長さの範囲を求めよ．



短い方の針金の長さを $4x$ cm とすると，長い方の針金の長さは，

$$40-4x=4(10-x)\ (\text{cm})$$

◀ 短い方の針金の長さを x cm としてもよいが，1 辺の長さが $\frac{x}{4}$ cm となり，計算に手間が掛かる．

$0<4x<20$ より，$0<x<5\cdots$(i)

◀ 短い方の針金の長さは，40 cm の半分の 20 cm より小さい．

2 つの正方形の 1 辺の長さは，それぞれ x cm と $10-x$ cm であるから，

$$x^2+(10-x)^2\geqq 52$$

整理すると，$x^2-10x+24\geqq 0$

したがって，$(x-6)(x-4)\geqq 0$

ゆえに，$x\leqq 4$，$6\leqq x\cdots$(ii)

(i)，(ii) より，$0<x\leqq 4$

よって，$0<4x\leqq 16$ となり，短い方の針金の長さは，**0 cm より長く， 16 cm 以下**であればよい．

解答 I3.3.34 ★★★★ 問題 p.161

問題文

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+3ax+20$, $g(x)=-x^2+7ax-15$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ．
(1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$
(2) ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$

$F(x)=f(x)-g(x)$ とすると，

$$F(x)=2x^2-4ax+35=2(x-a)^2-2a^2+35$$

(1) すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つ条件は，すべての実数 x に対して $F(x)>0$，すなわち，($F(x)$ の最小値) >0 が成り立つことと同じである．

◀ 判別式の符号に注目して，$D<0$ を用いてもよい．

$F(x)$ は $x=a$ で最小値 $-2a^2+35$ をとるから，$-2a^2+35>0$
したがって，$a^2<\frac{35}{2}$
よって，$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{70}}{2}<a<\frac{\sqrt{70}}{2}}$

(2) ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つ条件は，ある実数 x に対して $F(x)<0$，すなわち，($F(x)$ の最小値) <0 が成り立つことと同じである．

◀ 判別式の符号に注目して，$D>0$ を用いてもよい．

したがって，$-2a^2+35<0$
ゆえに，$a^2>\frac{35}{2}$
よって，$\boldsymbol{a<-\frac{\sqrt{70}}{2}}$，$\boldsymbol{\frac{\sqrt{70}}{2}<a}$

解答 I3.3.35 ★★★★ 問題 p.162

問題文

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2-4x+5$, $g(x)=-x^2+a-3$ について，次の条件を満たすような定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ．
(1) $-1\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$
(2) $-1\leqq x\leqq 3$ を満たすある実数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

$$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$$

(1) $-1\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ条件は，$-1\leqq x\leqq 3$ において，「($f(x)$ の最大値)$<$ ($g(x)$ の最小値)」が成り立つときである．
$-1\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)$ の最大値は，$f(-1)=10$，$g(x)$ の最小値は，$g(3)=a-12$

◀ $f(-1)=(-1-2)^2+1=10$, $g(3)=-3^2+a-3=a-12$

したがって，$a-12>10$
よって，$\boldsymbol{a>22}$

(2) $-1\leqq x\leqq 3$ を満たすある実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ条件は，$-1\leqq x\leqq 3$ において，「($f(x)$ の最小値)$<$ ($g(x)$ の最大値)」が成り立つときである．
$-1\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)$ の最小値は，$f(2)=1$，$g(x)$ の最大値は，$g(0)=a-3$

◀ $f(2)=(2-2)^2+1=1$, $g(0)=0^2+a-3=a-3$

したがって，$a-3>1$
よって，$\boldsymbol{a>4}$

解答 I3.3.36 ★★★ 問題 p.163

問題文

方程式 $|x^2-4x+3| = x+a$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，a は定数とする．

$|x^2-4x+3| = x+a$ より，$f(x) = \left|x^2-4x+3\right| - x$ とする．

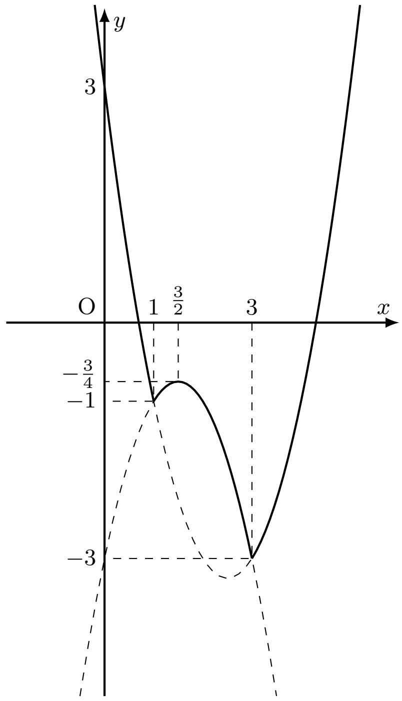
(i) $x^2-4x+3 \geqq 0$ のとき，すなわち，$(x-1)(x-3) \geqq 0$ より，$x \leqq 1$ または $x \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-4x+3-x \\ &= x^2-5x+3 \\ &= \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \end{aligned}$$

(ii) $x^2-4x+3 < 0$ のとき，すなわち，$1 < x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(x^2-4x+3\right) - x \\ &= -x^2+3x-3 \\ &= -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって，(i)，(ii) より，$y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる．



求める実数解の個数は，$y = f(x)$ と $y = a$ のグラフの共有点の個数と一致するので，右の図より，

$a < -3$ のとき，**0 個**

$a = -3$ のとき，**1 個**

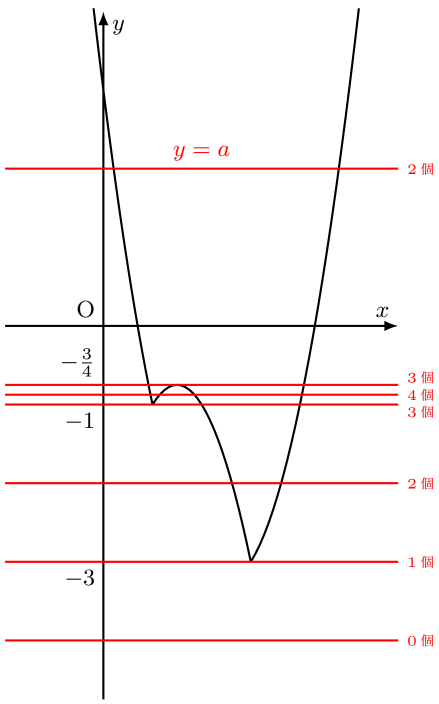
$-3 < a < -1$ のとき，**2 個**

$a = -1$ のとき，**3 個**

$-1 < a < -\frac{3}{4}$ のとき，**4 個**

$a = -\frac{3}{4}$ のとき，**3 個**

$a > -\frac{3}{4}$ のとき，**2 個**



◀ グラフをかき，$y = a$ を動かすことをイメージして，共有点の個数を調べる．

解答（節末）I3.3.1 ★★ 節末 p.164

問題文

2 次方程式 $x^2+4x+7a=0$，$2x^2-6x-a=0$ がともに実数解をもつ整数 a の個数を求めよ．

2 次方程式 $x^2+4x+7a=0$ の判別式を D_1 とすると，$\frac{D_1}{4}=2^2-1\cdot 7a=4-7a$

2 次方程式が実数解をもつから，$D_1 \geqq 0$

したがって，$4-7a \geqq 0$

ゆえに，$a \leqq \frac{4}{7} \cdots$ (i)

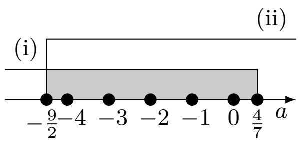
2 次方程式 $2x^2-6x-a=0$ の判別式を D_2 とすると，$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-2\cdot(-a)=9+2a$

2 次方程式が実数解をもつから，$D_2 \geqq 0$

したがって，$9+2a \geqq 0$

ゆえに，$a \geqq -\frac{9}{2} \cdots$ (ii)

したがって，(i) と (ii) の共通範囲を求めると，



$$-\frac{9}{2} \leqq a \leqq \frac{4}{7}$$

この不等式を満たす整数 a は，$a=-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0$

よって，求める整数 a の個数は，**5 個**

◀ 2 つの判別式を考えるので，D_1，D_2 とする．

◀ 実数解をもつ条件は，$D_1>0$，$D=0$ を合わせた，$D \geqq 0$ である．

解答（節末）I3.3.2 ★★★ 節末 p.165

問題文

実数 x，y が $x^2+y^2=13$ のもとで，$x-ay$ の最大値が 7 となるとき，定数 a の値を求めよ．

$x-ay=k$ とおくと，$x=k+ay$

これを $x^2+y^2=13$ に代入すると，$(k+ay)^2+y^2=13$

したがって，$(a^2+1)y^2+2aky+k^2-13=0$

y は実数であるから，この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D \geqq 0$

$$\frac{D}{4}=(ak)^2-(a^2+1)(k^2-13)=-k^2+13(a^2+1)$$

これより，$-k^2+13(a^2+1) \geqq 0$

ゆえに，$k^2 \leqq 13(a^2+1)$

したがって，$-\sqrt{13(a^2+1)} \leqq k \leqq \sqrt{13(a^2+1)}$

k の最大値が 7 であるから，$\sqrt{13(a^2+1)}=7$

よって，$a^2=\frac{36}{13}$

これを解いて，$a=\pm\boldsymbol{\frac{6}{\sqrt{13}}}$

◀ $(\text{実数})^2 \geqq 0$ より，
$a^2+1>0$

◀ $\sqrt{13(a^2+1)}=7$ の両辺を 2 乗して，$13(a^2+1)=49$
これを整理すると，$a^2=\frac{36}{13}$ が得られる．

解答（節末）I3.3.3 ★★★ 節末 p.166

問題文

(1) 不等式 $3x^4 - 7x^2 + 2 > 0$ を解け．

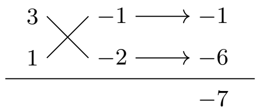
(2) 不等式 $\left(x^2 - 3x + 2\right)^2 - 4\left(x^2 - 3x + 2\right) + 3 \leqq 0$ を解け．

(1) $x^2 = t$ とおくと，$t \geqq 0$

◀ (実数)$^2 \geqq 0$

与えられた不等式は，$3t^2 - 7t + 2 > 0$

◀ たすき掛けを用いる．



したがって，$(3t-1)(t-2) > 0$

これを解くと，$0 \leqq t < \frac{1}{3}$，$2 < t$

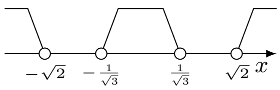
ゆえに，$0 \leqq x^2 < \frac{1}{3}$，$2 < x^2$

ここで，$x^2 \geqq 0$ は常に成り立つので，

$x^2 < \frac{1}{3}$ より，$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2 < x^2$ より，$x < -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} < x$

よって，$\boldsymbol{x < -\sqrt{2},\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{2} < x}$



◀ $0 \leqq x^2 < \frac{1}{3}$ または $2 < x^2$ であり，解を合わせた範囲が求める解となるので注意すること．

(2) $x^2 - 3x + 2 = t$ とおくと，$t = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ である．

t のとりうる値の範囲は，$t \geqq -\frac{1}{4}$

◀ t の変域を考える必要があるので注意すること．

不等式を t で表すと，$t^2 - 4t + 3 \leqq 0$

したがって，$(t-1)(t-3) \leqq 0$ より，$1 \leqq t \leqq 3$

これは $t \geqq -\frac{1}{4}$ を満たす．

ゆえに，$1 \leqq x^2 - 3x + 2 \leqq 3$

$1 \leqq x^2 - 3x + 2$ より，$x^2 - 3x + 1 \geqq 0$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ を解くと，$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

◀ 解の公式を用いる．

このとき，$x^2 - 3x + 1 \geqq 0$ の解は，

$$x \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x \cdots \text{(i)}$$

$x^2 - 3x + 2 \leqq 3$ より，$x^2 - 3x - 1 \leqq 0$

$x^2 - 3x - 1 = 0$ を解くと，$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

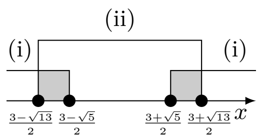
◀ 解の公式を用いる．

このとき，$x^2 - 3x - 1 \leqq 0$ の解は，

$$\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \frac{3+\sqrt{13}}{2} \cdots \text{(ii)}$$

よって，(i)，(ii) の共通範囲を求めると，

$$\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leqq x \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$



解答（節末）I3.3.4 ★★★★ 節末 p.167

問題文

a を定数とする．x についての方程式 $|(x-3)(x-5)| = ax - 2a + \frac{1}{2}$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

$$y = |(x-3)(x-5)| \cdots \text{(i)}, \quad y = ax - 2a + \frac{1}{2} \cdots \text{(ii)}$$

とする．

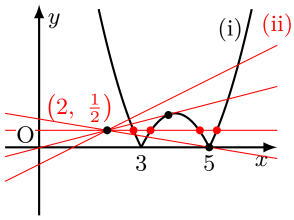
$(x-3)(x-5) \geqq 0$ の解は，$x \leqq 3,\ 5 \leqq x$

$(x-3)(x-5) < 0$ の解は，$3 < x < 5$

したがって，(i) は，

$x \leqq 3,\ 5 \leqq x$ のとき，$y = (x-3)(x-5) = (x-4)^2 - 1$

$3 < x < 5$ のとき，$y = -(x-3)(x-5) = -(x-4)^2 + 1$



よって，(i) のグラフは右の図のようになる．

(ii) は，$y = a(x-2) + \frac{1}{2}$ と変形できるから，(ii) のグラフは定点 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ を通る傾き a の直線である．

（ア）(ii) のグラフが (i) のグラフの $3 \leqq x \leqq 5$ の部分と接するとき

このとき,2 次方程式 $-(x-3)(x-5) = ax - 2a + \frac{1}{2}$,すなわち,$x^2 + (a-8)x - 2a + \frac{31}{2} = 0$ の判別式を D とすると，

$$D = (a-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-2a + \frac{31}{2}\right) = a^2 - 8a + 2$$

$D = 0$ より，$a^2 - 8a + 2 = 0$

これを解いて，$a = 4 \pm \sqrt{14}$

このとき，$3 \leqq x \leqq 5$ の部分と接するのは，$a = 4 - \sqrt{14}$ のときである．

（イ）(ii) のグラフが点 $(5,\ 0)$ を通るとき

$0 = 5a - 2a + \frac{1}{2}$ より，$a = -\frac{1}{6}$

よって，（ア），（イ）より，方程式 $|(x-3)(x-5)| = ax - 2a + \frac{1}{2}$ が相異なる 4 つの実数解をもつとき，a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-\frac{1}{6} < a < 4 - \sqrt{14}}$$

◀ $y = |(x-3)(x-5)|$ のグラフと直線 $y = ax - 2a + \frac{1}{2}$ の共有点について調べる．a を含む式を直線の形に分離して，2 つのグラフが 4 つの共有点をもつ条件を考える．

◀ $y = (x-3)(x-5)$ のグラフで，x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返したものである．

◀ 2 つのグラフが接するとき，共有点（実数解）の個数は 3 個である．

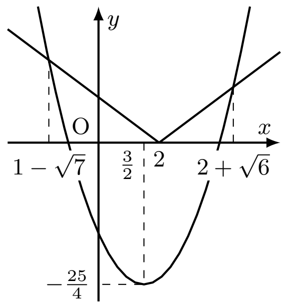
◀ 2 つのグラフが接するとき，共有点（実数解）の個数は 3 個である．

解答（節末）I3.3.5 ★★★ 節末 p.168

問題文

2 次不等式 $x^2-3x-4<|x-2|$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x \geqq 2)\\ -x+2 & (x<2)\end{cases}$$



$x^2-3x-4=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}$ であるから，$y=x^2-3x-4$ のグラフと $y=|x-2|$ のグラフは，右の図のようになる．

2 つのグラフの交点の x 座標は，

(i) $x \geqq 2$ のとき

$x^2-3x-4=x-2$ より，$x^2-4x-2=0$

したがって，$x=2\pm\sqrt{6}$

ゆえに，$x \geqq 2$ より，$x=2+\sqrt{6}$

(ii) $x<2$ のとき

$x^2-3x-4=-(x-2)$ より，$x^2-2x-6=0$

したがって，$x=1\pm\sqrt{7}$

ゆえに，$x<2$ より，$x=1-\sqrt{7}$

よって，(i)，(ii) とグラフより，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{1-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{6}}$

◀ $y=|x-2|$ のグラフが $y=x^2-3x-4$ のグラフより上側にある x の範囲である．

【別解】

(i) $x \geqq 2$ のとき

$x^2-3x-4<x-2$ より，$x^2-4x-2<0$

ゆえに，$2-\sqrt{6}<x<2+\sqrt{6}$

これと $x \geqq 2$ より，$2 \leqq x<2+\sqrt{6}$

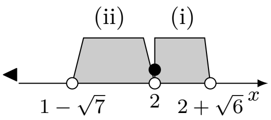
(ii) $x<2$ のとき

$x^2-3x-4<-(x-2)$ より，$x^2-2x-6<0$

ゆえに，$1-\sqrt{7}<x<1+\sqrt{7}$

これと $x<2$ より，$1-\sqrt{7}<x<2$

よって，(i)，(ii) より，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{1-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{6}}$

◀ 

章末問題 3（解答）

解答（章末）I3.1 ★★★ 章末 p.169

問題文

実数 x, y が $x^2-xy+y^2+y-5=0$ を満たすとき，y の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である．

y が k という値をとるとすると，$x^2-kx+k^2+k-5=0\cdots$(i) を満たす実数 x が存在する．
したがって，この条件は，(i) の判別式を D とすると，

$$D=(-k)^2-4\left(k^2+k-5\right)$$

$D\geqq 0$ であるから，$k^2-4k^2-4k+20\geqq 0$
ゆえに，$-3k^2-4k+20\geqq 0$ より，$(3k+10)(k-2)\leqq 0$
したがって，$-\frac{10}{3}\leqq k\leqq 2$
よって，y の**最大値は 2 ，最小値は $-\frac{10}{3}$**

◀ y が k (実数) という値をとりうる．$\iff$ $x^2-kx+k^2+k-5=0$ を満たす実数 x が存在する．$\iff x^2-kx+k^2+k-5=0$ の判別式 $D\geqq 0$

解答（章末）I3.2 ★★ 章末 p.170

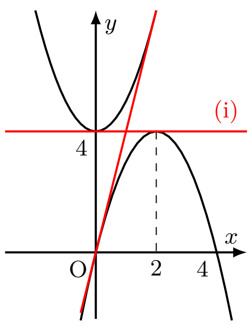
問題文

2 つの放物線 $y=x^2+4$，$y=-x^2+4x$ の両方に接する直線の方程式を求めよ．

求める直線の方程式を $y=ax+b\cdots$(i) とおく．
直線 (i) と放物線 $y=x^2+4$ が接するから，$x^2+4=ax+b$
すなわち，$x^2-ax+(4-b)=0$
この 2 次方程式の判別式を D_1 とすると，$D_1=(-a)^2-4\cdot 1\cdot(4-b)$
したがって，$D_1=0$ より，$a^2+4b-16=0\cdots$(ii)
直線 (i) と放物線 $y=-x^2+4x$ が接するから，$-x^2+4x=ax+b$
すなわち，$x^2+(a-4)x+b=0$
この 2 次方程式の判別式を D_2 とすると，$D_2=(a-4)^2-4\cdot 1\cdot b$
したがって，$D_2=0$ より，$a^2-8a+16-4b=0$
ゆえに，$4b=a^2-8a+16\cdots$(iii)
(iii) を (ii) に代入して整理すると，

$$2a^2-8a=0$$

したがって，$2a(a-4)=0$ より，$a=0,\ 4$
$a=0$ のとき，(ii) より，$b=4$
$a=4$ のとき，(ii) より，$b=0$
よって，求める直線の方程式は，$\boldsymbol{y=4,\ y=4x}$



◀ 2 つの放物線の両方に接する直線は，y 軸に平行ではない．

解答（章末）I3.3 ★★★ 章末 p.171

問題文

a, b は自然数で，2 次方程式 $x^2+2ax+4a-4b=0$ が重解 α をもつとき，a, b, α の値を求めよ．

2 次方程式 $x^2+2ax+4a-4b=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(4a-4b)=a^2-4a+4b$$

2 次方程式が重解をもつから，$D=0$

整理すると，$4b=a(4-a)\cdots$(i)

ここで，a, b は自然数より，$4b>0$ かつ $a>0$

したがって，$4-a>0$ より，$0<a<4$

a は自然数であるから，$a=1$, 2, 3

これらのうち，(i) より，b が自然数となるのは，$a=2$ のときである．

◀ $a=1$ のとき，$4b=3$ より，$b=\frac{3}{4}$ となり，$a=3$ のとき，$4b=3$ より，$b=\frac{3}{4}$ となり不適である．

ゆえに，$b=1$

このとき，$x^2+2ax+4a-4b=0$ の重解は，$x=-\frac{2a}{2}=-a$

したがって，$a=2$ より，重解は -2 となる．

よって，$a=\mathbf{2}$, $b=\mathbf{1}$, $\alpha=\mathbf{-2}$

解答（章末）I3.4 ★★★ 章末 p.172

問題文

a, b を異なる実数とするとき，x に関する方程式 $(x-3a)(x-3b)-(3x-4a-5b)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつことを証明せよ．

与えられた方程式を整理すると，

$$x^2-3(a+b+1)x+9ab+4a+5b=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D=\{3(a+b+1)\}^2-4\cdot1\cdot\{9ab+4a+5b\}=9(a-b)^2+2(a-b)+9$$

ここで，$a-b=c$ とおくと，

$$D=9c^2+2c+9=\left(3c+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{80}{9}$$

よって，この方程式は $D>0$ であるから，相異なる 2 つの実数解をもつ．■

【別解】 $f(x)=(x-3a)(x-3b)-(3x-4a-5b)$ とする．方程式が異なる 2 つの実数解をもつことを示すには，$y=f(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わることを示せばよい．

◀ 下に凸の放物線は，その関数が負の値をとるとき，x 軸と異なる 2 点で交わることを利用する．

$$f(3a)=-5(a-b),\quad f(3b)=4(a-b)$$

より，$a\neq b$ であるから，$f(3a)$ と $f(3b)$ は異符号であり，一方は負である．

よって，$y=f(x)$ は x 軸と異なる 2 点で交わる．■

解答 3.4

解答（章末）I3.5 ★★★ 章末 p.173

問題文

方程式 $4x^2+7xy+4y^2=15$ を満たす x, y に対して，$u=x+y$, $v=xy$ とおく．
(1) $u^2-4v \geqq 0$ を示せ．
(2) u, v の間に成り立つ等式を求めよ．
(3) $k=u+v$ がとる値の範囲を求めよ

(1)

$$u^2-4v=(x+y)^2-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \geqq 0$$

よって，$u^2-4v \geqq 0$ が成り立つ．

◀ (実数)$^2 \geqq 0$

(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ であるから，与えられた方程式は，

$$4\left\{(x+y)^2-2xy\right\}+7xy=15$$

◀ 与えられた方程式は，x, y の対称式であるので,$x+y$, xy で表す．

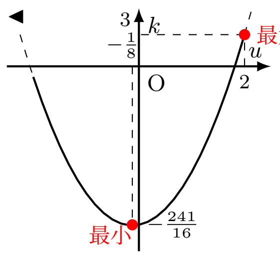
したがって，$4(x+y)^2-xy=15$
よって，$\boldsymbol{4u^2-v=15}$
(3) $u^2-4v \geqq 0 \cdots$ (i)，$4u^2-v=15 \cdots$ (ii) とする．
(ii) より，$v=4u^2-15$
これを (i) に代入すると，$u^2-4(4u^2-15) \geqq 0$
したがって，$u^2-4 \leqq 0$
ゆえに，$-2 \leqq u \leqq 2 \cdots$ (iii)
k を u の式で表すと，(ii) より，

$$k=u+v=u+4u^2-15=4\left(u+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{241}{16}$$

◀ 平方完成する．

(iii) より，k は $u=2$ で最大値 3，$u=-\frac{1}{8}$ で最小値 $-\frac{241}{16}$
よって，

$$\boldsymbol{-\frac{241}{16} \leqq k \leqq 3}$$

◀


解答 3.4

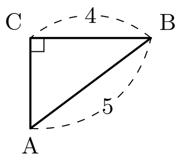
図形と計量（解答）

三角比の定義・性質（解答）

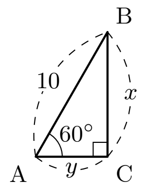
解答 I4.1.1 ★ 問題 p.175

問題文

(1) 右の図のような三角形において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ．



(2) 右の図のような三角形において，x，y の値を求めよ．



(1) 三平方の定理より，$\mathrm{AC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

よって，$\sin A = \mathbf{\frac{4}{5}}$，$\cos A = \mathbf{\frac{3}{5}}$，$\tan A = \mathbf{\frac{4}{3}}$

◀ 三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$

(2) $\sin 60^\circ = \frac{x}{10}$ であるから，$x = 10\sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{5\sqrt{3}}$

◀ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{y}{10}$ であるから，$y = 10\cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{5}$

◀ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

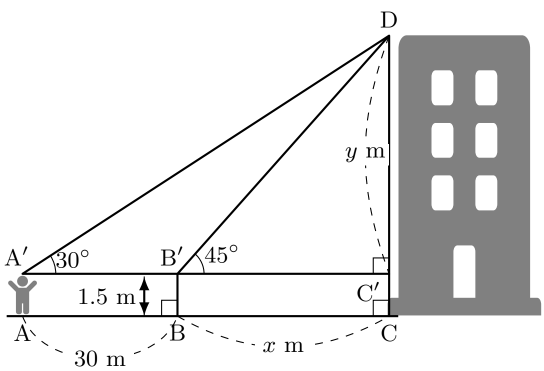
解答 I4.1.2 ★★ 問題 p.176

問題文

水平な道路をまっすぐに歩いている人が，あるビルの頂点 P を見上げたところ，A 地点でその仰角が 30° であった．その後，A 地点から 30m 進んで B 地点に到達したとき，再び仰角を測ると 45° であった．この人の目の高さが地面から 1.5m であるとき，このビルの高さを求めよ．

右の図のように，A′，B′，C，C′，P とおき，BC = B′C′ = x m，C′P = y m とする．

直角三角形 A′C′P において，



$$y = (30 + x)\tan 30^\circ$$

◀ $\tan 30^\circ = \frac{y}{30+x}$

したがって，$y = \frac{30+x}{\sqrt{3}} \cdots$(i)

◀ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

直角三角形 B′C′P において，

$$y = x\tan 45^\circ$$

◀ $\tan 45^\circ = \frac{y}{x}$

したがって，$y = x \cdots$(ii)

◀ $\tan 45^\circ = 1$

(i)，(ii) より，$\frac{30+x}{\sqrt{3}} = x$

$\left(\sqrt{3} - 1\right)x = 30$ より，$x = \frac{30}{\sqrt{3}-1} = 15 + 15\sqrt{3}$

◀ $\frac{30}{\sqrt{3}-1} = \frac{30(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 15(\sqrt{3}+1)$

これと (ii) より，$y = 15 + 15\sqrt{3}$

ゆえに，$\mathrm{PC} = y + 1.5 = 16.5 + 15\sqrt{3}$

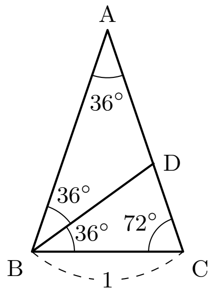
よって，ビルの高さは，$\mathbf{16.5 + 15\sqrt{3}}$ **(m)**

解答 I4.1.3 ★★★ 問題 p.177

問題文

二等辺三角形 ABC において AB = AC，BC = 1，∠A = 36° とし，∠B の二等分線と辺 AC の交点を D とするとき，次の値を求めよ．

(1) 辺 BD の長さ　　(2) 辺 AB の長さ　　(3) $\sin 18^\circ$



(1) △ABC は二等辺三角形であり，∠A = 36° であるから，

$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

BD は ∠B の二等分線であるから，

$$\angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$$

また，∠BCD = ∠BDC = 72° であるから，△BCD は BC = BD の二等辺三角形である．

◀ ∠BDC = ∠ABD + ∠CBD

よって，BD = BC = **1**

(2) △DAB は DA = DB を満たす二等辺三角形であるから，AD = 1

◀ ∠ABD = ∠BAD = 36°

AB = x とすると，CD = $x - 1$

△ABC ∽ △BCD であるから，AB : BC = BC : CD，すなわち，$x : 1 = 1 : (x-1)$

したがって，$x(x-1) = 1$

整理すると，$x^2 - x - 1 = 0$

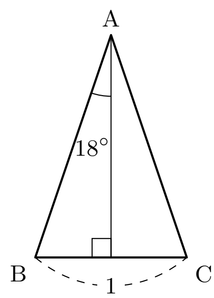
これを解くと，$x > 0$ より，$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，AB = $\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(3)

$$\sin 18^\circ = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

◀



解答 4.1

解答 I4.1.4 ★ 問題 p.178

問題文

A は鋭角とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\sin A = \frac{4}{5}$ のとき，$\cos A$ と $\tan A$ の値を求めよ．

(2) $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ．

(1) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より，$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

A は鋭角であるから，$\cos A > 0$

◀ A が鋭角 $(0^\circ < A < 90^\circ)$ のとき，$\sin A > 0$，$\cos A > 0$，$\tan A > 0$ であることに注意すること．

よって，$\cos A = \frac{\sqrt{9}}{5} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$

また，$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(2) $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$ より，$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{18}{16}$

したがって，$\cos^2 A = \frac{16}{18}$

A は鋭角であるから，$\cos A > 0$

◀ $\cos A > 0$ より，$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ は不適である．

よって，$\cos A = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

また，$\sin A = \tan A \cos A = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

◀ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ より，$\sin A = \tan A \cos A$

解答 I4.1.5 ★★ 問題 p.179

問題文

(1) $\sin 55^\circ$, $\cos 125^\circ$ を 45° 以下の三角比で表せ．また, $\sin 35^\circ \cos 125^\circ + \sin 55^\circ \cos 145^\circ$ を簡単にせよ．

(2) △ABC の 3 つの内角 ∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とするとき，等式 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B+C}{2} = 1$ が成り立つことを証明せよ．

(1)

$$\sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 35^\circ) = \mathbf{\cos 35^\circ} \cdots \text{(i)},$$

◀ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

$$\cos 125^\circ = \cos(180^\circ - 55^\circ) = -\cos 55^\circ = -\cos(90^\circ - 35^\circ) = \mathbf{-\sin 35^\circ} \cdots \text{(ii)}$$

◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\cos 145^\circ = \cos(180^\circ - 35^\circ) = -\cos 35^\circ$ であるから，これと (i)，(ii) より，

◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$$\begin{aligned}
&\sin 35^\circ \cos 125^\circ + \sin 55^\circ \cos 145^\circ \\
&= \sin 35^\circ(-\sin 35^\circ) + \cos 35^\circ(-\cos 35^\circ) \\
&= -\sin^2 35^\circ - \cos^2 35^\circ \\
&= -\left(\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ\right) \\
&= \mathbf{-1}
\end{aligned}$$

◀ すべて 35° の三角比に式変形する．

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $A + B + C = 180^\circ$ であるから，$B + C = 180^\circ - A$

したがって，$\frac{B+C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$

ゆえに，$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} = 1$

◀ $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$

よって，等式は成り立つ．■

解答 4.1

One math

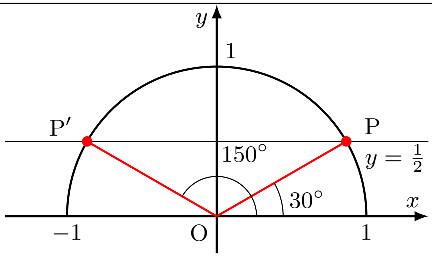
解答 I4.1.6 ★　問題 p.180

問題文

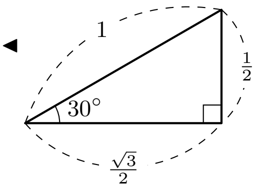
次の方程式を満たす θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$　　(2) $2\cos\theta + 1 = 0$　　(3) $\tan\theta + 1 = 0$

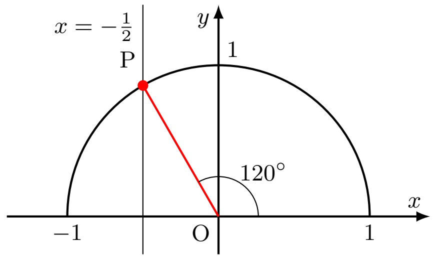
(1) $2\sin\theta - 1 = 0$ より，$\sin\theta = \frac{1}{2}$
半径 1 の半円上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の 2 点 P，P$'$ である．
よって，$\theta = \mathbf{30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$



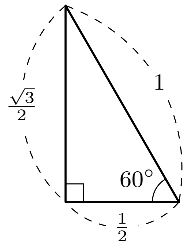
◀



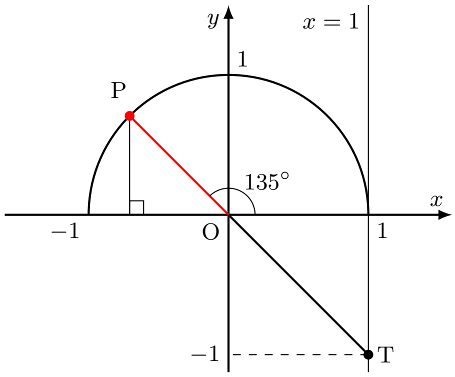
(2) $2\cos\theta + 1 = 0$ より，$\cos\theta = -\frac{1}{2}$
半径 1 の半円上で，x 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の点 P である．
よって，$\theta = \mathbf{120^\circ}$



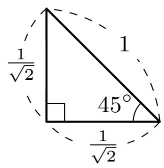
◀



(3) $\tan\theta + 1 = 0$ より，$\tan\theta = -1$
直線 $x = 1$ 上で，y 座標が -1 となる点 T をとると，直線 OT と半径 1 の半円上の交点は右の図の点 P である．
よって，$\theta = \mathbf{135^\circ}$



◀



解答 I4.1.7 ★★　問題 p.181

問題文

(1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めよ．ただし，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ とする．
(2) $\tan\beta = -2$ のとき，$\sin\beta$，$\cos\beta$ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より，$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ において，$\cos\alpha < 0$

◀ 符号に注意すること．

よって，$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = \mathbf{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$
また，$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \mathbf{-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

◀ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$

(2) $1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$ より，$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \tan^2\beta = 1 + (-2)^2 = 5$
したがって，$\cos^2\beta = \frac{1}{5}$
$\tan\beta = -2 < 0$ より，$90^\circ < \beta < 180^\circ$ であるから，$\cos\beta < 0$

◀ $\cos\beta < 0$ より，$\frac{1}{\sqrt{5}}$ は不適である．

よって，$\cos\beta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = \mathbf{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$
また，$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ より，$\sin\beta = \tan\beta \cdot \cos\beta = -2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \mathbf{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

◀ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より,$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha$

One math

解答 I4.1.8 ★★★ 問題 p.182

問題文

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$　(3) $\sin\theta+\cos\theta$

(1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}\cdots$(i) の両辺を 2 乗すると，$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$
したがって，$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$
よって，$\sin\theta\cos\theta=\mathbf{\frac{3}{8}}\cdots$(ii)

◀ 両辺を 2 乗して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta$ の形を作る．

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$
(i)，(ii) を代入すると，$\sin^3\theta-\cos^3\theta=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{11}{16}}$
【別解】 $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)\left(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)$
(i)，(ii) を代入すると，$\sin^3\theta-\cos^3\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{8}\right)=\mathbf{\frac{11}{16}}$

◀ a^3-b^3
$=(a-b)^3+3ab(a-b)$
◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$
(ii) を代入すると，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，(ii) より，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$
したがって，$\sin\theta+\cos\theta>0$
よって，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{7}{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

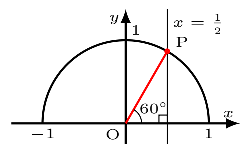
◀ $\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}>0$ であり，$\sin\theta>0$ より，$\cos\theta>0$
よって，$\sin\theta+\cos\theta>0$

解答 I4.1.9 ★★★ 問題 p.183

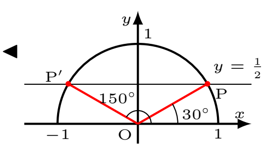
問題文

次の等式を満たす θ の値を求めよ．
(1) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$
(2) $2\cos^2\theta+7\sin\theta-5=0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(1) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$ より，$2\left(1-\cos^2\theta\right)-3\cos\theta=0$
したがって，$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0\cdots$(i)
$\cos\theta=t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$-1\leqq t\leqq 1$
これを (i) に代入すると，$2t^2+3t-2=0$
ゆえに，$(2t-1)(t+2)=0$ より，$t=\frac{1}{2}$，-2
$-1\leqq t\leqq 1$ より，$t=\frac{1}{2}$
すなわち，$\cos\theta=\frac{1}{2}$
よって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\theta=\mathbf{60^\circ}$

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
◀ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$
◀ たすき掛けを用いる．
◀


(2) $2\cos^2\theta+7\sin\theta-5=0$ より，$2\left(1-\sin^2\theta\right)+7\sin\theta-5=0$
したがって，$2\sin^2\theta-7\sin\theta+3=0\cdots$(i)
$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$0\leqq t\leqq 1$
これを (i) に代入すると，$2t^2-7t+3=0$
ゆえに，$(2t-1)(t-3)=0$ より，$t=\frac{1}{2}$，3
$0\leqq t\leqq 1$ より，$t=\frac{1}{2}$
すなわち，$\sin\theta=\frac{1}{2}$
よって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\theta=\mathbf{30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$

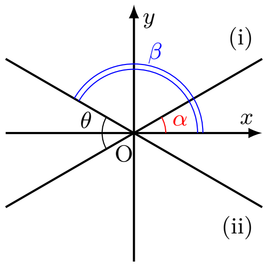
◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
◀ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$0\leqq\sin\theta\leqq 1$
◀ たすき掛けを用いる．
◀


解答 I4.1.10 ★★ 問題 p.184

問題文

2 直線 $x-\sqrt{3}y=0\cdots(\mathrm{i})$，$x+\sqrt{3}y=0\cdots(\mathrm{ii})$ について，次の問いに答えよ．
(1) 直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を求めよ．
(2) 2 直線 (i)，(ii) のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を求めよ．

(1) 直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を α とすると，$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ より，$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$0^\circ \leqq \alpha < 180^\circ$ より，$\alpha=\mathbf{30^\circ}$



(2) 直線 (ii) が x 軸の正の向きとのなす角を β とすると，$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$ より，$\tan\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$0^\circ \leqq \beta < 180^\circ$ より，$\beta=150^\circ$
右の図から，$\beta-\alpha=150^\circ-30^\circ=120^\circ$
よって，求める角 θ は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より，$\theta=180^\circ-120^\circ=\mathbf{60^\circ}$

◀ 求める角は，2 直線の図をかいて判断するとよい．

解答 I4.1.11 ★★ 問題 p.185

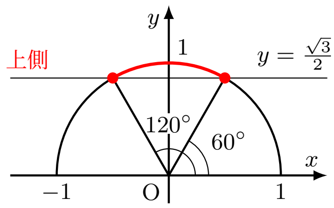
問題文

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\theta=60^\circ$，120°
よって，右の図より，$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値の範囲は，

$$\mathbf{60^\circ < \theta < 120^\circ}$$

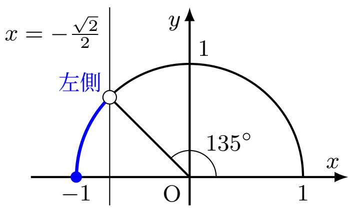


◀ 不等号を等号におき換えて，方程式を解く．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

(2) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ より，$\theta=135^\circ$
よって，右の図より，$\cos\theta \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる θ の値の範囲は，

$$\mathbf{135^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ}$$



◀ 不等号を等号におき換えて，方程式を解く．

◀ 等号を含むか否かに注意すること．

解答 4.1

One math

解答 I4.1.12 ★★ 問題 p.186

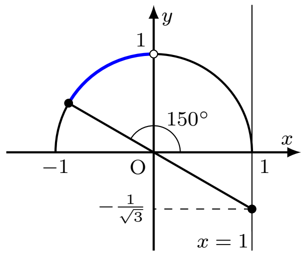
問題文

次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $\tan\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$　　(2) $\tan\theta > -1$

(1) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\theta = 150^\circ$
よって，右の図より，$\tan\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ の値の範囲は，

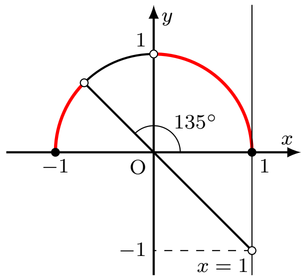
$$\boldsymbol{90^\circ < \theta \leqq 150^\circ}$$



◀ 不等号を等号におき換える．
◀ 傾きが $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 以下となる範囲を求める．
◀ $\theta \neq 90^\circ$ であることに注意すること．

(2) $\tan\theta = -1$ より，$\theta = 135^\circ$
よって，右の図より，$\tan\theta > -1$ の値の範囲は，

$$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta < 90^\circ,\quad 135^\circ < \theta \leqq 180^\circ}$$



◀ 不等号を等号におき換える．
◀ 傾きが -1 より大きい範囲を求める．
◀ $\theta \neq 90^\circ$ であることに注意すること．

解答 I4.1.13 ★★★ 問題 p.187

問題文

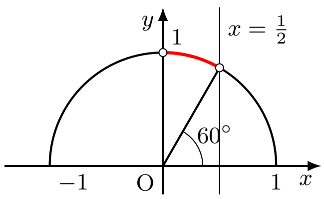
次の不等式を解け．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 > 0$　　(2) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 \geqq 0$

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 > 0$ より，$2(1-\cos^2\theta) + \cos\theta - 2 > 0$
したがって，$2\cos^2\theta - \cos\theta < 0 \cdots$ (i)
$\cos\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$-1 \leqq t \leqq 1 \cdots$ (ii)
また，(i) の不等式は，$2t^2 - t < 0$ より，$t(2t-1) < 0$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ゆえに，$0 < t < \frac{1}{2}$
これと (ii) より，$0 < \cos\theta < \frac{1}{2}$
よって，求める解は，$\boldsymbol{60^\circ < \theta < 90^\circ}$

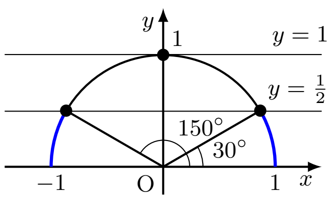


(2) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 \geqq 0$ より，$2t^2 - 3t + 1 \geqq 0 \cdots$ (i)
$\sin\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$0 \leqq t \leqq 1 \cdots$ (ii)
また，(i) の不等式は，$2t^2 - 3t + 1 \geqq 0$ より，$(2t-1)(t-1) \geqq 0$

◀ たすき掛けを用いる．

2 ╲╱ $-1 \longrightarrow -2$
1 ╱╲ $-1 \longrightarrow -1$
-3

したがって，$t \leqq \frac{1}{2}$，$1 \leqq t$
これと (ii) より，$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$，$t = 1$
すなわち，$0 \leqq \sin\theta \leqq \frac{1}{2}$，$\sin\theta = 1$



よって，求める解は，$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ，150^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ，\theta = 90^\circ}$

解答 4.1

One math

解答 I4.1.14 ★★★ 問題 p.188

問題文

関数 $y=\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

$y=\sin^2\theta-\cos\theta=\left(1-\cos^2\theta\right)-\cos\theta=-\cos^2\theta-\cos\theta+1\cdots$(i)

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

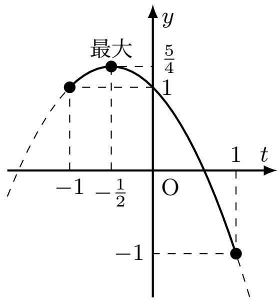
$\cos\theta=t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，

$$-1\leqq t\leqq 1$$

◀ t の範囲を求める．

このとき，(i) に t を代入すると，

$$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$



したがって，グラフは右の図のようになる．

ゆえに，y は $t=-\frac{1}{2}$, すなわち，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$ をとり，$t=1$，すなわち，$\cos\theta=1$ のとき，最小値 -1 をとる．

◀ $t=1$ の方が軸から遠いので，$t=1$ で最小となる．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ のとき，$\theta=120^\circ$，$\cos\theta=1$ のとき，$\theta=0^\circ$

よって，**$\theta=120^\circ$ のとき，最大値 $\frac{5}{4}$，$\theta=0^\circ$ のとき，最小値 -1**

解答 I4.1.15 ★★★★ 問題 p.189

問題文

方程式 $3\sin^2\theta+\cos\theta-a=0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$\cos\theta=t$ とおくと，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，与えられた方程式は，

$$-3t^2+t+3-a=0\cdots\text{(i)}$$

◀ $3(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-a=0$ より，$-3\cos^2\theta+\cos\theta+3-a=0$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，t の値の範囲は $-1\leqq t\leqq 1$ であり，$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，$\cos\theta=t$ を満たす θ の値は 1 個である．

したがって，与えられた方程式を満たす θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で異なる 2 個の解をもつのは，(i) が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で解を 2 個もつときである．

(i) を整理すると，$a=-3t^2+t+3$

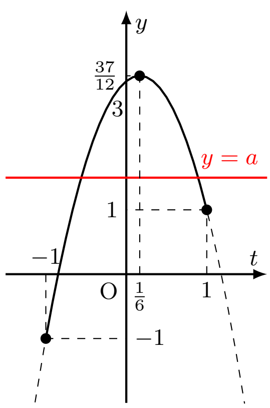
ゆえに，$a=-3\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{37}{12}\cdots$(ii)

(ii) の実数解の個数は，$y=a$ と $y=-3\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{37}{12}$ のグラフの共有点の個数と一致する．

◀ 定数を分離する．

よって，右の図より，$-1<t\leqq 1$ の範囲で解を 2 個もつ a の範囲は，

$$\mathbf{1\leqq a<\frac{37}{12}}$$



◀ $1\leqq a<\frac{37}{12}$ のとき，共有点が 2 個存在し，それを満たす θ は 2 個存在する．

解答 4.1

One math

解答 I4.1.16 ★★★★ 問題 p.190

> 問題文
>
> 方程式 $2\cos^2\theta + a\cos\theta + 1 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ を満たす θ が異なる 2 個の解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$\cos\theta = t$ とおくと，与えられた方程式は $2t^2 + at + 1 = 0$ となり，この 2 次方程式の判別式を D とする．

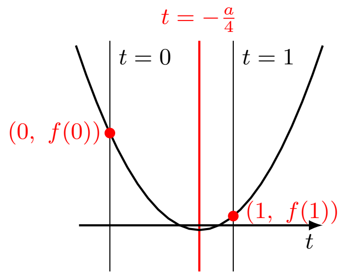
$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，t の値の範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であり，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$\cos\theta = t$ を満たす θ の値は 1 個である．

◀ おき換えた文字の範囲に注意すること．

したがって，与えられた方程式を満たす θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で異なる 2 個の解をもつのは，$2t^2 + at + 1 = 0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつときである．

ゆえに，求める条件は，$f(t) = 2t^2 + at + 1$ とすると，(i) $D > 0$，(ii) 軸が $0 < t < 1$ の範囲にある，(iii) $f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$ である．

◀ (i) のように判別式 D を用いる代わりに，「頂点の y 座標が 0 になる」という条件を用いても同じ結果が得られる．



(i) $D = a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = a^2 - 8$ であり，$D > 0$ であるから，

$$a^2 - 8 > 0$$

したがって，$a < -2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2} < a$

(ii) 軸は直線 $t = -\frac{a}{4}$ であるから，$0 < -\frac{a}{4} < 1$ より，$-4 < a < 0$

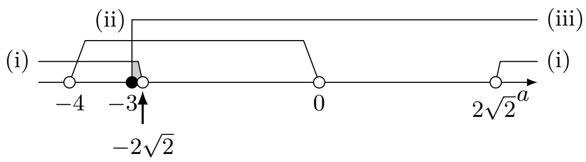
(iii) $f(0) = 1$，$f(1) = a + 3$ であり，$f(0) \geqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$ より，$a + 3 \geqq 0$

◀ $f(0) \geqq 0$ は常に成り立つ．

したがって，$-3 \leqq a$

よって，(i)〜(iii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-3 \leqq a < -2\sqrt{2}}$$



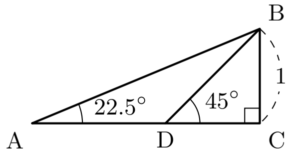
解答（節末）I4.1.1 ★★★ 節末 p.191

問題文

右の図のような直角三角形 ABC を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 辺 AB の長さを求めよ．

(2) $\sin 22.5^\circ$，$\cos 22.5^\circ$，$\tan 22.5^\circ$ の値を求めよ．



(1) $\angle\mathrm{CBD} = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$ より，$\mathrm{CD} = 1$，$\mathrm{BD} = \sqrt{2}$

また，$\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$ より，$\angle\mathrm{ABD} = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ$

したがって，$\triangle\mathrm{ABD}$ は $\mathrm{AD} = \mathrm{BD}$ の二等辺三角形である．

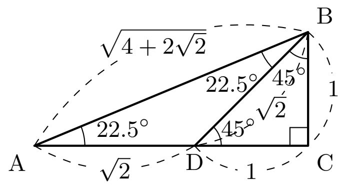
よって，$\mathrm{CD} = 1$ より，$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} + \mathrm{CD} = \sqrt{2} + 1 \cdots$ (i)

◀ BC : CD : BD =1 : 1 : $\sqrt{2}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，三平方の定理より，

$$\mathrm{AB}^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + 1^2 = 4 + 2\sqrt{2}$$

◀ $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$



$\mathrm{AB} > 0$ より，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdots \text{(ii)}$$

◀ この 2 重根号は外すことができない．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，(i)，(ii)，$\mathrm{BC} = 1$ より，

$$\begin{aligned}
\sin 22.5^\circ &= \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}} \\
&= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{8}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \\
\cos 22.5^\circ &= \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}+1)\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}} \\
&= (\sqrt{2}+1)\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{8}} = \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2(2-\sqrt{2})}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \\
\tan 22.5^\circ &= \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \boldsymbol{\sqrt{2}-1}
\end{aligned}$$

解答 4.1

解答（節末）I4.1.2 ★★★ 節末 p.192

問題文

鋭角 θ が $\tan\theta=\frac{5}{12}$ を満たすとき，$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ の値を求めよ．

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}&=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\\&=\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}\end{aligned}$$

◀ 通分する．

◀ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

また，

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{144}{169},$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}$$

θ は鋭角であるから，$\sin\theta>0$

したがって，$\sin\theta=\frac{5}{13}$

よって，

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=2\div\frac{5}{13}=\boldsymbol{\frac{26}{5}}$$

◀ θ は鋭角，$\tan\theta=\frac{5}{12}$ であることから，直角三角形をかき，三平方の定理を用いて解くこともできる．

【別解】 $\tan\theta=\frac{5}{12}$ より，

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{144}{169}$$

θ は鋭角であるから，$\cos\theta>0$

したがって，$\cos\theta=\frac{12}{13}$

また，$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{13}$

よって，これらを代入して，

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{5}{13}\div\frac{25}{13}+\frac{5}{13}\div\frac{1}{13}=\boldsymbol{\frac{26}{5}}$$

◀ $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ より，$\sin A=\tan A\cos A$

◀ θ が鋭角 $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ のとき，$\cos\theta>0$ であることに注意すること．

◀ $1+\cos\theta=1+\frac{12}{13}=\frac{25}{13}$，$1-\cos\theta=1-\frac{12}{13}=\frac{1}{13}$

解答（節末）I4.1.3 ★★ 節末 p.193

問題文

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ において，$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\cos\theta=0$ を満たす θ の値を求めよ．

$\cos\theta=0$ のとき，$\theta=90^\circ$ であり，これは方程式を満たさない．

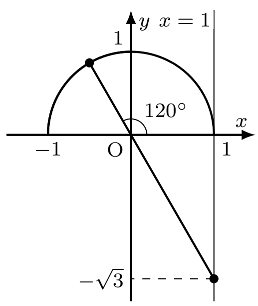
したがって，$\cos\theta\neq0$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\cos\theta=0$ より，$\sin\theta=-\sqrt{3}\cos\theta$

両辺を $\cos\theta$ で割ると，$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{3}$

よって，$\tan\theta=-\sqrt{3}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから，$\theta=\mathbf{120^\circ}$



◀ $\theta=90^\circ$ のとき，$\sin\theta=1$

◀ $\cos\theta\neq0$ より，両辺を $\cos\theta$ で割ることができる．

解答（節末）I4.1.4 ★★★ 節末 p.194

問題文

$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ < \theta < 45^\circ$ とする．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin\theta + \cos\theta$　(3) $\sin\theta - \cos\theta$　(4) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

(1)

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

◀ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 3$ であるから，$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 3$

よって，$\sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \cdots$ (i)

(2)

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(i) より，$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ より，$\sin\theta + \cos\theta > 0$

よって，$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{\frac{5}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{3}}$

(3)

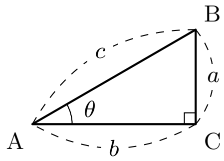
$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$$

◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(i) より，$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，$\sin\theta < \cos\theta$ より，$\sin\theta - \cos\theta < 0$

◀ $0^\circ < \theta < 45^\circ$ のとき，下の図のような直角三角形において，$a < b$
よって，$c\sin\theta < c\cos\theta$



よって，$\sin\theta - \cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

(4)

$$\sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta - \cos\theta)\left(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{-\frac{4\sqrt{3}}{9}}$$

解答（節末）I4.1.5 ★★　節末 p.195

問題文

2 直線 $\sqrt{3}x+y=0\cdots$(i)，$ax+by+2=0\cdots$(ii) がある．直線 (ii) は点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を通り，2 直線 (i)，(ii) のなす角は 30° である．このとき，定数 a，b の値を求めよ．

$\sqrt{3}x+y=0$ より，$y=-\sqrt{3}x$

直線 (i) が x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta=-\sqrt{3}$

$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より，$\theta=120^\circ$

2 直線 (i)，(ii) のなす角が 30° であるから，直線 (ii) が x 軸の正の向きとのなす角は 90° または 150°

（ア）90° のとき

直線 (ii) は点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を通り，y 軸に平行であるから，$x=-1$

式変形すると，$2x+2=0$

したがって，これと (ii) を比較すると，$a=2$，$b=0$

（イ）150° のとき

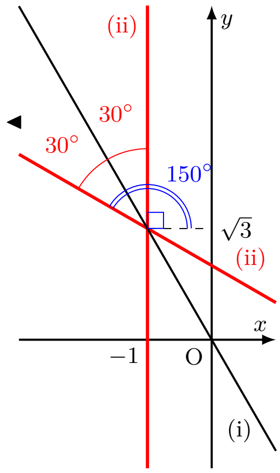
$\tan 150^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ より，直線 (ii) の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

直線 (ii) は点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を通るから，$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)+\sqrt{3}$

式変形すると，$-x-\sqrt{3}y+2=0$

したがって，これと (ii) を比較すると，$a=-1$，$b=-\sqrt{3}$

よって，（ア），（イ）より，$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=0}$ **または** $\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=-\sqrt{3}}$



解答 4.1

正弦定理と余弦定理（解答）

解答 I4.2.1 ★ 問題 p.196

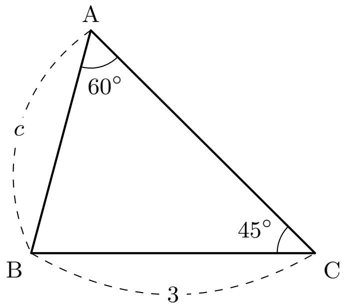
> 問題文
>
> △ABC において，次の値を求めよ．ただし，外接円の半径を R とする．
> (1) $a=3$，$A=60°$，$C=45°$ のとき，c，R
> (2) $R=1$，$a=\sqrt{3}$ のとき，A

(1) 正弦定理より，

$$\frac{3}{\sin 60°}=\frac{c}{\sin 45°}$$

よって，

$$c=\frac{3}{\sin 60°}\cdot\sin 45°=3\div\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$$



◀ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ を用いる．両辺に $\sin 45°$ を掛けると，$c=\frac{3}{\sin 60°}\cdot\sin 45°$

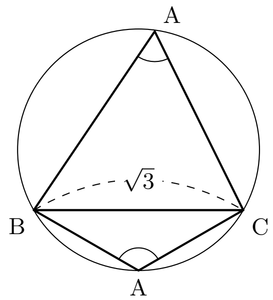
また，$\frac{3}{\sin 60°}=2R$ より，

$$R=\frac{1}{2}\cdot 3\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

◀ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=2R$ を用いる．

(2) 正弦定理より，

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=2\cdot 1$$



◀ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=2R$ を用いる．

したがって，

$$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$0°<A<180°$ より，

$$A=\mathbf{60°，120°}$$

◀ 図のように，鋭角と鈍角の 2 つの場合がある．

解答 I4.2.2 ★★　問題 p.197

問題文

△ABC において，次の値を求めよ．

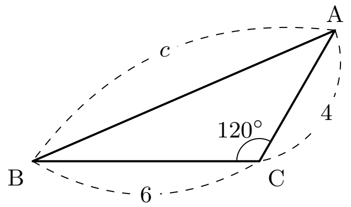
(1) $a=6$，$b=4$，$C=120^\circ$ のとき，c　　(2) $a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，B

(3) $a=2$，$c=\sqrt{6}$，$C=60^\circ$ のとき，b

(1) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cdot\cos120^\circ \\ &= 36+16+24=76 \end{aligned}$$

よって，$c>0$ より，$c=\boldsymbol{\sqrt{76}}$



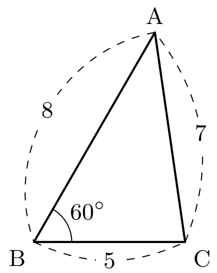
◀ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

◀ 辺の長さは正であるから，$c>0$

(2) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8} \\ &= \frac{25+64-49}{80}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，$B=\boldsymbol{60^\circ}$



◀ $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

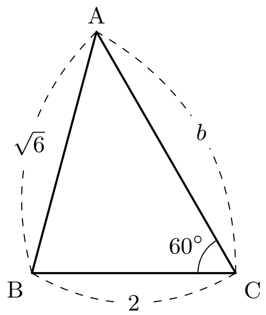
(3) 余弦定理より，

$$(\sqrt{6})^2=2^2+b^2-2\cdot2\cdot b\cdot\cos60^\circ$$

したがって，$b^2-2b-2=0$

これを解くと，$b=1\pm\sqrt{3}$

よって，$b>0$ より，$b=\boldsymbol{1+\sqrt{3}}$



◀ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

◀ 辺の長さは正であるから，$b>0$

解答 I4.2.3 ★★ 問題 p.198

問題文

次の場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

(1) $b=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ c=2,\ A=135^\circ$　　(2) $a=2\sqrt{2},\ b=2,\ c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

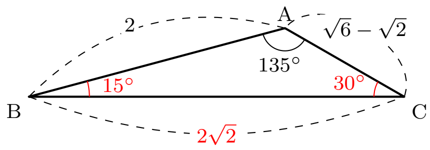
(1) 余弦定理より，

$$a^2=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+2^2-2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2\cdot\cos 135^\circ=8$$

したがって，$a>0$ であるから，$a=\sqrt{8}=$
$\mathbf{2\sqrt{2}}$

正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin C}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$$



◀ 余弦定理でも求めることができるが，計算に手間が掛かる．そこで，正弦定理を用いるとよい．

ゆえに，$\sin C=\frac{1}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ-135^\circ$ より，$0^\circ<C<45^\circ$ であるから，$C=\mathbf{30^\circ}$

◀ $C=150^\circ$ は不適である．

よって，$B=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=\mathbf{15^\circ}$

(2) 余弦定理より，

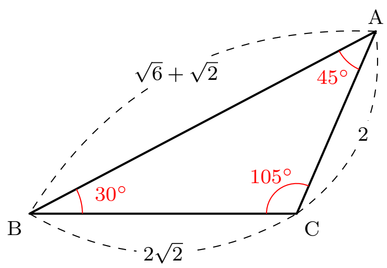
$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

◀ $\cos B$ から考えてもよい．

したがって，$A=\mathbf{45^\circ}$

余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}}\\&=\frac{12+4\sqrt{3}}{4\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



したがって，$B=\mathbf{30^\circ}$

よって，$C=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=\mathbf{105^\circ}$

◀ $C=180^\circ-(A+B)$

解答 I4.2.4 ★★　問題 p.199

問題文

△ABC において，$b=2\sqrt{2}$，$c=2$，$C=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

余弦定理より，$2^2=a^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot a\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 30^\circ$

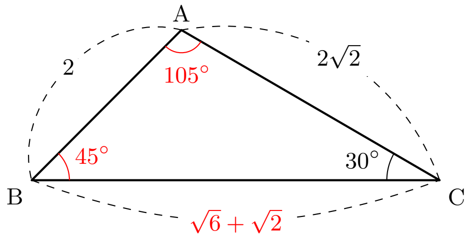
したがって，$a^2-2\sqrt{6}a+4=0$

これを解くと，$a=\sqrt{6}\pm\sqrt{2}$

◀ いずれも $a>0$ であるから，場合分けをして考える．

(i) $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ のとき

余弦定理より，



$$\cos B=\frac{2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

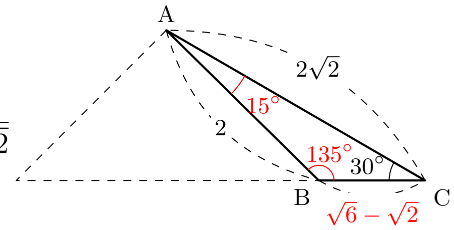
◀ 計算に手間が掛かる（別解のように，第一余弦定理を用いると計算が楽になる）．

したがって，$B=45^\circ$

ゆえに，$A=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

(ii) $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ のとき

余弦定理より，



$$\cos B=\frac{2^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，$B=135^\circ$

ゆえに，$A=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$

◀ $A=180^\circ-(B+C)$

よって，(i)，(ii) より，$a=\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，$A=\mathbf{105^\circ}$，$B=\mathbf{45^\circ}$ または $a=\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$，$A=\mathbf{15^\circ}$，$B=\mathbf{135^\circ}$

【別解】 正弦定理より，$\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$ であるから，$\sin B=\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，$B=45^\circ$，135°

(i) $B=45^\circ$ のとき，$A=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

このとき，

$$\begin{aligned}a&=c\cos B+b\cos C\\&=2\cos 45^\circ+2\sqrt{2}\cos 30^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

◀ 第一余弦定理より，

$$a=c\cos B+b\cos C$$

第一余弦定理を用いると，計算が楽になり，役に立つことがある．

(ii) $B=135^\circ$ のとき，$A=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$

このとき，

$$\begin{aligned}a&=b\cos C+c\cos B\\&=2\sqrt{2}\cos 30^\circ+2\cos 135^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

◀ 第一余弦定理は，90° や鈍角についても成り立つ．

よって，(i)，(ii) より，$a=\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，$A=\mathbf{105^\circ}$，$B=\mathbf{45^\circ}$ または $a=\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$，$A=\mathbf{15^\circ}$，$B=\mathbf{135^\circ}$

解答 4.2

One math

解答 I4.2.5 ★★★ 問題 p.200

問題文

△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ が成り立つとき，最大の角の大きさを求めよ．

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ より，

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

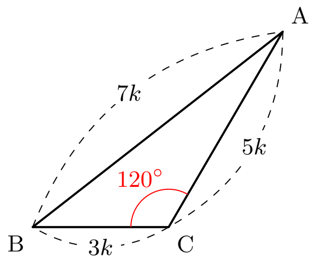
したがって，$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ であるから，

$$a : b : c = 3 : 5 : 7$$

ゆえに，最も長い辺は c であるから，C が最大の角である．

$a = 3k$，$b = 5k$，$c = 7k$ $(k > 0)$ とおくと，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} \\ &= \frac{9k^2 + 25k^2 - 49k^2}{30k^2} \\ &= \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$



$0° < C < 180°$ より，$C = 120°$

よって，最大の角の大きさは，**120°** である．

◀ k $(k > 0)$ として，

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k$$

とおくと，$a = 3k$，$b = 5k$，$c = 7k$

したがって，$a < b < c$ より，

$$A < B < C$$

よって，C が最大の角である．

解答 4.2

解答 I4.2.6 ★★★ 問題 p.201

問題文

3 辺の長さが 2, 3, x である三角形について，次の問いに答えよ．

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) この三角形が鈍角三角形となるような x の値の範囲を求めよ．

(1) 三角形が成立する条件より，$|3-2| < x < 3+2$

よって，x のとり得る値の範囲は，$\boldsymbol{1 < x < 5}\cdots$(i)

◀ 三角形の成立条件 $|b-c| < a < b+c$ を利用する．$|x-3| < 2 < x+3$ または $|2-x| < 3 < 2+x$ を解いてもよいが，計算に手間が掛かる．

(2) （ア）$1 < x < 3$ のとき

最大の辺の長さは 3 であるから，その対角が 90° より大きいとき，鈍角三角形となる．

したがって，$3^2 > 2^2 + x^2$

整理すると，$x^2 - 5 < 0$

ゆえに，$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) < 0$

これを解くと，$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\cdots$(ii)

(i)，(ii) の共通範囲を求めると，$1 < x < \sqrt{5}$

（イ）$3 \leqq x < 5$ のとき

◀ 最大の辺になることができる辺は，3 と x の 2 通りあるので注意すること．

最大の辺の長さは x であるから，その対角が 90° より大きいとき，鈍角三角形となる．

したがって，$x^2 > 2^2 + 3^2$

整理すると，$x^2 - 13 > 0$

ゆえに，$(x+\sqrt{13})(x-\sqrt{13}) > 0$

これを解くと，$x < -\sqrt{13},\ \sqrt{13} < x\cdots$(iii)

(i)，(iii) の共通範囲を求めると，$\sqrt{13} < x < 5$

よって，（ア），（イ）より，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{1 < x < \sqrt{5},\ \sqrt{13} < x < 5}$

解答 I4.2.7 ★★★ 問題 p.202

問題文

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か.

(1) $a\sin A = b\sin B$　　(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B$

(1) $a\sin A = b\sin B \cdots$ (i) とする.
△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R}\cdots\text{(ii)}$$

◀ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(ii) を (i) に代入すると，

$$a\cdot\frac{a}{2R} = b\cdot\frac{b}{2R}$$

したがって，$a^2 = b^2$

◀ 両辺に $2R$ を掛ける.

$a > 0$, $b > 0$ より，$a = b$
よって，**BC = CA の二等辺三角形**

◀ 次数の低い c に注目して，整理するとよい.

(2) $\sin A\cos A = \sin B\cos B \cdots$ (iii) とする.
余弦定理により，

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdots\text{(iv)}$$

(ii)，(iv) を (iii) に代入すると，

$$\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

両辺に $4Rabc$ を掛けると，

$$a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) = b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)$$

整理すると，$\left(a^2-b^2\right)c^2 - \left(a^4-b^4\right) = 0$
したがって，$\left(a^2-b^2\right)c^2 - \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right) = 0$
ゆえに，$(a+b)(a-b)\left(c^2-a^2-b^2\right) = 0$

◀ $a-b=0$ または $c^2-a^2-b^2=0$

$a+b>0$ より，$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$
よって，△ABC は **BC = CA の二等辺三角形 または $C = 90^\circ$ の直角三角形**

解答 4.2

解答（節末）I4.2.1 ★★ 節末 p.203

問題文

$\triangle$ABC の頂点 A，B，C の対辺をそれぞれ a，b，c とする．$C = 60^\circ$ のとき，$\frac{b}{c^2-a^2} + \frac{a}{c^2-b^2}$ の値を求めよ．

余弦定理より，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab$
整理すると，$c^2 - a^2 = b^2 - ab$
また，$c^2 - b^2 = a^2 - ab$
よって，これらを与えられた式に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{b}{c^2-a^2} + \frac{a}{c^2-b^2} &= \frac{b}{b^2-ab} + \frac{a}{a^2-ab} \\ &= \frac{b}{b(b-a)} + \frac{a}{a(a-b)} \\ &= \frac{1}{b-a} + \frac{1}{a-b} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

◀ $c^2-a^2 = b^2-ab$，$c^2-b^2 = a^2 - ab$ を代入する．
◀ 約分する．

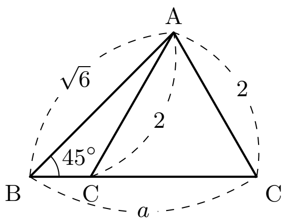
解答（節末）I4.2.2 ★★★ 節末 p.204

問題文

$\triangle$ABC において，$b = 2$，$c = \sqrt{6}$，$B = 45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

正弦定理より，$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$
したがって，$\sin C = \sqrt{6} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$B = 45^\circ$ より，$0^\circ < C < 135^\circ$ であるから，

$$C = 60^\circ, \quad 120^\circ$$



◀ C の値が 2 つ求められたから，場合分けをして考える．

(i) $C = 60^\circ$ のとき

$$A = 180^\circ - (B + C) = 75^\circ$$

◀ $\sin 75^\circ$ は扱いにくいことから，正弦定理ではなく，余弦定理を用いる．

余弦定理より，$2^2 = a^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{6} \cdot \cos 45^\circ$
したがって，$a^2 - 2\sqrt{3}a + 2 = 0$ より，$a = \sqrt{3} \pm 1$
ここで，A が最大の角であるから，対辺 a が最大の辺である．
ゆえに，$a > \sqrt{6}$ より，$a = \sqrt{3} + 1$

◀ $(\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{6})^2 = 2(\sqrt{3}-1) > 0$ より，$\sqrt{3}+1 > \sqrt{6}$

(ii) $C = 120^\circ$ のとき

$$A = 180^\circ - (B + C) = 15^\circ$$

余弦定理より，$2^2 = a^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{6} \cdot \cos 45^\circ$
したがって，$a^2 - 2\sqrt{3}a + 2 = 0$ より，$a = \sqrt{3} \pm 1$
ここで，A が最小の角であるから，対辺 a が最小の辺である．
ゆえに，$a < 2$ より，$a = \sqrt{3} - 1$

◀ $2^2 - (\sqrt{3}-1)^2 = 2\sqrt{3} > 0$ より，$\sqrt{3} - 1 < 2$

よって，(i)，(ii) より，

$$\boldsymbol{A = 75^\circ,\ C = 60^\circ,\ a = \sqrt{3}+1} \textbf{ または } \boldsymbol{A = 15^\circ,\ C = 120^\circ,\ a = \sqrt{3}-1}$$

解答（節末）I4.2.3 ★★★ 節末 p.205

問題文

△ABC において，$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，$R=\sqrt{3}$ が成り立つとき，$\cos A$，a，b，c を求めよ．

$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$ であるから，$b+c=8k$，$c+a=10k$，$a+b=12k$ $(k>0)\cdots$(i) とおくと，これらの辺々を足し合わせると，$2(a+b+c)=30k$

したがって，$a+b+c=15k\cdots$(ii)

(i)，(ii) より，$a=7k$，$b=5k$，$c=3k\cdots$(iii)

余弦定理より，$\cos A=\frac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 3k}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

$\cos A=-\frac{1}{2}$ であるから，$A=120^\circ$

これと $R=\sqrt{3}$ であるから，正弦定理より，$\frac{a}{\sin 120^\circ}=2\sqrt{3}$

よって，$a=2\sqrt{3}\sin 120^\circ=\boldsymbol{3}$

このとき，(iii) より，$k=\frac{3}{7}$ であり，$b=\boldsymbol{\frac{15}{7}}$，$c=\boldsymbol{\frac{9}{7}}$

◀ $b+c=4k$，$c+a=5k$，$a+b=6k$ とおいてもよいが，$a+b+c=\frac{15}{2}$ となり計算に手間が掛かる．そこで，計算を簡単にするために，$4:5:6$ を $8:10:12$ と考えている．

解答（節末）I4.2.4 ★★★ 節末 p.206

問題文

△ABC において，$\mathrm{AB}=x-1$，$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BC}=x+1$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) △ABC が鈍角三角形となる x の値の範囲を求めよ．

(3) △ABC の 1 つの内角が 120° であるとき，x の値，外接円の半径を求めよ．

(1) $x-1<x<x+1$ であるから，三角形が成立する条件より，

$$x+1<x+(x-1)$$

◀ 最大の辺の長さは，他の 2 辺の長さの和より小さい．

よって，x のとり得る値の範囲は，$\boldsymbol{x>2}\cdots$(i)

(2) 辺 BC が最大の辺であるから，鈍角三角形となる条件は $A>90^\circ$，すなわち，$\cos A<0$ である．

余弦定理より，

$$\cos A=\frac{x^2+(x-1)^2-(x+1)^2}{2x(x-1)}<0$$

◀ 鈍角になることができるのは，最大の角のみである．

◀ (i) より，分母が正であるから，分子は負である．

したがって，$x^2+(x-1)^2-(x+1)^2<0$

整理すると，$x^2-4x<0$

ゆえに，$x(x-4)<0$

これを解くと，$0<x<4\cdots$(ii)

よって，(i)，(ii) より，求める x の値の範囲は，$\boldsymbol{2<x<4}\cdots$(iii)

(3) 長さ $x+1$ の辺に対する角が 120° になるから，余弦定理より，

$$(x+1)^2=x^2+(x-1)^2-2\cdot x\cdot(x-1)\cdot\cos 120^\circ$$

したがって，$2x^2-5x=0$ であるから，$x(2x-5)=0$

(iii) より，$2<x<4$ であるから $x=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

◀ 1 つの内角が 120° であるから，△ABC は鈍角三角形である．

外接円の半径を R とすると，正弦定理より，$\frac{x+1}{\sin 120^\circ}=2R$

よって，$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}+1}{\sin 120^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{6}}$

解答（節末）I4.2.5 ★★★ 節末 p.207

問題文

次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か．

$$(a-b)\sin^2 C = a\sin^2 A - b\sin^2 B$$

正弦定理より，

$$(a-b)\left(\frac{c}{2R}\right)^2 = a\left(\frac{a}{2R}\right)^2 - b\left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

◀ $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

両辺に $4R^2$ を掛けると，

$$(a-b)c^2 = a^3 - b^3$$

したがって，$(a-b)c^2 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

◀ a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ゆえに，$(a-b)\left\{c^2-\left(a^2+ab+b^2\right)\right\}=0$

したがって，$a=b$ または $c^2-\left(a^2+ab+b^2\right)=0$

◀ $\alpha\beta=0$ ならば $\alpha=0$ または $\beta=0$ となる．

(i) $a=b$ のとき

△ABC は BC = CA の二等辺三角形である．

(ii) $c^2=a^2+ab+b^2$ のとき

余弦定理より，

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-\left(a^2+ab+b^2\right)}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}$$

◀ $ab \neq 0$

したがって，$C=120^\circ$

よって，(i)，(ii) より，△ABC は **BC = CA の二等辺三角形 または $C=120^\circ$ の三角形**

解答 4.2

図形の計量（解答）

解答 I4.3.1 ★★　問題 p.208

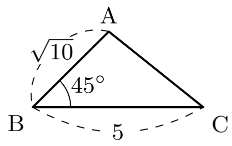
問題文

次のような △ABC の面積 S を求めよ.

(1) $a=5,\ c=\sqrt{10},\ B=45^\circ$　　(2) $a=7,\ b=5,\ c=8$

(1) 求める △ABC の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 5\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{20}}{4}=\mathbf{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

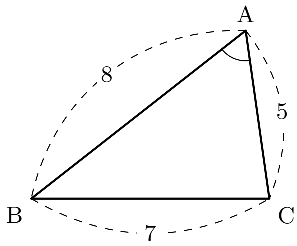
◀ 

(2) 余弦定理より，$\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1,\ \sin A>0$ より,

◀ A は三角形の内角であるから，$0^\circ<A<180^\circ$ より，$\sin A>0$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



よって，求める △ABC の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{10\sqrt{3}}$$

【別解】ヘロンの公式より，$s=\frac{7+5+8}{2}=10$ であるから,

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)}\\&=\sqrt{10\cdot 3\cdot 5\cdot 2}\\&=\sqrt{300}=10\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって，求める面積 S は，$S=\mathbf{10\sqrt{3}}$

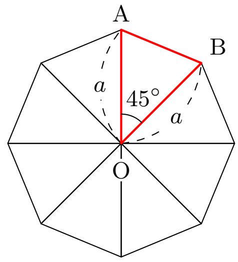
解答 I4.3.2 ★★ 問題 p.209

問題文

(1) 1 辺の長さが 1 の正八角形の面積 S を求めよ．

(2) 半径 1 の円に内接する正十二角形の面積 S を求めよ．

(1) 右の図のように，1 辺の長さが 1 の正八角形を対角線によって 8 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると，



$$\angle\mathrm{AOB} = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

余弦定理より，

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 45^\circ$$

$$1 = 2a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2a^2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = a^2(2-\sqrt{2})$$

◀ $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cdot \cos\angle\mathrm{AOB}$

したがって，

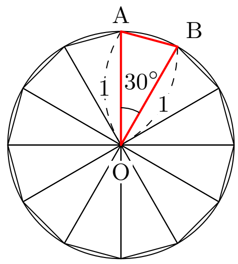
$$a^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

◀ a の値まで求めなくてよい（a^2 のまま扱うとよい）．

よって，求める面積 S は，

$$S = 8 \times \triangle\mathrm{OAB} = 8 \times \frac{1}{2}a^2 \sin 45^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{4}a^2 = \sqrt{2}(2+\sqrt{2}) = \mathbf{2+2\sqrt{2}}$$

(2) 右の図のように，正十二角形を対角線によって 12 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると，



$$\angle\mathrm{AOB} = 360^\circ \div 12 = 30^\circ$$

よって，求める面積 S は，

$$S = 12 \times \triangle\mathrm{OAB} = 12 \times \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 30^\circ = \mathbf{3}$$

解答 I4.3.3 ★★ 問題 p.210

問題文

△ABC において，$a=4$, $b=5$, $c=6$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos A$, $\sin A$　(2) △ABC の面積 S

(3) △ABC の内接円の半径 r　(4) △ABC の外接円の半径 R

(1) 余弦定理より，$\cos A=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

◀ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

また，$\sin A>0$ より，

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{16}-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

◀ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

(2) 求める △ABC の面積 S は，$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\mathbf{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$

(3) (2)，$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より，$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}r(4+5+6)$

よって，$r=\frac{2\cdot15\sqrt{7}}{4\cdot15}=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

(4) 正弦定理より，$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{4}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{8}{\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

よって，外接円の半径は，$R=\mathbf{\frac{8\sqrt{7}}{7}}$

◀ $2R=\frac{a}{\sin A}$ より，

$R=\dfrac{a}{2\sin A}$

解答 I4.3.4 ★★ 問題 p.211

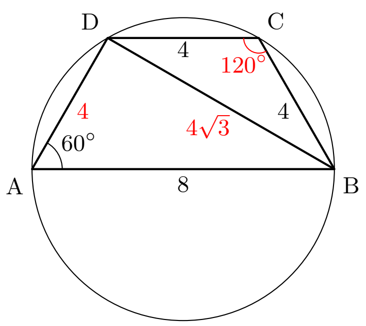
問題文

円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=8$, $\mathrm{BC}=4$, $\mathrm{CD}=4$, $\angle\mathrm{BCD}=120^\circ$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 対角線 BD の長さ　(2) AD の長さ　(3) 四角形 ABCD の面積

(1) △BCD において，余弦定理より，$\mathrm{BD}^2=4^2+4^2-2\cdot4\cdot4\cdot\cos120^\circ=48$

よって，$\mathrm{BD}>0$ より，$\mathrm{BD}=\mathbf{4\sqrt{3}}$



(2) 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle\mathrm{BAD}=180^\circ-\angle\mathrm{BCD}=60^\circ$$

したがって，△ABD において，余弦定理より，

$$(4\sqrt{3})^2=\mathrm{AD}^2+8^2-2\cdot\mathrm{AD}\cdot8\cos60^\circ$$

整理すると，$\mathrm{AD}^2-8\mathrm{AD}+16=0$ より，$(\mathrm{AD}-4)^2=0$

よって，$\mathrm{AD}>0$ より，$\mathrm{AD}=\mathbf{4}$

(3) 四角形 ABCD の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin120^\circ\\&=\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{12\sqrt{3}}\end{aligned}$$

◀ 四角形の面積は，2 つの三角形の面積の和と考えられる．

◀ 2 辺の長さが a, b であり，その間の角が θ のとき，三角形の面積 S は，$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

解答 4.3

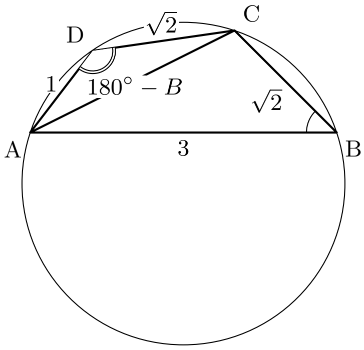
解答 I4.3.5 ★★★ 問題 p.212

問題文

円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\mathrm{DA}=1$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos B$　　(2) 四角形 ABCD の面積 S

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから，



$$D = 180^\circ - B$$

◀ $B + D = 180^\circ$

△ABC において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\cos B\\ &= 11 - 6\sqrt{2}\cos B \cdots \text{(i)}\end{aligned}$$

△ACD において，余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos(180^\circ - B) = 3 + 2\sqrt{2}\cos B \cdots \text{(ii)}$$

◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

(i)，(ii) より，$11 - 6\sqrt{2}\cos B = 3 + 2\sqrt{2}\cos B$
よって，$\cos B = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$
(2) $\sin B > 0$ より，

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

◀ $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

また，$\sin D = \sin(180^\circ - B) = \sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

◀ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

よって，求める四角形 ABCD の面積 S は，

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ACD}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\sin B + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot\sin D\\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{2}\end{aligned}$$

◀ 四角形の面積は，2 つの三角形の面積の和と考えられる．

解答 I4.3.6 ★★ 問題 p.213

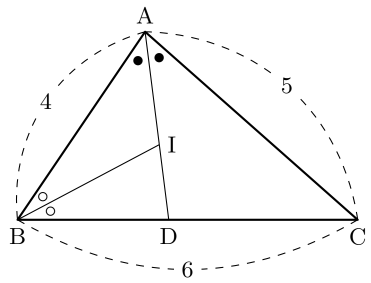
問題文

△ABC において，AB = 4，BC = 6，CA = 5 とする．∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D，∠B の二等分線が線分 AD と交わる点を I とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) 線分 AD の長さ　　(2) 線分 AI の長さ

(1) △ABC において，線分 AD は ∠A の二等分線であるから，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=4:5$$



BC = 6 より，

$$\mathrm{BD}=\frac{4}{4+5}\mathrm{BC}=\frac{4}{9}\cdot 6=\frac{8}{3}$$

△ABC において，余弦定理より，

$$\cos B=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{9}{16}$$

◀ 先に，$\cos B$ を求める．

△ABD において，余弦定理より，

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\cos B=4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot 4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{16}=\frac{100}{9}$$

◀ 求めた $\cos B$ を用いて，AD の長さを求める．

よって，AD > 0 より，

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\boldsymbol{\frac{10}{3}}$$

◀ 辺の長さは正であるから，AD > 0

(2) △ABD において，線分 BI は ∠B の二等分線であるから，

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=4:\frac{8}{3}=3:2$$

よって，$\mathrm{AI}=\frac{3}{3+2}\mathrm{AD}=\frac{3}{5}\times\frac{10}{3}=\boldsymbol{2}$

解答 I4.3.7 ★★ 問題 p.214

問題文

AB = 5，BC = 10，CA = 6 である △ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AM の長さを求めよ．

中線定理より，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

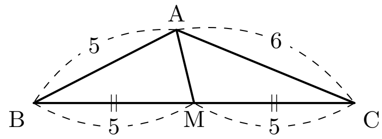
◀ 中線定理を用いると，楽に中線の長さを求めることができる．

これに，AB = 5，$\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=5$，AC = 6 を代入すると，

$$5^2+6^2=2\left(\mathrm{AM}^2+5^2\right)$$

したがって，$\mathrm{AM}^2=\frac{11}{2}$

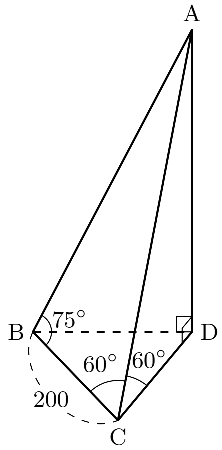
よって，AM > 0 より，$\mathrm{AM}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{22}}{2}}$



解答 I4.3.8 ★★ 問題 p.215

問題文

水平な地面に垂直に立つ木があり，木の頂点を A，その真下の地面上の点を D とする．また，地面上で互いに 200 m 離れた 2 点 B，C を定め，∠ABC，∠ACB，∠ACD を測定したところ，それぞれ 75°，60°，60° であった．このとき，木の高さ AD を求めよ．



$\triangle$ABC において，

$$\angle \mathrm{BAC} = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

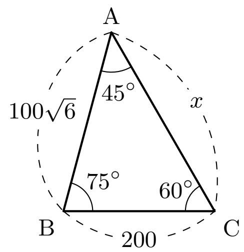
正弦定理より，

$$\frac{200}{\sin 45^\circ} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin 60^\circ}$$

したがって，

$$\mathrm{AB} = \frac{200}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 60^\circ = 200 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{6}$$

◀ $\angle \mathrm{BAC} = 45^\circ$ に注目すると，AB の値を求めやすい（75° を扱わないで済む）．先に正弦定理を用いて AB の値を求め，次に余弦定理を用いて AC の値を求める．



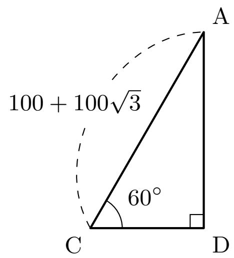
AC $= x$ とすると，余弦定理より，

$$(100\sqrt{6})^2 = 200^2 + x^2 - 2 \cdot 200 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

ゆえに，$x^2 - 200x - 20000 = 0$
これを解くと，$x = 100 \pm 100\sqrt{3}$
したがって，$x > 0$ より，$x = 100 + 100\sqrt{3}$

◀ 空間図形で考えるのではなく，平面図形を取り出して考えるとよい．また，扱いやすさのために AC を x とおいている．

すなわち，AC $= 100 + 100\sqrt{3}$
$\triangle$ACD おいて，



$$\mathrm{AD} = \mathrm{AC} \cdot \sin 60^\circ = \left(100 + 100\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} + 150$$

◀ $\sin 60^\circ = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}$

よって，木の高さは，AD $= \mathbf{50\sqrt{3} + 150}$ **(m)**

解答 I4.3.9 ★★★ 問題 p.216

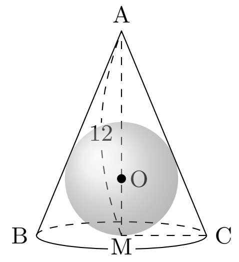
問題文

右の図のように，底面の半径 5，高さが 12 の直円錐があり，球 O と側面，底面の中心 M で接している．このとき，次の問いに答えよ．

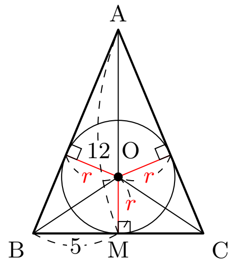
(1) 円錐の母線の長さを求めよ．

(2) 球 O の半径を求めよ．

(3) 球 O の体積 V と表面積 S を求めよ．



A と M を通る平面で円錐を切った切断面は，右の図のようになる．



(1) 求める母線の長さは，$\sqrt{\mathrm{BM}^2+\mathrm{AM}^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\mathbf{13}$

◀ 三平方の定理を用いる．

(2) 球 O の半径を r，$\triangle$ABC の面積を S' とすると，

$$S'=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\frac{1}{2}r(10+2\cdot 13)=18r$$

◀ $S'=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$S'=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12=60$ であるから，$18r=60$

◀ $S'=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM}$

よって，$r=\boldsymbol{\frac{10}{3}}$

(3) (2) より，$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{4000}{81}\pi}$，$S=4\pi\left(\frac{10}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{400}{9}\pi}$

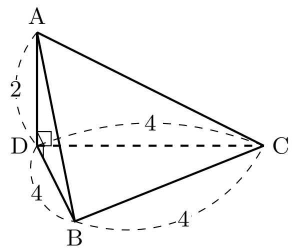
◀ 球の体積は $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，表面積は $S=4\pi r^2$

解答 I4.3.10 ★★★★ 問題 p.217

問題文

四面体 ABCD において，$\triangle$BCD は 1 辺の長さが 4 の正三角形であり，$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADC}=90^\circ, \mathrm{AD}=2$ である．このとき，頂点 D から平面 ABC に下ろした垂線 DH の長さを求めよ．

四面体 ABCD の体積を V とする．$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$ であるから，

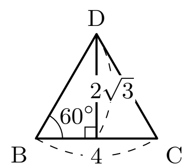


$$\mathrm{AD}\perp \text{面 BCD}$$

したがって，

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}\times 2=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdots\text{(i)}$$

◀ $\triangle$BCD を底面，AD を高さとして考える．また，$\triangle$BCD は正三角形である．



また，A から辺 BC に下ろした垂線の足を T とすると，$\triangle$ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=4$ であるから，

$$\mathrm{AT}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BT}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$$

ゆえに，$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\times\mathrm{DH}=\frac{8}{3}\mathrm{DH}\cdots\text{(ii)}$

◀ $\triangle$ABC を底面，DH を高さとして考える．

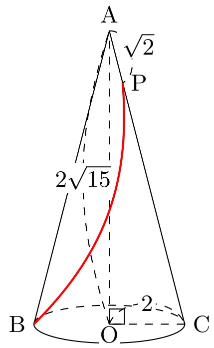
(i)，(ii) より，$\frac{8}{3}\mathrm{DH}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

よって，$\mathrm{DH}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{8}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

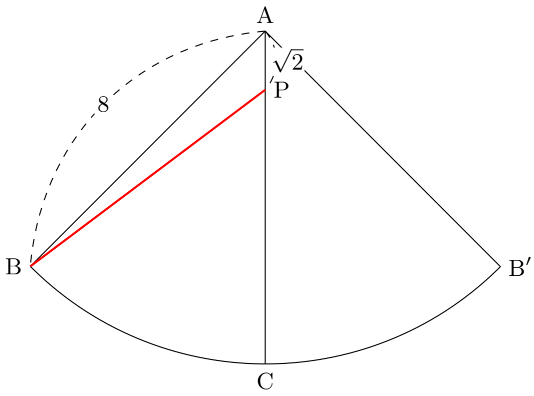
解答 I4.3.11 ★★★ 問題 p.218

問題文

底面の中心が O で半径が 2，高さが $2\sqrt{15}$ の直円錐がある．直円錐の頂点を A，底面の直径の両端を B，C とし，線分 AC 上に $\mathrm{AP} = \sqrt{2}$ となる点 P をとる．側面上において，点 B から点 P までに至る最短距離を求めよ．



側面を直線 AB に沿って切り開いた展開図は，右の図のように，中心 A，半径 AB の扇形となる．



三角形 ABO において，BO = 2，$\mathrm{AO} = 2\sqrt{15}$ より，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{15})^2} = 8$$

求める最短距離 の長さは，展開図において，線分 BP の長さである．

弧 BCB′ の長さは，$2\pi \cdot 2 = 4\pi$

◀ 弧 BCB′ の長さは，底面の円の円周に等しい．

扇形の半径は 8 であるから，中心角 ∠BAB′ は，

$$\angle \mathrm{BAB}' = 360^\circ \times \frac{4\pi}{2\pi \cdot 8} = 90^\circ$$

したがって，$\angle \mathrm{BAC} = 45^\circ$

△ABP において，余弦定理より，

$$\mathrm{BP}^2 = 8^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 66 - 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50$$

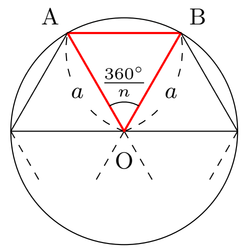
よって，$\mathrm{BP} = \sqrt{50} = \boldsymbol{5\sqrt{2}}$

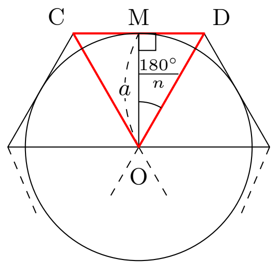
解答（節末）I4.3.1 ★★ 節末 p.219

問題文

半径 a の円に内接する正 n 角形の面積，および外接する正 n 角形の面積を，それぞれ a と n を用いて表せ．

右の図のように，円 O に内接する正 n 角形の 1 辺を AB，外接する正 n 角形の 1 辺を CD とし，CD の中点を M とする．





◀ 正 n 角形を n 個の合同な三角形に分割する．

OA $= a$，OB $= a$，$\angle$AOB $= \frac{360^\circ}{n}$ より，$\triangle$OAB の面積は，

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2}a^2 \sin\frac{360^\circ}{n}$$

よって，内接する正 n 角形の面積は，

$$n \times \triangle \mathrm{OAB} = \boldsymbol{\frac{1}{2}na^2 \sin\frac{360^\circ}{n}}$$

また，OM $= a$，DM $= a\tan\frac{180^\circ}{n}$ より，$\triangle$OCD の面積は，

$$\triangle \mathrm{OCD} = 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a\tan\frac{180^\circ}{n} = a^2 \tan\frac{180^\circ}{n}$$

よって，外接する正 n 角形の面積は，

$$n \times \triangle \mathrm{OCD} = \boldsymbol{na^2 \tan\frac{180^\circ}{n}}$$

解答 4.3

解答（節末）I4.3.2 ★★★ 節末 p.220

問題文

△ABC において，$\frac{\sin A}{13} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{7}$ が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) $\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ．
(2) △ABC の内接円の半径が 1 のとき，△ABC の面積，△ABC の外接円の半径を求めよ．

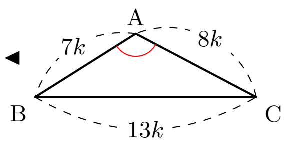
(1) 正弦定理 $\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin B} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin C}$ より，

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} = \sin A : \sin B : \sin C \cdots \text{(i)}$$

$\frac{\sin A}{13} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{7}$ より，

$$\sin A : \sin B : \sin C = 13 : 8 : 7 \cdots \text{(ii)}$$

(i)，(ii) より，$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} = 13 : 8 : 7$
$\mathrm{BC} = 13k$，$\mathrm{CA} = 8k$，$\mathrm{AB} = 7k$ $(k > 0)$ とおくと，余弦定理より，



$$\cos A = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$0° < A < 180°$ であるから，$\sin A > 0$ より，

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

◀ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

(2) △ABC の面積を S とする．

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8k \cdot 7k \cdot \sin A = 14\sqrt{3}k^2$$

また，内接円の半径が 1 であるから，

$$S = \frac{1}{2} \cdot (13k + 8k + 7k) \cdot 1 = 14k$$

したがって，$7k(\sqrt{3}k - 1) = 0$
$k > 0$ より，$k = \frac{1}{\sqrt{3}}$
ゆえに，$\mathrm{AB} = 7k = 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$
求める △ABC の面積 S は，$S = 14k = 14 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{14\sqrt{3}}{3}}$
外接円の半径を R とすると，正弦定理より，$\frac{13k}{\sin A} = 2R$
よって，△ABC の外接円の半径は，

$$R = \frac{13k}{2\sin A} = 13 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \div \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{13}{3}}$$

◀ $2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A}$ より，

$$R = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin A}$$

解答 4.3

解答（節末）I4.3.3 ★★★ 節末 p.221

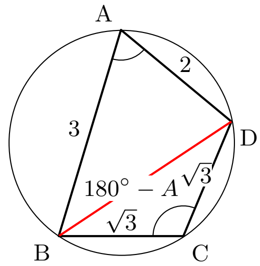
問題文

円に内接する四角形 ABCD がある．$AB = 3$，$BC = CD = \sqrt{3}$, $DA = 2$ とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) $\cos\angle BAD$ と対角線 BD の長さを求めよ．
(2) 2 つの対角線 AC と BD の交点を E とする．BE : ED と BE の長さを求めよ．

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$$

◀ $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$



△ABD において，余弦定理より，

$BD^2 = 3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos\angle BAD = 13-12\cos\angle BAD \cdots$ (i)

◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

△BCD において，余弦定理より，

$BD^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(180^\circ - \angle BAD) = 6+6\cos\angle BAD \cdots$ (ii)

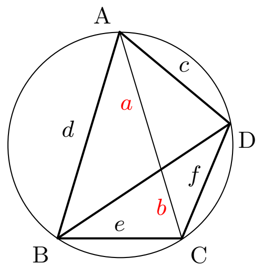
(i)，(ii) より，$13 - 12\cos\angle BAD = 6 + 6\cos\angle BAD$
したがって，$\cos\angle BAD = \boldsymbol{\frac{7}{18}}$
(i) に代入すると，$BD^2 = 13 - 12\cdot\left(\frac{7}{18}\right) = \frac{25}{3}$
よって，$BD > 0$ より，$BD = \frac{5}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$
(2) $BE : ED = \triangle ABC : \triangle ACD = AB\cdot BC : CD\cdot DA = 3\cdot\sqrt{3} : \sqrt{3}\cdot 2 = \mathbf{3:2}$
よって，$BE = BD\cdot\frac{3}{3+2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{5} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

◀ 下の線分比と面積比の関係を用いる．

線分比と面積比

右の図において，線分比と面積比の関係より，

$a : b = \triangle ABD : \triangle CBD = \frac{1}{2}cd\sin\angle BAD : \frac{1}{2}ef\sin(180^\circ - \angle BAD) = cd : ef$



解答（節末）I4.3.4 ★★★ 節末 p.222

問題文

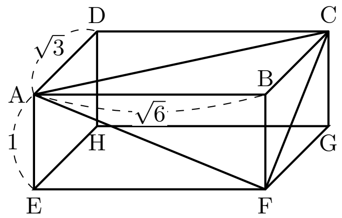
$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$, $\mathrm{AD}=\sqrt{3}$, $\mathrm{AE}=1$ である右の図のような直方体 ABCD − EFGH がある．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\angle\mathrm{ACF}$

(2) $\triangle\mathrm{ACF}$ の面積

(3) 四面体 BAFC の体積

(4) B から平面 AFC に下ろした垂線の長さ

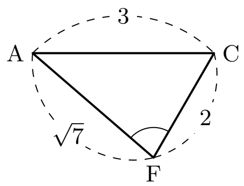


(1) $\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ より，$\mathrm{AC}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$

$\mathrm{AF}^2=\mathrm{AE}^2+\mathrm{EF}^2$ より，$\mathrm{AF}=\sqrt{6+1}=\sqrt{7}$

$\mathrm{CF}^2=\mathrm{BF}^2+\mathrm{BC}^2$ より，$\mathrm{CF}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\triangle\mathrm{AFC}$ において，余弦定理より，



◀ 三平方の定理を用いる．

$$\cos\angle\mathrm{ACF}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{1}{2}$$

よって，$0^\circ<\angle\mathrm{ACF}<180^\circ$ より，$\angle\mathrm{ACF}=\mathbf{60^\circ}$

(2) $\triangle\mathrm{ACF}$ の面積を S とすると，$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin\angle\mathrm{ACF}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

(3) 四面体 BAFC の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABF}\cdot\mathrm{BC}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot1\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{18}}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdots\text{(i)}$$

◀ $\triangle\mathrm{ABF}$ を底面とすると，V が求められる．

(4) 求める垂線の長さを h とすると，$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ACF}\cdot h$

したがって，(i)，(ii) より，$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot h\cdots\text{(ii)}$

よって，$h=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

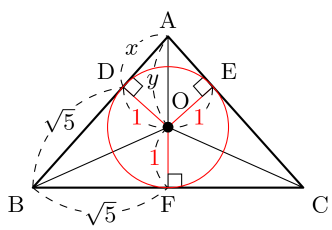
解答（節末）I4.3.5 ★★★ 節末 p.223

問題文

底面の半径 $\sqrt{5}$ の直円錐に半径 1 の球が内接している．このとき，この直円錐の体積を求めよ．

右の図のように，直円錐の頂点 A と底面の円の直径 BC を含む平面 (切断面) を考える．球の中心を O，直円錐と球との接点を D，E，F とし，$\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{AO}=y$ とおく．

$\triangle\mathrm{ADO}\sim\triangle\mathrm{AEB}$ より，



◀ ∼ は相似を表す．$\angle\mathrm{DAO}=\angle\mathrm{EAB}$，$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{AEB}$ より，相似である．

◀ 2 つの接線の長さは等しいので，$\mathrm{BD}=\mathrm{BE}=\sqrt{5}$ である．(数学 A で学習する)

$\mathrm{AD}:\mathrm{AE}=\mathrm{DO}:\mathrm{EB}$，すなわち，$x:(y+1)=1:\sqrt{5}\cdots\text{(i)}$

$\mathrm{AO}:\mathrm{AB}=\mathrm{DO}:\mathrm{EB}$，すなわち，$y:(x+\sqrt{5})=1:\sqrt{5}\cdots\text{(ii)}$

(i) より，$y+1=\sqrt{5}x\cdots\text{(iii)}$

(ii) より，$x+\sqrt{5}=\sqrt{5}y$，すなわち，$x=\sqrt{5}(y-1)\cdots\text{(iv)}$

(iii)，(iv) より，$y+1=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}(y-1)$

したがって，$y+1=5(y-1)$ より，$y=\frac{3}{2}$

このとき，これを (iv) に代入すると，$x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

よって，求める直円錐の体積を V とすると，$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)=\boldsymbol{\frac{25}{6}\pi}$

◀ 高さ $\mathrm{AE}=\mathrm{AO}+\mathrm{OE}$

章末問題 4（解答）

解答（章末）I4.1 ★★　章末 p.224

問題文

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}$ の値を求めよ．

$$\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$$
$$=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)\cdots(\mathrm{i})$$

◀ a^3-b^3 $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

また，

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\cdots(\mathrm{ii})$$

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を 2 乗すると，$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$
したがって，$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

整理すると，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$
ゆえに，(ii) より，$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{5}{2}$
よって，(i) より，$\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}=\left(-\frac{5}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{65}{8}}$

解答（章末）I4.2 ★★★★　章末 p.225

問題文

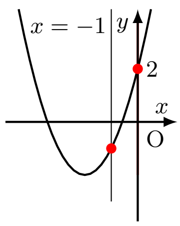
$\sin^2\theta+2a\cos\theta-3=0$ が $90°\leqq\theta\leqq180°$ の範囲に解をもつための定数 a の値の範囲を求めよ．

$\cos\theta=t$ とおくと,与えられた方程式は,$1-t^2+2at-3=0$,すなわち,$t^2-2at+2=0$ となり，この 2 次方程式の判別式を D とする．

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$90°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq0$ より，$-1\leqq t\leqq0$
$f(t)=t^2-2at+2$ とおくと，与えられた方程式が $90°\leqq\theta\leqq180°$ に解をもつのは，$y=f(t)$ のグラフが $-1\leqq t\leqq0$ の範囲で t 軸と共有点をもつときである．
また，$f(-1)=2a+3$，$f(0)=2$ より，$f(0)>0$ であるから，求める条件は，(i)，(ii) の場合に分けられる．

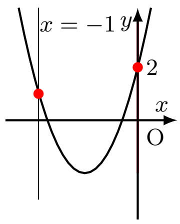
◀



(i) $f(-1)\leqq0$，すなわち，$a\leqq-\frac{3}{2}$ のとき
$f(-1)\cdot f(0)\leqq0$ となることから，これは求める条件を満たす．
(ii) $f(-1)>0$，すなわち，$a>-\frac{3}{2}$ のとき
求める条件は，（ア）$D\geqq0$ （イ）軸 $t=a$ が $-1<t<0$ である．

（ア）$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot1\cdot2=a^2-2$ であり,$D\geqq0$ から,$a\leqq-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\leqq a$
（イ）$y=f(t)$ の軸は直線 $t=a$ であり，軸が $-1<t<0$ の間にあるから，$-1<a<0$

◀ 下の図のようになるa の値は存在しない．



したがって，（ア），（イ）より，これらを同時に満たすa の値は存在しない．
よって，(i)，(ii) より，求める定数 a の値の範囲は，$\boldsymbol{a\leqq-\frac{3}{2}}$

解答 4.4

解答（章末）I4.3 ★★★ 章末 p.226

問題文

三角形 ABC の辺 BC を $8:5$ に内分する点を D とする．$\mathrm{AB}=7$，$\mathrm{AC}=5\sqrt{3}$，$\mathrm{AD}=5$ であるとき，次の値を求めよ．

(1) $\angle\mathrm{ADB}$ の大きさ　　(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積

(1) $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=8:5$ より，$\mathrm{BD}=8k$，$\mathrm{DC}=5k$ $(k>0)$，また，$\angle\mathrm{ADB}=\theta$ とおく．

$\triangle\mathrm{ABD}$ において，余弦定理より，$7^2=5^2+(8k)^2-2\cdot5\cdot8k\cdot\cos\theta$

整理すると，$8k^2-10k\cos\theta-3=0\cdots$(i)

$\triangle\mathrm{ACD}$ において，余弦定理より，$(5\sqrt{3})^2=5^2+(5k)^2-2\cdot5\cdot5k\cdot\cos(180^\circ-\theta)$

したがって，$75=25+25k^2+50k\cos\theta$

◀ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

整理すると，$5k^2+10k\cos\theta-10=0\cdots$(ii)

(i) と (ii) の辺々を足し合わせると，$13k^2-13=0$

ゆえに，$k>0$ より，$k=1$

これを (i) に代入すると，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より，$\theta=60^\circ$

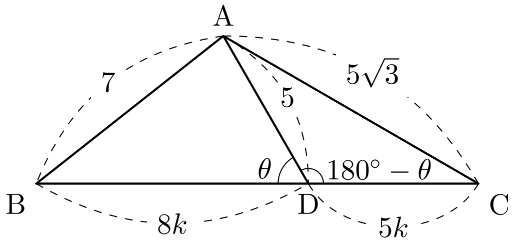
◀ (ii) に代入してもよい．

よって，$\angle\mathrm{ADB}=\mathbf{60^\circ}$

(2) 求める $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{13}{8}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{13}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\sin60^\circ=\boldsymbol{\frac{65\sqrt{3}}{4}}$$

◀ $\mathrm{BD}:\mathrm{BC}=8:13$ より，$\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{ABC}=8:13$
なお，A から BC に垂線を下ろし，60° の三角比から高さを考えることで面積を求めてもよい．

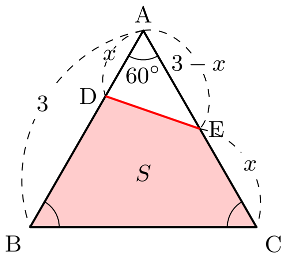


解答 4.4

解答（章末）I4.4 ★★★★ 章末 p.227

問題文

1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC がある．辺 AB，AC 上に，それぞれ頂点とは異なる点 D，E を，AD = CE を満たすようにとる．また，四角形 DBCE の面積を S とする．
(1) DE の長さの最小値を求めよ．
(2) 面積 S の最小値とそのときの AD の長さを求めよ．



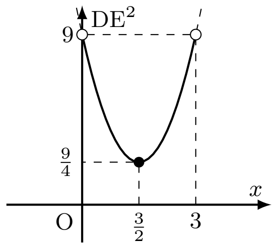
(1) AD = CE = x とすると，

$$0 < x < 3$$

◀ 1 辺の長さが 3 であるから，$x < 3$ であり，また，辺の長さは正であるから，$0 < x$ である．

△ADE において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{DE}^2 =& x^2 + (3-x)^2 - 2x\cdot(3-x)\cdot\cos 60^\circ\\ =& 3x^2 - 9x + 9\\ =& 3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$



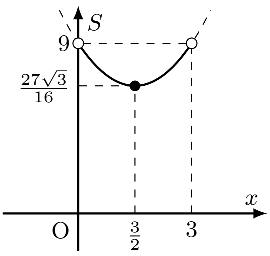
したがって，$0 < x < 3$ の範囲において，DE^2 は $x = \frac{3}{2}$ のとき，最小値 $\frac{9}{4}$

よって，$\mathrm{DE} > 0$ であるから，DE は AD $= \frac{3}{2}$ のとき，**最小値 $\frac{3}{2}$**

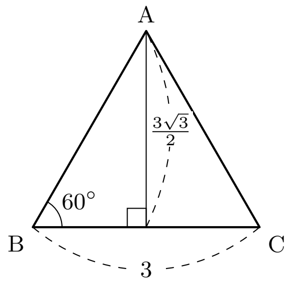
◀ DE^2 が最小となるとき，DE も最小となる．

(2)

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{ADE}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}x(3-x)\sin 60^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\{9 - x(3-x)\}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2 - 3x + 9\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27\sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$



◀ 三角形の面積 ABC の面積は，$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}$



よって，$0 < x < 3$ の範囲において，S は **AD $= \frac{3}{2}$ のとき，最小値 $\frac{27\sqrt{3}}{16}$**

解答 4.4

解答（章末）I4.5 ★★★ 章末 p.228

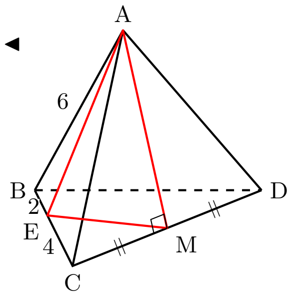
問題文

1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD について，辺 BC 上に BE : EC = 1 : 2 となるように点 E をとり，辺 CD の中点を M，$\angle \mathrm{EAM} = \theta$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos\theta$　　(2) $\triangle$AEM の面積 S

(1) $\triangle$ACM は，$\angle \mathrm{AMC} = 90^\circ$ の直角三角形であるから，

◀



$$\mathrm{AM} = \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{ACM} = \mathrm{AC}\sin 60^\circ = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$\triangle$ABE において，余弦定理により，

$$\mathrm{AE}^2 = 6^2 + 2^2 - 2\cdot 6\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = 28$$

したがって，$\mathrm{AE} > 0$ より，$\mathrm{AE} = 2\sqrt{7}$

$\triangle$CEM において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{EM}^2 &= \mathrm{CE}^2 + \mathrm{CM}^2 - 2\cdot\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CM}\cdot\cos\angle\mathrm{ECM}\\ &= 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos 60^\circ = 13\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{EM} > 0$ より，$\mathrm{EM} = \sqrt{13}$

$\triangle$EAM において，余弦定理より，

$$\cos\theta = \frac{(3\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{13})^2}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{6}}$$

(2) $\sin\theta > 0$ であるから，

◀ $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，$\sin\theta > 0$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

よって，求める $\triangle$AEM の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{15}}{6} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{35}}{2}}$$

データの分析（解答）

データの整理と分析（解答）

解答 I5.1.1 ★ 問題 p.230

問題文

次のデータは，ある月の A 市の毎日の降水量の記録である．

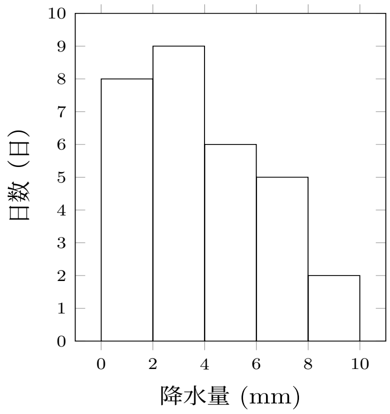
3.5,　7.2,　2.1,　9.1,　6.1,　4.3,　2.9,　3.7,　5.8,　0.0,
2.1,　8.4,　0.7,　1.2,　5.0,　4.9,　3.3,　6.7,　7.8,　2.5,
1.0,　6.2,　1.6,　4.0,　2.3,　0.8,　3.9,　1.5,　0.0,　5.5 (mm)

(1) 階級の幅を 2 mm として，度数分布表を作成せよ．ただし，階級は 0 mm から区切り始めるものとする．
(2) (1) で作った度数分布表をもとにヒストグラムをかけ．

(1)

階級 (mm)	度数
0 以上 2 未満	8
2 ～4	9
4 ～6	6
6 ～8	5
8 ～10	2
計	30

(2)



◀ 0mm 以上 2mm 未満から考え，5 個の階級に分ける．

解答 I5.1.2 ★ 問題 p.231

問題文

次のデータは，A クラス 6 人，B クラス 5 人の 10 点満点のテストの得点である．

A クラス：7, 8, 6, 9, 5, 8（点）　　B クラス：4, 5, 6, 7, 3 （点）

(1) A クラスのデータの平均値と B クラスのデータの平均値をそれぞれ求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．
(2) A クラスと B クラスを合わせた 11 人のデータの平均値を求めよ．ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ．
(3) A クラスのデータの中央値と B クラスのデータの中央値をそれぞれ求めよ．

(1) A クラスの平均値は，$\frac{7+8+6+9+5+8}{6} = \frac{43}{6} \fallingdotseq \mathbf{7.17}$ **(点)**
B クラスの平均値は，$\frac{4+5+6+7+3}{5} = \frac{25}{5} = \mathbf{5}$ **(点)**

◀ $(\text{平均値}) = \frac{(\text{データの値の総和})}{(\text{データの値の個数})}$

(2) A クラスと B クラスを合わせた 11 人のデータの平均値は，

$$\frac{43+25}{11} = \frac{68}{11} \fallingdotseq \mathbf{6.18}\ \textbf{(点)}$$

◀ (1) より，A クラスのデータの総和は 43，B クラスのデータの総和は 25 である．

(3) A クラスのデータの中央値は，データを小さい順に並べると，5, 6, 7, 8, 8, 9
よって，中央値は 3 番目の値と 4 番目の値の平均値であるから，$\frac{7+8}{2} = \mathbf{7.5}$ **(点)**
B クラスのデータの中央値は，データを小さい順に並べると，3, 4, 5, 6, 7
よって，中央値は 3 番目の値である **5 (点)**

◀ データの個数が奇数個（5 個）である．

解答 5.1

One math

解答 I5.1.3 ★ 問題 p.232

問題文

右の表は，ある家庭の 10 日間の 1 日の電気使用量（整数）の記録である．

(1) このデータの平均値の最小値と最大値を求めよ．

(2) 10 日間の電気使用量の平均は 12 (kWh) であり，各日の電気使用量は x，18，15，13，12，10，10，8，7，6 (kWh) であった．x の値を求めよ．

使用量の階級（kWh）	日数
5 以上 10 未満	3
10 ～15	4
15 ～20	3
計	10

(1) データの平均値が最小となるのは，データのそれぞれの値が各階級の最小の値となるときであるから，$\frac{1}{10}(5\times3+10\times4+15\times3)=10$

よって，平均値の **最小値は，10 (kWh)**

データの平均値が最大となるのは，データのそれぞれの値が各階級の最大の値となるときであるから，$\frac{1}{10}(9\times3+14\times4+19\times3)=14$

よって，平均値の **最大値は，14 (kWh)**

◀ 使用量は整数であるから，例えば 5 以上 10 未満の階級において，最大の値（最大値）は 9 である．

【別解】データの平均値が最大となるのは，データのそれぞれの値が最小の値より 4kWh だけ大きいときであるから，平均使用量も 4kWh 高くなり，10+4 = **14 (kWh)**

(2) 合計使用量を考えると，

$$x+18+15+13+12+10+10+8+7+6=12\times10$$

したがって，$x+99=120$

よって，$x=\mathbf{21}$

解答 I5.1.4 ★★ 問題 p.233

問題文

次のデータは，ある学生が過去 12 ヶ月間に記録した月ごとの読書冊数である．このデータの箱ひげ図をかけ．ただし，外れ値がある場合は，外れ値を示して箱ひげ図をかけ．

13，15，14，17，16，19，18，20，21，23，25，32 (冊)

与えられたデータを小さい順に並べると，次のようになる．

13，14，15，16，17，18，19，20，21，23，25，32

したがって，最大値は 32 冊，最小値は 13 冊

第 1 四分位数は，$Q_1=\frac{15+16}{2}=15.5$ (冊)

第 2 四分位数（中央値）は，$Q_2=\frac{18+19}{2}=18.5$ (冊)

第 3 四分位数は，$Q_3=\frac{21+23}{2}=22$ (冊)

四分位範囲は，$Q_3-Q_1=22-15.5=6.5$ (冊)

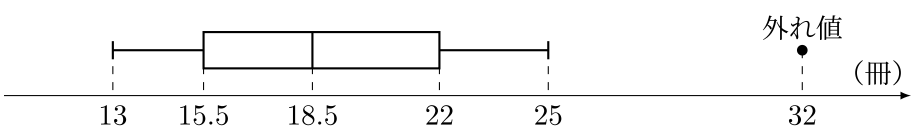
ここで，$6.5\times1.5=9.75$ より，外れ値の目安は，$15.5-9.75=5.75$ より，5.75 以下か，$22+9.75=31.75$ より，31.75 以上のデータである．

◀ 四分位範囲の 1.5 倍以上離れているか否かで判断する．

ゆえに，32 は外れ値となる．

よって，箱ひげ図は次のようになる．

◀ 外れ値を除いた最大の値が最大値となる．また，求めた 5 数要約はそのまま示す．



解答 I5.1.5 ★★ 問題 p.234

問題文

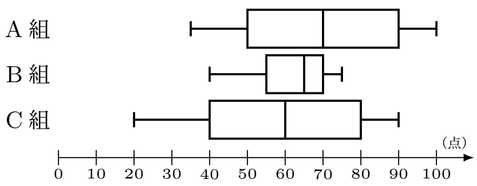
右の図は，生徒数がいずれも 36 人の A 組，B 組，C 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．

(1) 上位 9 人の散らばりが最も小さい組はどれか．

(2) 70 点以上の生徒が 18 人以上いる組はどれか．

(3) 75 点をとった生徒が上位から 14 番目，45 点をとった生徒が上位から 23 番目であった組はどれか．

(4) 全体の散らばりが最も大きい組はどれか．



各組の生徒数は 36 人であるから，中央値は点数の低い方から 18 番目と 19 番目の得点の平均値である．また，第 1 四分位数は点数の低い方から 9 番目と 10 番目の得点の平均値であり，第 3 四分位数は点数の高い方から 9 番目と 10 番目の得点の平均値である．

(1) 上位 9 人の散らばりが最も小さい，つまり，箱ひげ図の第 3 四分位数から最大値までが最も短い組であるから，**B 組**

(2) 生徒 18 人は，各組の生徒数 36 人の 50%（半分）に相当する．つまり，中央値が 70 点以上の組であるから，**A 組**

(3) 上位から 14 番目は中央値 Q_2 と第 3 四分位数 Q_3 の間に位置し，上位から 23 番目は第 1 四分位数 Q_1 と中央値 Q_2 の間に位置する．箱ひげ図が，$Q_1 < 45 < Q_2 < 75 < Q_3$ となっている組であるから，**C 組**

(4)全体の散らばりは，範囲で決まるから，全体の散らばりが最も大きい，つまり，全体が最も長い組であるから，**C 組**

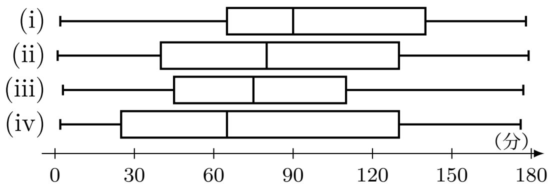
◀ 範囲の大小から散らばりを考えることができる．

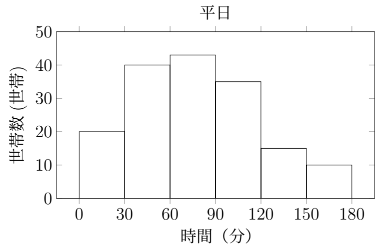
解答 5.1

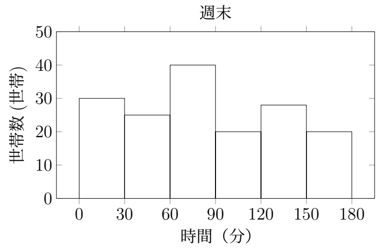
解答 I5.1.6 ★★ 問題 p.235

問題文

右のヒストグラムは，ある地域の 163 世帯について，ある電化製品の週末の電力使用時間（分）を調査した結果である．平日，週末の電力使用時間に対応する箱ひげ図を，左下の (i)〜(iv) からそれぞれ 1 つずつ選べ．







世帯数は 163 世帯であるから，データの値を小さい順に並べたとき，41 番目の値が第 1 四分位数，82 番目の値が第 2 四分位数，123 番目の値が第 3 四分位数である．ヒストグラムより，41 番目，82 番目，123 番目の値が含まれる階級は次のようになる．

◀ ヒストグラムから 41 番目，82 番目，123 番目の値の階級を読み取る．

	最小値	41 番目の値	82 番目の値	123 番目の値	最大値
平日	0 〜 30	30 〜 60	60 〜 90	90 〜 120	150 〜 180
週末	0 〜 30	30 〜 60	60 〜 90	120 〜 150	150 〜 180

よって，平日，週末の電力使用時間の箱ひげ図はそれぞれ **平日は (iii)，週末は (ii)**

解答
5.1

解答 I5.1.7 ★★ 問題 p.236

問題文

下の表は A，B の 2 つの倉庫で 1 日あたりの荷物の搬入量（単位: 箱）を 10 日間調査した結果である．

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 倉庫の搬入量 (箱)	8	6	6	7	7	8	8	7	6	7
B 倉庫の搬入量 (箱)	5	4	5	6	4	5	5	7	4	5

(1) A 倉庫，B 倉庫それぞれの搬入量の平均値 $\overline{a}$, $\overline{b}$, 分散 ${s_a}^2$, ${s_b}^2$, 標準偏差 s_a, s_b を求めよ．ただし，$\sqrt{3}=1.73$, $\sqrt{5}=2.24$ とし，標準偏差は小数第 2 位を四捨五入して答えよ．

(2) (1) から，A 倉庫，B 倉庫の 2 つの倉庫の搬入量の散らばりはどちらが大きいか．

(1)
$$\overline{a}=\frac{1}{10}(8+6+6+7+7+8+8+7+6+7)=\mathbf{7}\ \textbf{(箱)}$$

◀ 平均値は整数である．

$$\begin{aligned}{s_a}^2=&\frac{1}{10}\left\{(8-7)^2+(6-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2\right.\\&\left.+(8-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2\right\}\\=&\mathbf{0.6}\end{aligned}$$

◀ $s^2=(x^2$ の平均値$)-(x$ の平均値$)^2$ を用いて求めてもよい．

$$s_a=\sqrt{0.6}=\frac{\sqrt{60}}{10}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{5}\fallingdotseq\mathbf{0.8}\ \textbf{(箱)}$$

$$\overline{b}=\frac{1}{10}(5+4+5+6+4+5+6+6+4+5)=\mathbf{5}\ \textbf{(箱)}$$

$$\begin{aligned}{s_b}^2=&\frac{1}{10}\left\{(5-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2\right.\\&\left.+(5-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2\right\}\\=&\mathbf{0.8}\end{aligned}$$

$$s_b=\sqrt{0.8}=\frac{\sqrt{80}}{10}=\frac{\sqrt{16}\times\sqrt{5}}{10}\fallingdotseq\mathbf{0.9}\ \textbf{(箱)}$$

(2) $s_b>s_a$ より，**B 倉庫の方が搬入量の散らばりが大きい．**

解答 5.1

One math

解答 I5.1.8 ★★ 問題 p.237

問題文

右の表はクラス A とクラス B の 4 日間における生徒の読書ページ数のデータである．

(1) クラス A の読書ページ数の平均値と分散を求めよ．

(2) クラス B の 1 日目から 4 日目までの読書ページ数の平均値は 12 ページ，分散は 30.5 であるとき，クラス B の読書ページ数 a，b を求めよ．ただし，$a < b$ とする．

日数	クラス A	クラス B
1	5	a
2	8	16
3	7	12
4	6	b

(1) クラス A の読書ページ数の平均値は，$\frac{1}{4}(5+8+7+6) = \mathbf{6.5}$ **(ページ)**

クラス A の読書ページ数の分散は,

$$\frac{1}{4}\left(5^2+8^2+7^2+6^2\right) - 6.5^2 = 43.5 - 42.25 = \mathbf{1.25}$$

◀ $s^2 = (x^2$ の平均値$) - (x$ の平均値$)^2$ を用いて求めている．

(2) 平均値が 12 ページであるから，$\frac{1}{4}(a+16+12+b) = 12$

したがって，$a+b = 20 \cdots$ (i)

分散が 30.5 であるから,

$$\frac{1}{4}\left\{(a-12)^2+(16-12)^2+(12-12)^2+(b-12)^2\right\} = 30.5$$

ゆえに，$(a-12)^2+(b-12)^2 = 106 \cdots$ (ii)

(i) より，$b = 20 - a$ を (ii) に代入すると，$a^2 - 20a + 51 = 0$

よって，$a = 3,\ 17$

これを (i) に代入すると，$a < b$ より，$a = \mathbf{3}$，$b = \mathbf{17}$

解答 I5.1.9 ★★　問題 p.238

問題文

次のデータは，あるクラスの 12 人の生徒があるテストで得た点数を並べたものである．

80，85，90，88，76，94，89，92，81，84，87，80 （点）

(1) このデータの平均値を求めよ．

(2) このデータに誤りが見つかり，正しくは 92 点が 88 点，94 点が 98 点であった．この誤りを修正すると，平均値，分散は，修正前から増加するか，減少するか，変化しないかを答えよ．

(1) $\frac{1}{12}(80+85+90+88+76+94+89+92+81+84+87+80) = \mathbf{85.5}$ **(点)**

(2) $92+94=88+98$ であるから，データの総和は変わらず，平均値は修正前と同じである．

よって，修正後の平均値は**変化しない．**

また，修正前の 2 つのデータの偏差の 2 乗の和は，

$$(92-85.5)^2+(94-85.5)^2=114.5$$

修正後の 2 つのデータの偏差の 2 乗の和は，

$$(88-85.5)^2+(98-85.5)^2=162.5$$

よって，偏差の 2 乗の総和は増加するため，分散は修正前より**増加する．**

◀ 平均値が修正前と修正後で一致しているから，修正していない 10 人分のデータは，偏差の 2 乗の値に変化はない．

解答 I5.1.10 ★★　問題 p.239

問題文

変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ が $\overline{x}=50$，分散 ${s_x}^2=36$ であるとする．このとき，次の式によって得られる変量 y のデータについて，平均値 $\overline{y}$，分散 ${s_y}^2$，標準偏差 s_y を求めよ．

(1) $y=x-20$　(2) $y=3x$　(3) $y=-2x+10$　(4) $y=\frac{x-50}{6}$

(1) $\overline{y}=\overline{x}-20=50-20=\mathbf{30}$

${s_y}^2=1^2\times{s_x}^2=\mathbf{36}$

$s_y=1\times s_x=\sqrt{36}=\mathbf{6}$

(2) $\overline{y}=3\overline{x}=3\times 50=\mathbf{150}$

${s_y}^2=3^2\times{s_x}^2=9\times 36=\mathbf{324}$

$s_y=3\times s_x=3\times\sqrt{36}=\mathbf{18}$

(3) $\overline{y}=-2\overline{x}+10=-2\times 50+10=-100+10=\mathbf{-90}$

${s_y}^2=(-2)^2\times{s_x}^2=4\times 36=\mathbf{144}$

$s_y=|-2|\times s_x=2\times\sqrt{36}=\mathbf{12}$

(4) $\overline{y}=\dfrac{\overline{x}-50}{6}=\dfrac{50-50}{6}=\mathbf{0}$

${s_y}^2=\dfrac{{s_x}^2}{6^2}=\dfrac{36}{36}=\mathbf{1}$

$s_y=\dfrac{s_x}{6}=\dfrac{\sqrt{36}}{6}=\mathbf{1}$

◀ 標準偏差 s_y は，分散 ${s_y}^2$ より求めてもよい．

例：(1) ${s_y}^2=36$ より，

$s_y=\sqrt{36}=6$

(2) ${s_y}^2=324$ より，

$s_y=\sqrt{324}=18$

解答 5.1

解答 I5.1.11 ★★ 問題 p.240

問題文

次のような変量 x のデータがある．このとき，次の問いに答えよ．

550，620，590，570，610，630，560，580，590，600

(1) $y = x - 600$ とおくことにより，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ．

(2) $z = \frac{x-600}{10}$ とおくことにより，変量 x のデータの分散を求めよ．

(1) y のデータの平均値を $\overline{y}$ とすると，

$$\overline{y} = \frac{1}{10}\{-50+20-10-30+10+30-40-20-10+0\} = -10$$

◀ $\overline{x} = \frac{1}{10}(550 + \cdots + 600)$ を用いても平均値は求められるが，計算に手間が掛かる．

よって，$\overline{x}$ は，$\overline{x} = \overline{y} + 600 = -10 + 600 = \mathbf{590}$

(2) $z = \frac{x-600}{10}$ とおくと，z，z^2 の値は次のようになる．

x	550	620	590	570	610	630	560	580	590	600	計
y	-50	20	-10	-30	10	30	-40	-20	-10	0	-100
z	-5	2	-1	-3	1	3	-4	-2	-1	0	-10
z^2	25	4	1	9	1	9	16	4	1	0	70

したがって，z のデータの分散は，z のデータの平均値を $\overline{z}$ とすると，

$$\overline{z^2} - (\overline{z})^2 = \frac{70}{10} - \left(\frac{-10}{10}\right)^2 = 7 - 1 = 6$$

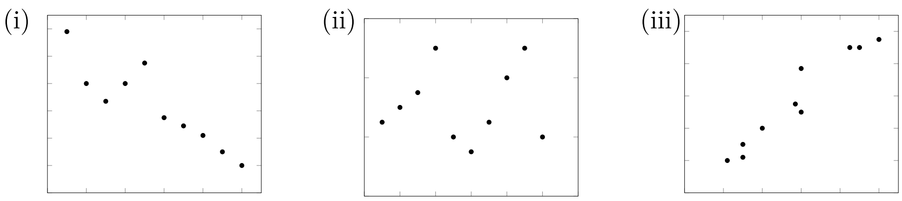
よって，x のデータの分散は，$10^2 \times 6 = 100 \times 6 = \mathbf{600}$

◀ ${s_x}^2 = 10^2{s_z}^2$

解答 I5.1.12 ★ 問題 p.241

問題文

あるクラスの 10 名の生徒について，2 つの指標 X，Y でテスト結果を評価した．指標 X の評価値の分散は $\frac{33}{4}$，指標 Y の評価値の分散は $\frac{33}{4}$ で，X と Y の評価値の共分散は $-\frac{15}{2}$ であった．このとき，X と Y の評価値の相関係数を求めよ．また，X と Y の評価値として対応する散布図を次の (i)〜(iii) から選べ．



X の評価値の分散が $\frac{33}{4}$ より，標準偏差は $\sqrt{\frac{33}{4}}$

Y の評価値の分散が $\frac{33}{4}$ より，標準偏差は $\sqrt{\frac{33}{4}}$

X と Y の評価値の共分散が $-\frac{15}{2}$ より，求める相関係数は，

$$\frac{-\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{33}{4}} \times \sqrt{\frac{33}{4}}} = -\frac{30}{33} = \mathbf{-\frac{10}{11}}$$

◀ x と y の相関係数は，$\frac{(x\text{と}y\text{の共分散})}{(x\text{の標準偏差}) \times (y\text{の標準偏差})}$

また，相関係数は負で，強い負の相関があるため，**散布図は (i)**

◀ 負の相関関係があるとき，散布図は右下がりの分布となる．

解答 5.1

One math

解答 I5.1.13 ★★ 問題 p.242

問題文

次の表は，5 名の生徒 A，B，C，D，E の運動時間 x（時間）と体力テストの点数 y（点）を測定した結果である．このとき，x と y の相関係数 r を求めよ．

	A	B	C	D	E
運動時間 x（時間）	8	6	8	5	8
点数 y（点）	10	12	15	10	13

x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(8+6+8+5+8)=7\ (\text{時間}),$$
$$\overline{y}=\frac{1}{5}(10+12+15+10+13)=12\ (\text{点})$$

したがって，下のような表が得られる．

◀ 表を用いるとよい．

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	8	10	1	-2	1	4	-2
B	6	12	-1	0	1	0	0
C	8	15	1	3	1	9	3
D	5	10	-2	-2	4	4	4
E	8	13	1	1	1	1	1
計	35	60	0	0	8	18	6

よって，相関係数 r は，$r=\frac{6}{\sqrt{8\times18}}=\frac{6}{\sqrt{144}}=\frac{6}{12}=\mathbf{0.5}$

解答 I5.1.14 ★★ 問題 p.243

問題文

ある商品に新機能を追加し，20 人に対しアンケートをとったところ，15 人が「新機能が役立つ」と回答した．この結果から，新機能が役立つと判断してよいか．仮説検定により，基準となる確率を 0.05 として考察せよ．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 20 回投げて，表が出た回数を記録する実験を 200 セット行ったところ次の表のようになったとして，この結果を用いよ．

表が出た回数	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	計
度数	1	2	6	12	16	23	25	31	27	21	16	8	6	3	2	1	200

「新機能が役立つ」と判断してよいかを考察するために，これに反する「新機能が役立つとはいえない」，すなわち，「新機能が役立つ結果が得られたのは偶然である」という仮説を立てる．このとき，公正なコインの実験結果から，表が出た回数が 15 回以上である場合の相対度数は，

◀ コインを投げたときの表裏がそれぞれ出る確率と同様に考えることができる．

$$\frac{6+3+2+1}{200}=\frac{12}{200}=0.06$$

よって，これは 0.05 より大きいから，偶然に起こり得る事象であるといえる．すなわち，仮説を棄却することはできず，**新機能が役立つとは判断できない．**

◀ 基準となる確率との大小を比較する．ここでは $0.06>0.05$ から，仮説は棄却されない．

解答（節末）I5.1.1 ★★　節末 p.244

問題文

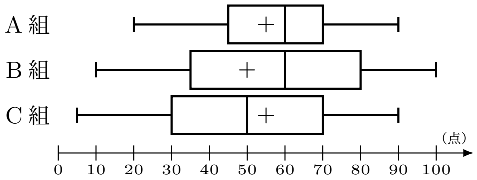
右の図は，生徒数がいずれも 40 人の A 組，B 組，C 組に 100 点満点の同じテストを行った結果を箱ひげ図に表したものである．次の (i)〜(iv) の記述のうち，適切ではないものを答えよ．

(i) B 組の合計得点は A 組の合計得点より小さい．

(ii) A 組と B 組において，得点が 60 点以上の人数は同じである．

(iii) B 組で得点が 50 点以上の人数は 20 人以上である．

(iv) B 組の生徒が，A 組，B 組，C 組全体の最高得点をとっている．



(i) A 組，B 組の得点の平均値は，それぞれおおよそ 55 点，50 点と読み取れる．
A 組，B 組ともに人数は同じであるから，平均値が小さいB 組の合計得点が A 組より低く，適切である．

◀ (平均値) $=\frac{(\text{合計得点})}{(\text{人数})}$

(ii) A 組，B 組とも中央値が 60 点であるが，得点が 60 点以上の生徒の人数は箱ひげ図からは読み取れない．
したがって，60 点以上の人数が同じであるとは限らず，適切ではない．

◀ 中央値と等しいデータは 1 個とは限らず，2 個以上の可能性もある．

(iii) B 組の得点の中央値は 60 点であるため，少なくとも 20 人が 60 点以上の得点をとっている．
したがって，50 点以上の人数は 20 人以上であるので，適切である．

(iv) A 組，B 組，C 組の得点の最大値は，それぞれ 90 点，100 点，90 点である．
したがって，B 組の最大得点が全体の最高得点であるため，適切である．

よって，適切ではないものは，**(ii)**

解答（節末）I5.1.2 ★★　節末 p.245

問題文

10 人の社員に対して作業時間を記録した．記録したところ，作業時間の平均値は 20，分散は 4.5 であった．しかし，この 10 人のうち 2 人の作業時間が右の表のように修正された．修正後の 10 人の作業時間の平均値と分散を求めよ．

社員	修正前	修正後
A	18	22
B	17	23

修正後の作業時間の平均値を $\overline{x}$，分散を ${s_x}^2$，作業時間の 2 乗の平均値を $\overline{x^2}$ とする．
このとき，$\overline{x}=\frac{1}{10}\{20\times 10-(18+17)+(22+23)\}=\mathbf{21}$ **(時間)**
修正前の作業時間の平均値を $\overline{y}$，分散を ${s_y}^2$，作業時間の 2 乗の平均値を $\overline{y^2}$ とする．
このとき，$\overline{y^2}={s_y}^2+(\overline{y})^2=4.5+20^2=404.5$

◀ ${s_y}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2$

したがって，$\overline{x^2}=\frac{1}{10}\left\{404.5\times 10-\left(18^2+17^2\right)+\left(22^2+23^2\right)\right\}=444.5$
よって，${s_x}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=444.5-21^2=\mathbf{3.5}$

◀ ${s_x}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$

解答（節末）I5.1.3 ★★ 節末 p.246

問題文

ある地域で A 地区と B 地区の 2 か所のうちどちらかに新しい公園を建設する案があり，住民投票の結果，B 地区を支持した住民が 60 人中 43 人であった．一般に，B 地区の方が住民にとって望ましい建設地であると判断してよいであろうか．もし A 地区と B 地区を何も考えずに選ぶ場合，それぞれが選ばれる確率は 0.5 とし，起こる割合が 5% 以下であればほとんど起こりえないと判断するものとする．ただし，50% の確率で表が出る公正なコインを 60 枚投げて，表が出た枚数を記録する実験を 1000 セット行ったところ右の表のようになったとして，この結果を用いよ．

表の枚数	回数
0 ～ 30	540
31	99
32	91
33	86
34	54
35	43
36	32
37	20
38	11
39	8
40	6
41	4
42	3
43	2
44	1
45	0

「B 地区の方が望ましい建設地である」と判断してよいかを考察するために，これに反する「B 地区の方が望ましい建設地とはいえない」という仮説を立てる．このとき，公正なコインの実験結果から，60 枚中 43 枚以上が表となる場合の相対度数は，

$$\frac{2+1}{1000} = \frac{3}{1000} = 0.003$$

より，0.3%

よって，これは 5% より小さいから，仮説は正しくなかったと考えられ，仮説は棄却される．すなわち，**B 地区の方が望ましい建設地であると判断してよい．**

◀ A 地区と B 地区を何も考えずに選ぶ場合の B 地区の選ばれ方が 0.5 であるので，コインの表面の出方とおき換えて考えることができる．

◀ 基準となる確率との大小を比較する．

章末問題 5（解答）

解答（章末）I5.1 ★★ 章末 p.247

問題文

任意の連続する 4 個の自然数の分散 s^2 を求めよ．

n を自然数とすると，任意の連続する 4 個の自然数は，n，$n+1$，$n+2$，$n+3$ とおける．

4 個の自然数の平均値は，

$$\frac{1}{4}\{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)\}=n+1.5$$

よって，任意の連続する 4 個の自然数の分散は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\left\{n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2\right\}-(n+1.5)^2\\=&\frac{1}{4}\left(4n^2+12n+14\right)-\left(n^2+3n+2.25\right)\\=&\frac{14}{4}-2.25=\mathbf{1.25}\end{aligned}$$

◀ s^2 ＝ (x^2 の平均値) − (x の平均値)^2 を用いて求めている．

解答（章末）I5.2 ★★ 章末 p.248

問題文

変量 x についてのデータの値が p，q，r，s，t であるとする．データ p，q，r の平均値が 12 ，分散が 4 であり，データ s，t の平均値が 10 ，分散が 2 であるとするとき，変量 x の次の値を求めよ．

(1) 平均値　　(2) 分散

(1) データ p，q，r の平均値が 12 であるから，$\frac{p+q+r}{3}=12$

すなわち，$p+q+r=36\cdots$(i)

データ s，t の平均値が 10 であるから，$\frac{s+t}{2}=10$

すなわち，$s+t=20\cdots$(ii)

(i)，(ii) の辺々を足し合わせると，$p+q+r+s+t=56$

よって，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{p+q+r+s+t}{5}=\frac{56}{5}=\mathbf{11.2}$$

(2) データ p，q，r の分散が 4 であるから，$\frac{p^2+q^2+r^2}{3}-12^2=4$

すなわち，$p^2+q^2+r^2=444\cdots$(iii)

データ s，t の分散が 2 であるから，$\frac{s^2+t^2}{2}-10^2=2$

すなわち，$s^2+t^2=204\cdots$(iv)

(iii)，(iv) の辺々を足し合わせると，$p^2+q^2+r^2+s^2+t^2=648$

よって，x の分散は，

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2+t^2}{5}-\overline{x}^2=\frac{648}{5}-11.2^2=129.6-125.44=\mathbf{4.16}$$

◀ s^2 ＝ (x^2 の平均値) − (x の平均値)^2 を用いて求めている．

解答（章末）I5.3 ★★★ 章末 p.249

問題文

ある実験で得られた n 個の測定値 x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n の平均が m, 分散が σ^2 である．
p, q $(p>0,\ q>0)$ を正の定数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) $(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+(x_3-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2$ を最小にする x の値を求めよ．
(2) x_1+p, x_2+p, x_3+p, $\ldots$, x_n+p の平均値および分散を求めよ．
(3) qx_1, qx_2, qx_3, $\ldots$, qx_n の平均値および分散を求めよ．

(1) $(x_i-x)^2=x_i^2-2x_ix+x^2$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ となることから，与えられた式を整理すると，

$$nx^2-2\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)x+\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)$$

したがって，

$$\begin{aligned}&nx^2-2\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)x+\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)\\&=n\left\{x-\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\right\}^2-\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^2\\&\quad+\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)\end{aligned}$$

◀ x^2 の係数は正である．

◀ x についての 2 次式と考えて，平方完成する．

よって，$x=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)$ のとき，すなわち，$x=\boldsymbol{m}$ のとき，最小値をとる．

◀ 与えられた条件より，平均は m である．

(2)
$$\begin{aligned}(\text{平均値})&=\frac{1}{n}\left\{(x_1+p)+(x_2+p)+\cdots+(x_n+p)\right\}\\&=\frac{1}{n}\left\{(x_1+x_2+\cdots+x_n)+np\right\}\\&=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)+p\\&=\boldsymbol{m+p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{分散})&=\frac{1}{n}\left\{(x_1+p)^2+(x_2+p)^2+\cdots+(x_n+p)^2\right\}-(m+p)^2\\&=\frac{1}{n}\left\{\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)+2p\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)+np^2\right\}\\&\quad-(m+p)^2\\&=\frac{1}{n}\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)+2pm+p^2-(m+p)^2\\&=\frac{1}{n}\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)-m^2\\&=\boldsymbol{\sigma^2}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(\text{平均値})&=\frac{1}{n}\left\{qx_1+qx_2+\cdots+qx_n\right\}=q\times\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\\&=\boldsymbol{qm},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{分散})&=\frac{1}{n}\left\{(qx_1)^2+(qx_2)^2+\cdots+(qx_n)^2\right\}-(qm)^2\\&=q^2\frac{1}{n}\left({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\right)-q^2m^2\\&=q^2\left(\sigma^2+m^2\right)-q^2m^2\\&=\boldsymbol{q^2\sigma^2}\end{aligned}$$

解答（章末）I5.4 ★★★ 章末 p.250

問題文

ある学校で，120 人の生徒が定期テストを受験した．得点の平均値が m 点，標準偏差が s 点である試験において，得点が x 点である受験者の偏差値は $50+\frac{10(x-m)}{s}$ で与えられる．A さんのこのテストの得点は 78 点であり，偏差値は 58 であった．また，このテストの得点の平均値は 66 点であった．
(1) 120 人の生徒の得点の標準偏差を求めよ．
(2) 後日，この定期テストを新たに 60 人が受験し，受験者数は合計で 180 人となった．その結果，試験の得点の平均値が 67 点となり，A さんの偏差値は 55 となった．新たに受験した 60 人の受験者の得点について，平均値と標準偏差をそれぞれ求めよ．

(1) 最初に受験した 120 人の得点の標準偏差を s_x とする．
A さんの偏差値より，$50+\frac{10(78-66)}{s_x}=58$
よって，$s_x=\mathbf{15}$

◀ 偏差値 $50+\frac{10(x-m)}{s}$ から，標準偏差を求める．

(2) 新たに受験した 60 人の得点の平均値を $\overline{y}$ とする．
180 人の得点の平均値より，

$$\frac{66\times120+\overline{y}\times60}{120+60}=67$$

◀ 120 人の得点の合計は，
66×120（点）
60 人の得点の合計は，
$\overline{y}\times60$（点）

よって，$\overline{y}=\mathbf{69}$
180 人の得点の平均値を $\overline{z}$，標準偏差を s_z，得点の 2 乗の平均値を $\overline{z^2}$ とする．
A さんの得点の偏差値より，$50+\frac{10(78-67)}{s_z}=55$
したがって，$s_z=22$

◀ 偏差値 $50+\frac{10(x-m)}{s}$ から，標準偏差を求める．

${s_z}^2=\overline{z^2}-(\overline{z})^2$ であるから，

$$\overline{z^2}={s_z}^2+(\overline{z})^2=22^2+67^2=4973$$

また，最初に受験した 120 人の得点の平均値を $\overline{x}$，得点の 2 乗の平均値を $\overline{x^2}$ とすると，${s_x}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ であるから，

$$\overline{x^2}={s_x}^2+(\overline{x})^2=15^2+66^2=4581$$

ゆえに，新たに受験した 60 人の得点の 2 乗の平均値を $\overline{y^2}$ とすると，

$$\overline{y^2}=\frac{\overline{z^2}\times180-\overline{x^2}\times120}{60}=\frac{4973\times180-4581\times120}{60}=5757$$

よって，新たに受験した 60 人の得点の標準偏差 s_y は，

$$s_y=\sqrt{\overline{y^2}-(\overline{y})^2}=\sqrt{5757-69^2}=\mathbf{2\sqrt{249}}$$

◀ ${s_y}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2$

解答（章末）I5.5 ★★★ 章末 p.251

問題文

右の表は，ある数学クラスの学生 10 人がそれぞれ試験 A（代数）と試験 B（幾何）の得点を 0，1，2 の 3 段階で評価したときの得点を，2 次元の度数分布表にまとめたものである．試験 A の得点 x と試験 B の得点 y の相関係数 r を小数第 3 位まで求めよ．ただし，$\sqrt{70}=8.3666$ とする．

A\B	0	1	2	計
0	2	2	0	4
1	0	1	1	2
2	0	1	3	4
計	2	4	4	10

x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，下のような表が得られる．

◀ 表を用いるとよい．

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
	0	0	-1	-1.2	1	1.44	1.2
	0	0	-1	-1.2	1	1.44	1.2
	0	1	-1	-0.2	1	0.04	0.2
	0	1	-1	-0.2	1	0.04	0.2
	1	1	0	-0.2	0	0.04	0
	1	2	0	0.8	0	0.64	0
	2	1	1	-0.2	1	0.04	-0.2
	2	2	1	0.8	1	0.64	0.8
	2	2	1	0.8	1	0.64	0.8
	2	2	1	0.8	1	0.64	0.8
計	10	12	0	0	8	5.6	5
平均	1.0	1.2	0	0	0.8	0.56	0.5

x，y の標準偏差は，それぞれ，

$$s_x=\sqrt{0.8}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad s_y=\sqrt{0.56}=\frac{\sqrt{14}}{5}$$

x と y の共分散は，$s_{xy}=0.5=\frac{1}{2}$

よって，x と y の相関係数 r は，

$$r=\frac{1}{2}\div\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{14}}{5}\right)=\frac{25}{4\sqrt{70}}=\frac{5\sqrt{70}}{56}=\frac{5\cdot 8.3666}{56}\fallingdotseq\mathbf{0.747}$$

◀ $r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

解答 5.2

One math

問題一覧

第 1 章　数と式

One math

第 2 章　集合と命題

第 3 章　2 次関数

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
問題 I3.3.1	2 次方程式の解 1	★	128	341		
問題 I3.3.2	2 次方程式の解 2	★★	129	342		
問題 I3.3.3	方程式の解（係数が文字のとき）	★★★	130	343		
問題 I3.3.4	2 次方程式の係数決定	★★	131	344		
問題 I3.3.5	実数解の個数と判別式	★	132	345		
問題 I3.3.6	2 次方程式が実数解をもつ条件 1	★★	133	346		
問題 I3.3.7	2 次方程式が実数解をもつ条件 2	★★	134	346		
問題 I3.3.8	2 次方程式の共通解	★★★	135	347		
問題 I3.3.9	放物線と x 軸の共有点の座標	★	136	348		
問題 I3.3.10	2 次関数のグラフと x 軸の位置関係	★★	137	349		
問題 I3.3.11	x 軸から切り取る線分の長さ	★★	138	350		
問題 I3.3.12	2 次関数のグラフと係数の符号	★★	139	351		
問題 I3.3.13	2 次の連立方程式	★★	140	352		
問題 I3.3.14	放物線と直線の共有点の座標 1	★	141	353		
問題 I3.3.15	放物線と直線の共有点の座標 2	★★	142	354		
問題 I3.3.16	2 次不等式 1	★	143	355		
問題 I3.3.17	2 次不等式 2	★	144	356		
問題 I3.3.18	連立 2 次不等式	★★	145	356		
問題 I3.3.19	文字係数の 2 次不等式	★★★	146	357		
問題 I3.3.20	不等式の係数決定	★★	147	358		
問題 I3.3.21	2 次方程式が実数解をもつ条件 3	★★★	148	359		
問題 I3.3.22	すべての実数について成り立つ不等式	★★★	149	360		
問題 I3.3.23	ある区間で常に成り立つ不等式	★★★	150	361		
問題 I3.3.24	2 次不等式が整数解をもつ条件	★★★	151	362		
問題 I3.3.25	方程式の解の存在範囲 1	★★★	152	362		
問題 I3.3.26	方程式の解の存在範囲 2	★★★	153	363		
問題 I3.3.27	方程式の解の存在範囲 3	★★	154	363		
問題 I3.3.28	方程式の解の存在範囲 4	★★★	155	364		
問題 I3.3.29	方程式の解の存在範囲 5	★★★★	156	365		
問題 I3.3.30	2 次方程式が実数解をもつ条件 4	★★★	157	366		
問題 I3.3.31	条件付きの 2 変数関数の最大・最小 2	★★★	158	367		
問題 I3.3.32	条件なし 2 変数関数	★★★	159	368		
問題 I3.3.33	2 次不等式の文章題	★★	160	368		
問題 I3.3.34	2 つの放物線の大小関係 1	★★★★	161	369		
問題 I3.3.35	2 つの放物線の大小関係 2	★★★★	162	369		
問題 I3.3.36	絶対値記号を含む 2 次方程式（定数分離）	★★★	163	370		

第 4 章　図形と計量

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
問題 I4.1.1	直角三角形の三角比	★	175	378		
問題 I4.1.2	三角比を用いた測量	★★	176	378		
問題 I4.1.3	15 度の三角比	★★★	177	379		
問題 I4.1.4	三角比の相互関係 1	★	178	379		
問題 I4.1.5	余角・補角の三角比	★★	179	380		
問題 I4.1.6	三角比を含む方程式 1	★	180	381		
問題 I4.1.7	三角比の相互関係 2	★★	181	381		
問題 I4.1.8	三角比の式の値	★★★	182	382		
問題 I4.1.9	三角比を含む方程式 2	★★★	183	382		
問題 I4.1.10	2 直線のなす角	★★	184	383		
問題 I4.1.11	三角比を含む不等式 1	★★	185	383		
問題 I4.1.12	三角比を含む不等式 2	★★	186	384		
問題 I4.1.13	三角比を含む不等式 3	★★★	187	384		
問題 I4.1.14	三角比を含む 2 次関数の最大・最小	★★★	188	385		
問題 I4.1.15	三角比を含む方程式の解の個数 1	★★★★	189	385		
問題 I4.1.16	三角比を含む方程式の解の個数 2	★★★★	190	386		
問題 I4.2.1	正弦定理	★	196	391		
問題 I4.2.2	余弦定理	★★	197	392		
問題 I4.2.3	三角形の辺と角 1	★★	198	393		
問題 I4.2.4	三角形の辺と角 2	★★	199	394		
問題 I4.2.5	正弦定理と余弦定理の利用	★★★	200	395		
問題 I4.2.6	三角形の成立条件	★★★	201	396		
問題 I4.2.7	三角形の形状の決定	★★★	202	397		
問題 I4.3.1	三角形の面積	★★	208	401		
問題 I4.3.2	多角形の面積	★★	209	402		
問題 I4.3.3	三角形の内接円と外接円の半径	★★	210	403		
問題 I4.3.4	円に内接する四角形 1	★★	211	403		
問題 I4.3.5	円に内接する四角形 2	★★★	212	404		
問題 I4.3.6	角の二等分線の長さ	★★	213	405		
問題 I4.3.7	中線定理	★★	214	405		
問題 I4.3.8	空間図形の測量	★★	215	406		
問題 I4.3.9	円錐に内接する球	★★★	216	407		
問題 I4.3.10	正四面体の計量	★★★★	217	407		
問題 I4.3.11	空間図形における最短距離	★★★	218	408		

第 5 章　データの分析

番号	タイトル	難易度	ページ数	解答ページ数	1 回目	2 回目
問題 I5.1.1	度数分布表，ヒストグラム	★	230	417		
問題 I5.1.2	平均値，中央値	★	231	417		
問題 I5.1.3	平均値の値	★	232	418		
問題 I5.1.4	四分位数と箱ひげ図	★★	233	418		
問題 I5.1.5	箱ひげ図の読み取り	★★	234	419		
問題 I5.1.6	ヒストグラムと箱ひげ図	★★	235	420		
問題 I5.1.7	分散と標準偏差	★★	236	421		
問題 I5.1.8	データの値の決定	★★	237	422		
問題 I5.1.9	データの修正	★★	238	423		
問題 I5.1.10	変量の変換	★★	239	423		
問題 I5.1.11	仮平均を利用したデータの平均値，分散	★★	240	424		
問題 I5.1.12	散布図と相関関係	★	241	424		
問題 I5.1.13	相関係数の計算	★★	242	425		
問題 I5.1.14	仮説検定の考え方	★★	243	425		

三角比の表

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	——

電子版（PDF 版）を利用している方へ

プルダウン機能（1 回目，2 回目）と動画視聴（チェック）の記録をすべてリセットしたい場合は，次の「すべての記録をリセット」を押下してください．

すべての記録をリセット

ギリシャ文字の表

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	alpha（アルファ）	N	ν	nu（ニュー）
B	β	beta（ベータ）	Ξ	ξ	xi（クシー）
Γ	γ	gamma（ガンマ）	O	o	omicron（オミクロン）
Δ	δ	delta（デルタ）	Π	π, ϖ	pi（パイ）
E	ϵ, ε	epsilon（イプシロン）	P	ρ, ϱ	rho（ロー）
Z	ζ	zeta（ゼータ）	Σ	σ, ς	sigma（シグマ）
H	η	eta（イータ）	T	τ	tau（タウ）
Θ	θ, ϑ	theta（シータ）	Υ	υ	upsilon（ウプシロン）
I	ι	iota（イオタ）	Φ	ϕ, φ	phi（ファイ）
K	κ	kappa（カッパ）	X	χ	chi（カイ）
Λ	λ	lambda（ラムダ）	Ψ	ψ	psi（プサイ）
M	μ	mu（ミュー）	Ω	ω	omega（オメガ）

著者紹介

著者：犬飼 シムラ（いぬかい・しむら）

早稲田大学教育学部数学科を卒業し，高等学校の公立学校教員として勤務している．専門は函数解析，数学教育など．好きなものは，漫画，犬，動物，スポーツ，サウナとのこと．神奈川県在住との噂がある．

表紙デザイン：PGF/TikZ を使用して作成
本文：LaTeX を使用して作成
図版：PGF/TikZ を使用して作成

One More（数学 I）書き込み式ワークブック

2025年 6月 22日　初版公開
2025年 7月 6日　第 2 版公開
2026年 4月 7日　第 3 版公開

著者： 犬飼（いぬかい） シムラ
発行： Onemath

Ⅱ

検印欄

年　　　組　　　番　氏名

Onemath