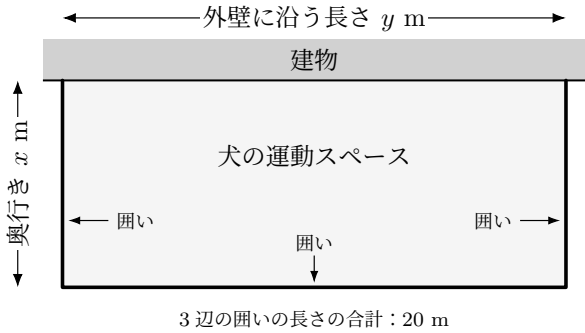


太郎さんと花子さんは、地域の動物保護施設でボランティアをしている。施設では、建物の外壁に沿って、犬のための長方形の運動スペースを一つ作り直す計画があり、2人は施設の担当者から依頼を受け、その寸法案を考えている。右の図のように、外壁を長方形の一辺として利用し、残りの三辺には、出入口となる門扉を備えた囲いを設ける。この囲いは、門扉を含めて全長 20 m とする。



運動スペースの奥行きを x m、外壁に沿う長さを y m とし、 $x > 0$ 、 $y > 0$ とする。なお、図では門扉を省略し、囲いや支柱の太さは考えないものとする。また、コ、サは解答の順序を問わない。

2 人は、まず、囲いの長さから、奥行きと面積の関係を調べた。

太郎：図を見ると、囲いを設ける三辺は、奥行き x m の辺が 2 本と、外壁に沿う長さ y m の辺が 1 本からなるね。囲いは門扉を含めて全長 20 m だから、 $2x + y = 20$ 、すなわち $y = 20 - 2x$ となるね。

花子： $x > 0$ 、 $y > 0$ だから、運動スペースを作ることができる x の範囲は $0 < x < \text{アイ}$ となるね。

太郎：奥行きが x m のときの運動スペースの面積を $S(x)$ m² とすると、 $S(x) = \text{ウエ}x^2 + \text{オカ}x$ と表せるよ。

2 人は、囲いの長さと面積の関係を整理した後、作り直す際に必要な面積を施設の担当者に確認した。すると、作り直した後も、現在と同じ 48 m² 以上の面積を確保する必要があると伝えられた。

太郎：まず、この面積を確保できる寸法が存在するか、 $S(x)$ の最大値から確かめよう。

$$S(x) = \text{ウエ}(x - \text{キ})^2 + \text{クケ}$$

だから、確保できる面積の最大値は クケ m² だね。これなら、必要な面積を確保できるね。

花子：では、48 m² 以上の面積を確保できる奥行きの範囲を調べよう。

太郎：面積がちょうど 48 m² となるのは、 $x = \text{コ}$ 、サのときだね。 $S(x)$ のグラフは上に凸の放物線だから、条件を満たす x の範囲はこの 2 つの値の間だね。

続いて、犬が外壁に沿って直線的に走れる区間を長くするため、48 m² 以上の面積を確保しながら、外壁に沿う長さができるだけ大きくなる寸法を考えることにした。

太郎：運動スペースの面積が最大になる寸法を選べば、外壁に沿う長さも最大になるのかな。

花子：必ずしもそうとは限らないんじゃないかな。面積が最大になる寸法で、外壁に沿う長さも最大になるとは限らないよ。

太郎：そうか。先ほど求めた x と y の関係は $y = 20 - 2x$ だったね。面積の条件を満たす奥行きの範囲で、この式を使って考えればよいかな。

花子：そうだね。外壁に沿う長さを最大にするには、シのように考えればよいね。

太郎：この考え方によると、48 m² 以上の面積を確保できる寸法のうち、外壁に沿う長さが最大となるのは、奥行きが ス m、外壁に沿う長さが セソ m のときだね。

シの解答群

① $S(x)$ が最大となる x の値を選ぶ。

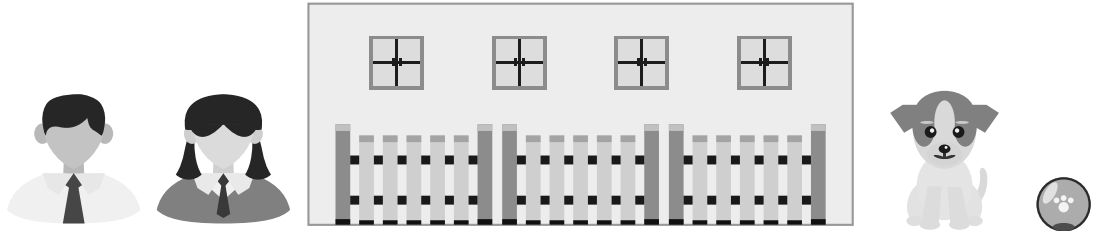
② $y = 20 - 2x$ は減少するから、 x の最大値を選ぶ。

① $y = 20 - 2x$ は減少するから、 x の最小値を選ぶ。

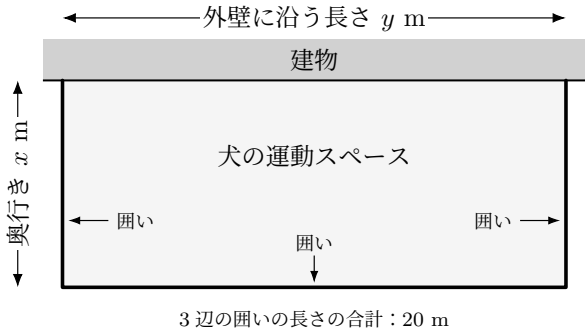
③ $y = 20 - 2x$ は増加するから、 x の最大値を選ぶ。

計算欄：

	解答欄												
	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
ア	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
イ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
ウ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
エ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
カ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
キ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
ク	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
ケ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
コ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
サ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
シ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
ス	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
セ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
ソ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	



太郎さんと花子さんは、地域の動物保護施設でボランティアをしている。施設では、建物の外壁に沿って、犬のための長方形の運動スペースを一つ作り直す計画があり、2人は施設の担当者から依頼を受け、その寸法案を考えている。右の図のように、外壁を長方形の一辺として利用し、残りの三辺には、出入口となる門扉を備えた囲いを設ける。この囲いは、門扉を含めて全長 20 m とする。



運動スペースの奥行きを x m、外壁に沿う長さを y m とし、 $x > 0$ 、 $y > 0$ とする。なお、図では門扉を省略し、囲いや支柱の太さは考えないものとする。また、、 は解答の順序を問わない。

2 人は、まず、囲いの長さから、奥行きと面積の関係を調べた。

太郎：図を見ると、囲いを設ける三辺は、奥行き x m の辺が 2 本と、外壁に沿う長さ y m の辺が 1 本からなるね。囲いは門扉を含めて全長 20 m だから、 $2x + y = 20$ 、すなわち $y = 20 - 2x$ となるね。

花子： $x > 0$ 、 $y > 0$ だから、運動スペースを作ることができる x の範囲は $0 < x < \text{アイ}$ となるね。

太郎：奥行きが x m のときの運動スペースの面積を $S(x)$ m² とすると、 $S(x) = \text{ウエ}x^2 + \text{オカ}x$ と表せるよ。

2 人は、囲いの長さと面積の関係を整理した後、作り直す際に必要な面積を施設の担当者に確認した。すると、作り直した後も、現在と同じ 48 m² 以上の面積を確保する必要があると伝えられた。

太郎：まず、この面積を確保できる寸法が存在するか、 $S(x)$ の最大値から確かめよう。

$$S(x) = \text{ウエ}(x - \text{キ})^2 + \text{クケ}$$

だから、確保できる面積の最大値は m² だね。これなら、必要な面積を確保できるね。

花子：では、48 m² 以上の面積を確保できる奥行きの範囲を調べよう。

太郎：面積がちょうど 48 m² となるのは、 $x = \text{コ}$ 、 のときだね。 $S(x)$ のグラフは上に凸の放物線だから、条件を満たす x の範囲はこの 2 つの値の間だね。

続いて、犬が外壁に沿って直線的に走れる区間を長くするため、48 m² 以上の面積を確保しながら、外壁に沿う長さができるだけ大きくなる寸法を考えることにした。

太郎：運動スペースの面積が最大になる寸法を選べば、外壁に沿う長さも最大になるのかな。

花子：必ずしもそうとは限らないんじゃないかな。面積が最大になる寸法で、外壁に沿う長さも最大になるとは限らないよ。

太郎：そうか。先ほど求めた x と y の関係は $y = 20 - 2x$ だったね。面積の条件を満たす奥行きの範囲で、この式を使って考えればよいかな。

花子：そうだね。外壁に沿う長さを最大にするには、 のように考えればよいね。

太郎：この考え方によると、48 m² 以上の面積を確保できる寸法のうち、外壁に沿う長さが最大となるのは、奥行きが m、外壁に沿う長さが m のときだね。

の解答群

① $S(x)$ が最大となる x の値を選ぶ。

② $y = 20 - 2x$ は減少するから、 x の最大値を選ぶ。

① $y = 20 - 2x$ は減少するから、 x の最小値を選ぶ。

③ $y = 20 - 2x$ は増加するから、 x の最大値を選ぶ。

解答例：

囲いを設ける三辺のうち、奥行き x m の辺は 2 本、長さ y m の辺は 1 本である。

したがって、門扉を含む囲いの長さの合計が 20 m であることから、 $2x + y = 20$ となる。これを y について表すと、 $y = 20 - 2x$ である。 $x > 0$ 、 $y > 0$ より $0 < x < 10$ であるから、 である。また、奥行きが x m のときの面積は、

$$S(x) = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x$$

となる。

したがって、 、 である。

平方完成すると、

$$S(x) = -2(x - 5)^2 + 50$$

である。

したがって、 、 であり、48 m² 以上の面積を確保できる寸法は存在する。

$S(x)$ は、奥行きが x m のときの面積である。

したがって、48 m² 以上の面積を確保できる奥行きの範囲は、 $S(x) \geq 48$ となる x の範囲である。 $S(x) = -2x^2 + 20x$ であるから、 $-2x^2 + 20x \geq 48$ である。

したがって、 $x^2 - 10x + 24 \leq 0$

ゆえに、 $(x - 4)(x - 6) \leq 0$

よって、 $4 \leq x \leq 6$

この範囲は、運動スペースを作ることができる範囲 $0 < x < 10$ に含まれる。

したがって、 、 である（解答の順序は問わない）。

また、外壁に沿う長さは $y = 20 - 2x$ である。 x が大きくなるほど、 y の値は小さくなるから、先ほど求めた $4 \leq x \leq 6$ の範囲では x の最小値を選べばよい。

よって、 は、解答群では である。

$x = 4$ のとき、

$$y = 20 - 2 \times 4 = 12$$

であるから、 、 である。実際、面積は $4 \times 12 = 48$ m² であり、条件を満たす。

	解答欄										
	-	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8 9
ア	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
イ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
ウ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
エ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
オ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
カ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
キ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
ク	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
ケ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
コ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
サ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
シ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
ス	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
セ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨
ソ	⊖	⊕	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧ ⑨

※ ただし、コ、サは解答の順序を問わない。

問題番号	解答記号	正解	配点
	アイ	10	2
	ウエ	−2	2
	オカ	20	2
	キ	5	1
	クケ	50	2
	コ , サ	4, 6 (順不同)	各 1 点
	シ	1	2
	ス	4	1
	セソ	12	1

