

1 文中の空欄 **ア** ~ **カ** に当てはまる最も適切なものをそれぞれ答えよ。ただし, **ア**, **ウ**, **オ** は用語で, **イ**, **エ**, **カ** は数式・記号で答えよ。

要素を 1 つも含まない集合を **ア** といい, 記号 **イ** で表す。任意の集合  $A$  について, **イ** は  $A$  の部分集合である。  
 集合  $A, B$  について, 両方に属する要素全体の集合を  $A$  と  $B$  の **ウ** といい, 記号では **エ** と表す。  
 また, 少なくとも一方に属する要素全体の集合を  $A$  と  $B$  の **オ** といい, 記号では **カ** と表す。

解

**ア** … 空集合, **イ** …  $\emptyset$ , **ウ** … 共通部分, **エ** …  $A \cap B$   
**オ** … 和集合, **カ** …  $A \cup B$

2 100 から 200 までの整数のうち, 次のような数の個数を求めよ。

- (1) 5 でも 6 でも割り切れる数
- (2) 5 または 6 で割り切れる数
- (3) 5 で割り切れるが 6 で割り切れない数

解

100 以上 200 以下の整数全体の集合を  $U$  とし, そのうち, 5 で割り切れる数, 6 で割り切れる数全体の集合をそれぞれ  $A, B$  とする。

このとき,  $n(U) = 200 - 100 + 1 = 101$

$A = \{5 \cdot 20, 5 \cdot 21, \dots, 5 \cdot 40\}$ ,  $B = \{6 \cdot 17, 6 \cdot 18, \dots, 6 \cdot 33\}$  であるから,

$$n(A) = 40 - 20 + 1 = 21, \quad n(B) = 33 - 17 + 1 = 17$$

(1) 5 でも 6 でも割り切れる数, すなわち, 30 で割り切れる数全体の集合は  $A \cap B$  であるから,  $A \cap B = \{30 \cdot 4, 30 \cdot 5, \dots, 30 \cdot 6\}$

よって,  $n(A \cap B) = 6 - 4 + 1 = 3$  (個)

(2) 5 または 6 で割り切れる数全体の集合は  $A \cup B$  であるから,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 + 17 - 3 = 35 \text{ (個)}$$

(3) 5 で割り切れるが 6 で割り切れない数全体の集合は  $A \cap \overline{B}$  であるから,

$$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 21 - 3 = 18 \text{ (個)}$$

3 1 から 100 までの整数のうち, 2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の個数を求めよ。

解

1 から 100 までの整数の集合を全体集合  $U$  とし, 2 の倍数, 3 の倍数, 5 の倍数の集合をそれぞれ,  $A, B, C$  とすると,

$$A = \{2 \times 1, 2 \times 2, \dots, 2 \times 50\},$$

$$B = \{3 \times 1, 3 \times 2, \dots, 3 \times 33\},$$

$$C = \{5 \times 1, 5 \times 2, \dots, 5 \times 20\},$$

$$A \cap B = \{6 \times 1, 6 \times 2, \dots, 6 \times 16\},$$

$$B \cap C = \{15 \times 1, 15 \times 2, \dots, 15 \times 6\},$$

$$C \cap A = \{10 \times 1, 10 \times 2, \dots, 10 \times 10\},$$

$$A \cap B \cap C = \{30 \times 1, 30 \times 2, \dots, 30 \times 3\}$$

したがって,  $n(A) = 50$ ,  $n(B) = 33$ ,  $n(C) = 20$ , であり,

$$n(A \cap B) = 16, \quad n(B \cap C) = 6, \quad n(C \cap A) = 10, \quad n(A \cap B \cap C) = 3$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \\ &= 50 + 33 + 20 - 16 - 6 - 10 + 3 = 74 \end{aligned}$$

2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の集合は,  $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cup B \cup C}$

よって, 求める個数は,

$$n(\overline{A \cup B \cup C}) = n(U) - n(A \cup B \cup C) = 100 - 74 = 26 \text{ (個)}$$

4 180 の正の約数の個数とその総和を求めよ。

解

180 を素因数分解すると,  $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

したがって, 約数の個数は,

$$(2+1)(2+1)(1+1) = 18 \text{ (個)}$$

また, 約数の総和は,

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+5) = 7 \cdot 13 \cdot 6 = 546$$

5 硬貨の枚数が次のようなとき, 硬貨の一部または全部を使って, ちょうど支払える金額の種類は何通りあるか。

(1) 100 円硬貨が 2 枚, 50 円硬貨が 1 枚, 10 円硬貨が 2 枚

(2) 100 円硬貨が 4 枚, 50 円硬貨が 2 枚, 10 円硬貨が 3 枚

解

(1) 100 円硬貨 2 枚の使い方は, 0~2 枚の 3 通り

50 円硬貨 1 枚の使い方は, 0, 1 枚の 2 通り

10 円硬貨 2 枚の使い方は, 0~2 枚の 3 通り

したがって,  $3 \times 2 \times 3 = 18$  (通り)

よって, 求める総数は,  $18 - 1 = 17$  (通り)

(2) 50 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚は, 同じ金額 100 円を表すので, 100 円硬貨 4 枚を 50 円硬貨 8 枚と考えると, 50 円硬貨 10 枚と 10 円硬貨 3 枚で支払える金額を求める。

50 円硬貨 10 枚の使い方は, 0~10 枚の 11 通り

10 円硬貨 3 枚の使い方は, 0~3 枚の 4 通り

したがって,  $11 \times 4 = 44$  (通り)

よって, 求める総数は,  $44 - 1 = 43$  (通り)

6 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 個の数字の中から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る。このとき, 次のような数の個数を求めよ。

(1) すべての整数

(2) 奇数

(3) 3 の倍数

解

(1) 百の位の数字は 0 以外の数であるから, 5 通り

そのそれぞれについて, 十, 一の位に 0 を含めた残りの 5 個の数字から 2 個を選んで並べると, 3 桁の整数となる。

よって, 求める個数は,  $5 \times {}_5P_2 = 5 \times (5 \times 4) = 100$  (個)

(2) 3 桁の整数が奇数となるから, 一の位は 1, 3, 5 であり, 3 通り

そのそれぞれについて, 百の位は 0 以外で一の位の数字を除く 4 通りある。

十の位の数字の選び方は, 残りの 4 通りあるから,  $3 \times 4 \times 4 = 48$  (個)

(3) 3 の倍数となるのは, 各位の数の和が 3 の倍数のときである。

その 3 個の数の組は,

$$\{0, 1, 2\}, \quad \{0, 1, 5\}, \quad \{0, 2, 4\}, \quad \{0, 4, 5\},$$

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 3, 5\}, \quad \{2, 3, 4\}, \quad \{3, 4, 5\}$$

の 8 つの場合がある。

(i) 選んだ 3 個の数に 0 を含むとき

$\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 5\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 4, 5\}$  の 4 組があり, それぞれの組でできる 3 桁の整数は, 百の位は 0 ではないから,  $2 \times 2! = 4$  (個)

よって,  $4 \times 4 = 16$  (個)

(ii) 選んだ 3 個の数に 0 を含まないとき

$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}$  の 4 組があり, この 3 個の数でできる 3 桁の整数は,  $3! = 6$  (個)

よって,  $4 \times 6 = 24$  (個)

よって, (i), (ii) より, 求める個数は,  $16 + 24 = 40$  (個)

※ 裏面へ続く

7 男子 6 人, 女子 2 人の合計 8 人が 1 列に並ぶ. このとき, 次の条件を満たす並び方は何通りあるか.

- (1) 女子 2 人が隣り合う (2) 女子 2 人が隣り合わない

解

(1) 女子 2 人をひとまとまりにして 1 人として考え, 男子 6 人と合わせた 7 個の並び方は,  $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$  (通り)

そのそれぞれについて, 1 人として考えた女子 2 人の並び方は,  $2! = 2$  (通り) によって, 女子 2 人が隣り合う並び方は,  $5040 \times 2 = 10080$  (通り)

(2) 男子 6 人の並び方は,  $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$  (通り)

男子 6 人の間と両端の 7 箇所のうち, 2 箇所に女子 2 人が 1 人ずつ入れればよい.

したがって, 7 箇所から 2 箇所選んで並べる順列であるから,

$${}_7P_2 = 7 \cdot 6 = 42 \text{ (通り)}$$

よって, 女子 2 人が隣り合わない並び方は,  $720 \times 42 = 30240$  (通り)

8 A, B, C, D, E, F, G の文字が書かれた玉が 1 個ずつあるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) これらの玉を円形に並べる方法は何通りあるか.  
 (2) これらの 7 個の玉から 5 個の玉を取り出して円形に並べる方法は何通りあるか.  
 (3) F, G が隣り合うように円形に並べる方法は何通りあるか.  
 (4) これらの玉にひもを通し, 首飾りを作る方法は何通りあるか.

解

(1) 異なる 7 個の円順列であるから,  $(7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$  (通り)

(2) 異なる 7 個から 5 個選んだ円順列であるから,

$$\frac{{}_7P_5}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5} = 504 \text{ (通り)}$$

(3) F, G をまとめて 1 つの玉と考えると, 残りの 5 個と合わせた 6 個の円順列より,  $(6-1)! = 5!$  通り

そのそれぞれについて, F, G の並び方は,  $2!$  通り

よって,  $(6-1)! \times 2! = 5! \times 2 = 120 \times 2 = 240$  (通り)

(4) 7 個の円順列において,  $(7-1)!$  通りあるが, 首飾りは裏返すことができる. 裏返すと同じものが 2 つずつできるから,  $\frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$  (通り)

9 次の問いに答えよ.

- (1) 4 人でじゃんけんを 1 回するとき, 4 人のグー, チョキ, パーの手の出し方は何通りあるか.  
 (2) 集合  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  の部分集合は全部で何個あるか.

解

(1) 1 人の手の出し方は, グー, チョキ, パーの 3 通りずつある.

よって, 4 人の手の出し方は,  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$  (通り)

(2) 集合  $A$  の部分集合の個数は,  $A$  の 6 つの要素  $a, b, c, d, e, f$  のそれぞれが, 部分集合に属しているか否かの決め方の数だけある.

それぞれの要素について, 属しているか否かの 2 通りの決め方があるから, 集合  $A$  の部分集合の個数は,  $2^6 = 64$  (個)

10 立方体の各面を, 互いに異なる 6 色すべてを用いて互いに異なる色で塗り分ける方法は何通りあるか.

ただし, 立方体を回転させて面の色の配置が一致する場合は, 同じ塗り方と見なすものとする.

解

ある面を 1 色で塗り, その面を上面として固定する.

このとき, 下面には残りの 5 色のうちの 1 色を用いるため, 5 通りある.

そのそれぞれについて, 側面 4 面は異なる色を用いた円順列と考えられるから,

$$(4-1)! = 3! = 6 \text{ (通り)}$$

よって, 求める塗り分ける方法は,  $5 \times 6 = 30$  (通り)

11 男子 5 人, 女子 4 人の合計 9 人のグループから 5 人を選ぶとき, 次のような選び方は何通りあるか.

- (1) 5 人の選び方  
 (2) 5 人のうち, 特定の男子の 2 人  $a, b$  と女子の 1 人  $c$  を含む選び方  
 (3) 男子から 3 人, 女子から 2 人選ぶ選び方

解

(1) 9 人から 5 人を選ぶ組合せであるから, 求める選び方は,

$${}_9C_5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ (通り)}$$

(2) 5 人のうち, 男子の 2 人  $a, b$  と女子の 1 人  $c$  が選ばれているので, 残りの 6 人から 2 人を選べばよい.

よって, 求める選び方は,  ${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$  (通り)

(3) 男子 5 人から 3 人を選ぶ組合せは,  ${}_5C_3$  通り

女子 4 人から 2 人を選ぶ組合せは,  ${}_4C_2$  通り

よって, 求める選び方は,  ${}_5C_3 \times {}_4C_2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 60$  (通り)

12 次の問いに答えよ.

- (1)  $x, x, x, y, y, z, z$  の 7 文字を 1 列に並べる順列は何通りあるか.  
 (2) 青玉 5 個と緑玉 4 個の合計 9 個を 1 列に並べる順列は何通りあるか.

解

(1) 3 個の  $x$ , 2 個の  $y$ , 2 個の  $z$  を含む 7 個の順列であるから,

$$\frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ (通り)}$$

(2) 5 個の青玉と 4 個の緑玉を含む 9 個の順列であるから,

$$\frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ (通り)}$$

13  $a, b, c, d$  の 4 個の文字の中から, 重複を許して 6 個取り出す組合せは何通りあるか.

解

取り出す 6 個の文字を  $\bigcirc$  で表し, 4 種類の文字の区切りを 3 本の  $|$  で表すとする. 6 個の  $\bigcirc$  と 3 本の  $|$  を 1 列に並べて,

- 1 本目の  $|$  より左側にある  $\bigcirc$  はすべて  $a$ ,  
 1 本目と 2 本目の  $|$  の間にある  $\bigcirc$  はすべて  $b$ ,  
 2 本目と 3 本目の  $|$  の間にある  $\bigcirc$  はすべて  $c$ ,  
 3 本目の  $|$  より右側にある  $\bigcirc$  はすべて  $d$

を表すとする. このとき,  $a, b, c, d$  から重複を許して 6 個取り出す組合せは, 6 個の  $\bigcirc$  と 3 本の  $|$  を並べる順列に一致する.

よって, 求める組合せの総数は,  $\frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$  (通り)

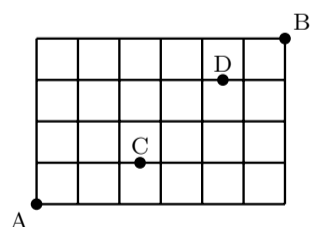
14

右の図のような格子状の道路がある. A 地点から

B 地点まで最短経路で行くとき, 次のような道順

は何通りあるか.

- (1) C 地点を通らない道順  
 (2) C 地点または D 地点を通る道順



解

(1) A 地点から B 地点へのすべての道順は,  $\frac{10!}{6!4!} = 210$  (通り)

C 地点を通る道順は,  $\frac{3!}{2!1!} \times \frac{6!}{3!3!} = 3 \times 20 = 60$  (通り)

よって, C 地点を通らない道順は,  $210 - 60 = 150$  (通り)

(2) (1) より, C 地点を通る道順は, 60 通り

D 地点を通る道順は,  $\frac{7!}{4!3!} \times \frac{2!}{1!1!} = 35 \times 2 = 70$  (通り)

また, C 地点と D 地点の両方を通る道順は,

$$\frac{3!}{2!1!} \times \frac{3!}{1!2!} \times \frac{2!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18 \text{ (通り)}$$

よって, C 地点または D 地点を通る道順は,

$$60 + 70 - 18 = 112 \text{ (通り)}$$