数学 I 単元テスト（数と式）問題用紙【OMI-UT-01-QA/v1.0】

実施日：__________ 年 _____ 月 _____ 日　_______ 年 _______ 組 _______ 番　氏名______________________________

1 次の文章は単項式と多項式について述べたものである．文章中の ア ～ エ に当てはまる適切な用語を答えよ．

> 数や文字，またはそれらを掛け合わせてできる式を単項式という．単項式において，掛け合わせた文字の総数をその単項式の次数という．また，数の部分を ア という．
> 2 種類以上の文字が含まれる単項式では，1 つの文字に着目して次数や ア を考えることがあり，このとき他の文字は数と同様に扱われる．
> 多項式とは，単項式の和で表される式であり，これらの単項式を多項式の項という．
> 多項式において，文字部分が同じである項を イ という．多項式は， イ を 1 つにまとめて整理することができる．
> イ をまとめて整理した多項式において，最も次数が高い項の次数をその多項式の次数とし，次数が n の多項式を ウ という．
> 2 種類以上の文字を含む多項式においても，特定の文字に着目し，他の文字は数として扱うことがある．多項式において，着目した文字を含まない項を エ という．

解

ア $\cdots$ **係数**， イ $\cdots$ **同類項**， ウ $\cdots$ **n 次式**， エ $\cdots$ **定数項**

2 $A=x^2+4x-2$，$B=2x^2-x+4$ について，次の式を計算せよ．

$$2(3A-B)-\{(2A+3B)-(A+2B)\}$$

解

$2(3A-B)-\{(2A+3B)-(A+2B)\}=2(3A-B)-(A+B)$
$=6A-2B-A-B$
$=5A-3B$
$=5(x^2+4x-2)-3(2x^2-x+4)$
$=5x^2+20x-10-6x^2+3x-12$
$=\boldsymbol{-x^2+23x-22}$

3 次の式を展開せよ．

(1) $(x-3y)^2$　(2) $(4ab+1)(4ab-1)$
(3) $(x+2y-z)^2$　(4) $(x-y+3)(x-y-5)$
(5) $(x-2)(x-5)(x+4)(x+7)$

解

(1) $(x-3y)^2=x^2-2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2=\boldsymbol{x^2-6xy+9y^2}$

(2) $(4ab+1)(4ab-1)=(4ab)^2-1^2=\boldsymbol{16a^2b^2-1}$

(3) $(x+2y-z)^2=\{x+2y+(-z)\}^2$
$=x^2+(2y)^2+(-z)^2+2\cdot x\cdot 2y+2\cdot 2y\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot x$
$=\boldsymbol{x^2+4y^2+z^2+4xy-4yz-2zx}$

(4) $(x-y+3)(x-y-5)=\{(x-y)+3\}\{(x-y)-5\}$
$=(x-y)^2-2(x-y)-15$
$=\boldsymbol{x^2-2xy+y^2-2x+2y-15}$

(5) $(x-2)(x-5)(x+4)(x+7)=(x-2)(x+4)\times(x-5)(x+7)$
$=\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+2x-35\right)$
$=\left\{\left(x^2+2x\right)-8\right\}\left\{\left(x^2+2x\right)-35\right\}$
$=\left(x^2+2x\right)^2-43\left(x^2+2x\right)+280$
$=\boldsymbol{x^4+4x^3-39x^2-86x+280}$

4 次の式を因数分解せよ．

(1) $xy-2y-x+2$　(2) $16a^3-8a^2+a$
(3) $9x^2-(x+1)^2$　(4) $2x^2+7xy+3y^2$
(5) $2x^2+5xy+3y^2-4x-7y-6$　(6) $(x+3y)^2-8(x+3y)+15$
(7) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-120$　(8) x^4-13x^2+36
(9) x^4+6x^2+25

解

(1) $xy-2y-x+2=(x-2)y-(x-2)=\boldsymbol{(x-2)(y-1)}$

(2) $16a^3-8a^2+a=a(16a^2-8a+1)=a\{(4a)^2-2\cdot 4a\cdot 1+1^2\}=\boldsymbol{a(4a-1)^2}$

(3) $9x^2-(x+1)^2=\{3x+(x+1)\}\{3x-(x+1)\}$
$=(3x+x+1)(3x-x-1)$
$=\boldsymbol{(4x+1)(2x-1)}$

(4) $2x^2+7xy+3y^2=\boldsymbol{(x+3y)(2x+y)}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3y & \longrightarrow 6y \\ 2 & y & \longrightarrow y \\ \hline & & 7y \end{array}$$

(5) $2x^2+5xy+3y^2-4x-7y-6$
$=2x^2+(5y-4)x+\left(3y^2-7y-6\right)$
$=2x^2+(5y-4)x+(y-3)(3y+2)\cdots$(i)
$=\{x+(y-3)\}\{2x+(3y+2)\}\cdots$(ii)
$=\boldsymbol{(x+y-3)(2x+3y+2)}$

(i)
$$\begin{array}{ccc} 1 & -3 & \longrightarrow -9 \\ 3 & 2 & \longrightarrow 2 \\ \hline & & -7 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccc} 1 & y-3 & \longrightarrow 2y-6 \\ 2 & 3y+2 & \longrightarrow 3y+2 \\ \hline & & 5y-4 \end{array}$$

(6) $(x+3y)^2-8(x+3y)+15=\{(x+3y)-3\}\{(x+3y)-5\}$
$=\boldsymbol{(x+3y-3)(x+3y-5)}$

(7) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-120$
$=(x+2)(x+5)\times(x+3)(x+4)-120$
$=\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+7x+12\right)-120$
$=\left\{\left(x^2+7x\right)+10\right\}\left\{\left(x^2+7x\right)+12\right\}-120$
$=\left(x^2+7x\right)^2+22\left(x^2+7x\right)$
$=\left(x^2+7x\right)\left\{\left(x^2+7x\right)+22\right\}$
$=\boldsymbol{x(x+7)\left(x^2+7x+22\right)}$

(8) $x^4-13x^2+36=(x^2-9)(x^2-4)=\boldsymbol{(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)}$

(9) $x^4+6x^2+25=(x^4+10x^2+25)-4x^2$
$=(x^2+5)^2-(2x)^2$
$=\{(x^2+5)+2x\}\{(x^2+5)-2x\}$
$=\boldsymbol{(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)}$

5 次の式を因数分解せよ．

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$$

解

$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$
$=(b+c)a^2+\left(b^2+2bc+c^2\right)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc$
$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}$

※ 裏面へ続く

$\boxed{6}$ (1) 次の分数を小数の形に直し，循環小数の表し方で書け．

$$\frac{1}{11}$$

(2) 次の循環小数を分数の形で表せ．

$$0.\dot{5}$$

解

(1) $\frac{1}{11} = 0.0909\ldots = \mathbf{0.\dot{0}\dot{9}}$

(2) $x = 0.\dot{5}$ とおく．

右のように計算して，

$$9x = 5$$

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 5.55\ldots \\ - & x = & 0.55\ldots \\ \hline & 9x = & 5 \end{array}$$

よって，$x = \mathbf{\frac{5}{9}}$

$\boxed{7}$ 次の式の分母を有理化して簡単にせよ．

(1) $\frac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}$ (3) $\frac{1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

解

(1) $\dfrac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}} = \dfrac{6(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{5})} = \dfrac{6(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{11-5} = \boldsymbol{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$

(2)
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{10}+\sqrt{6})} \\ &= \frac{\sqrt{30}+\sqrt{6}}{5-1} - \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{10-6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}}{4}} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{6}} &= \frac{(1+\sqrt{5})-\sqrt{6}}{\{(1+\sqrt{5})+\sqrt{6}\}\{(1+\sqrt{5})-\sqrt{6}\}} = \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{6}}{(1+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5}-\sqrt{6})\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+5-\sqrt{30}}{10}} \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ 次の 2 重根号を簡単な形にせよ．

(1) $\sqrt{13+2\sqrt{42}}$ (2) $\sqrt{11-\sqrt{120}}$

解

(1) $\sqrt{13+2\sqrt{42}} = \sqrt{(7+6)+2\sqrt{7\times 6}} = \boldsymbol{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

(2) $\sqrt{11-\sqrt{120}} = \sqrt{11-2\sqrt{30}} = \sqrt{(6+5)-2\sqrt{6\times 5}} = \boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

$\boxed{9}$ $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (3) $x - \frac{1}{x}$

解

(1) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \dfrac{1}{x} = (\sqrt{7})^2 - 2 = \mathbf{5}$

【別解】 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$ の両辺を 2 乗すると，$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 7$

よって，$x^2 + \frac{1}{x^2} = \mathbf{5}$

(2)
$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) = (\sqrt{7})^3 - 3\cdot 1\cdot\sqrt{7} \\ &= 7\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = \boldsymbol{4\sqrt{7}} \end{aligned}$$

【別解】
$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{x^2 - x\cdot\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right\} \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right) \\ &= \sqrt{7}(5-1) = \boldsymbol{4\sqrt{7}} \end{aligned}$$

(3) $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = 5 - 2 = 3$

したがって，$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 3$

よって，$x - \frac{1}{x} = \boldsymbol{\pm\sqrt{3}}$

$\boxed{10}$ 不等式 $3x + a < 4x < 2x + 12$ を満たす整数 x がちょうど 2 個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

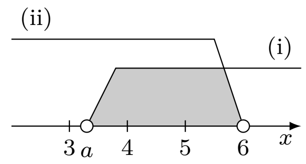
解

$3x + a < 4x$ を解くと，$-x < -a$ より，$x > a$ $\cdots$(i)

$4x < 2x + 12$ を解くと，$2x < 12$ より，$x < 6$ $\cdots$(ii)

(i)，(ii) より，不等式を満たす整数 x がちょうど 2 個となるのは右の図のような場合である．

よって，$\boldsymbol{3 \leqq a < 4}$



$\boxed{11}$ 連続する 3 つの整数の和が 71 以上になるもののうち，その和が最小となる 3 つの数を求めよ．

解

連続する 3 つの整数は，中央の数を x とおくと，$x-1$，x，$x+1$ と表すことができる．このとき，

$$\begin{aligned} (x-1) + x + (x+1) &\geqq 71 \\ 3x &\geqq 71 \\ x &\geqq \frac{71}{3} = 23.66\ldots \end{aligned}$$

したがって，連続する 3 つの整数の和が 71 以上になる最小の整数 x は 24 である．

よって，求める 3 つの数は，**23，24，25**

$\boxed{12}$ 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-4| = 3$ (2) $|x-2| \leqq 4$ (3) $|x-5| > 2$

解

(1) $|x-4| = 3$ より，$x - 4 = \pm 3$

よって，$\boldsymbol{x = 1,\ 7}$

(2) $|x-2| \leqq 4$ より，$-4 \leqq x - 2 \leqq 4$

よって，$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 6}$

(3) $|x-5| > 2$ より，$x - 5 < -2$，$2 < x - 5$

よって，$\boldsymbol{x < 3,\ 7 < x}$

$\boxed{13}$ 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-4| = 2x$ (2) $|x| + |x-4| < x + 2$

解

(1) (i) $x - 4 \geqq 0$，すなわち，$x \geqq 4$ のとき

$x - 4 = 2x$ より，$x = -4$

これは，$x \geqq 4$ を満たさない．

(ii) $x - 4 < 0$，すなわち，$x < 4$ のとき

$-(x-4) = 2x$ より，$x = \frac{4}{3}$

これは，$x < 4$ を満たす．

よって，(i)，(ii) より，$\boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$

(2) (i) $x \geqq 4$ のとき

$x + (x-4) < x + 2$ より，$x < 6$

したがって，$x \geqq 4$ より，$4 \leqq x < 6$

(ii) $0 \leqq x < 4$ のとき

$x - (x-4) < x + 2$ より，$x > 2$

したがって，$0 \leqq x < 4$ より，$2 < x < 4$

(iii) $x < 0$ のとき

$-x - (x-4) < x + 2$ より，$x > \frac{2}{3}$

これは，$x < 0$ を満たさないので，解なし

よって，(i)〜(iii) より，$\boldsymbol{2 < x < 6}$