数学 I 単元テスト（図形と計量）問題用紙・模範解答 【OMI-UT-04-QA/v1.0】

実施日：＿＿＿＿＿＿ 年 ＿＿＿＿ 月 ＿＿＿＿ 日　　＿＿＿＿＿ 年 ＿＿＿＿＿ 組 ＿＿＿＿＿ 番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の文章は図形と計量について述べたものである．文章中の空欄 ア ～ カ に当てはまる数または用語を答えよ．

有名な角の三角比には，次のような値がある．

$\sin 30^\circ =$ **ア**，$\cos 30^\circ =$ **イ**，$\tan 45^\circ =$ **ウ**，$\tan 120^\circ =$ **エ**

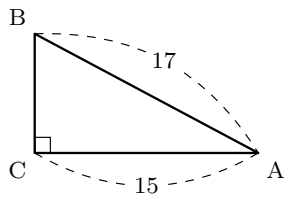
また，△ABC において，A, B, C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c，外接円の半径を R とする．このとき，$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立ち，この関係を **オ** という．
一方，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成り立ち，この関係を **カ** という．

解

ア $\cdots$ $\frac{1}{2}$　　イ $\cdots$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　ウ $\cdots$ 1
エ $\cdots$ $-\sqrt{3}$　　オ $\cdots$ **正弦定理**　　カ $\cdots$ **余弦定理**

2

次の図のような三角形において，
$\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ の値を求めよ．



解

三平方の定理より，$\mathrm{BC} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$
よって，

$$\sin A = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{17}},\quad \cos A = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{17}},\quad \tan A = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}$$

3 ホテルに向かって水平な道路をまっすぐ歩いている人が，ホテルの最上部にある点 P を見上げたところ，A 地点でその仰角が 45° であった．その後，A 地点から 10m 進んで B 地点に到達したとき，再び仰角を測ると 60° であった．この人の目の高さが地面から 1.5m であるとき，このホテルの高さを求めよ．

解

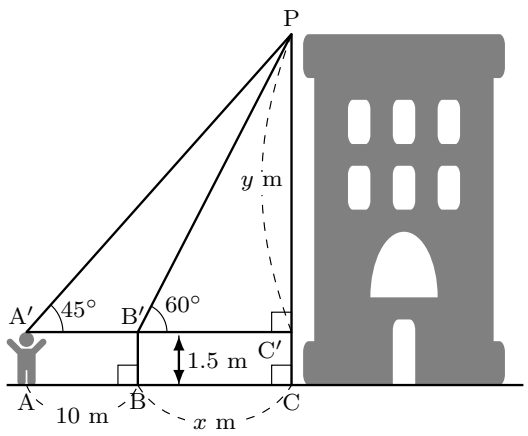
右の図のように，
A′, B′, C, C′, P とおき，
$\mathrm{BC} = \mathrm{B'C'} = x$ m, $\mathrm{C'P} = y$ m
とする．
直角三角形 A′C′P において，

$$y = (10 + x)\tan 45^\circ$$

したがって，$y = 10 + x \cdots$ (i)
直角三角形 B′C′P において，

$$y = x\tan 60^\circ$$

したがって，$y = \sqrt{3}x \cdots$ (ii)
(i)，(ii) より，$\sqrt{3}x = 10 + x$
$(\sqrt{3} - 1)x = 10$ より，$x = \frac{10}{\sqrt{3}-1} = 5(\sqrt{3}+1)$
これと (i) より，$y = 15 + 5\sqrt{3}$
ゆえに，$\mathrm{PC} = y + 1.5 = 16.5 + 5\sqrt{3}$
よって，ホテルの高さは，$\mathbf{16.5 + 5\sqrt{3}}$ **(m)**

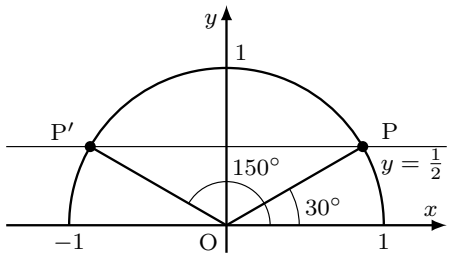


4 次の方程式を満たす θ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

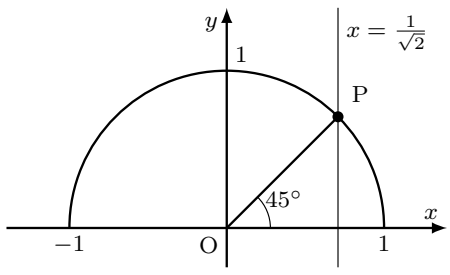
(1) $2\sin\theta - 1 = 0$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

解

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$ より，$\sin\theta = \frac{1}{2}$
半径 1 の半円上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の 2 点 P, P′ である．
よって，$\theta = \mathbf{30^\circ, 150^\circ}$



(2) $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$ より，$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
半径 1 の半円上で，x 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，右の図の点 P である．
よって，$\theta = \mathbf{45^\circ}$



5 (1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ のとき，$\cos\alpha$, $\tan\alpha$ の値を求めよ．ただし，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ とする．
(2) $\tan\beta = -\frac{5}{12}$ のとき，$\sin\beta$, $\cos\beta$ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ$ とする．

解

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より，

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ において，$\cos\alpha < 0$
よって，$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = \mathbf{-\frac{4}{5}}$
また，

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right) = \mathbf{-\frac{3}{4}}$$

(2) $1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$ より，

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \tan^2\beta = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$$

したがって，$\cos^2\beta = \frac{144}{169}$
$\tan\beta = -\frac{5}{12} < 0$ より，$90^\circ < \beta < 180^\circ$ であるから，$\cos\beta < 0$
よって，$\cos\beta = -\sqrt{\frac{144}{169}} = \mathbf{-\frac{12}{13}}$
また，$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ より，$\sin\beta = \tan\beta \cdot \cos\beta = -\frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \mathbf{\frac{5}{13}}$

6 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．
(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$　　(3) $\sin\theta - \cos\theta$

解

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2} \cdots$ (i) の両辺を 2 乗すると，

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

したがって，$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$
よって，$\sin\theta\cos\theta = \mathbf{-\frac{3}{8}} \cdots$ (ii)
(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$
(i)，(ii) を代入すると，

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \mathbf{\frac{11}{16}}$$

【別解】

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)\left(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right) = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$$

(i)，(ii) を代入すると，

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\} = \mathbf{\frac{11}{16}}$$

(3)

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$$

(ii) を代入すると，

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，(ii) より，$\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$
したがって，$\sin\theta - \cos\theta > 0$
よって，

$$\sin\theta - \cos\theta = \mathbf{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

※ 裏面へ続く

Onemath

7 △ABC において，次の値を求めよ．ただし，外接円の半径を R とする．

(1) $b=4,\ A=105^\circ,\ C=30^\circ$ のとき，$c,\ R$

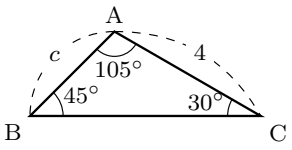
(2) $R=4,\ a=4\sqrt{2}$ のとき，A

解

(1) $A+B+C=180^\circ$ であるから，$B=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$

正弦定理より，

$$\frac{4}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ}$$



よって，

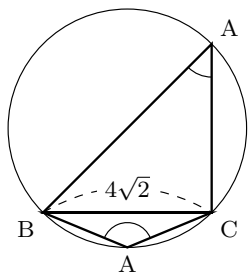
$$c=\frac{4}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 30^\circ=4\div\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{2\sqrt{2}}$$

また，$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=2R$ より，

$$R=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\div\frac{1}{2}=\mathbf{2\sqrt{2}}$$

(2) 正弦定理より，

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin A}=2\cdot 4$$



したがって，

$$\sin A=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって，$0^\circ<A<180^\circ$ より，$A=\mathbf{45^\circ,\ 135^\circ}$

8 △ABC において，次の値を求めよ．

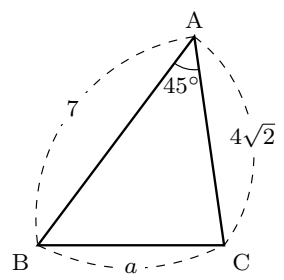
(1) $b=4\sqrt{2},\ c=7,\ A=45^\circ$ のとき，a

(2) $a=\sqrt{7},\ b=2,\ c=1$ のとき，A

解

(1) 余弦定理より，

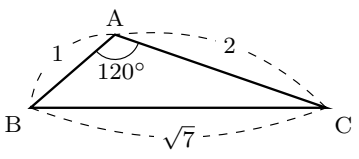
$$\begin{aligned}a^2&=(4\sqrt{2})^2+7^2-2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 7\cdot\cos 45^\circ\\&=32+49-56\\&=25\end{aligned}$$



よって，$a>0$ より，$a=\mathbf{5}$

(2) 余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{2^2+1^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 1}\\&=\frac{4+1-7}{4}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$



よって，$0^\circ<A<180^\circ$ であるから，$A=\mathbf{120^\circ}$

9 次のような △ABC の面積 S を求めよ．

(1) $a=6,\ c=2\sqrt{2},\ B=45^\circ$　　(2) $a=5,\ b=5,\ c=6$

解

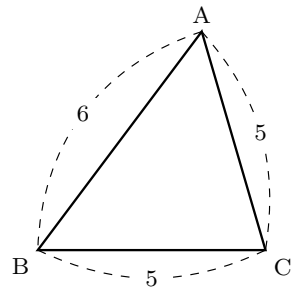
(1) 求める △ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 6\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{6}$$

(2) 余弦定理より，$\cos A=\frac{5^2+6^2-5^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\frac{3}{5}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1,\ \sin A>0$ より，

$$\begin{aligned}\sin A&=\sqrt{1-\cos^2 A}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$



よって，求める △ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{12}$$

【別解】ヘロンの公式より，$s=\frac{5+5+6}{2}=8$ であるから，

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)}\\&=\sqrt{8\cdot 3\cdot 3\cdot 2}\\&=\sqrt{144}=12\end{aligned}$$

よって，求める面積 S は，$S=\mathbf{12}$

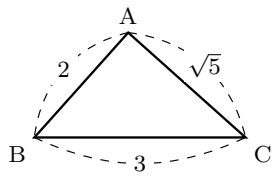
10 △ABC において，$a=3,\ b=\sqrt{5},\ c=2$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos B,\ \sin B$

(2) △ABC の面積 S

(3) △ABC の内接円の半径 r

(4) △ABC の外接円の半径 R



解

(1) 余弦定理より，$\cos B=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 3\cdot 2}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

また，$\sin B>0$ より，

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

(2) 求める △ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\mathbf{\sqrt{5}}$$

(3) (2)，$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より，

$$\sqrt{5}=\frac{1}{2}r(3+\sqrt{5}+2)$$

よって，

$$r=\frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}(5-\sqrt{5})}{20}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

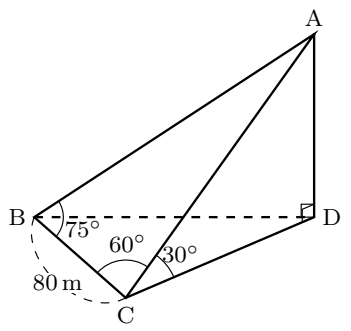
(4) 正弦定理より，

$$R=\frac{b}{2\sin B}=\sqrt{5}\div\left(2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

よって，外接円の半径は，$R=\mathbf{\frac{3}{2}}$

11 水平な地面に垂直に立つ木があり，木の頂点を A，その真下の地面上の点を D とする．

また，地面上で互いに 80 m 離れた 2 点 B，C を定め，
∠ABC，∠ACB，∠ACD を測定したところ，それぞれ 75°，60°，30° であった．このとき，木の高さ AD を求めよ．



解

△ABC において，

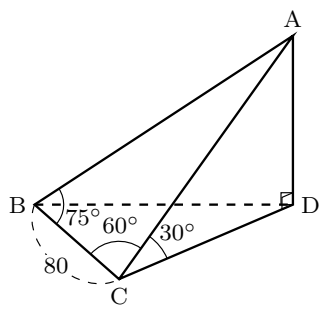
$$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$$

正弦定理より，

$$\frac{80}{\sin 45^\circ}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin 60^\circ}$$

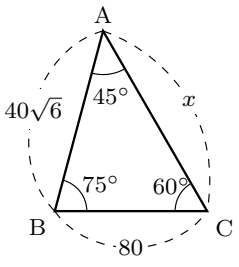
したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\frac{80}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 60^\circ\\&=80\div\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{6}\end{aligned}$$



AC $=x$ とすると，余弦定理より，

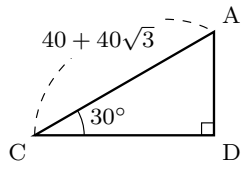
$$(40\sqrt{6})^2=80^2+x^2-2\cdot 80\cdot x\cdot\cos 60^\circ$$



ゆえに，$x^2-80x-3200=0$
これを解くと，$x=40\pm 40\sqrt{3}$
したがって，$x>0$ より，$x=40+40\sqrt{3}$

すなわち，AC $=40+40\sqrt{3}$
△ACD において，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}&=\mathrm{AC}\cdot\sin 30^\circ\\&=\left(40+40\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\\&=20+20\sqrt{3}\end{aligned}$$



よって，木の高さは，AD $=\mathbf{20+20\sqrt{3}}$ **(m)**