

1 文中の空欄 ア ～ ク に当てはまる最も適切なものをそれぞれ答えよ。ただし、 ア ～ オ , キ , ク には用語で、 カ には数式・記号で答えよ。

同じ条件のもとで繰り返し行うことのできる実験や観察を ア といい、その結果生じる事柄を イ という。

2 つの事象 A, B が同時には起こらないとき、 A, B は ウ であるといい、このような事象を エ という。

全事象を U 、事象を A とするとき、 A が起こらない事象を A の オ といい、 カ と表す。

2 つの試行の結果が互いに影響し合わないとき、これらの試行は キ であるという。

同じ条件のもとで同じ試行を繰り返し、それらの試行が独立であるとき、これを ク という。

解

ア	… 試行	イ	… 事象	ウ	… 排反	エ	… 排反事象
オ	… 余事象	カ	… $\overline{A}$	キ	… 独立	ク	… 反復試行

2 次の確率を求めよ。

(1) 2 個のさいころを投げるとき、目の和が 7 となる確率を求めよ。

(2) 4 枚の硬貨を投げて、表 3 枚、裏 1 枚が出る確率を求めよ。

解

(1) 目の出方は、 $6 \times 6 = 36$ (通り)

目の和が 7 となるのは、
(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

より、6 通り
よって、求める確率は、 $\frac{1}{6}$
(2) 4 枚の硬貨を投げた場合に起こりうるすべての組み合わせは、

$$2^4 = 16 \text{ (通り)}$$

このうち、表 3 枚、裏 1 枚が出る組み合わせは、4 通り
よって、求める確率は、 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

3 赤玉 7 個と白玉 5 個の合計 12 個の玉が入っている袋の中から、3 個の玉を同時に取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) 3 個とも赤玉である確率

(2) 赤玉が 2 個、白玉が 1 個である確率

解

12 個の玉から 3 個の玉を取り出す場合の数は、 $_{12}C_3$ 通り
(1) 赤玉 7 個から 3 個の玉を取り出す場合の数は、 $_7C_3$ 通り
よって、求める確率は、

$$\frac{{}_7C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{7}{44}$$

(2) 赤玉 7 個から 2 個を取り出す場合の数は、 $_7C_2$ 通り
そのそれぞれについて、白玉 5 個から 1 個を取り出す場合の数は、 $_5C_1$ 通り
したがって、赤玉 2 個、白玉 1 個を取り出す場合の数は、
 $_7C_2 \times {}_5C_1$ (通り)

よって、求める確率は、 $\frac{{}_7C_2 \times {}_5C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{21}{44}$

4 (1) 14 個の部品の中に 4 個の不良品が含まれている。この中から同時に 5 個の部品を取り出すとき、少なくとも 1 個の不良品が含まれる確率を求めよ。
(2) 赤玉 5 個と白玉 8 個の合計 13 個の玉が入っている袋の中から、4 個の玉を同時に取り出すとき、赤玉、白玉がともに少なくとも 1 個取り出される確率を求めよ。

解

(1) 少なくとも 1 個の不良品が含まれる事象を A とすると、余事象 $\overline{A}$ は 5 個とも不良品ではない事象であるから、その確率は、

$$P(\overline{A}) = \frac{{}_{10}C_5}{{}_{14}C_5} = \frac{18}{143}$$

よって、求める確率は、

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{18}{143} = \frac{125}{143}$$

(2) 玉の取り出し方の総数は、 $_{13}C_4$ 通り
赤玉、白玉がともに少なくとも 1 個取り出される場合の余事象を考えると、次の 2 つの場合がある。

- (i) 4 個すべてが赤玉であるとき、その確率は、 $\frac{{}_5C_4}{{}_{13}C_4} = \frac{1}{143}$
(ii) 4 個すべてが白玉であるとき、その確率は、 $\frac{{}_8C_4}{{}_{13}C_4} = \frac{14}{143}$

よって、(i)、(ii) は互いに排反であるから、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{143} + \frac{14}{143} \right) = \frac{128}{143}$$

5 (1) さいころを 2 回投げる。このとき、1 回目は 4 以下の目、2 回目は 4 以上の目が出る確率を求めよ。
(2) A、B、C の 3 人がゴールに向かって 1 つのボールを蹴るとき、ゴールに成功する確率はそれぞれ $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ であるとする。この 3 人がそれぞれ 1 つのボールを蹴ったとき、少なくとも 1 人がゴールを決める確率を求めよ。

解

(1) さいころを投げる 2 回の試行は、独立な試行である。

1 回目に 4 以下の目が出る確率は、 $\frac{4}{6}$
2 回目に 4 以上の目が出る確率は、 $\frac{3}{6}$

よって、求める確率は、 $\frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$

(2) A、B、C の 3 人がゴールに向かってボールを蹴る試行は、独立な試行である。また、少なくとも 1 人がゴールを決めるという事象は、3 人ともゴールを決めないという事象の余事象である。

A がゴールを決めない確率は、 $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$
B がゴールを決めない確率は、 $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
C がゴールを決めない確率は、 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
したがって、3 人ともゴールを決めない確率は、

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$$

よって、少なくとも 1 人がゴールを決める確率は、

$$1 - \frac{1}{60} = \frac{59}{60}$$

6 当たりくじが 4 本入っている 13 本のくじがある. a, b がこの順にくじを 1 本ずつ引くとき, 次の確率を求めよ. ただし, 引いたくじは戻さないものとする.

(1) a, b がともに当たりくじを引く確率

(2) b が当たりくじを引く確率

解

a, b が当たりくじを引く事象をそれぞれ A, B とする.

(1) $P(A) = \frac{4}{13}, P_A(B) = \frac{3}{12}$ であるから, 乗法定理より, 求める確率は,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} = \frac{1}{13}$$

(2) (i) a も b も当たりくじを引くとき

(1) より, $P(A \cap B) = \frac{1}{13}$

(ii) a がはずれくじを引き, b が当たりくじを引くとき

$P(\overline{A}) = \frac{9}{13}, P_{\overline{A}}(B) = \frac{4}{12}$ であるから, 乗法定理より, その確

率は,

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{9}{13} \times \frac{4}{12} = \frac{3}{13}$$

よって, (i), (ii) は互いに排反であるから, 求める確率は,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{13} + \frac{3}{13} = \frac{4}{13}$$

7 A, B の 2 人が繰り返し卓球の試合をして, 先に 3 勝した方が優勝者とする. 各試合において A が勝つ確率は $\frac{1}{3}$ で, 引き分けはないものとする. このとき, A が優勝する確率を求めよ.

解

(i) A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は, $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

(ii) A が 3 勝 1 敗で優勝する確率は, 3 試合目までに 2 勝 1 敗となり, 4 試合目に勝つ確率であるから,

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

(iii) A が 3 勝 2 敗で優勝する確率は, 4 試合目までに 2 勝 2 敗となり, 5 試合目に勝つ確率であるから,

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

よって, (i)~(iii) より, 求める確率は, $\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81}$

8 ある製品を製造する 2 つの工場 a, b があり, a 工場で製造される製品は全体の 70% である. また, a 工場で製造された製品には 4% の不良品が含まれており, b 工場で製造された製品には 3% の不良品が含まれている. 2 つの工場で製造された多くの製品の中から, 無作為に 1 個の製品を取り出したとき, 次の確率を求めよ.

(1) 取り出した製品が不良品である確率

(2) 取り出した製品が不良品であったとき, それが a 工場の製品である確率

解

取り出した 1 個の製品が a 工場からの製品である事象を A , b 工場からの製品である事象を B , 不良品である事象を E とすると, a 工場で製造される製品は全体の 70% であるので,

$$P(A) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}, \quad P(B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

a 工場と b 工場における不良品の割合はそれぞれ 4%, 3% であるから,

$$P_A(E) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}, \quad P_B(E) = \frac{3}{100}$$

(1)

$$P(A \cap E) = P(A) \times P_A(E) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{25} = \frac{7}{250},$$

$$P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{9}{1000}$$

よって, 求める確率は,

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{7}{250} + \frac{9}{1000} = \frac{37}{1000}$$

(2) 不良品であったときに, それが a 工場の製品である確率は $P_E(A)$ であるから,

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{7}{250} \div \frac{37}{1000} = \frac{28}{37}$$

9 3 個のさいころを投げるとき, 次の確率を求めよ.

(1) 出る目の最大値が 5 以下である確率

(2) 出る目の最大値が 5 である確率

(3) 出る目の最大値が 5, 最小値が 2 である確率

解

(1) 目の最大値が 5 以下であるためには, 3 個のさいころの目がすべて 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかであればよい.

よって, 求める確率は, $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \cdots$ (i)

(2) 目の最大値が 5 となるのは, 目の最大値が 5 以下である場合から, 目の最大値が 4 以下である場合を除いた場合である.

目の最大値が 4 以下となる確率は, $\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \cdots$ (ii)

よって, (i), (ii) より, 求める確率は, $\frac{125}{216} - \frac{8}{27} = \frac{61}{216}$

(3) 3 個のさいころの目が,

すべて 2, 3, 4, 5 のいずれかである事象を A ,

すべて 2, 3, 4 のいずれかである事象を B ,

すべて 3, 4, 5 のいずれかである事象を C

とすると, 求める確率は,

$$\begin{aligned} P(A) - P(B \cup C) &= P(A) - \{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\} \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left\{\left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3\right\} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

10 1 個のさいころを 20 回投げるとき, 2 の目が出る回数が何回するとき, その確率が最も大きくなるか.

解

さいころを 1 回投げたとき, 2 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから, さいころを 20 回投げたときに 2 の目が n 回 ($0 \leq n \leq 20$) 出る確率 p_n は,

$$p_n = {}_{20}C_n \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{20-n} = \frac{20!}{n!(20-n)!} \cdot \frac{5^{20-n}}{6^{20}}$$

$n = 0, 1, 2, \dots, 19$ において, p_{n+1} と p_n の比を求めると,

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \left\{ \frac{20!}{(n+1)!(19-n)!} \cdot \frac{5^{19-n}}{6^{20}} \right\} \div \left\{ \frac{20!}{n!(20-n)!} \cdot \frac{5^{20-n}}{6^{20}} \right\} \\ &= \frac{n!(20-n)!}{(n+1)!(19-n)!} \cdot \frac{5^{19-n}}{5^{20-n}} = \frac{20-n}{5(n+1)} \end{aligned}$$

(i) $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1$ のとき

$\frac{20-n}{5(n+1)} \geq 1$ より, $20-n \geq 5(n+1)$ であるから, $n \leq \frac{5}{2}$

したがって, $n = 0, 1, 2$ のとき, $\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ より, $p_n < p_{n+1}$

(ii) $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ のとき

$\frac{20-n}{5(n+1)} < 1$ より, $20-n < 5(n+1)$ であるから, $n > \frac{5}{2}$

したがって, $n = 3, 4, \dots, 19$ のとき, $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ より, $p_n > p_{n+1}$

(i), (ii) より, $p_0 < p_1 < p_2 < p_3 > p_4 > \cdots > p_{20}$

よって, 2 の目が **3 回出る確率が最も大きい**.