

10

1

知 計 10 点

① (ア) 真	① (イ) 偽	② (ウ) 反例
知	知	知
② (エ) 十分条件	② (オ) 必要条件	① (カ) 対偶
知	知	知
① (キ) 背理法		
知		

12

2

知 計 12 点

② (1) {5, 9}
知
② (2) {1, 6, 12}
知
③ (3) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12}
知
③ (4) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12}
知
② (5) {5, 9}
知

10

3

思 計 10 点

③ (1) $\{x \mid -2 < x \leq 4\}$
思
④ (2) $\{x \mid x \neq -2\}$
思
③ (3) $\{x \mid x < -2\}$
思

12

4

知 計 6 点
思 計 6 点

③ (1) {1, 3}	③ (2) {1, 2, 3, 6}
知	知
③ (3) {1, 2, 3, 6}	③ (4) {8, 10, 14, 16}
思	思

15

5

知 計 15 点

② (1) 真偽：偽	② 反例： $x = 1, y = 1$
知	知
③ (2) 真偽：真	反例：不要
知	
② (3) 真偽：偽	② 反例： $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$
知	知
② (4) 真偽：偽	② 反例： $\angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ$
知	知

8

6

知 計 4 点
思 計 4 点

④ (1) (ii) 十分条件であるが必要条件ではない
知
④ (2) (i) 必要条件であるが十分条件ではない
思

7

7

知 計 3 点
思 計 4 点

② (1) 否定： $x < 0$ または $x \geq 5$	
知	
① (2) 否定： $x \neq 0$ かつ $x \neq 2$	
知	
① (3) 否定：すべての整数 k について、 $k^2 \neq 3k$	
思	
① もとの命題の真偽：真	否定の真偽：偽
思	
① (4) 対偶： $x^2 \neq 9$ ならば、 $x \neq -3$	
思	
① もとの命題の真偽：真	対偶の真偽：真
思	

10

8

思 計 10 点

10

※ 途中の計算や考え方を示せ.

もとの命題の対偶「 a, b, c がすべて奇数ならば, $a^2 + b^2 + c^2$ は奇数である」を証明する.

a, b, c がすべて奇数であるとき, 整数 l, m, n を用いて

$$a = 2l + 1, \quad b = 2m + 1, \quad c = 2n + 1$$

と表せるから,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2l + 1)^2 + (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2$$

$$= 2(2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2l + 2m + 2n + 1) + 1$$

$2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2l + 2m + 2n + 1$ は整数であるから, $a^2 + b^2 + c^2$ は奇数である.

よって, 対偶が証明されたから, もとの命題も成り立つ.

思

16

9

思 計 16 点

10

(1) ※ 途中の計算や考え方を示せ.

$\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると,

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数})$$

と表される.

このとき, $\sqrt{3}n = m$

両辺を 2 乗すると, $3n^2 = m^2 \cdots (i)$

$3n^2$ は 3 の倍数であるから, m^2 も 3 の倍数である.

したがって, m は 3 の倍数となる.

$m = 3k$ (k は整数) とおくと, (i) より

$$3n^2 = (3k)^2$$

すなわち, $n^2 = 3k^2$

$3k^2$ は 3 の倍数であるから, n^2 は 3 の倍数である.

したがって, n は 3 の倍数となる.

ゆえに, m, n はともに 3 の倍数となり, 互いに素であることに矛盾する.

よって, $\sqrt{3}$ は無理数である.

思

6

(2) ※ 途中の計算や考え方を示せ.

$\sqrt{3} - 1$ が有理数であると仮定すると,

$$\sqrt{3} - 1 = r \quad (r \text{ は有理数})$$

と表される.

整理すると, $\sqrt{3} = r + 1$

$r + 1$ は有理数であるから, $\sqrt{3}$ も有理数となる.

これは, $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する.

よって, $\sqrt{3} - 1$ は無理数である.

思

採点基準

共通

表し方が異なっても、同じ集合や範囲を表している

正答扱い

集合の要素の順序などが異なっても、内容が同じならよい。

大問 5・7 で真偽を同じ意味の語で答えている

正答扱い

「真・偽」のほか、「正・誤」、「正しい・誤り」、true・false など、対応が一意なら可。

証明で文字や式の置き方が模範解答と異なる

正答扱い

論理が正しければ、別の文字や式を用いた証明も正答とする。

集合を表す括弧や区切りがなく、集合として読み取りにくい

-1点

要素が明確に列挙されている場合に限る。丸括弧を用いた答案は正答とする。

1

標準用語またはその直接対応語で答えている

正答扱い

(ア)、(イ) の真命題・偽命題，true・false，および帰謬法などは可。

(ア)，(イ) で「正・誤」「正しい・誤り」などと答えている

各 0 点

文章中の標準用語「真・偽」を答える穴埋めなので，真偽の判定だけを表す言い換えは不可とする。

(エ)，(オ) で「十分」「必要」のみを書いている

各 1 点

「条件」がなくても向きは読み取れるが，用語として不完全である。

(エ) と (オ) を逆にしている，または (カ) で逆・裏と答えている

各 0 点

(キ) で「対偶証明法」と答えている

0 点

結論の否定を仮定して矛盾を導く方法は背理法である。

2

要素が 1 つでも不足している，または余分な要素がある

0 点

各小問の数学的内容は All or nothing とする。

要素の順序が異なる，または同じ要素を重ねて書いている

正答扱い

表す集合が同じならよい。

3

正答と同じ範囲を不等式で表している

正答扱い

例：(2) は $x \neq -2$ のほか， $x < -2$ または $x > -2$ でもよい。

範囲の両側がそろい，境界を含むか否かだけに誤りがある

-1 点

等号の誤りが 2 か所あっても，各小問で一律 -1 点とする。

片側の範囲がない，または求める領域・演算が異なる

0 点

例：(2) を $x > -2$ のみ，(3) を $x < -2$ または $x > 4$ とする答案。

4

要素が 1 つでも不足している，または余分な要素がある

0 点

各小問の数学的内容は All or nothing とする。

要素の順序・重複，または同値な集合の表し方

正答扱い

ただし，問題の式を計算せずそのまま写しただけの答案は 0 点とする。

5

(1)，(3)，(4) の真偽と反例

各 2 点

真偽と反例は別々に採点する。「偽」だけ，または有効な反例だけでも 2 点を与える。

反例が仮定を満たし，結論を成り立たせない

正答扱い

模範解答と異なる数値・角でもよい。どちらかを満たさない例は反例 0 点とする。

(2) で命題を真としている

3 点

真の命題なので反例は不要であり，「なし」「不要」または空欄のいずれでも減点しない。

6

正しい選択肢の番号または文言を書いている

各 4 点

各小問 All or nothing とする。

必要・十分の一方だけを答えている

0 点

4 つの選択肢から分類する問題なので，両方向を確定できない答案は不十分とする。

7

(1) で境界の値を含むか否かに誤りがある

-1 点

例： $x < 0$ または $x > 5$ など。否定の方針が読み取れる場合に限る。

(2) で「かつ」を「または」としている

0 点

否定の論理が異なるため。

(3) で「ある」を残したまま結論だけを否定している

0 点

「ある」の否定は「すべて」で表す必要があるため。

(3)，(4) で真偽だけが不足している

-1 点

否定または対偶の記述が正しい場合に限る。

(4) で逆または裏を書いている

0 点

対偶を問う問題であるため。

8

証明の各段階

配点に従う

対偶の設定と a ， b ， c を奇数として表すまでに 4 点，平方和を奇数の形に変形するまでに 3 点，対偶を証明してもとの命題へ戻るまでに 3 点を与える。

合同式を用いるなど，論理が正しい別の証明も正答とする。

9

(1) の証明の各段階

計 10 点

有理数と仮定して互いに素な自然数の比で表すまでに 2 点， $3n^2 = m^2$ から m ， n がともに 3 の倍数となることを示すまでに 6 点，矛盾を示して無理数と結論するまでに 2 点を与える。

(2) の証明の各段階

計 6 点

$\sqrt{3} - 1$ を有理数と仮定するまでに 1 点， $\sqrt{3}$ も有理数となることを示すまでに 2 点，(1) との矛盾を示して無理数と結論するまでに 3 点を与える。