

実施日： _____ 年 _____ 月 _____ 日 _____ 年 _____ 組 _____ 番 氏名 _____

1 次の文章は 2 次関数について述べたものである．文章中の空欄に当てはまるものを，ア，イ，カ は用語で，ウ ～ オ は数式・記号で答えよ．

ただし， $a \neq 0$ とする．
関数 $y = f(x)$ において， x のとる値の範囲をこの関数の ア といい， x が ア 内のすべての値をとるときの y のとる値の範囲を イ という．
2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは， $y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で，軸は直線 ウ，頂点は点 エ である．また， $a > 0$ のときは下に凸， $a < 0$ のときは上に凸である．
 $y = ax^2 + bx + c$ の右边を $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形することを平方完成という．
2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式は $D =$ オ であり， $D > 0$ のとき異なる 2 つの実数解をもち， $D = 0$ のとき カ をもつ．

解

ア … 定義域	イ … 値域	ウ … $x = p$
エ … (p, q)	オ … $b^2 - 4ac$	カ … 重解

2 関数 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ について，次の値を求めよ．

- (1) $f(2)$ (2) $f(2a - 1)$

解

(1) $f(x)$ に $x = 2$ を代入すると，

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 8 - 6 + 4 = \mathbf{6}$$

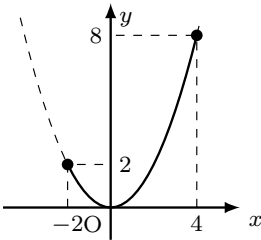
(2) $f(x)$ に $x = 2a - 1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} f(2a - 1) &= 2(2a - 1)^2 - 3(2a - 1) + 4 \\ &= 2(4a^2 - 4a + 1) - 6a + 3 + 4 \\ &= 8a^2 - 8a + 2 - 6a + 7 \\ &= \mathbf{8a^2 - 14a + 9} \end{aligned}$$

3 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ ($-2 \leq x \leq 4$) の値域を求めよ．

解

$y = \frac{1}{2}x^2$ において，
 $x = -2$ のとき， $y = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$
 $x = 4$ のとき， $y = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$
よって，グラフは右の図のようになり，値域は $\mathbf{0 \leq y \leq 8}$



4 次の 2 次関数の軸と頂点を求めよ．

- (1) $y = 2x^2 - 8x + 5$ (2) $y = -3x^2 - 6x + 1$

解

(1)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 5 \\ &= 2(x^2 - 4x) + 5 \\ &= 2\{(x - 2)^2 - 2^2\} + 5 \\ &= 2(x - 2)^2 - 2 \cdot 2^2 + 5 \\ &= 2(x - 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

軸は直線 $x = \mathbf{2}$

頂点は点 $(\mathbf{2}, -3)$

(2)

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 - 6x + 1 \\ &= -3(x^2 + 2x) + 1 \\ &= -3\{(x + 1)^2 - 1^2\} + 1 \\ &= -3(x + 1)^2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \\ &= -3(x + 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

軸は直線 $x = \mathbf{-1}$

頂点は点 $(\mathbf{-1}, 4)$

5 放物線 $y = -x^2 + 6x - 8$ を x 軸方向に -1 ， y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

解

放物線 $y = -x^2 + 6x - 8$ の x を $x - (-1)$ ，すなわち， $x + 1$ ， y を $y - 2$ におき換えると，

$$y - 2 = -(x + 1)^2 + 6(x + 1) - 8$$

よって，求める放物線の方程式は，

$$y = -x^2 + 4x - 1$$

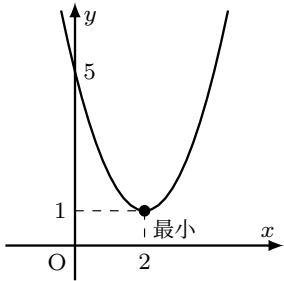
6 次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．

- (1) $y = x^2 - 4x + 5$ (2) $y = -x^2 + 6x - 5$ ($2 < x \leq 5$)

解

(1)

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 5 \\ &= (x^2 - 4x) + 5 \\ &= (x - 2)^2 - 2^2 + 5 \\ &= (x - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$



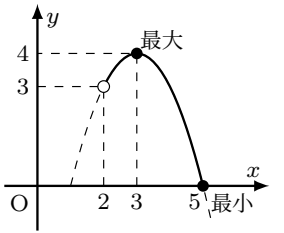
よって， $x = 2$ のとき，**最小値 1**，**最大値はない**．

(2)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x - 5 \\ &= -\{(x - 3)^2 - 9\} - 5 \\ &= -(x - 3)^2 + 4 \end{aligned}$$

$x = 2$ のとき， $y = 3$ ， $x = 5$ のとき， $y = 0$

したがって， $2 < x \leq 5$ のとき，グラフは右の図のようになる．



よって， $x = 3$ のとき，**最大値 4**， $x = 5$ のとき，**最小値 0**

7 次の条件を満たすような放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

- (1) 3 点 $(-1, 0)$ ， $(2, -3)$ ， $(3, 0)$ を通る．
(2) 軸が直線 $x = -1$ で，2 点 $(0, 3)$ ， $(1, -3)$ を通る．

解

(1) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする．

この関数のグラフが 3 点 $(-1, 0)$ ， $(2, -3)$ ， $(3, 0)$ を通るから，

$$\begin{cases} 0 = a - b + c \cdots \text{(i)} \\ -3 = 4a + 2b + c \cdots \text{(ii)} \\ 0 = 9a + 3b + c \cdots \text{(iii)} \end{cases}$$

(ii) $-$ (i) より， $-3 = 3a + 3b$ ，すなわち， $a + b = -1 \cdots \text{(iv)}$

(iii) $-$ (ii) より， $3 = 5a + b \cdots \text{(v)}$

(iv)，(v) を解いて， $a = 1$ ， $b = -2$

したがって，これを (i) に代入すると， $c = -3$

よって，求める 2 次関数は， **$y = x^2 - 2x - 3$**

(2) 軸が直線 $x = -1$ であるから，求める 2 次関数は，

$$y = a(x + 1)^2 + q$$

と表される．

この関数のグラフが 2 点 $(0, 3)$ ， $(1, -3)$ を通るから，

$$3 = a(0 + 1)^2 + q, \quad -3 = a(1 + 1)^2 + q$$

したがって，

$$a + q = 3, \quad 4a + q = -3$$

これを解いて， $a = -2$ ， $q = 5$

よって，求める 2 次関数は， **$y = -2(x + 1)^2 + 5$**

8 関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 2b$ ($-1 \leq x \leq 3$) の最大値が 7、最小値が -2 のとき、定数 a 、 b の値を求めよ。

解

$$f(x) = ax^2 - 4ax + 2b = a(x-2)^2 - 4a + 2b$$

(i) $a > 0$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で、 $-1 \leq x \leq 3$ の範囲で $f(x)$ は、 $x = -1$ のとき、最大値 $5a + 2b$ 、 $x = 2$ のとき、最小値 $-4a + 2b$ をとる。

したがって、

$$\begin{cases} 5a + 2b = 7 \\ -4a + 2b = -2 \end{cases}$$

ゆえに、 $a = 1$ 、 $b = 1$

これは $a > 0$ を満たす。

(ii) $a = 0$ のとき

$f(x) = 2b$ で一定の値をとり、最大値 7、最小値 -2 をとることはないから、不適である。

(iii) $a < 0$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で、 $-1 \leq x \leq 3$ の範囲で $f(x)$ は、 $x = 2$ のとき、最大値 $-4a + 2b$ 、 $x = -1$ のとき、最小値 $5a + 2b$ をとる。

したがって、

$$\begin{cases} -4a + 2b = 7 \\ 5a + 2b = -2 \end{cases}$$

ゆえに、 $a = -1$ 、 $b = \frac{3}{2}$

これは $a < 0$ を満たす。

よって、(i)～(iii) より、求める a 、 b の値は、 $(a, b) = (1, 1)$ 、 $(-1, \frac{3}{2})$

9 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ ($0 \leq x \leq 3$) について、 $f(x)$ の最小値を求めよ。

解

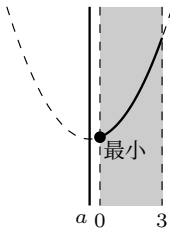
$$y = x^2 - 2ax + 3 = (x-a)^2 - a^2 + 3$$

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で、軸は直線 $x = a$

(i) $a < 0$ のとき

グラフは右の図のようになり、軸は定義域より左側にある。

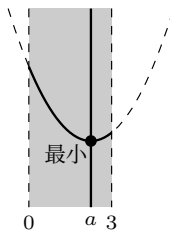
$x = 0$ のとき最小となり、最小値 $f(0) = 3$



(ii) $0 \leq a \leq 3$ のとき

グラフは右の図のようになり、軸は定義域内にある。

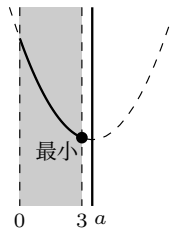
$x = a$ のとき最小となり、最小値 $f(a) = -a^2 + 3$



(iii) $3 < a$ のとき

グラフは右の図のようになり、軸は定義域より右側にある。

$x = 3$ のとき最小となり、最小値 $f(3) = -6a + 12$



よって、

$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき,} & x = 0 \text{ で最小値 } 3 \\ 0 \leq a \leq 3 \text{ のとき,} & x = a \text{ で最小値 } -a^2 + 3 \\ 3 < a \text{ のとき,} & x = 3 \text{ で最小値 } -6a + 12 \end{cases}$$

10 次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ。

$$(1) x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(2) 2x^2 + 4x + 5 = 0$$

解

(1) 判別式を D とすると、

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 > 0$$

よって、実数解の個数は、**2** 個

(2) 判別式を D とすると、

$$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -24 < 0$$

よって、実数解の個数は、**0** 個

11 次の放物線は x 軸と共有点をもつか。もつときは、その座標を求めよ。

$$(1) y = -x^2 - 6x - 9$$

$$(2) y = 2x^2 + 2x + 3$$

解

(1) $-x^2 - 6x - 9 = 0$ とすると、 $x^2 + 6x + 9 = 0$ 、すなわち、 $(x+3)^2 = 0$ であるから、 $x = -3$

よって、 x 軸と共有点を **1 個もち**、その座標は、 **$(-3, 0)$**

(2) $2x^2 + 2x + 3 = 0$ とする。この 2 次方程式の判別式を D とすると、 $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20$

よって、 $D < 0$ であるから、グラフと x 軸は共有点をもたない。

12 次の 2 次不等式を解け。

$$(1) -2x^2 + 4x - 2 < 0$$

$$(2) x^2 + 4x + 5 > 0$$

$$(3) x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$(4) x^2 + x - 6 \geq 0$$

解

(1) $-2x^2 + 4x - 2 < 0$ より、

$$2(x-1)^2 > 0$$

よって、不等式の解は、**1 以外のすべての実数**

(2) 2 次方程式 $x^2 + 4x + 5 = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

また、 x^2 の係数は正であるから、不等式の解は、**すべての実数**

(3) 左辺を因数分解すると、

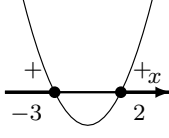
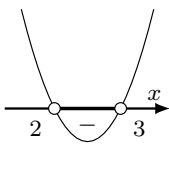
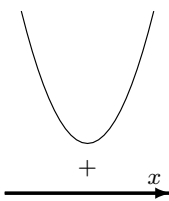
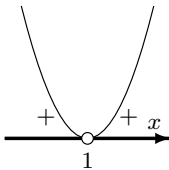
$$(x-2)(x-3) < 0$$

よって、不等式の解は、 **$2 < x < 3$**

(4) 左辺を因数分解すると、

$$(x+3)(x-2) \geq 0$$

よって、不等式の解は、 **$x \leq -3$ 、 $2 \leq x$**



13 2 次方程式 $x^2 - 2ax - a + 2 = 0$ の異なる 2 つの実数解が、ともに 2 より小さくなるような定数 a の値の範囲を求めよ。

解

$y = f(x) = x^2 - 2ax - a + 2$ とし、2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とする。

$y = f(x)$ のグラフは、下に凸の放物線で、軸は直線 $x = a$ である。

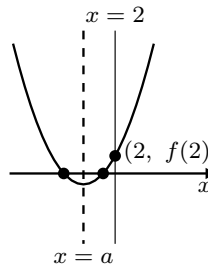
$f(x) = 0$ の異なる 2 つの実数解が、ともに 2 より小さくなるのは、 $y = f(x)$ のグラフが右の図のようになるときである。

したがって、求める条件は、

$$(i) D > 0,$$

$$(ii) \text{ 軸が } x < 2 \text{ の範囲にある,}$$

$$(iii) f(2) > 0$$



である。

(i) $\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \cdot (-a + 2) = a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1)$ であり、 $D > 0$ であるから、 $(a+2)(a-1) > 0$

したがって、 $a < -2$ 、 $1 < a$

(ii) 軸は直線 $x = a$ であるから、 $a < 2$

(iii) $f(2) = 2^2 - 2a \cdot 2 - a + 2 = -5a + 6$ であり、 $f(2) > 0$ より、 $a < \frac{6}{5}$

よって、(i)～(iii) より、求める a の値の範囲は、

$$a < -2, \quad 1 < a < \frac{6}{5}$$

