

1 次の文章は命題について述べたものである．文章中の **ア** ～ **キ** に当てはまる適切な語句を答えよ．

命題が正しい場合、その命題は **ア** であるといい、正しくない場合は **イ** であるという．
命題「 $p \implies q$ 」において、 p は満たすが q を満たさないような例を **ウ** という．
命題「 $p \implies q$ 」が真の場合、 p は q であるための **エ** であり、 q は p であるための **オ** である．
命題「 $p \implies q$ 」に対して、命題「 $\bar{q} \implies \bar{p}$ 」をもとの命題の **カ** という．命題とその **カ** は真偽が一致する．
ある命題に対して、その結論が成り立たないと仮定し、矛盾が導かれることを示すことにより、もとの命題が成り立つことを証明する方法を **キ** という．

解

- ア** … 真, **イ** … 偽, **ウ** … 反例, **エ** … 十分条件
- オ** … 必要条件, **カ** … 対偶, **キ** … 背理法

2 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ を全体集合とする． U の部分集合 A, B を

$A = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}, \quad B = \{1, 5, 6, 9, 12\}$

とするとき、次の集合を求めよ．

- (1) $A \cap B$ (2) $\bar{A} \cap B$ (3) $\overline{A \cap B}$
- (4) $\bar{A} \cup \bar{B}$ (5) $\overline{A \cup B}$

解

与えられた条件をもとに、 U, A, B をベン図で表すと、下の図のようになる．

(1) $A \cap B$ は、 A と B の共通部分であるから、

$A \cap B = \{5, 9\}$

(2) $\bar{A} \cap B$ は B の要素のうち、 $A \cap B$ の要素ではないものであるから、

$\bar{A} \cap B = \{1, 6, 12\}$

(3) $\overline{A \cap B}$ は、 $A \cap B$ の補集合である．
よって、(1) より、

$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

(4) $\bar{A} \cup \bar{B}$ は、 $\bar{A}$ と $\bar{B}$ の和集合である．

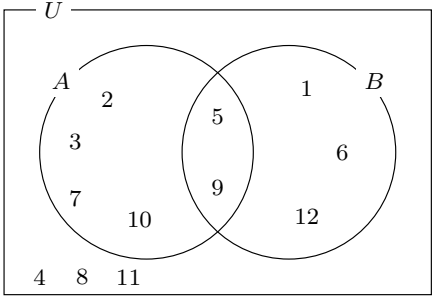
$\bar{A} = \{1, 4, 6, 8, 11, 12\}$, $\bar{B} = \{2, 3, 4, 7, 8, 10, 11\}$ より、

$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

(5) ド・モルガンの法則より、 $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$ となり、 $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ は、 A と B の共通部分である．

よって、(1) より、

$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B = \{5, 9\}$



3 実数全体を全体集合とし、その2つの部分集合を

$A = \{x \mid x + 2 > 0\}, \quad B = \{x \mid |x - 1| \leq 3\}$

とするとき、次の集合を求めよ．

- (1) $A \cap B$ (2) $A \cup \bar{B}$ (3) $\overline{A \cup B}$

解

$x + 2 > 0$ より、 $x > -2$

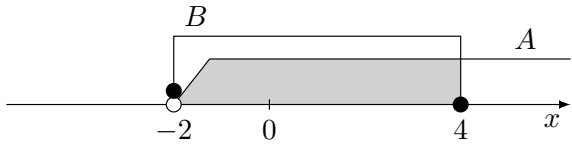
よって、 $A = \{x \mid x > -2\}$

$|x - 1| \leq 3$ より、 $-3 \leq x - 1 \leq 3$

すなわち、 $-2 \leq x \leq 4$

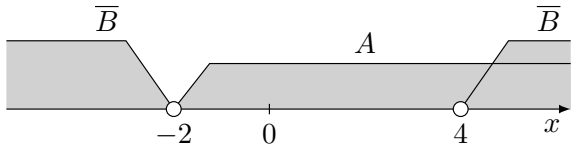
よって、 $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$

(1) 下の数直線より、 $A \cap B = \{x \mid -2 < x \leq 4\}$



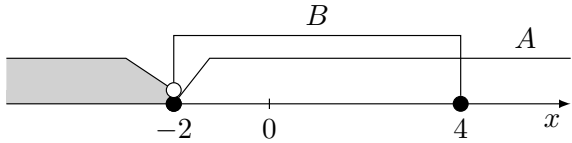
(2) $\bar{B} = \{x \mid x < -2, 4 < x\}$ であるから、下の数直線より、

$A \cup \bar{B} = \{x \mid x \neq -2\}$



(3) 下の数直線より、 $A \cup B = \{x \mid -2 \leq x\}$ であるから、

$\overline{A \cup B} = \{x \mid x < -2\}$



4 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ を全体集合とする． U の部分集合 A, B, C を

$A = \{n \mid n \text{ は } 18 \text{ の正の約数}\}, \quad B = \{n \mid n \text{ は奇数}\},$
 $C = \{n \mid n \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$

とするとき、次の集合を求めよ．

- (1) $A \cap B \cap C$ (2) $(A \cup B) \cap C$
- (3) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ (4) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

解

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\},$
 $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

であり、与えられた条件をもとに、 U, A, B, C をベン図で表すと、下の図のようになる．

(1) $A \cap B \cap C$ は、 A, B, C の共通部分であるから、 $A \cap B \cap C = \{1, 3\}$

(2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18\}$ より、

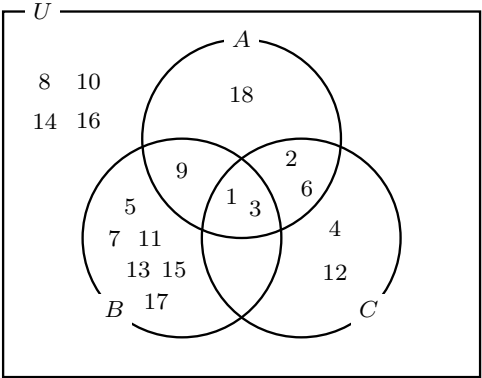
$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 6\}$

(3) $A \cap C = \{1, 2, 3, 6\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$ より、

$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 6\}$

(4) ド・モルガンの法則より、

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$
 $= \{8, 10, 14, 16\}$



※ 裏面へ続く

- 【5】 次の命題の真偽を述べよ。また、偽のときは具体的な反例を挙げよ。ただし、 x, y は実数とする。
- (1) $x - y = 0$ ならば、 $x = y = 0$
- (2) $x^2 + y^2 = 0$ ならば、 $x = y = 0$
- (3) xy が有理数ならば、 x, y はともに有理数である。
- (4) $\triangle ABC$ が二等辺三角形ならば、 $\angle A = \angle C$

解

- (1) $x = 1, y = 1$ のとき、 $x - y = 0$ であるが、 $x = y = 0$ ではない。
よって、命題は偽である。反例は、 $x = 1, y = 1$
- (2) $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ であるから、 $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x^2 = 0, y^2 = 0$ である。
よって、命題は真である。
- (3) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ のとき、 $xy = 2$ は有理数であるが、 x, y はともに有理数ではない。
よって、命題は偽である。反例は、 $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$
- (4) $\angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ$ のとき、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形であるが、 $\angle A = \angle C$ ではない。
よって、命題は偽である。
反例は、 $\angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ$

【6】 次の に最も適するものを、(i)～(iv) から選べ。ただし、 x, y は実数とする。

- (1) $x = 3$ は、 $x^2 < 20$ であるための .
- (2) $x + y > 12$ は、 $x > 6$ かつ $y > 6$ であるための .

- (i) 必要条件であるが十分条件ではない
- (ii) 十分条件であるが必要条件ではない
- (iii) 必要十分条件である
- (iv) 必要条件でも十分条件でもない

解

- (1) 「 $x = 3 \implies x^2 < 20$ 」は、真である。
「 $x^2 < 20 \implies x = 3$ 」は、偽である。反例は、 $x = 4$
よって、(ii) 十分条件であるが必要条件ではない
- (2) 「 $x + y > 12 \implies x > 6$ かつ $y > 6$ 」は、偽である。反例は、 $x = 12, y = 1$
「 $x > 6$ かつ $y > 6 \implies x + y > 12$ 」は、真である。
よって、(i) 必要条件であるが十分条件ではない

【7】 次の問いに答えよ。ただし、 x は実数とする。

- (1) 条件 $0 \leq x < 5$ の否定を述べよ。
- (2) 条件「 $x = 0$ または $x = 2$ 」の否定を述べよ。
- (3) 命題「ある整数 k について、 $k^2 = 3k$ 」の否定を述べよ。また、もとの命題とその否定の真偽を答えよ。
- (4) 命題「 $x = -3$ ならば、 $x^2 = 9$ 」の対偶を述べよ。また、その真偽を答えよ。

解

- (1) 「 $0 \leq x < 5$ 」は、「 $x \geq 0$ かつ $x < 5$ 」のことである。
よって、否定は、「 $x < 0$ または $x \geq 5$ 」
- (2) 否定は、「 $x \neq 0$ かつ $x \neq 2$ 」
- (3) 否定は、「すべての整数 k について、 $k^2 \neq 3k$ 」
 $k = 3$ のとき、 $k^2 = 3k$ であるから、 $k^2 \neq 3k$ は成り立たない。
よって、否定は偽である。
また、もとの命題は $k = 3$ のとき、 $k^2 = 3k$ であるから、真である。
- (4) 対偶は、「 $x^2 \neq 9$ ならば、 $x \neq -3$ 」
これは、もとの命題が真 ($x = -3$ ならば、 $x^2 = 9$) であるから、真である。

【8】 次の命題を証明せよ。ただし、 a, b, c は整数とする。

$a^2 + b^2 + c^2$ が偶数ならば、 a, b, c のうち少なくとも 1 つは偶数である。

解

もとの命題の対偶「 a, b, c がすべて奇数ならば、 $a^2 + b^2 + c^2$ は奇数である」を証明する。

a, b, c がすべて奇数であるとき、整数 l, m, n を用いて

$$a = 2l + 1, \quad b = 2m + 1, \quad c = 2n + 1$$

と表せるから、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (2l + 1)^2 + (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 \\ &= 2(2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2l + 2m + 2n + 1) + 1 \end{aligned}$$

$2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2l + 2m + 2n + 1$ は整数であるから、 $a^2 + b^2 + c^2$ は奇数である。

よって、対偶が証明されたから、もとの命題も成り立つ。 ■

【9】 次の問いに答えよ。

- (1) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。
- (2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを用いて、 $\sqrt{3} - 1$ が無理数であることを証明せよ。

解

- (1) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると、

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数})$$

と表される。

このとき、 $\sqrt{3}n = m$

両辺を 2 乗すると、 $3n^2 = m^2 \cdots$ (i)

$3n^2$ は 3 の倍数であるから、 m^2 も 3 の倍数である。

したがって、 m は 3 の倍数となる。

$m = 3k$ (k は整数) とおくと、(i) より

$$3n^2 = (3k)^2$$

すなわち、 $n^2 = 3k^2$

$3k^2$ は 3 の倍数であるから、 n^2 は 3 の倍数である。

したがって、 n は 3 の倍数となる。

ゆえに、 m, n はともに 3 の倍数となり、互いに素であることに矛盾する。

よって、 $\sqrt{3}$ は無理数である。 ■

- (2) $\sqrt{3} - 1$ が有理数であると仮定すると、

$$\sqrt{3} - 1 = r \quad (r \text{ は有理数})$$

と表される。

整理すると、 $\sqrt{3} = r + 1$

$r + 1$ は有理数であるから、 $\sqrt{3}$ も有理数となる。

これは、 $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

よって、 $\sqrt{3} - 1$ は無理数である。 ■