

実施日：_____年 _____月 _____日 _____年 _____組 _____番 氏名_____

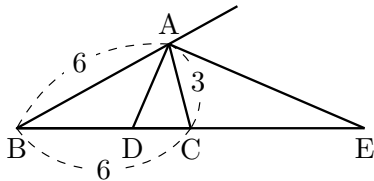
1 次の文章中の空欄 ア ～ カ に当てはまる最も適切な語句を答えよ.

三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点を **ア**，3 つの内角の二等分線の交点を **イ** という.
三角形の 3 つの中線の交点を **ウ**，各頂点から対辺に下ろした 3 つの垂線の交点を **エ** という.
三角形の 1 つの内角と 2 つの外角の二等分線は 1 点で交わり，その交点を傍心という.
三角形の 3 つの頂点を通る円を **オ**，三角形の 3 辺すべてに接する円を **カ** という.

解

ア … 外心 **イ** … 内心 **ウ** … 重心 **エ** … 垂心
オ … 外接円 **カ** … 内接円

2 AB = 6, BC = 6, CA = 3 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線が辺 BC またはその延長と交わる点を，それぞれ D, E とする. このとき，線分 DE の長さを求めよ.

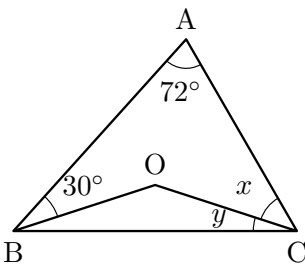


解

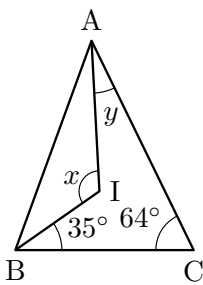
AD は ∠A の二等分線であるから， $BD : DC = AB : AC = 6 : 3 = 2 : 1$
BC = 6 より，DC = 2 である.
AE は ∠A の外角の二等分線であるから， $BE : EC = 2 : 1$
BE = BC + EC より， $(6 + EC) : EC = 2 : 1$ であるから，EC = 6
よって，
 $DE = DC + CE = 2 + 6 = 8$

3 次の図において，△ABC の外心を O，内心を I とするとき，角 x, y を求めよ.

(1)



(2)



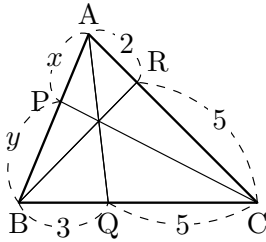
解

(1) O は外心であるから，OA = OB = OC
△OAB は二等辺三角形であるから，∠OAB = 30° である.
したがって，∠OAC = 42° であり，△OAC も二等辺三角形であるから，
 $x = 42^\circ$
また，∠OBC = ∠OCB = y より，
 $30^\circ + 72^\circ + 42^\circ + 2y = 180^\circ$

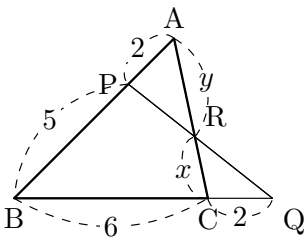
であるから， $y = 18^\circ$
(2) I は内心であるから，∠IBA = ∠IBC = 35°，∠IAB = ∠IAC = y
よって， $2y + 2 \cdot 35^\circ + 64^\circ = 180^\circ$ より， $y = 23^\circ$
また，△IAB において， $x = 180^\circ - (23^\circ + 35^\circ) = 122^\circ$

4 次の図のような △ABC において， $x : y$ を求めよ.

(1)



(2)



解

(1) △ABC において，チェバの定理より，

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$$

したがって， $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ であるから，

$$x : y = 2 : 3$$

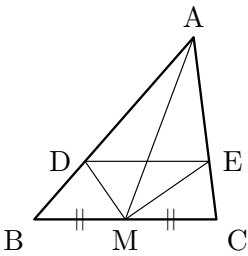
(2) △ABC と直線 PQ について，メネラウスの定理より，

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{6+2}{2} \cdot \frac{x}{y} = 1$$

したがって， $\frac{x}{y} = \frac{5}{8}$ であるから，

$$x : y = 5 : 8$$

5 △ABC において，辺 BC の中点を M とし，∠AMB, ∠AMC の二等分線が辺 AB, AC と交わる点をそれぞれ D, E とする. このとき，DE // BCであることを示せ.



解

△AMB において，MD は ∠AMB の二等分線であるから，

$$AD : DB = AM : MB \cdots (i)$$

同様に，△AMC において，

$$AE : EC = AM : MC \cdots (ii)$$

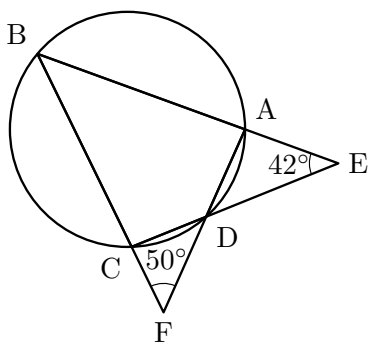
M は辺 BC の中点であるから，MB = MC である. したがって，(i), (ii) より，

$$AD : DB = AE : EC$$

よって，平行線と線分の比の性質の逆より，

$$DE // BC \quad \blacksquare$$

6 次の図において、四角形 ABCD は円に内接している。∠BEC = 42°, ∠AFB = 50° のとき、∠ABC と ∠BAF の大きさを求めよ。



解
 $\angle ABC = x$, $\angle BAF = y$ とおく。
 四角形 ABCD は円に内接するから、向かい合う内角の和は 180° である。したがって、 $\angle ECB = 180^\circ - y$ である。
 $\triangle BCE$ において、

$$x + (180^\circ - y) + 42^\circ = 180^\circ$$

 より、 $y - x = 42^\circ \dots (i)$
 $\triangle ABF$ において、

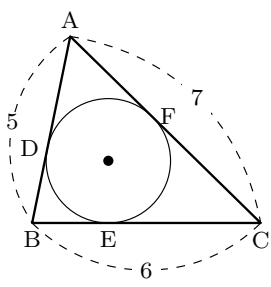
$$x + y + 50^\circ = 180^\circ$$

 より、 $x + y = 130^\circ \dots (ii)$
 (i), (ii) より、

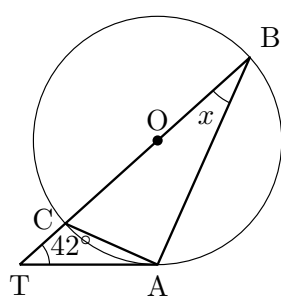
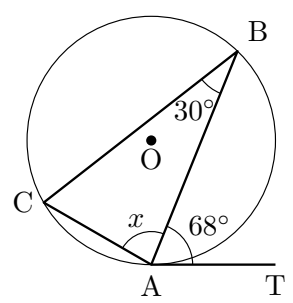
$$\angle ABC = 44^\circ, \quad \angle BAF = 86^\circ$$

7 次の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ において、 $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$ とする。内接円と辺 AB, BC, CA の接点をそれぞれ D, E, F とするとき、AD の長さを求めよ。



(2) 次の各図において、O は円の中心、AT は点 A における円の接線である。角 x を求めよ。
 (i) (ii)



解
 (1) 同じ点から円に引いた 2 本の接線の長さは等しい。 $AD = x$ とおくと、

$$BD = BE = 5 - x, \quad AF = x, \quad FC = EC = 7 - x$$

 したがって、

$$(5 - x) + (7 - x) = 6$$

 より、 $x = 3$
 よって、**AD = 3**
 (2) (i) 接弦定理より、 $\angle ACB = 68^\circ$ である。したがって、

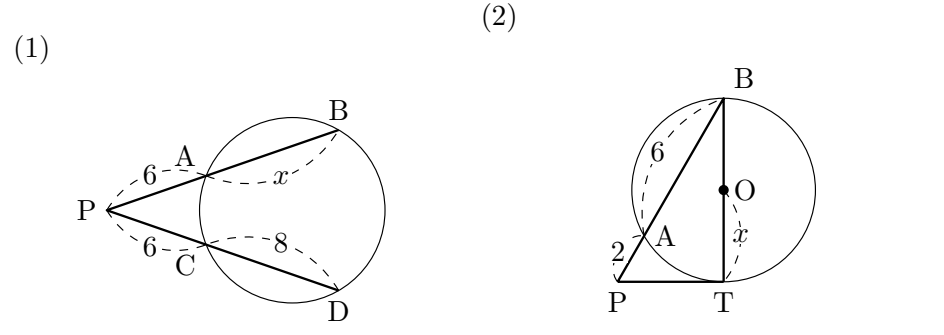
$$x = 180^\circ - (30^\circ + 68^\circ) = 82^\circ$$

 (ii) 直線 BT と円の交点を C とすると、BC は直径であるから、 $\angle CAB = 90^\circ$ である。接弦定理より、 $\angle TAC = \angle ABC = x$ であるから、

$$x + (x + 90^\circ) + 42^\circ = 180^\circ$$

 よって、 **$x = 24^\circ$**

8 次の図において、 x の値を求めよ。ただし、(2) では O は円の中心、PT は点 T における接線とする。



解
 (1) $PB = 6 + x$, $PD = 6 + 8 = 14$ である。方べきの定理より、

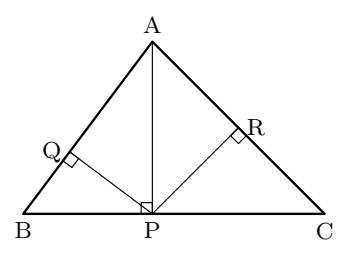
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

 したがって、 $6(6 + x) = 6 \cdot 14$ よって、 **$x = 8$**
 (2) 方べきの定理より、

$$PA \cdot PB = PT^2$$

 $PB = 2 + 6 = 8$ であるから、 $PT^2 = 2 \cdot 8 = 16$
 $\triangle PTB$ は直角三角形であり、 $BT = 2x$ であるから、 $8^2 = 16 + (2x)^2$
 したがって、 $x^2 = 12$
 $x > 0$ より、 **$x = 2\sqrt{3}$**

9 鋭角三角形 ABC の頂点 A から辺 BC に垂線 AP を引き、P から辺 AB, AC に垂線を下ろし、それぞれの交点を Q, R とする。このとき、4 点 B, C, R, Q は同一円周上にあることを示せ。



解
 $\angle BQP = 90^\circ$ より、 $\triangle BPQ$ は BP を直径とする円に内接する。また、 $\angle APB = 90^\circ$ であるから、AP はこの円の接線である。
 したがって、方べきの定理より、

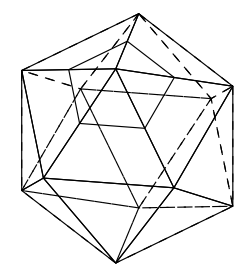
$$AP^2 = AQ \cdot AB \dots (i)$$

同様に、 $\angle CRP = 90^\circ$, $\angle APC = 90^\circ$ であるから、

$$AP^2 = AR \cdot AC \dots (ii)$$

(i), (ii) より、 $AQ \cdot AB = AR \cdot AC$ よって、方べきの定理の逆より、4 点 B, C, R, Q は同一円周上にある。 ■

10 正二十面体の各頂点を、その頂点から出る 5 本の辺の中点を通る平面で切り落とす。すべての頂点を切り落とした後にできる多面体の面の数 f , 辺の数 e , 頂点の数 v をそれぞれ求めよ。



解
 正二十面体は、各面が正三角形であり、1 つの頂点に集まる面の数は 5 個である。
 したがって、正二十面体の辺の数は $3 \times 20 \div 2 = 30$
 頂点の数は、 $3 \times 20 \div 5 = 12 \dots (i)$
 ここで、正二十面体の 1 つのかどを切り取ると、新しい面として正五角形の面が 1 つできる。
 (i) より、新しく増える面として正五角形が 12 個でき、切り取った後の多面体は右の図のようになる。
 ゆえに、面の数は $f = 20 + 12 = 32$, 辺の数は $e = 5 \times 12 = 60$ である。また、オイラーの(多面体)定理から、頂点の数は $v = 60 - 32 + 2 = 30$

