

## 数学I

## 単元テスト（集合と命題）

演習用問題（定期考査風教材）

OMI-UT-02-C

|       |                            |         |                                |
|-------|----------------------------|---------|--------------------------------|
| 教材名   | 数学I 単元テスト（One More）        | 内容      | 数学 I：集合と命題                     |
| 教材コード | OMI-UT-02-C                | 試験時間の目安 | 60 分（1 時間）                     |
| 出題内容  | One More の基本事項・例題の類題を中心に出题 | 想定レベル   | One More 内の ★～★★★★ を中心 / 標準レベル |

## 注意事項

- 単元テストは演習用教材です。学校・塾等の実際の定期考査とは、形式・配点・採点基準が一致しない場合があります。
- 単元テストは、解いた答案を Onemath の運営者が回収・採点する形式の教材ではありません。解き終えたら、模範解答等を参考に自己採点してみてください。
- 掲載している配点や評価の目安は、「筆者が採点するとしたらこのように評価する」という学習用の基準です。
- 途中式の記入が指定されている問題では、途中式も含めて答案を作成してください。
- 問題用紙・解答用紙の落丁・乱丁・誤植等に気付いた場合は、Onemath のお問い合わせフォームや X の DM などでご連絡いただくと助かります。

氏名

実施日

自己採点

One More 対応表

| 問題 | 小問      | 対応する One More        |
|----|---------|----------------------|
| 1  | —       | 基本事項 I2.1.2～I2.1.6   |
| 2  | —       | 例題 I2.1.2            |
| 3  | —       | 例題 I2.1.3            |
| 4  | —       | 例題 I2.1.5            |
| 5  | —       | 例題 I2.1.7, 例題 I2.1.8 |
| 6  | —       | 例題 I2.1.9            |
| 7  | (1)～(2) | 例題 I2.1.10           |
|    | (3)     | 例題 I2.1.11           |
|    | (4)     | 例題 I2.1.12           |
| 8  | —       | 例題 I2.1.14           |
| 9  | —       | 例題 I2.1.15           |

実施日：\_\_\_\_\_年 \_\_\_\_\_月 \_\_\_\_\_日 \_\_\_\_\_年 \_\_\_\_\_組 \_\_\_\_\_番 氏名\_\_\_\_\_

**1** 次の文章は命題について述べたものである．文章中の **ア** ～ **キ** に当てはまる適切な語句を答えよ．

命題が正しい場合，その命題は **ア** であるといい，正しくない場合は **イ** であるという．  
命題「 $p \implies q$ 」において， $p$  は満たすが  $q$  を満たさないような例を **ウ** という．  
命題「 $p \implies q$ 」が真の場合， $p$  は  $q$  であるための **エ** であり， $q$  は  $p$  であるための **オ** である．  
命題「 $p \implies q$ 」に対して，命題「 $\bar{q} \implies \bar{p}$ 」をもとの命題の **カ** という．  
命題とその **カ** は真偽が一致する．  
ある命題に対して，その結論が成り立たないと仮定し，矛盾が導かれることを示すことにより， もとの命題が成り立つことを証明する方法を **キ** という．

**2**  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  を全体集合とする． $U$  の部分集合  $A, B$  を

$$A = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}, \quad B = \{1, 5, 6, 9, 12\}$$

とするととき，次の集合を求めよ．

- (1)  $A \cap B$                       (2)  $\bar{A} \cap B$                       (3)  $\overline{A \cap B}$   
(4)  $\bar{A} \cup \bar{B}$                       (5)  $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$

**3** 実数全体を全体集合とし，その2つの部分集合を

$$A = \{x \mid x + 2 > 0\}, \quad B = \{x \mid |x - 1| \leq 3\}$$

とするととき，次の集合を求めよ．

- (1)  $A \cap B$                       (2)  $A \cup \bar{B}$                       (3)  $\overline{A \cup B}$

**4**  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$  を全体集合とする． $U$  の部分集合  $A, B, C$  を

$$A = \{n \mid n \text{ は18 の正の約数}\}, \quad B = \{n \mid n \text{ は奇数}\}, \\ C = \{n \mid n \text{ は12 の正の約数}\}$$

とするととき，次の集合を求めよ．

- (1)  $A \cap B \cap C$                       (2)  $(A \cup B) \cap C$   
(3)  $(A \cap C) \cup (B \cap C)$                       (4)  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

5 次の命題の真偽を述べよ。また、偽のときは具体的な反例を挙げよ。ただし、 $x, y$  は実数とする。

- (1)  $x - y = 0$  ならば、 $x = y = 0$
- (2)  $x^2 + y^2 = 0$  ならば、 $x = y = 0$
- (3)  $xy$  が有理数ならば、 $x, y$  はともに有理数である。
- (4)  $\triangle ABC$  が二等辺三角形ならば、 $\angle A = \angle C$

6 次の  に最も適するものを、(i)～(iv) から選べ。ただし、 $x, y$  は実数とする。

- (1)  $x = 3$  は、 $x^2 < 20$  であるための .
- (2)  $x + y > 12$  は、 $x > 6$  かつ  $y > 6$  であるための .

- (i) 必要条件であるが十分条件ではない
- (ii) 十分条件であるが必要条件ではない
- (iii) 必要十分条件である
- (iv) 必要条件でも十分条件でもない

7 次の問いに答えよ。ただし、 $x$  は実数とする。

- (1) 条件  $0 \leq x < 5$  の否定を述べよ。
- (2) 条件「 $x = 0$  または  $x = 2$ 」の否定を述べよ。
- (3) 命題「ある整数  $k$  について、 $k^2 = 3k$ 」の否定を述べよ。また、もとの命題とその否定の真偽を答えよ。
- (4) 命題「 $x = -3$  ならば、 $x^2 = 9$ 」の対偶を述べよ。また、その真偽を答えよ。

8 次の命題を証明せよ。ただし、 $a, b, c$  は整数とする。

$a^2 + b^2 + c^2$  が偶数ならば、 $a, b, c$  のうち少なくとも1つは偶数である。

9 次の問いに答えよ。

- (1)  $\sqrt{3}$  は無理数であることを証明せよ。
- (2)  $\sqrt{3}$  は無理数であることを用いて、 $\sqrt{3} - 1$  が無理数であることを証明せよ。

1 次の文章は命題について述べたものである．文章中の ア ～ キ に当てはまる適切な語句を答えよ．

命題が正しい場合、その命題は ア であるといい、正しくない場合は イ であるという．  
命題「 $p \implies q$ 」において、 $p$  は満たすが  $q$  を満たさないような例を ウ という．  
命題「 $p \implies q$ 」が真の場合、 $p$  は  $q$  であるための エ であり、 $q$  は  $p$  であるための オ である．  
命題「 $p \implies q$ 」に対して、命題「 $\bar{q} \implies \bar{p}$ 」をもとの命題の カ という．  
命題とその カ は真偽が一致する．  
ある命題に対して、その結論が成り立たないと仮定し、矛盾が導かれることを示すことにより、もとの命題が成り立つことを証明する方法を キ という．

解  
ア … 真, イ … 偽, ウ … 反例, エ … 十分条件  
オ … 必要条件, カ … 対偶, キ … 背理法

2  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  を全体集合とする． $U$  の部分集合  $A, B$  を

$A = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}, \quad B = \{1, 5, 6, 9, 12\}$

とするとき、次の集合を求めよ．

- (1)  $A \cap B$
- (2)  $\bar{A} \cap B$
- (3)  $\overline{A \cap B}$
- (4)  $\bar{A} \cup \bar{B}$
- (5)  $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$

解  
与えられた条件をもとに、 $U, A, B$  をベン図で表すと、下の図のようになる．

(1)  $A \cap B$  は、 $A$  と  $B$  の共通部分であるから、

$A \cap B = \{5, 9\}$

(2)  $\bar{A} \cap B$  は  $B$  の要素のうち、 $A \cap B$  の要素ではないものであるから、

$\bar{A} \cap B = \{1, 6, 12\}$

(3)  $\overline{A \cap B}$  は、 $A \cap B$  の補集合である．  
よって、(1) より、

$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

(4)  $\bar{A} \cup \bar{B}$  は、 $\bar{A}$  と  $\bar{B}$  の和集合である．

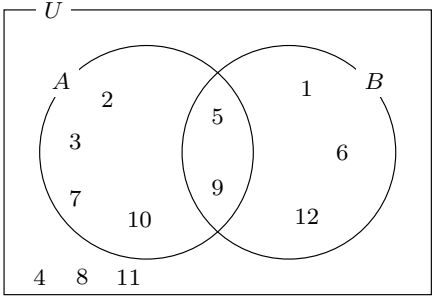
$\bar{A} = \{1, 4, 6, 8, 11, 12\}, \bar{B} = \{2, 3, 4, 7, 8, 10, 11\}$  より、

$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

(5) ド・モルガンの法則より、 $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$  となり、 $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$  は、 $A$  と  $B$  の共通部分である．

よって、(1) より、

$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B = \{5, 9\}$



3 実数全体を全体集合とし、その2つの部分集合を

$A = \{x \mid x + 2 > 0\}, \quad B = \{x \mid |x - 1| \leq 3\}$

とするとき、次の集合を求めよ．

- (1)  $A \cap B$
- (2)  $A \cup \bar{B}$
- (3)  $\overline{A \cup B}$

解

$x + 2 > 0$  より、 $x > -2$

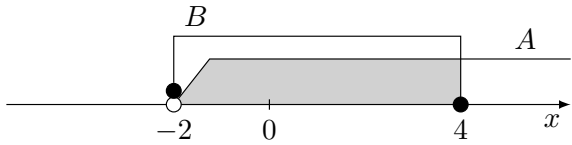
よって、 $A = \{x \mid x > -2\}$

$|x - 1| \leq 3$  より、 $-3 \leq x - 1 \leq 3$

すなわち、 $-2 \leq x \leq 4$

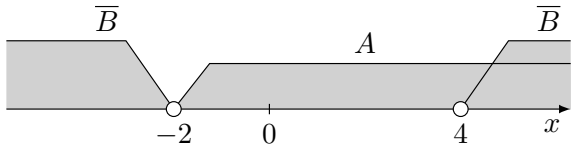
よって、 $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$

(1) 下の数直線より、 $A \cap B = \{x \mid -2 < x \leq 4\}$



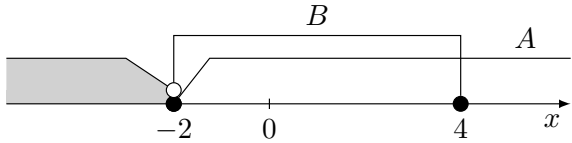
(2)  $\bar{B} = \{x \mid x < -2, 4 < x\}$  であるから、下の数直線より、

$A \cup \bar{B} = \{x \mid x \neq -2\}$



(3) 下の数直線より、 $A \cup B = \{x \mid -2 \leq x\}$  であるから、

$\overline{A \cup B} = \{x \mid x < -2\}$



4  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$  を全体集合とする． $U$  の部分集合  $A, B, C$  を

$A = \{n \mid n \text{ は } 18 \text{ の正の約数}\}, \quad B = \{n \mid n \text{ は奇数}\},$   
 $C = \{n \mid n \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$

とするとき、次の集合を求めよ．

- (1)  $A \cap B \cap C$
- (2)  $(A \cup B) \cap C$
- (3)  $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
- (4)  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

解

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\},$   
 $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

であり、与えられた条件をもとに、 $U, A, B, C$  をベン図で表すと、下の図のようになる．

(1)  $A \cap B \cap C$  は、 $A, B, C$  の共通部分であるから、 $A \cap B \cap C = \{1, 3\}$

(2)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18\}$  より、

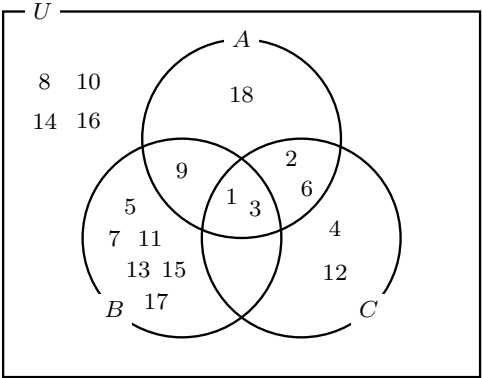
$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 6\}$

(3)  $A \cap C = \{1, 2, 3, 6\}, B \cap C = \{1, 3\}$  より、

$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 6\}$

(4) ド・モルガンの法則より、

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$   
 $= \{8, 10, 14, 16\}$



- 【5】 次の命題の真偽を述べよ。また、偽のときは具体的な反例を挙げよ。ただし、 $x, y$  は実数とする。
- (1)  $x - y = 0$  ならば、 $x = y = 0$
- (2)  $x^2 + y^2 = 0$  ならば、 $x = y = 0$
- (3)  $xy$  が有理数ならば、 $x, y$  はともに有理数である。
- (4)  $\triangle ABC$  が二等辺三角形ならば、 $\angle A = \angle C$

解

- (1)  $x = 1, y = 1$  のとき、 $x - y = 0$  であるが、 $x = y = 0$  ではない。  
よって、命題は偽である。反例は、 $x = 1, y = 1$
- (2)  $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$  であるから、 $x^2 + y^2 = 0$  ならば  $x^2 = 0, y^2 = 0$  である。  
よって、命題は真である。
- (3)  $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$  のとき、 $xy = 2$  は有理数であるが、 $x, y$  はともに有理数ではない。  
よって、命題は偽である。反例は、 $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$
- (4)  $\angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ$  のとき、 $\triangle ABC$  は二等辺三角形であるが、 $\angle A = \angle C$  ではない。  
よって、命題は偽である。  
反例は、 $\angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ$

【6】 次の  に最も適するものを、(i)～(iv) から選べ。ただし、 $x, y$  は実数とする。

- (1)  $x = 3$  は、 $x^2 < 20$  であるための .
- (2)  $x + y > 12$  は、 $x > 6$  かつ  $y > 6$  であるための .

- (i) 必要条件であるが十分条件ではない
- (ii) 十分条件であるが必要条件ではない
- (iii) 必要十分条件である
- (iv) 必要条件でも十分条件でもない

解

- (1) 「 $x = 3 \implies x^2 < 20$ 」は、真である。  
「 $x^2 < 20 \implies x = 3$ 」は、偽である。反例は、 $x = 4$   
よって、(ii) 十分条件であるが必要条件ではない
- (2) 「 $x + y > 12 \implies x > 6$  かつ  $y > 6$ 」は、偽である。反例は、 $x = 12, y = 1$   
「 $x > 6$  かつ  $y > 6 \implies x + y > 12$ 」は、真である。  
よって、(i) 必要条件であるが十分条件ではない

【7】 次の問いに答えよ。ただし、 $x$  は実数とする。

- (1) 条件  $0 \leq x < 5$  の否定を述べよ。
- (2) 条件「 $x = 0$  または  $x = 2$ 」の否定を述べよ。
- (3) 命題「ある整数  $k$  について、 $k^2 = 3k$ 」の否定を述べよ。また、もとの命題とその否定の真偽を答えよ。
- (4) 命題「 $x = -3$  ならば、 $x^2 = 9$ 」の対偶を述べよ。また、その真偽を答えよ。

解

- (1) 「 $0 \leq x < 5$ 」は、「 $x \geq 0$  かつ  $x < 5$ 」のことである。  
よって、否定は、「 $x < 0$  または  $x \geq 5$ 」
- (2) 否定は、「 $x \neq 0$  かつ  $x \neq 2$ 」
- (3) 否定は、「すべての整数  $k$  について、 $k^2 \neq 3k$ 」  
 $k = 3$  のとき、 $k^2 = 3k$  であるから、 $k^2 \neq 3k$  は成り立たない。  
よって、否定は偽である。  
また、もとの命題は  $k = 3$  のとき、 $k^2 = 3k$  であるから、真である。
- (4) 対偶は、「 $x^2 \neq 9$  ならば、 $x \neq -3$ 」  
これは、もとの命題が真 ( $x = -3$  ならば、 $x^2 = 9$ ) であるから、真である。

【8】 次の命題を証明せよ。ただし、 $a, b, c$  は整数とする。

$a^2 + b^2 + c^2$  が偶数ならば、 $a, b, c$  のうち少なくとも 1 つは偶数である。

解

もとの命題の対偶「 $a, b, c$  がすべて奇数ならば、 $a^2 + b^2 + c^2$  は奇数である」を証明する。

$a, b, c$  がすべて奇数であるとき、整数  $l, m, n$  を用いて

$$a = 2l + 1, \quad b = 2m + 1, \quad c = 2n + 1$$

と表せるから、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (2l + 1)^2 + (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 \\ &= 2(2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2l + 2m + 2n + 1) + 1 \end{aligned}$$

$2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2l + 2m + 2n + 1$  は整数であるから、 $a^2 + b^2 + c^2$  は奇数である。

よって、対偶が証明されたから、もとの命題も成り立つ。 ■

【9】 次の問いに答えよ。

- (1)  $\sqrt{3}$  は無理数であることを証明せよ。
- (2)  $\sqrt{3}$  は無理数であることを用いて、 $\sqrt{3} - 1$  が無理数であることを証明せよ。

解

- (1)  $\sqrt{3}$  が有理数であると仮定すると、

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数})$$

と表される。

このとき、 $\sqrt{3}n = m$

両辺を 2 乗すると、 $3n^2 = m^2 \cdots$  (i)

$3n^2$  は 3 の倍数であるから、 $m^2$  も 3 の倍数である。

したがって、 $m$  は 3 の倍数となる。

$m = 3k$  ( $k$  は整数) とおくと、(i) より

$$3n^2 = (3k)^2$$

すなわち、 $n^2 = 3k^2$

$3k^2$  は 3 の倍数であるから、 $n^2$  は 3 の倍数である。

したがって、 $n$  は 3 の倍数となる。

ゆえに、 $m, n$  はともに 3 の倍数となり、互いに素であることに矛盾する。

よって、 $\sqrt{3}$  は無理数である。 ■

- (2)  $\sqrt{3} - 1$  が有理数であると仮定すると、

$$\sqrt{3} - 1 = r \quad (r \text{ は有理数})$$

と表される。

整理すると、 $\sqrt{3} = r + 1$

$r + 1$  は有理数であるから、 $\sqrt{3}$  も有理数となる。

これは、 $\sqrt{3}$  が無理数であることに矛盾する。

よって、 $\sqrt{3} - 1$  は無理数である。 ■

1

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| (ア) | (イ) | (ウ) |
| (エ) | (オ) | (カ) |
| (キ) |     |     |

2

|     |
|-----|
| (1) |
| (2) |
| (3) |
| (4) |
| (5) |

3

|     |
|-----|
| (1) |
| (2) |
| (3) |

4

|     |     |
|-----|-----|
| (1) | (2) |
| (3) | (4) |

5

|         |     |
|---------|-----|
| (1) 真偽： | 反例： |
| (2) 真偽： | 反例： |
| (3) 真偽： | 反例： |
| (4) 真偽： | 反例： |

6

|     |
|-----|
| (1) |
| (2) |

7

|           |        |
|-----------|--------|
| (1) 否定：   |        |
| (2) 否定：   |        |
| (3) 否定：   |        |
| もとの命題の真偽： | 否定の真偽： |
| (4) 対偶：   |        |
| もとの命題の真偽： | 対偶の真偽： |

8

※ 途中の計算や考え方を示せ.

9

(1) ※ 途中の計算や考え方を示せ.

(2) ※ 途中の計算や考え方を示せ.

10

1

知 計 10 点

|               |               |             |
|---------------|---------------|-------------|
| ①<br>(ア) 真    | ①<br>(イ) 偽    | ②<br>(ウ) 反例 |
| 知             | 知             | 知           |
| ②<br>(エ) 十分条件 | ②<br>(オ) 必要条件 | ①<br>(カ) 対偶 |
| 知             | 知             | 知           |
| ①<br>(キ) 背理法  |               |             |
| 知             |               |             |

12

2

知 計 12 点

|                                            |
|--------------------------------------------|
| ②<br>(1) {5, 9}                            |
| 知                                          |
| ②<br>(2) {1, 6, 12}                        |
| 知                                          |
| ③<br>(3) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12} |
| 知                                          |
| ③<br>(4) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12} |
| 知                                          |
| ②<br>(5) {5, 9}                            |
| 知                                          |

10

3

思 計 10 点

|                                     |
|-------------------------------------|
| ③<br>(1) $\{x \mid -2 < x \leq 4\}$ |
| 思                                   |
| ④<br>(2) $\{x \mid x \neq -2\}$     |
| 思                                   |
| ③<br>(3) $\{x \mid x < -2\}$        |
| 思                                   |

12

4

知 計 6 点

思 計 6 点

|                       |                          |
|-----------------------|--------------------------|
| ③<br>(1) {1, 3}       | ③<br>(2) {1, 2, 3, 6}    |
| 知                     | 知                        |
| ③<br>(3) {1, 2, 3, 6} | ③<br>(4) {8, 10, 14, 16} |
| 思                     | 思                        |

15

5

知 計 15 点

|               |                                                                |
|---------------|----------------------------------------------------------------|
| ②<br>(1) 真偽：偽 | ②<br>反例： $x = 1, y = 1$                                        |
| 知             | 知                                                              |
| ③<br>(2) 真偽：真 | 反例：不要                                                          |
| 知             |                                                                |
| ②<br>(3) 真偽：偽 | ②<br>反例： $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$                          |
| 知             | 知                                                              |
| ②<br>(4) 真偽：偽 | ②<br>反例： $\angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ$ |
| 知             | 知                                                              |

8

6

知 計 4 点

思 計 4 点

|                                |
|--------------------------------|
| ④<br>(1) (ii) 十分条件であるが必要条件ではない |
| 知                              |
| ④<br>(2) (i) 必要条件であるが十分条件ではない  |
| 思                              |

7

7

知 計 3 点

思 計 4 点

|                                            |         |
|--------------------------------------------|---------|
| ②<br>(1) 否定： $x < 0$ または $x \geq 5$        |         |
| 知                                          |         |
| ①<br>(2) 否定： $x \neq 0$ かつ $x \neq 2$      |         |
| 知                                          |         |
| ①<br>(3) 否定：すべての整数 $k$ について、 $k^2 \neq 3k$ |         |
| 思                                          |         |
| ①<br>もとの命題の真偽：真                            | 否定の真偽：偽 |
| 思                                          |         |
| ①<br>(4) 対偶： $x^2 \neq 9$ ならば、 $x \neq -3$ |         |
| 思                                          |         |
| ①<br>もとの命題の真偽：真                            | 対偶の真偽：真 |
| 思                                          |         |

10

8

思 計 10 点

10

※ 途中の計算や考え方を示せ.

もとの命題の対偶「 $a, b, c$  がすべて奇数ならば,  $a^2 + b^2 + c^2$  は奇数である」を証明する.

$a, b, c$  がすべて奇数であるとき, 整数  $l, m, n$  を用いて

$$a = 2l + 1, \quad b = 2m + 1, \quad c = 2n + 1$$

と表せるから,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2l + 1)^2 + (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2$$

$$= 2(2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2l + 2m + 2n + 1) + 1$$

$2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2l + 2m + 2n + 1$  は整数であるから,  $a^2 + b^2 + c^2$  は奇数である.

よって, 対偶が証明されたから, もとの命題も成り立つ.

思

16

9

思 計 16 点

10

(1) ※ 途中の計算や考え方を示せ.

$\sqrt{3}$  が有理数であると仮定すると,

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数})$$

と表される.

このとき,  $\sqrt{3}n = m$

両辺を 2 乗すると,  $3n^2 = m^2 \cdots (i)$

$3n^2$  は 3 の倍数であるから,  $m^2$  も 3 の倍数である.

したがって,  $m$  は 3 の倍数となる.

$m = 3k$  ( $k$  は整数) とおくと, (i) より

$$3n^2 = (3k)^2$$

すなわち,  $n^2 = 3k^2$

$3k^2$  は 3 の倍数であるから,  $n^2$  は 3 の倍数である.

したがって,  $n$  は 3 の倍数となる.

ゆえに,  $m, n$  はともに 3 の倍数となり, 互いに素であることに矛盾する.

よって,  $\sqrt{3}$  は無理数である.

思

6

(2) ※ 途中の計算や考え方を示せ.

$\sqrt{3} - 1$  が有理数であると仮定すると,

$$\sqrt{3} - 1 = r \quad (r \text{ は有理数})$$

と表される.

整理すると,  $\sqrt{3} = r + 1$

$r + 1$  は有理数であるから,  $\sqrt{3}$  も有理数となる.

これは,  $\sqrt{3}$  が無理数であることに矛盾する.

よって,  $\sqrt{3} - 1$  は無理数である.

思

採点基準

共通

表し方が異なっても、同じ集合や範囲を表している

正答扱い

集合の要素の順序などが異なっても、内容が同じならよい。

大問 5・7 で真偽を同じ意味の語で答えている

正答扱い

「真・偽」のほか、「正・誤」、「正しい・誤り」、true・false など、対応が一意なら可。

証明で文字や式の置き方が模範解答と異なる

正答扱い

論理が正しければ、別の文字や式を用いた証明も正答とする。

集合を表す括弧や区切りがなく、集合として読み取りにくい

-1点

要素が明確に列挙されている場合に限る。丸括弧を用いた答案は正答とする。

1

標準用語またはその直接対応語で答えている

正答扱い

(ア)、(イ) の真命題・偽命題，true・false，および帰謬法などは可。

(ア)，(イ) で「正・誤」「正しい・誤り」などと答えている

各 0 点

文章中の標準用語「真・偽」を答える穴埋めなので，真偽の判定だけを表す言い換えは不可とする。

(エ)，(オ) で「十分」「必要」のみを書いている

各 1 点

「条件」がなくても向きは読み取れるが，用語として不完全である。

(エ) と (オ) を逆にしている，または (カ) で逆・裏と答えている

各 0 点

(キ) で「対偶証明法」と答えている

0 点

結論の否定を仮定して矛盾を導く方法は背理法である。

2

要素が 1 つでも不足している，または余分な要素がある

0 点

各小問の数学的内容は All or nothing とする。

要素の順序が異なる，または同じ要素を重ねて書いている

正答扱い

表す集合が同じならよい。

3

正答と同じ範囲を不等式で表している

正答扱い

例：(2) は  $x \neq -2$  のほか， $x < -2$  または  $x > -2$  でもよい。

範囲の両側がそろい，境界を含むか否かだけに誤りがある

-1 点

等号の誤りが 2 か所あっても，各小問で一律 -1 点とする。

片側の範囲がない，または求める領域・演算が異なる

0 点

例：(2) を  $x > -2$  のみ，(3) を  $x < -2$  または  $x > 4$  とする答案。

4

要素が 1 つでも不足している，または余分な要素がある

0 点

各小問の数学的内容は All or nothing とする。

要素の順序・重複，または同値な集合の表し方

正答扱い

ただし，問題の式を計算せずそのまま写しただけの答案は 0 点とする。

5

(1)，(3)，(4) の真偽と反例

各 2 点

真偽と反例は別々に採点する。「偽」だけ，または有効な反例だけでも 2 点を与える。

反例が仮定を満たし，結論を成り立たせない

正答扱い

模範解答と異なる数値・角でもよい。どちらかを満たさない例は反例 0 点とする。

(2) で命題を真としている

3 点

真の命題なので反例は不要であり，「なし」「不要」または空欄のいずれでも減点しない。

6

正しい選択肢の番号または文言を書いている

各 4 点

各小問 All or nothing とする。

必要・十分の一方だけを答えている

0 点

4 つの選択肢から分類する問題なので，両方向を確定できない答案は不十分とする。

7

(1) で境界の値を含むか否かに誤りがある

-1 点

例： $x < 0$  または  $x > 5$  など。否定の方針が読み取れる場合に限る。

(2) で「かつ」を「または」としている

0 点

否定の論理が異なるため。

(3) で「ある」を残したまま結論だけを否定している

0 点

「ある」の否定は「すべて」で表す必要があるため。

(3)，(4) で真偽だけが不足している

-1 点

否定または対偶の記述が正しい場合に限る。

(4) で逆または裏を書いている

0 点

対偶を問う問題であるため。

8

証明の各段階

配点に従う

対偶の設定と  $a$ ， $b$ ， $c$  を奇数として表すまでに 4 点，平方和を奇数の形に変形するまでに 3 点，対偶を証明してもとの命題へ戻るまでに 3 点を与える。

合同式を用いるなど，論理が正しい別の証明も正答とする。

9

(1) の証明の各段階

計 10 点

有理数と仮定して互いに素な自然数の比で表すまでに 2 点， $3n^2 = m^2$  から  $m$ ， $n$  がともに 3 の倍数となることを示すまでに 6 点，矛盾を示して無理数と結論するまでに 2 点を与える。

(2) の証明の各段階

計 6 点

$\sqrt{3} - 1$  を有理数と仮定するまでに 1 点， $\sqrt{3}$  も有理数となることを示すまでに 2 点，(1) との矛盾を示して無理数と結論するまでに 3 点を与える。

⑨1

知9/10

|           |                    |          |          |        |          |
|-----------|--------------------|----------|----------|--------|----------|
| (ア) 真     | ○<br>1/1           | (イ) 偽    | ○<br>1/1 | (ウ) 反例 | ○<br>2/2 |
| (エ) 十分条件  | ○<br>2/2           | (オ) 必要条件 | ○<br>2/2 | (カ) 対偶 | ○<br>1/1 |
| (キ) 対偶証明法 | ✖<br>0/1<br>方法名が違う |          |          |        |          |

⑧2

知8/12

|                                     |                       |
|-------------------------------------|-----------------------|
| (1) {5, 9}                          | ○<br>2/2              |
| (2) {1, 6, 12}                      | ○<br>2/2              |
| (3) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12 | △<br>2/3<br>波括弧なし     |
| (4) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12}   | ✖<br>0/3<br>要素 11 の不足 |
| (5) {5, 9}                          | ○<br>2/2              |

⑥3

思6/10

|                                |                   |
|--------------------------------|-------------------|
| (1) $\{x \mid -2 < x \leq 4\}$ | ○<br>3/3          |
| (2) $\{x \mid x > -2\}$        | ✖<br>0/4<br>補集合違い |
| (3) $\{x \mid x < -2\}$        | ○<br>3/3          |

⑨4

知6/6  
思3/6

|                  |          |                  |                       |
|------------------|----------|------------------|-----------------------|
| (1) {1, 3}       | ○<br>3/3 | (2) {1, 2, 3, 6} | ○<br>3/3              |
| (3) {1, 2, 3, 6} | ○<br>3/3 | (4) {8, 10, 14}  | ✖<br>0/3<br>要素 16 の不足 |

⑪5

知11/15

|          |          |                                  |                  |
|----------|----------|----------------------------------|------------------|
| (1) 真偽：偽 | ○<br>2/2 | 反例：                              | ✖<br>0/2<br>反例なし |
| (2) 真偽：真 | ○<br>3/3 | 反例：なし                            |                  |
| (3) 真偽：偽 | ○<br>2/2 | 反例： $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ | ○<br>2/2         |
| (4) 真偽：偽 | ○<br>2/2 | 反例：                              | ✖<br>0/2<br>反例なし |

④6

知4/4  
思0/4

|                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| (1) (ii) 十分条件であるが必要条件ではない | ○<br>4/4             |
| (2) (iii) 必要十分条件である       | ✖<br>0/4<br>必要十分ではない |

⑤7

知3/3  
思2/4

|                                       |                     |         |  |
|---------------------------------------|---------------------|---------|--|
| (1) 否定： $x < 0$ または $x \geq 5$        | ○<br>2/2            |         |  |
| (2) 否定： $x \neq 0$ かつ $x \neq 2$      | ○<br>1/1            |         |  |
| (3) 否定：ある整数 $k$ について、 $k^2 \neq 3k$   | ✖<br>0/1<br>否定の形が誤り |         |  |
| もとの命題の真偽：偽                            | ✖<br>0/1            | 否定の真偽：真 |  |
| 真偽が誤り                                 |                     |         |  |
| (4) 対偶： $x^2 \neq 9$ ならば、 $x \neq -3$ | ○<br>1/1            |         |  |
| もとの命題の真偽：真                            | ○<br>1/1            | 対偶の真偽：真 |  |

⑥

8

思 6/10

※ 途中の計算や考え方を示せ.

対偶「 $a, b, c$  がすべて奇数ならば,  $a^2 + b^2 + c^2$  は奇数」を証明する. 」②

$a = 2k + 1, b = 2l + 1, c = 2m + 1$  」① とおくと,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 2m^2 + 2m + 1) + 1$$
」②

となるので,  $a^2 + b^2 + c^2$  は奇数である. 」①

△

6/10

⑪

9

思 11/16

(1) ※ 途中の計算や考え方を示せ.

$\sqrt{3}$  が有理数であると仮定すると,  $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$  ( $m$  と  $n$  は互いに素な自然数) と表される. 」②

両辺を 2 乗して,  $3n^2 = m^2$ . 」②  $m = 3k$  とおく. 」②

$n^2 = 3k^2$  となるので,  $n$  も 3 の倍数である. 」②

△

8/10

(2) ※ 途中の計算や考え方を示せ.

$\sqrt{3} - 1$  が有理数であると仮定すると,  $\sqrt{3} - 1 = r$  ( $r$  は有理数) と表される. 」①

整理すると,  $\sqrt{3} = r + 1$  である.  $r + 1$  は有理数であるから,  $\sqrt{3}$  も有理数となる. 」②

△

3/6

思

整数条件・整数である理由・もとの命題への結論不足

思

互いに素との矛盾・結論不足

思

矛盾・結論不足